

## **Sommaire**

Etude de l'équation de transport par la méthode des différences finies.....	2
Etude des graphes de la solution approchée $U_h(x,T)$ pour $x$ dans $[0,1]$ à $t=T$ .....	3
$C=2$ et $T=0.1$ :.....	4
$N=100$ et $Dt=0.01$ :.....	4
$N=100$ et $Dt=0.005$ :.....	4
$N=100$ et $Dt=0.001$ :.....	4
$N=50$ et $Dt=0.005$ :.....	5
$N=200$ et $Dt=0.005$ :.....	5
$C=-2$ et $T=0.1$ :.....	6
$N=100$ et $Dt=0.01$ :.....	6
$N=100$ et $Dt=0.005$ :.....	6
$N=100$ et $Dt=0.001$ :.....	6
$N=50$ et $Dt=0.005$ :.....	7
$N=200$ et $Dt=0.005$ :.....	7
Etude de l'erreur max du schémas de Lax-Friedrichs.....	8
Conclusion.....	9
Annexe :.....	9

## Etude de l'équation de transport par la méthode des différences finies

On rappelle l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \quad \forall x \in ]0, 1[, \quad \forall t \in ]0, T] \\ u(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(1, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

Et on étudie cette équation avec la condition suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 10(x - 0,4) & \text{si } 0,4 \leq x \leq 0,5 \\ 10(0,6 - x) & \text{si } 0,5 \leq x \leq 0,6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour étudier cette équation on utilisera 3 schémas :

-le schéma décentré à gauche :

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - c \frac{\Delta t}{h} (u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M$$

-le schéma décentré à droite :

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - c \frac{\Delta t}{h} (u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M$$

-le schéma de Lax-Friedrichs :

$$u_i^{(j+1)} = \frac{u_{i-1}^{(j)} + u_{i+1}^{(j)}}{2} - c \frac{\Delta t}{2h} (u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M$$

## **Etude des graphes de la solution approchée $U_h(x,T)$ pour $x$ dans $[0,1]$ à $t=T$**

Pour cette étude on prend  $T=0.1$  et on étudie en deux cas :

-le cas où  $c=2$

-le cas où  $c=-2$

Pour chacun de ces 2 cas on fera varier  $\Delta t$  et  $N$ .

## C=2 et T=0.1 :

Dans un premier temps on fixe N et on fait varier  $\Delta t$ .

### N=100 et $\Delta t=0.01$ :

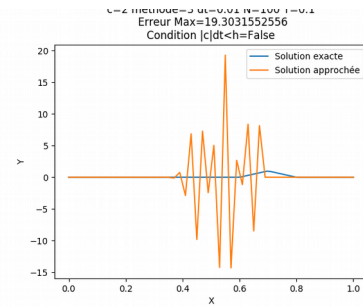
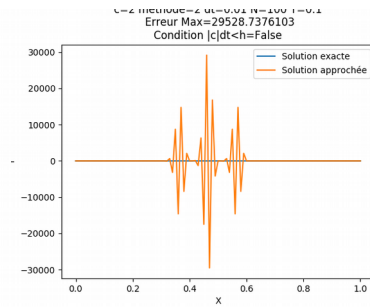
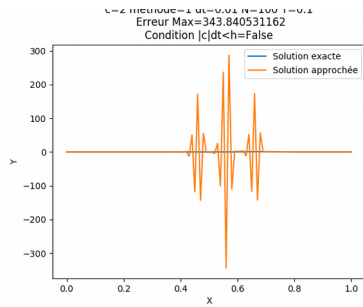


Schéma décentré à gauche

Schéma décentré à droite

Schéma Lax-Friedrichs

### N=100 et $\Delta t=0.005$ :

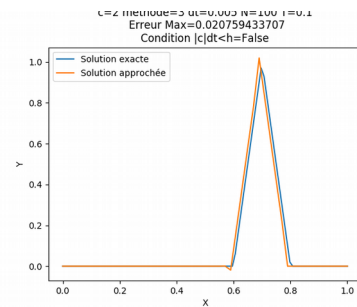
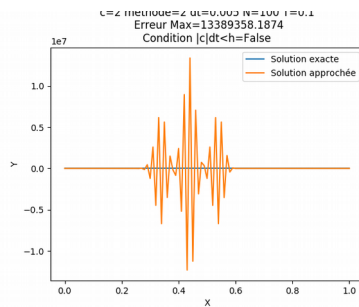
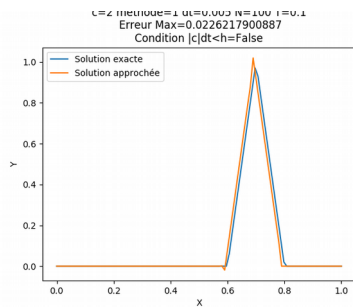


Schéma décentré à gauche

Schéma décentré à droite

Schéma Lax-Friedrichs

### N=100 et $\Delta t=0.001$ :

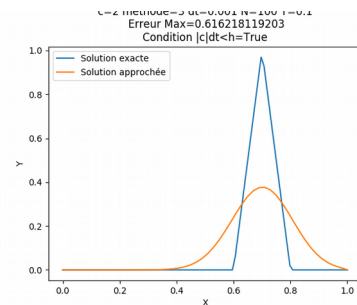
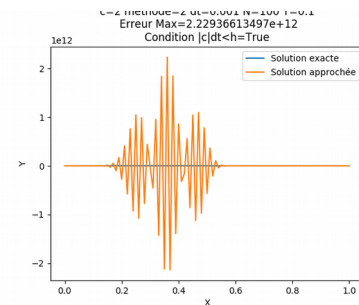
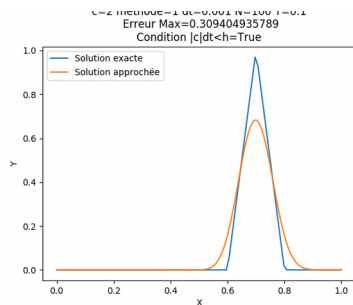


Schéma décentré à gauche

Schéma décentré à droite

Schéma Lax-Friedrichs

Dans un second temps on fixe  $\Delta t$  et on fait varier N.

**N=50 et  $\Delta t=0.005$  :**

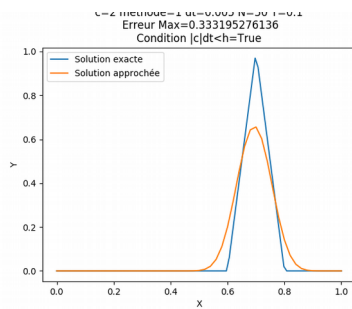


Schéma décentré à gauche

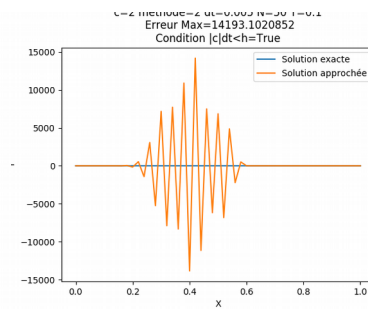


Schéma décentré à droite

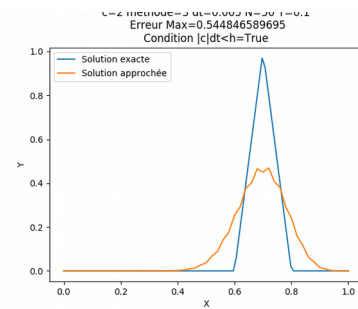


Schéma Lax-Friedrichs

**N=200 et  $\Delta t=0.005$  :**

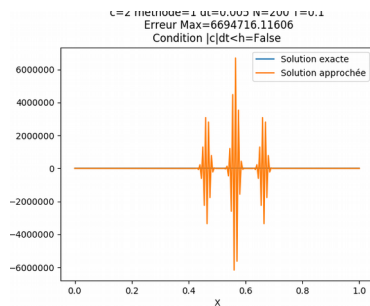


Schéma décentré à gauche

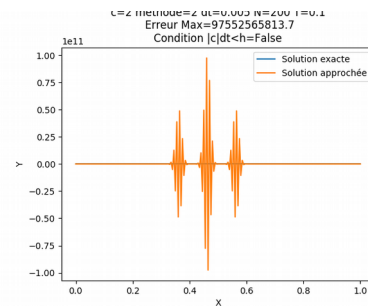


Schéma décentré à droite

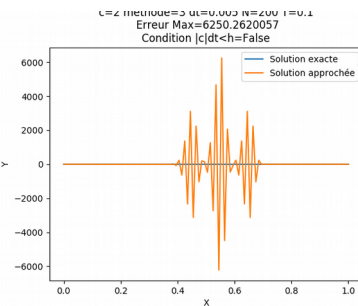


Schéma Lax-Friedrichs

D'après les graphes des différents schémas on observe bien que pour  $c=2$ , donc  $c$  positif :

- le schéma décentré à gauche est instable quand  $|c|\Delta t > h$ .
- le schéma décentré à droite est tout le temps instable.
- le schéma Lax-Friedrichs est instable quand  $|c|\Delta t > h$ .

De plus pour le schémas décentré à gauche et le schémas de Lax-Friedrichs on observe que la solution semble exacte quand  $|c|\Delta t = h$ .

**C=-2 et T=0.1 :**

On fixe à nouveau N et on fait varier  $\Delta t$ .

**N=100 et  $\Delta t=0.01$  :**

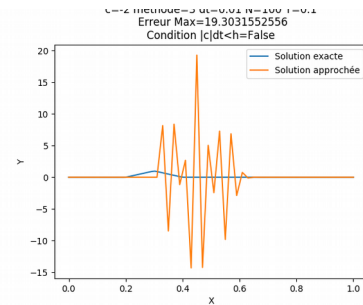
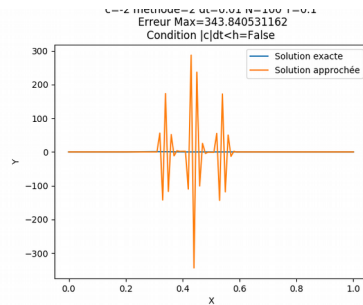
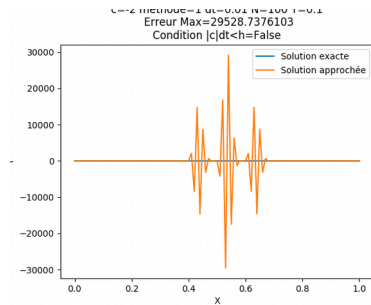


Schéma décentré à gauche

Schéma décentré à droite

Schéma Lax-Friedrichs

**N=100 et  $\Delta t=0.005$  :**

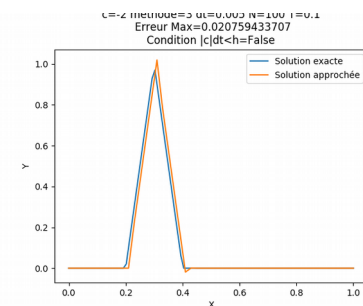
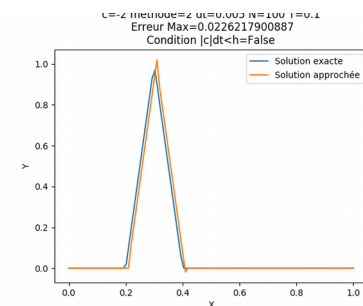
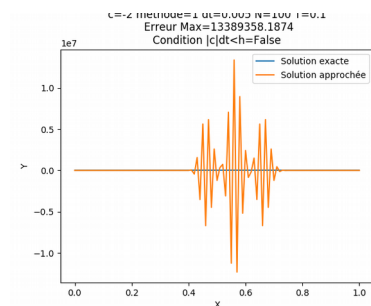


Schéma décentré à gauche

Schéma décentré à droite

Schéma Lax-Friedrichs

**N=100 et  $\Delta t=0.001$  :**

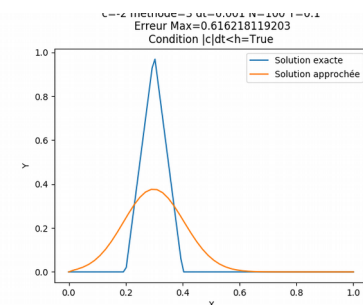
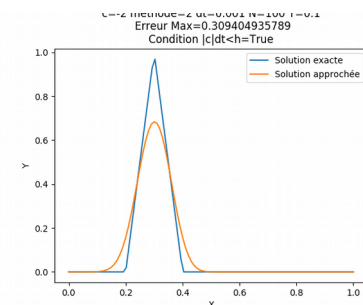
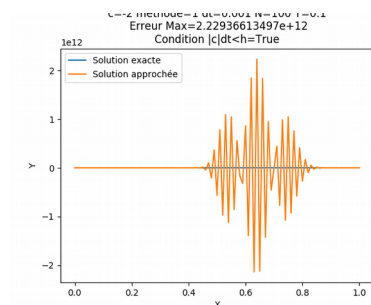


Schéma décentré à gauche

Schéma décentré à droite

Schéma Lax-Friedrichs

Et on fixe  $\Delta t$  et on fait varier  $N$ .

**$N=50$  et  $\Delta t=0.005$  :**

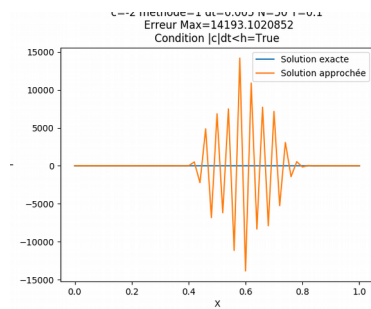


Schéma décentré à gauche

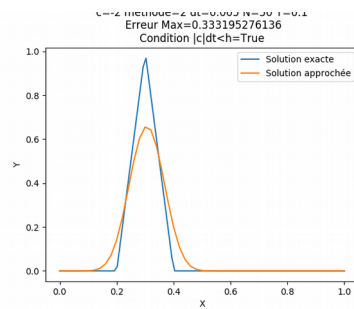


Schéma décentré à droite

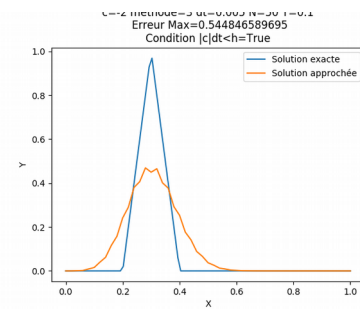


Schéma Lax-Friedrichs

**$N=200$  et  $\Delta t=0.005$  :**

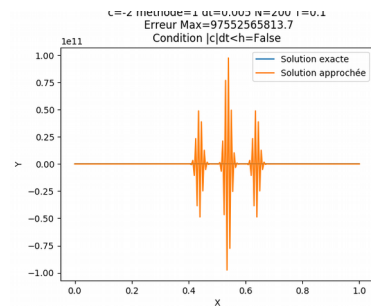


Schéma décentré à gauche

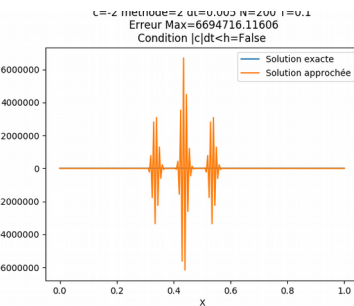


Schéma décentré à droite

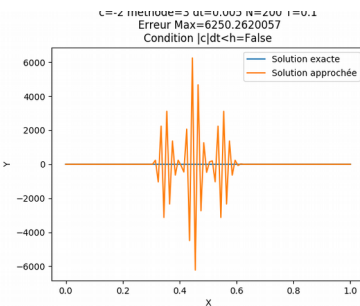


Schéma Lax-Friedrichs

D'après les graphes des différents schémas on observe bien que pour  $c=-2$ , donc  $c$  positif :

- le schéma décentré à gauche est tout le temps instable.
- le schéma décentré à droite est instable quand  $|c|\Delta t > h$ .
- le schéma Lax-Friedrichs est instable quand  $|c|\Delta t > h$ .

De plus pour le schémas décentré à droite et le schémas de Lax-Friedrichs on observe que la solution semble exacte quand  $|c|\Delta t = h$ .

## Etude de l'erreur max du schémas de Lax-Friedrichs

Soit  $T=0.1$  et  $|c|=2$ , on fait varier  $h$  et  $\Delta t$  et on regarde l'évolution de l'erreur max. Cela marchera de la même façon pour le schéma décentré à gauche (respectivement à droite) en prenant  $c=2$  (respectivement  $c=-2$ ).

$h / \Delta t$	0.01 / 0.005	0.005 / 0.0025	0.001 / 0.0005	0.0005 / 0.00025
erreur	1.91919e-2	9.79899e-3	1.99199e-3	9.97998e-4

On voit d'après ce tableaux que l'erreur max du schéma Lax-Friedrichs diminue lorsque  $h$  et de  $\Delta t$  diminues tout en respectant la condition  $|c|\Delta t < h$ .



## Conclusion

Au vu des résultats, étant donné que la solution initiale n'est pas  $C^2$ , ni même  $C^1$ , la solution exacte ne l'est donc pas non plus. Cela ne nous permet donc pas de conclure sur la convergence des schémas.

Cependant les résultats nous permettent d'affirmer que les schémas sont instables lorsque  $|c|\Delta t > h$ . De plus on remarque que l'erreur max diminue lorsque  $\Delta t$  et  $h$  diminues et respectent la condition  $|c|\Delta t < h$ .

## Annexe :