*Le Gohebel Lorys, Mechineau Alexandre*

## Sommaire

## Etude de l'équation de transport par la méthode des différences finies

On rappel l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \ \ \forall x \in ]0,1[, \ \ \forall t \in ]0,T] \\ u(0,t) = 0, \ \ \forall t \in [0,T] \\ u(1,t) = 0, \ \ \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

Et on étudie cette équation avec la condition suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 10(x-0,4) \text{ si } 0,4 \leq x \leq 0,5 \\ 10(0,6-x) \text{ si } 0,5 \leq x \leq 0,6 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour étudier cette équation on utilisera 3 schémas :

-le schéma décentré à gauche :

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - c\frac{\Delta t}{h}(u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}), \ \ i = 1,\dots,N, \ \ j = 0,\dots,M$$

-le schéma décentré à droite :

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - c\frac{\Delta t}{h}(u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}), \ \ i = 1,\dots,N, \ \ j = 0,\dots,M$$

-le schéma de Lax-Friedrichs :

$$u_i^{(j+1)} = \frac{u_{i-1}^{(j)} + u_{i+1}^{(j)}}{2} - c\frac{\Delta t}{2h}(u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}), \ \ i = 1,\dots,N, \ \ j = 0,\dots,M$$

## Etude des graphes de la solution approchée Uh(x,T) pour x dans [0,1] à t=T

Pour cette étude on prend T=0.1 et on étudie en deux cas :

-le cas où c=2

-le cas où c=-2

Pour chacun de ces 2 cas on fera varier $\Delta t$ et N.

## C=2 et T=0.1 :

Dans un premier temps on fixe N et on fait varier Δt.

### N=100 et Δt=0.01 :

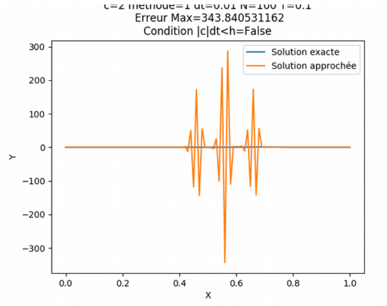



Schéma décentré à gauche

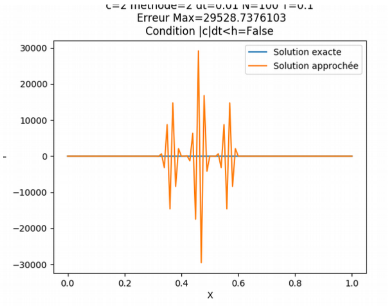



Schéma décentré à droite

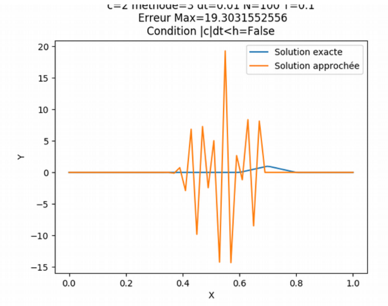



Schéma Lax-Friedrichs

### N=100 et Δt=0.005 :

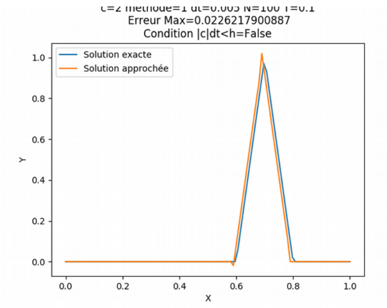



Schéma décentré à gauche

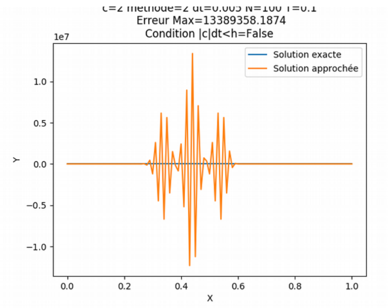



Schéma décentré à droite

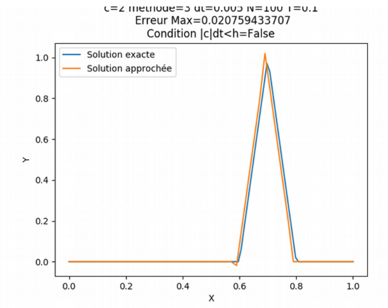



Schéma Lax-Friedrichs

### N=100 et Δt=0.001 :

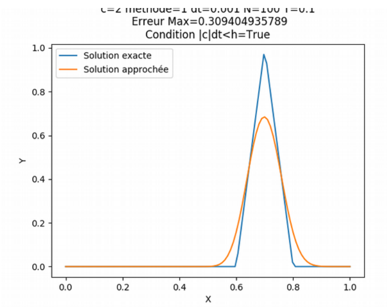



Schéma décentré à gauche

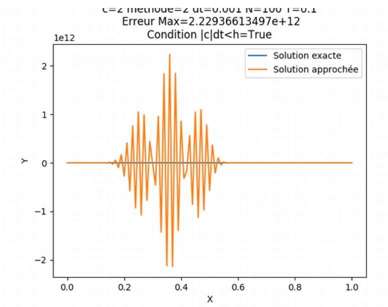



Schéma décentré à droite

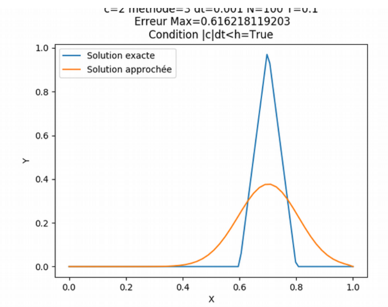



Schéma Lax-Friedrichs

Dans un second temps on fixe $\Delta$t et on fait varier N.

## N=50 et $\Delta$t=0.005 :

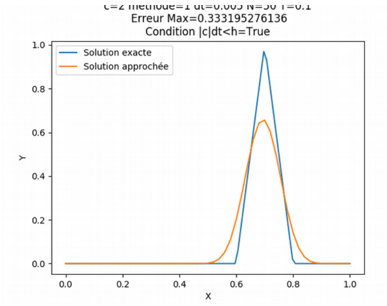



Schéma décentré à gauche

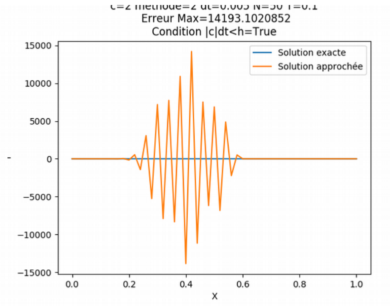



Schéma décentré à droite

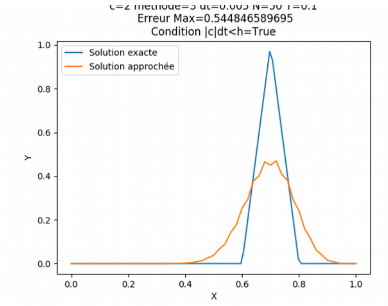



Schéma Lax-Friedrichs

## N=200 et $\Delta$t=0.005 :

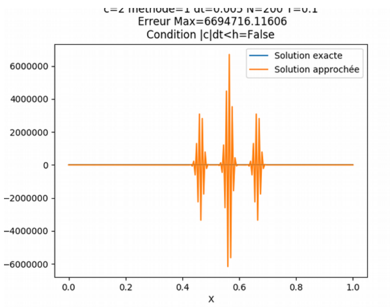



Schéma décentré à gauche

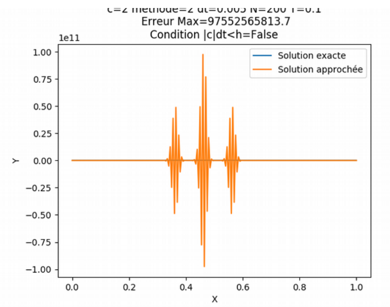



Schéma décentré à droite

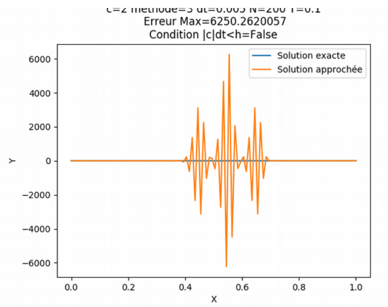
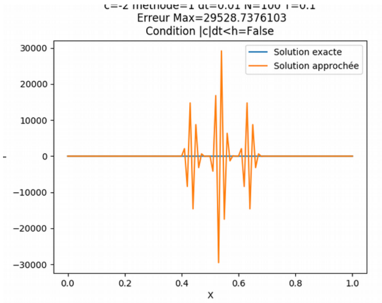


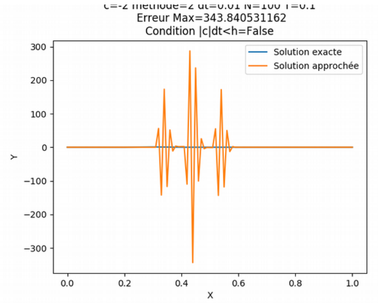

Schéma Lax-Friedrichs

# C=-2 et T=0.1 :

On fixe à nouveau N et on fait varier Δt.

## N=100 et Δt=0.01 :



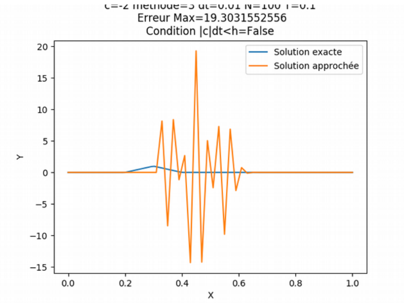
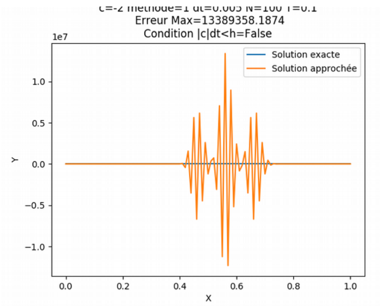
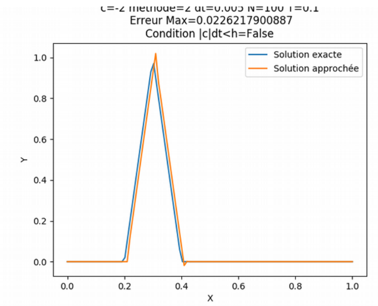




Schéma décentré à gauche Schéma décentré à droite Schéma Lax-Friedrichs

## N=100 et Δt=0.005 :



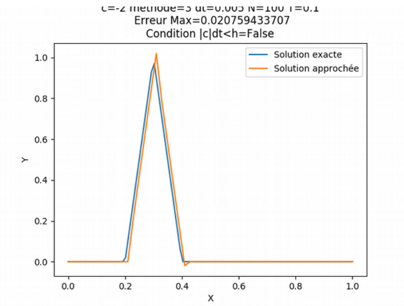
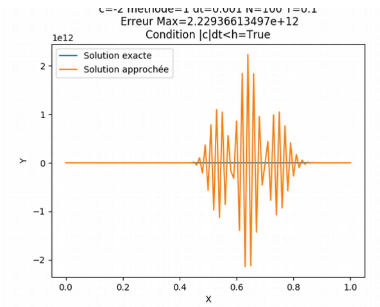
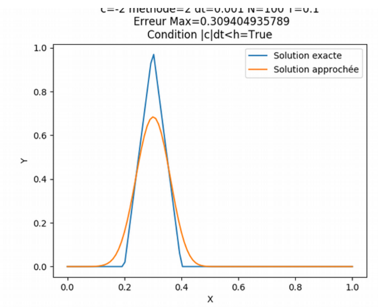




Schéma décentré à gauche Schéma décentré à droite Schéma Lax-Friedrichs

## N=100 et Δt=0.001 :



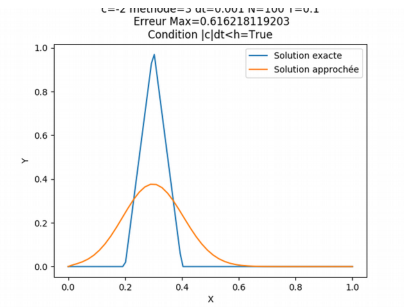
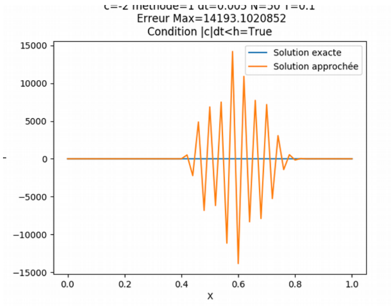
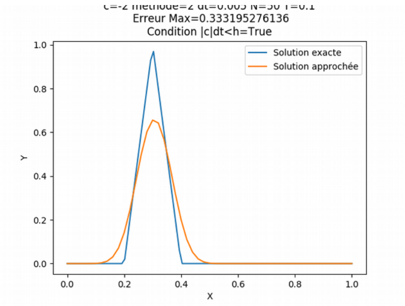




Schéma décentré à gauche Schéma décentré à droite Schéma Lax-Friedrichs

Et on fixe Δt et on fait varier N.

## N=50 et Δt=0.005 :





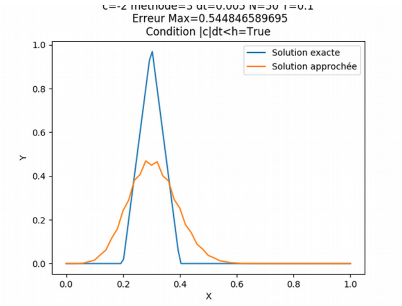
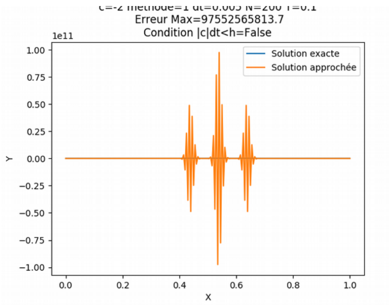
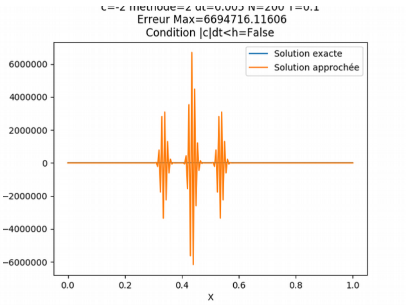



Schéma décentré à gauche Schéma décentré à droite Schéma Lax-Friedrichs

## N=200 et Δt=0.005 :





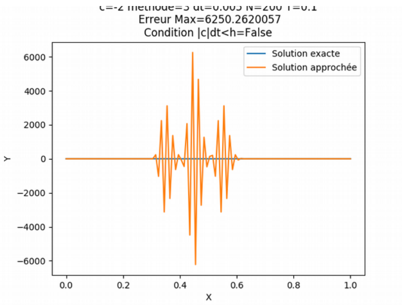



Schéma décentré à gauche Schéma décentré à droite Schéma Lax-Friedrichs

## Conclusion

Les deux schémas sembles converger vers la solution exacte avec N et $\Delta t$ bien choisis, ces conditions seront étudiés dans la deuxième partie.

## Etude de l’erreur max des deux schémas

Soit $T=0.016$, on fait varier $h$ et $\Delta t$ et regarde l’évolution de l’erreur max.

### Erreur du schéma explicite :

On fixe $\Delta t=0.0001$ et on fait varier $h$ :

| h | 0.1 | 0.05 | 0.015 | 0.013 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|---|
| erreur | 1.03507e-3 | 1.55059e-2 | 2.58991e-2 | 1.94493e+17 | 4.55092e+59 |

On fixe maintenant $h=0.01$ et on fait varier $\Delta t$ :

| $\Delta t$ | 0.00001 | 0.00004 | 0.00005 | 0.00006 | 0.0001 |
|---|---|---|---|---|---|
| erreur | 3.05385e-4 | 1.07464e-3 | 1.54246e-3 | 1.34328e+22 | 4.55092e+59 |

On voit d’après ces 2 tableaux que l’erreur max du schéma explicite dépend de $h$ et de $\Delta t$.

En effet à $\Delta t$ fixé l’erreur est stable pour un $h$ aux alentour de

$h \geq \sqrt{2\Delta t}$.

On fait la même observation en fixant cette fois $h$ et en faisant varier $\Delta t$, l’erreur est stable lorsque $\Delta t \leq (h^2/2)$.

On reconnaît la condition CFL $(\Delta t/h^2) \leq (1/2)$.

Et on peut supposer que le schéma converge sous cette condition.

## Erreur du schéma implicite :

On fixe $\Delta t=0.0001$ et on fait varier h :

| h | 0.1 | 0.05 | 0.015 | 0.013 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|---|
| erreur | 1.16546e-3 | 2.28277e-2 | 2.58545e-2 | 3.15007e-2 | 5.08564e-3 |

On fixe maintenant h=0.01 et on fait varier $\Delta t$ :

| $\Delta t$ | 0.00001 | 0.00004 | 0.00005 | 0.00006 | 0.0001 |
|---|---|---|---|---|---|
| erreur | 1.20663e-3 | 2.53140e-3 | 2.96574e-3 | 3.39728e-3 | 5.08564e-3 |

Pour le schéma implicite on observe que l'erreur ne semble pas dépendre de h et de $\Delta t$.

En effet que se soit en fixant h et en faisant varier $\Delta t$ ou l'inverse, l'erreur reste stable.

On peut donc supposer que le schéma implicite converge sans condition.

### Conclusion : Convergence

D'après les tableaux et en accord avec les résultats vu en cour disant que si la solution u de l'équation est $C^4$ relativement à x et $C^2$ relativement à t alors sous la condition CFL $(\Delta t/h^2) \leq (1/2)$ le schéma explicite est convergent d'ordre 2 en espace et 1 en temps.

Ici ont a bien la solution exacte qui est $C^4$ relativement à x car somme de fonctions sin qui sont $C^\infty$ et $C^2$ relativement à t car somme de fonctions exp qui sont $C^\infty$.

De plus, d'après les tableaux et en accord avec les résultats vu en cour, le schéma implicite est également convergent d'ordre 2 en espace et 1 en temps car la solution est $C^4$ relativement à x et $C^2$ relativement à t mais sans condition sur h et sur $\Delta$t.

# Annexe :