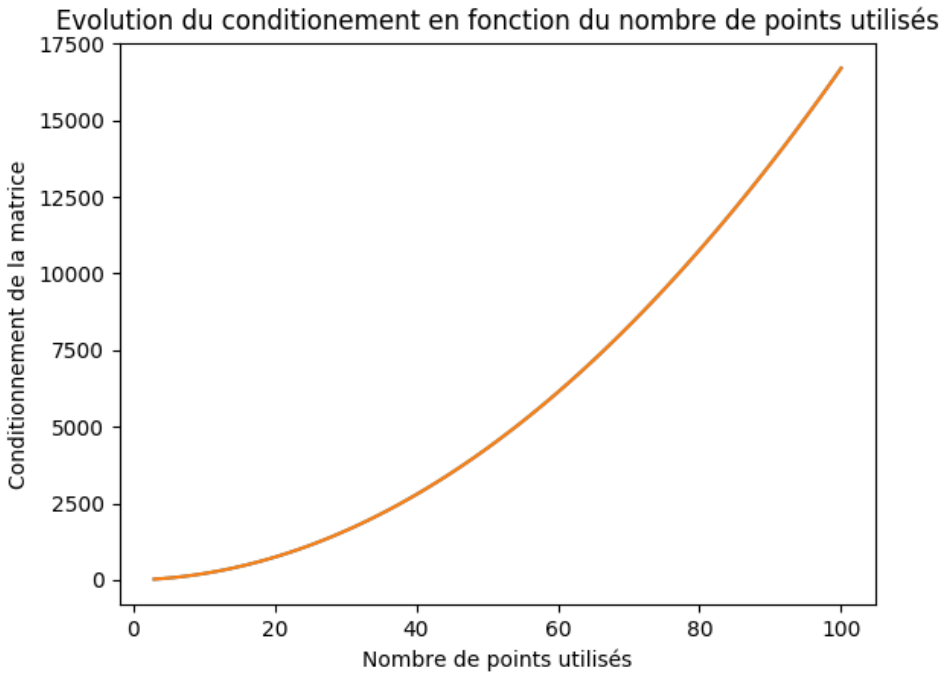
Le Gohebel Lorys, Mechineau Alexandre

Sommaire

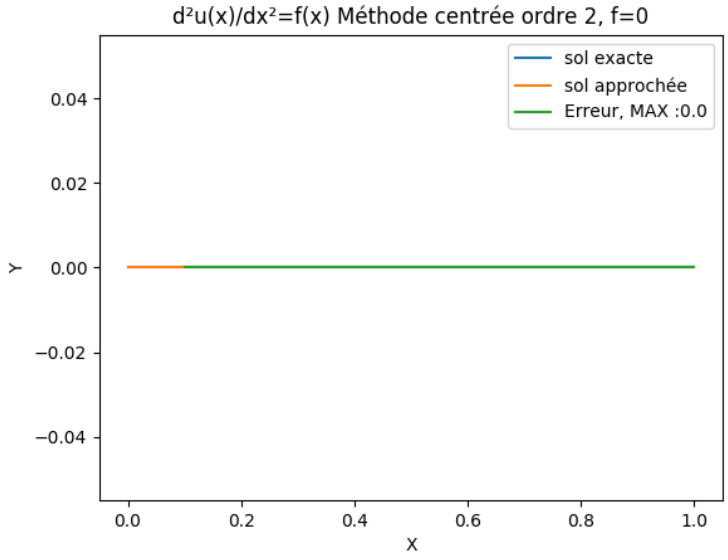
Etude du conditionnement de la matrice

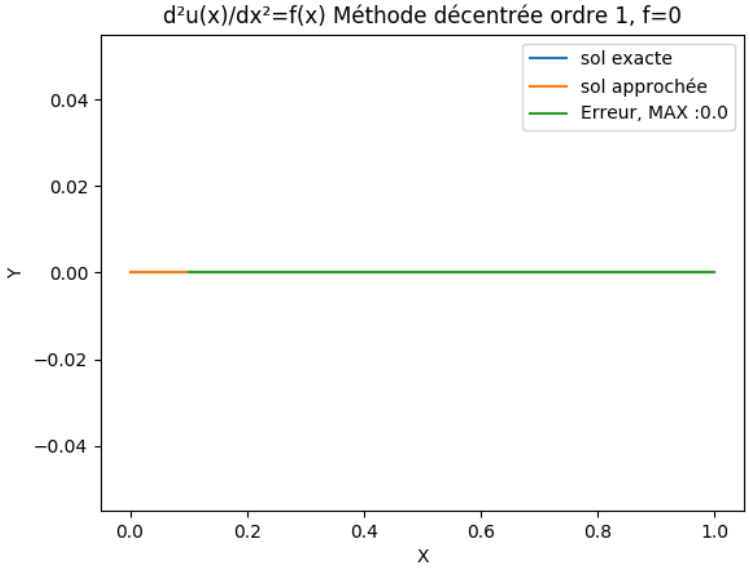


On remarque donc que la matrice A est mal conditionné. De plus, nous pouvons remarquer que l'erreur n'est pas linéaire (O(N)).

Etude de l'erreur pour N fixé en fonction de la méthode et de la fonction

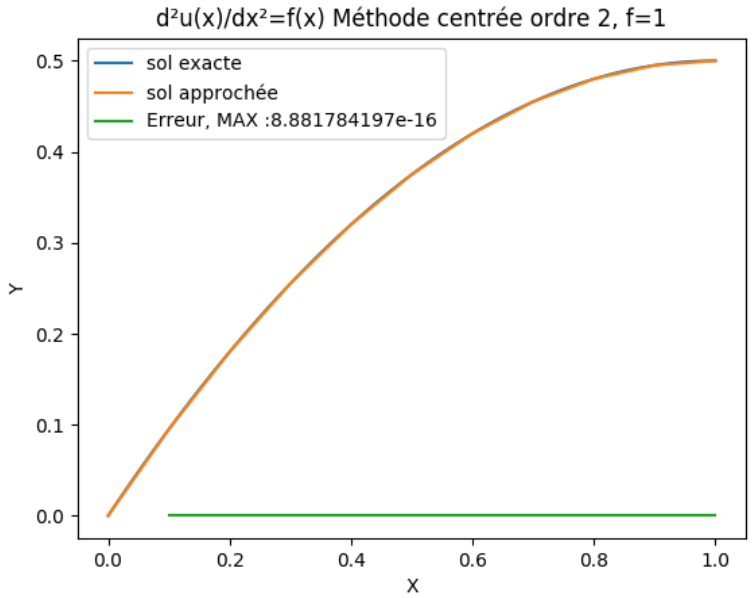
f(x)=0, N=9 :

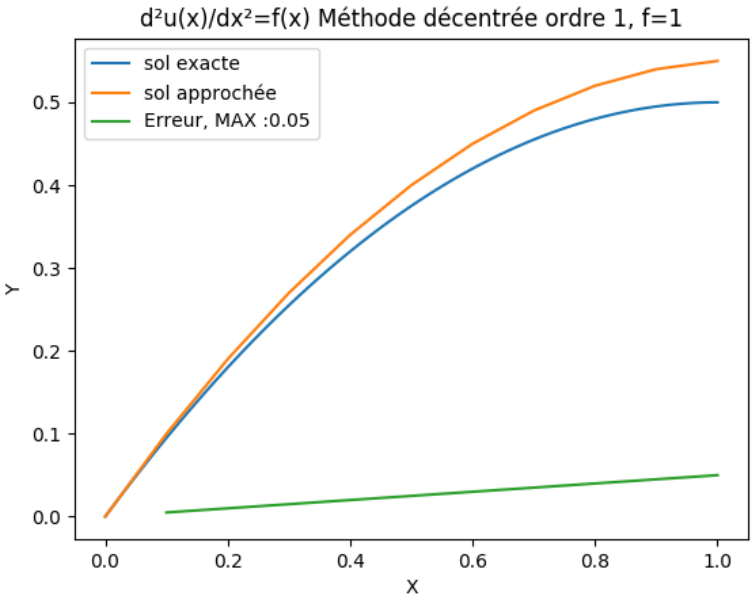




Nous pouvons remarquer que l'erreur est nulle pour les deux méthodes.

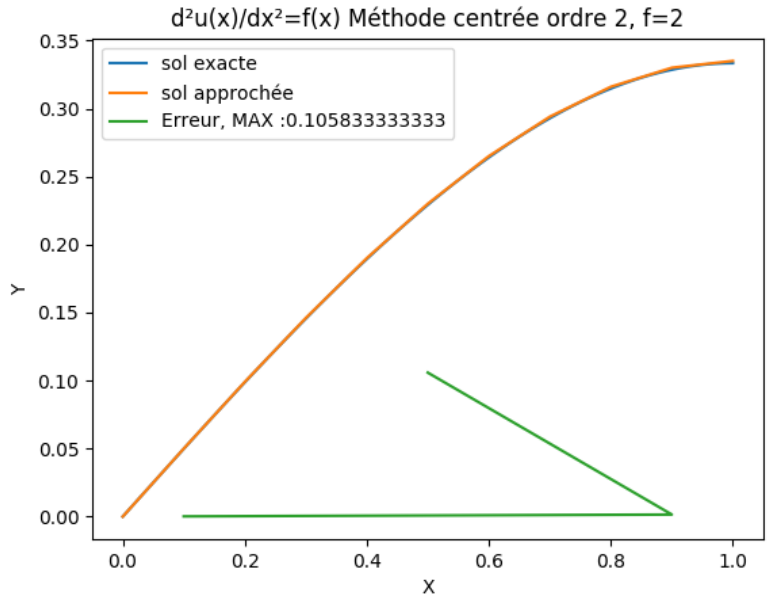
f(x)=1, N=9 :

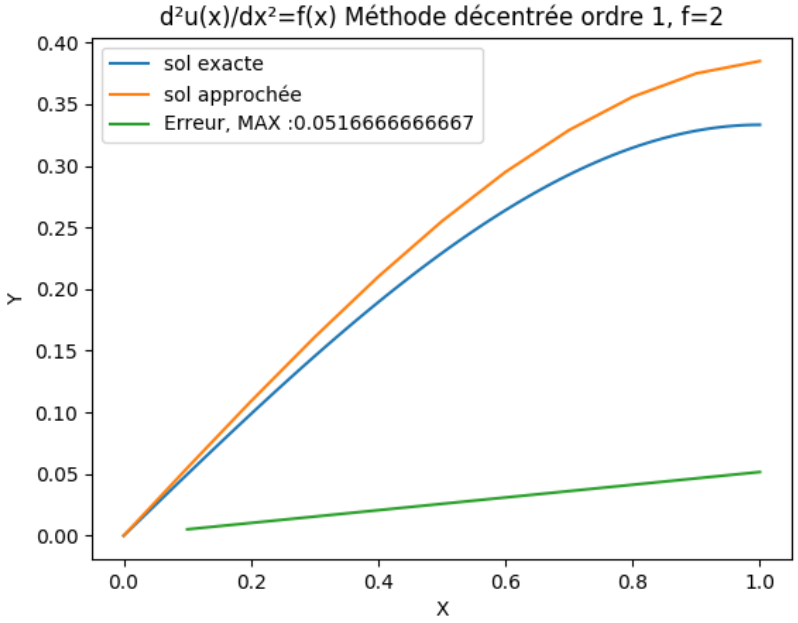




Pour f(x) = 1, On remarque la méthode centrée est exacte. Cependant, ce n'est plus le cas pour la méthode décentrée.

f(x)=x, N=9

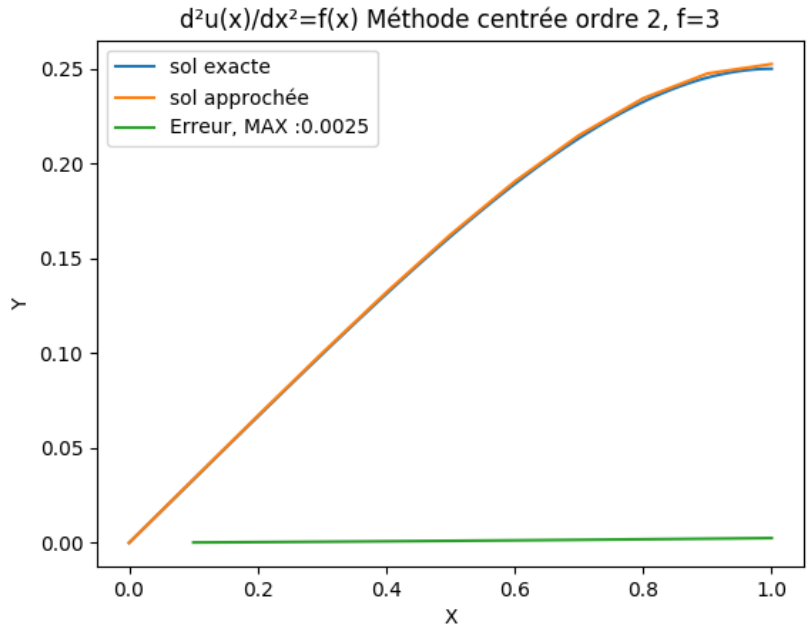


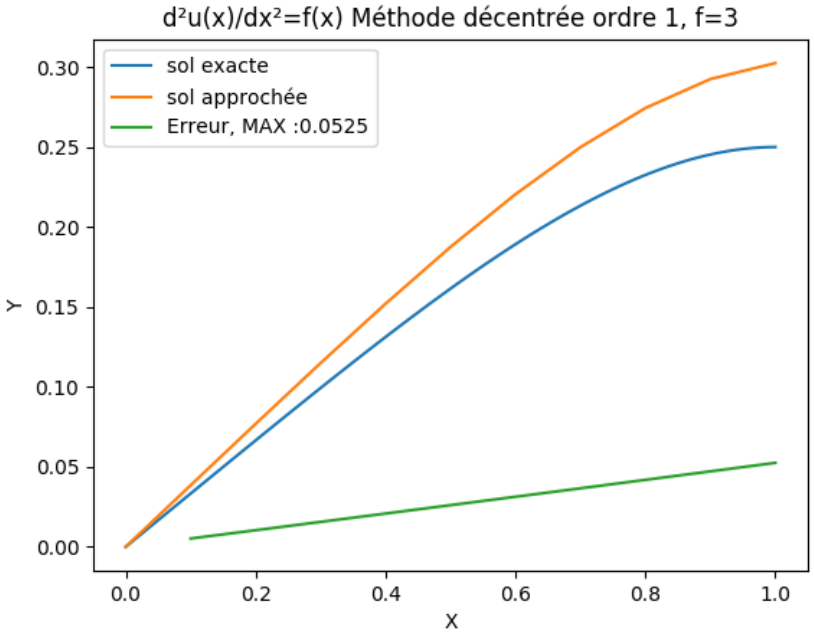


Ici, les deux méthodes présentent des erreurs. La méthode centrée est quand même plus précise que celle décentrée. La première méthode semble avoir une erreur sur le bord.

(L'erreur du premier graph a été calculée correctement. Bug python ?)

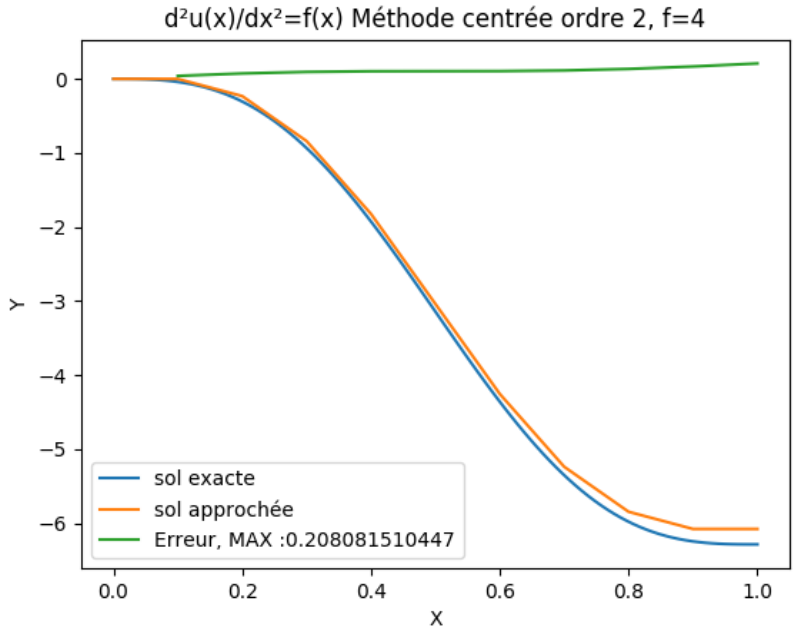
f(x)=x^2, N=9

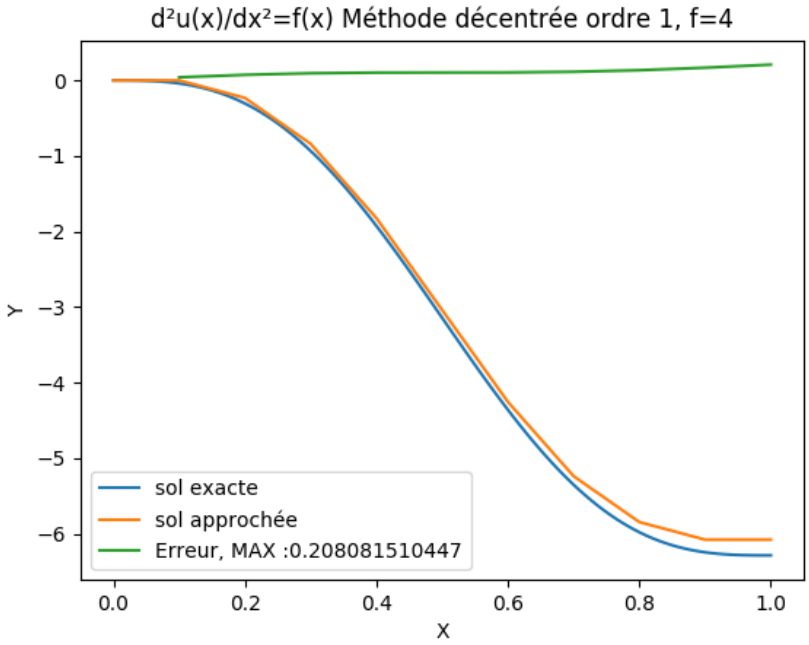




On a le même constat que précédemment, sauf que ici la méthode 1 a une bonne précision partout.

f(x)=4π^2*sin (2πx), N=9





Pour cette dernière fonction les deux méthodes ne sont pas assez précise avec N=9 pour avoir un résultat précis.

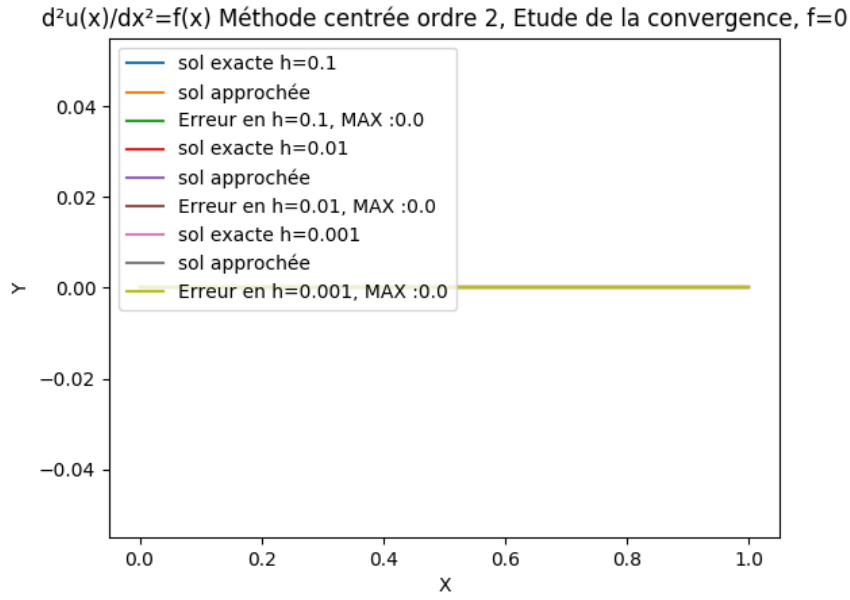
Conclusion

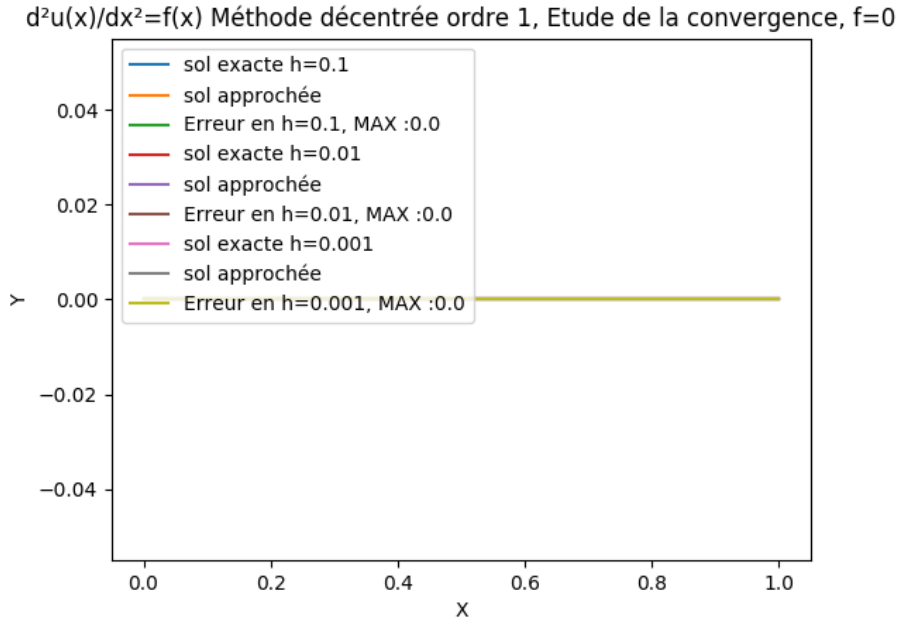
La méthode décentrée ne permet d'être exacte qu'avec f(x)=0. Alors que la méthode centrée est exacte jusqu'à f(x)=1.

On remarque tout de même pour la dernière fonction les deux méthodes sont dans l'impossibilité d'obtenir un résultat convenable avec si peu de points.

Etude de la convergence des deux schémas

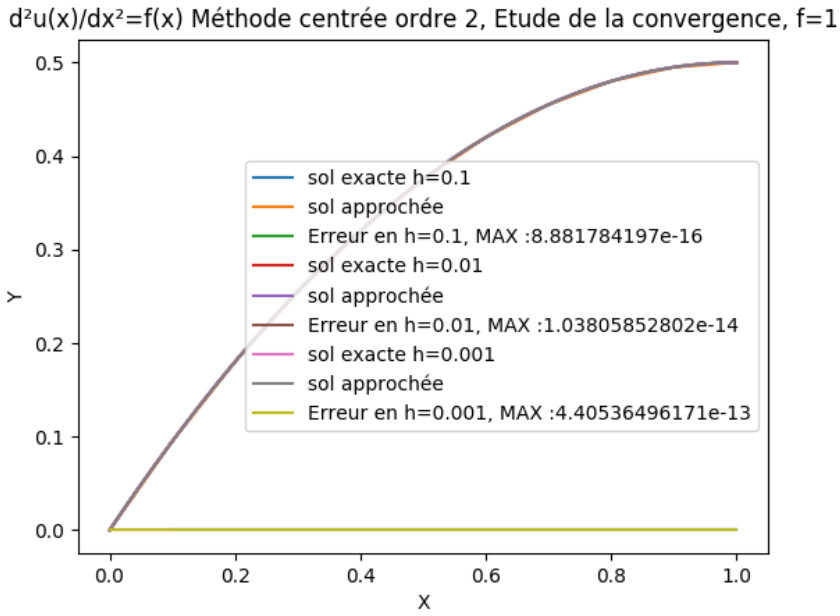
f(x)=0, N=9 :

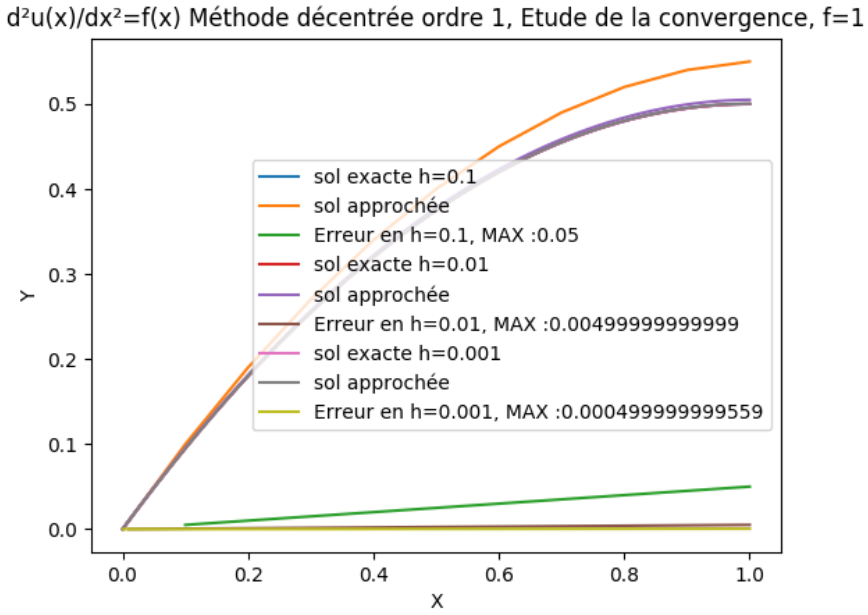




Les deux méthodes sont exactes peut importe le nombre de points.

f(x)=1, N=9 :

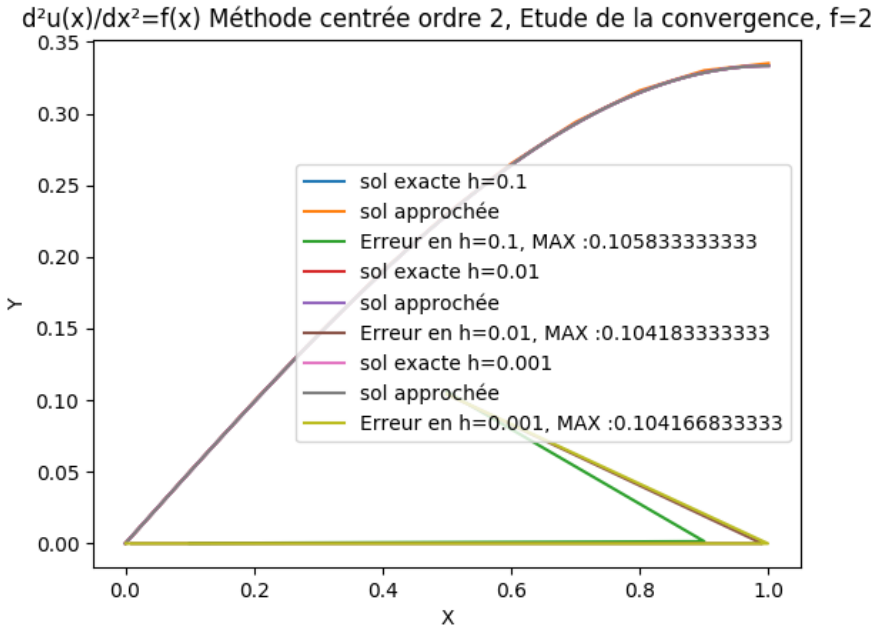


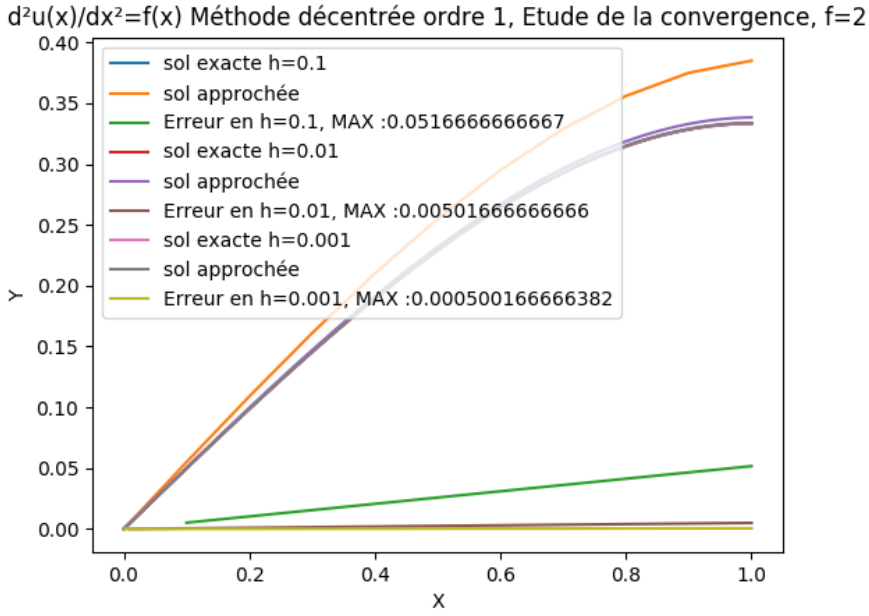


La première méthode atteint la précision machine mais si le nombre de points augmente la précision se dégrade.

La deuxième méthode semble présenter une erreur d'ordre O(1/N).

f(x)=x, N=9

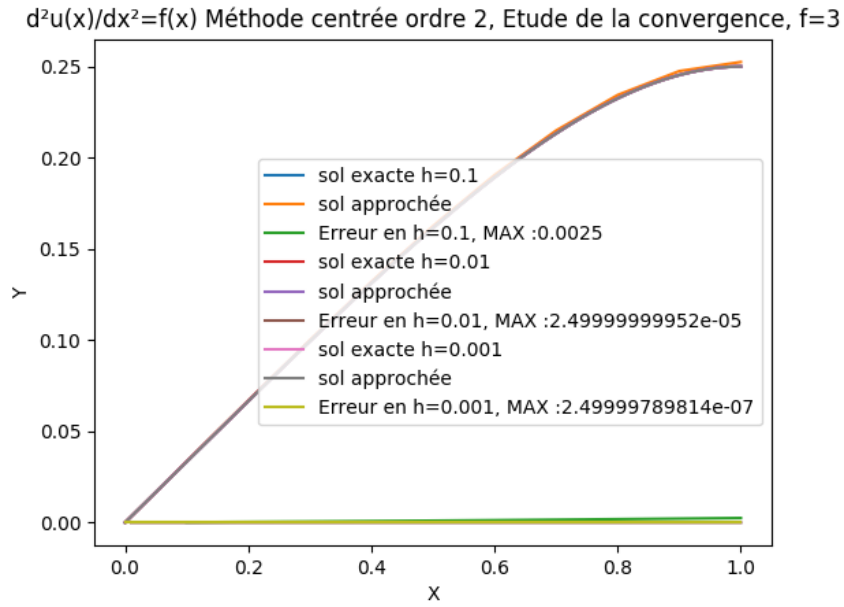


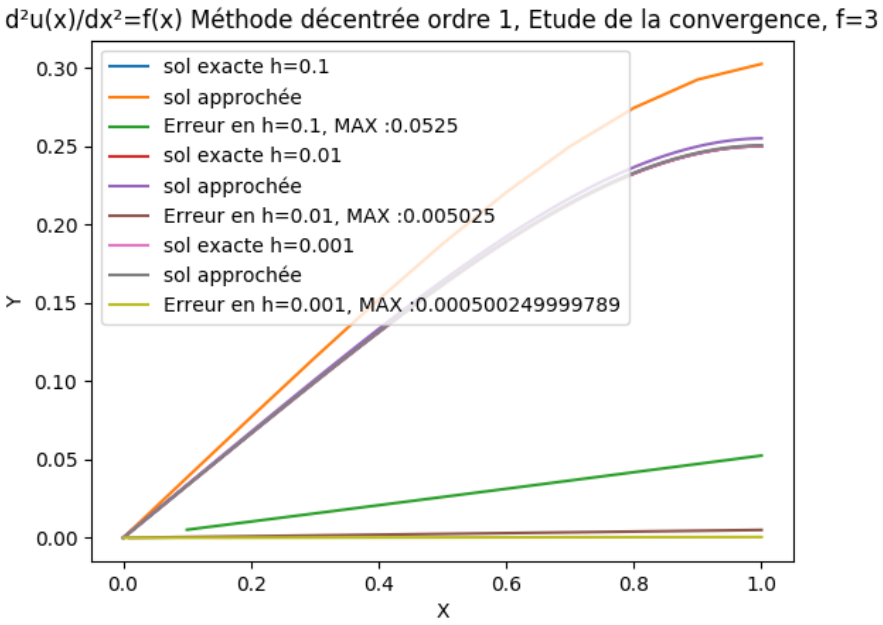


Même problème précédemment pour la première méthode.

On remarque encore le même comportement pour la seconde méthode.

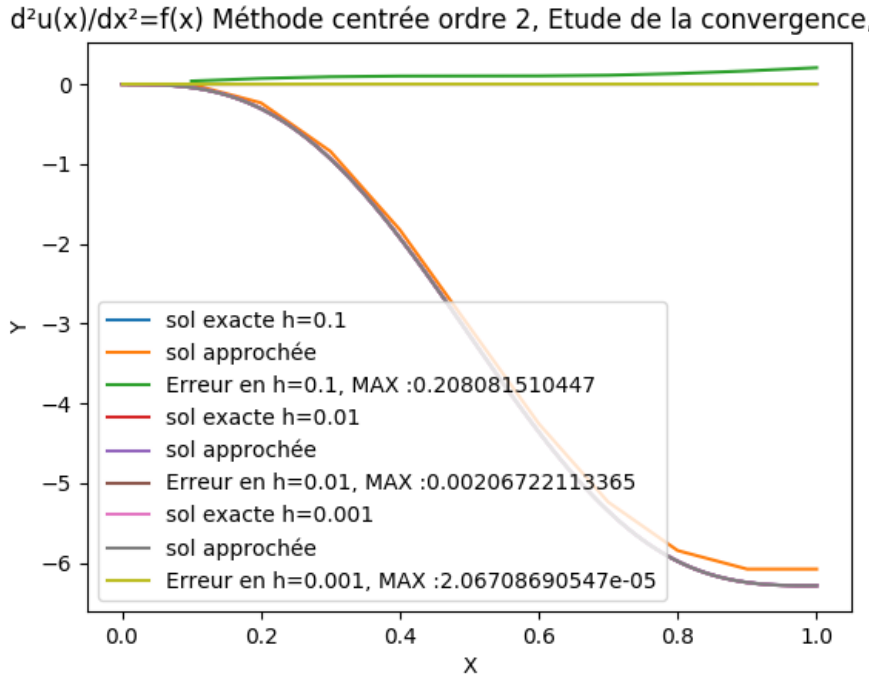
f(x)=x^2, N=9

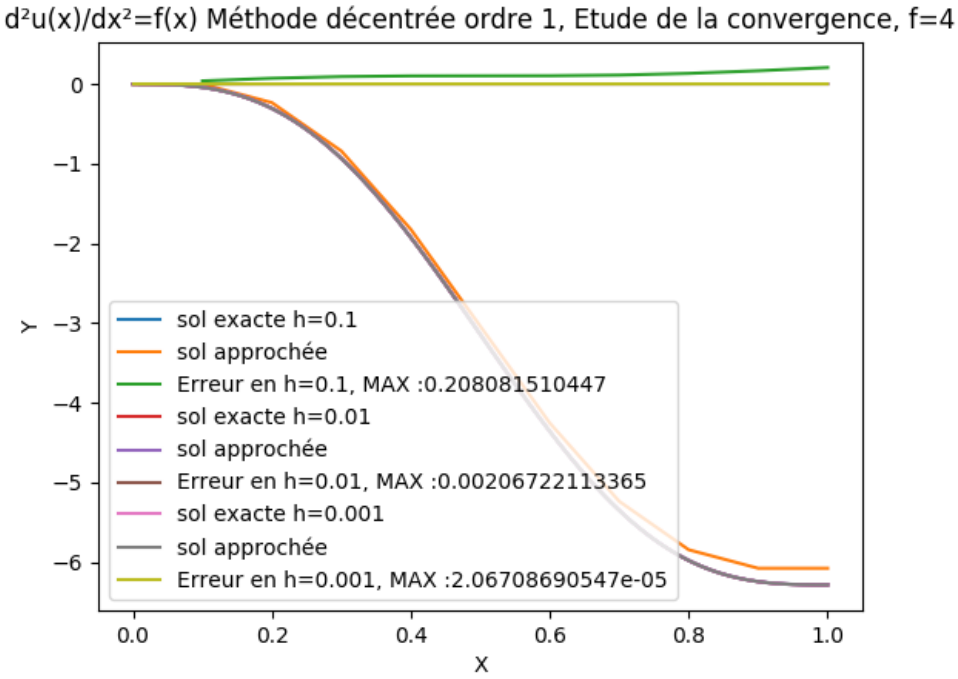




On remarque que première méthode semble avoir une erreur quadratique.

f(x)=4π^2*sin (2πx), N=9





Les deux méthodes semblent présenter la même erreur.

Conclusion : Convergence

La méthode centrée se comporte comme une méthode d'erreur quadratique et la méthode décentrée se comporte comme une erreur linéaire.

Elles se comportent toute fois de la même façon pour la dernière fonction.

Le même problème se produit lorsque f(x)=x pour la première méthode.

Annexe :

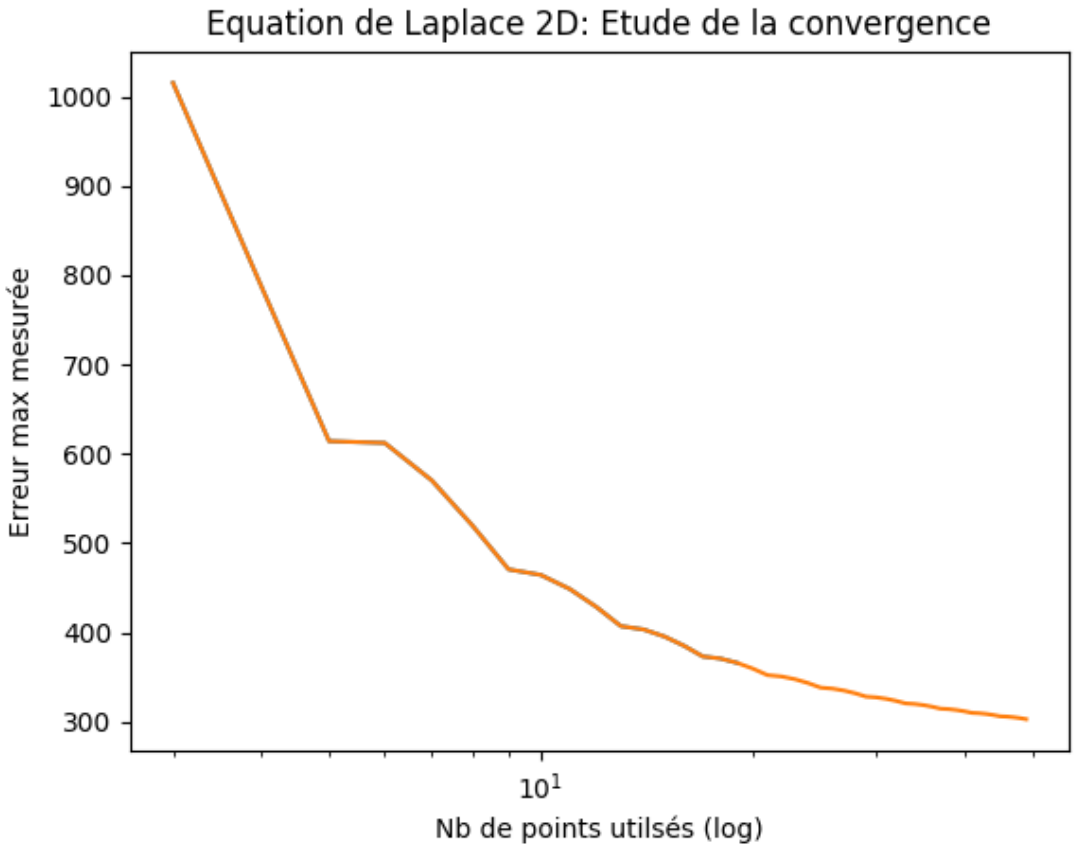
https://github.com/Alexsaphir/TP_EDP_Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
from numpy import *
from numpy.linalg import *
from numpy.random import *
from matplotlib.pyplot import *

print('Valeur de pi :', pi)
print(finfo(float).eps)

#Create a Vector
X1 = array([1, 2, 3, 4, 5])
print('Simple vecteur :',X1)

X2 = arange(0,1,.25)
print('Subdvision uniforme :', X2)

X3 = linspace(0,10,3)
print('Vecteur n-pts :',X3)

X4 = zeros(5)
print('Vecteur zeros :',X4)

#Matrice
M1=array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
print('Simple matrice', M1)

M2=zeros((2,3))
print('Matrice zeros', M2)

#Exercice 1
A=-1*(diag(ones(9),1)+diag(ones(9),-1))+2.*eye(10);
A[9,9] = 1
print(A)

#Fonctions
def fonc(x, y, m):
    z = x**2 + y**2
    t = x - y + m
    return z, t
#Test
if(1<2) :
    print('1<2')
elif (1<3) :
    print('1<3')
else :
    print('Aussi non !')

##################
##################
##  Exercice 3  ##
##################
##################
def f(x, m) :
    if (m == 0) :
        y = zeros(size(x))
    elif (m == 1) :
        y = ones(size(x))
    elif (m == 2) :
        y = x
    elif (m == 3) :
        y = x**2
    elif (m == 4) :
        y = 4.*pi*pi*sin(2.*pi*x)
    else :
        print('valeur de m indéfinie')
    return y

def solex(x, ug , m) :
    if (m == 0):
        y = ug*ones(size(x))
    elif (m == 1) :
        y = -0.5*x**2+x+ug
```

```
    elif (m == 2) :
        y = -(1/6)*x**3+(1/2)*x+ug
    elif (m == 3 ) :
        y = -(1/12)*x**4+(1/3)*x+ug
    elif (m == 4) :
        y = sin(2*pi*x)-2*pi*x+ug
    else :
        print('valeur de m indéfinie')
    return y


##################
##################
##  Exercice 2  ##
##################
##################


print('Pour le second membre, choix de la fonction f')
print('Pour m=0 : f=0')
print('Pour m=1 : f=1')
print('Pour m=2 : f=x')
print('Pour m=3 : f=x^2')
print('Pour m=4 : f=4*pi^2*sin(2*pi*x)')
m = int(input("Choix de m = "))

print('Choix de la condition a gauche')
ug = float(input('ug = u(0) ='))

print("Methode pour l'approximation de u'(1) : ")
print("1- decentre d'ordre 1")
print("2- centre d'ordre 2")
meth = int(input('Choix = '))

print('Choix du nombre Ns de points interieurs du maillage')
Ns = int(input('Ns = '))

# Maillage
h=1./(Ns+1)
X=linspace(0, 1., Ns+2)
Xh=linspace(h,1.,Ns+1)

# Matrice du systeme lineaire :
A=-1*(diag(ones(Ns),1)+diag(ones(Ns),-1))+2.*eye(Ns+1);
A[Ns, Ns] = 1
A=1./h/h*A
#Conditionement de la matrice
cond_A=cond(A)
print('Conditionnement de la matrice A :', cond_A)



# Second membre
# b = ... (plus loin, exercice 3)
b = f(Xh, m)
b[0] = b[0] + (Ns + 1)**2*ug


# Transformation de b[Ns] pour prendre en compte u'(1) = 0 (cf TD)
if (meth == 2):
    b[Ns] = b[Ns]/2


# Resolution du syteme lineaire
Uh = solve(A, b) # ceci calcule Uh solution du systeme AU=b

# Calcul de la solution exacte aux points d'approximation

Uex = solex(Xh, ug, m)

# Calcul de l'erreur en norme infini
Uerr = abs(Uex - Uh)
```

```
145  disp(max(Uerr))
146
147  #Graphes
148  Uh = concatenate((array([ug]),Uh))
149  # on complete le vecteur solution avec la valeur ug en 0
150  # On trace le graphe de la fonction solex sur un maillage fin de 100 points
151  plot(linspace(0,1,100),solex(linspace(0,1,100), ug, m), label = 'sol ex')
152
153  # et le graphe de la solution approchée obtenue
154  plot(X, Uh, label = 'sol approchee')
155
156
157  plot(Xh, Uerr, label = 'Erreur')
158  # On ajoute un titre
159  title('d²u(x)/dx²=f(x)')
160
161  # On ajoute les labels sur les axes
162  xlabel('X')
163  ylabel('Y')
164
165  # Pour faire afficher les labels
166  legend()
167  show() # Pour afficher la figure
168
```

Etude de la convergence du schéma pour l'équation de Laplace 2D



On peut remarquer une convergence d'ordre 2

Code Source : https://github.com/Alexsaphir/TP_EDP_Python

```python
# -*- coding: utf-8 -*-

from numpy import * # importation du module numpy
from numpy.linalg import *  # importation du module numpy.linalg
from numpy.random import *
from matplotlib.pyplot import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D


Ns = 20

# Maillage

h = 1./(Ns + 1)
X = linspace(0,1,Ns+2)
Xh = X[1:Ns+1]

# Matrice du système linéaire

A = -1*(diag(ones(Ns*Ns-3),3) + diag(ones(Ns*Ns-3),-3))

B = 4*eye(Ns) -1*(diag(ones(Ns-1),1) + diag(ones(Ns-1),-1))

for i in arange(0,Ns):
  A[Ns*i:Ns*i+Ns,Ns*i:Ns*i+Ns] = B

def Ud(x):
  y = sin(2*pi*x)*sinh(2*pi)
  return y

# Fonction définissant la solution exacte de l'équation

def solex(x, y):
  z = sin(2*pi*x)*sinh(2*pi*y)
  return z

# Second membre

b = zeros(Ns*Ns)
b[Ns*(Ns-1):Ns*Ns] = Ud(Xh)

# Resolution du systeme lineaire

A_inv = linalg.inv(A)
Uh = solve(A_inv, b)

#Mise en forme de la matrice Zh
Zh = array( 0*Ud(X))
for i in arange (0, Ns, 1):
  newrow = Uh[ i*(Ns):i*Ns+Ns]
  newrow =concatenate([[0], newrow, [0]])
  Zh = vstack([newrow, Zh])
Zh = vstack([Ud(X), Zh])


#Calcul du maillage
coordX, coordY= np.meshgrid(X, flip(X,0))

#Calcul de la solution exacte sur le maillage
U = solex(coordX,coordY)

#Calcul de l'erreur
Err = amax(absolute(U-Zh))

fig = figure()
ax = Axes3D(fig, azim = 30, elev = 30)
ax.plot_surface(coordX, coordY, Zh, cmap = cm.jet)
#ax.plot_surface(coordX, coordY, U, cmap = cm.jet)
fig.show()

```