

Sommaire

Etude de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies.....	2
Etude des graphes de la solution approchée $U_h(x,T)$ pour x dans $[0,1]$ à $t=T$	3
$T=0.0004$:.....	3
$T=0,0016$:.....	4
$T=0,0024$:.....	5
$T=0,016$:.....	6
Conclusion.....	7
Etude de l'erreur max des deux schémas.....	8
Erreur du schéma explicite :.....	8
Erreur du schéma implicite :.....	9
Conclusion : Convergence.....	10
Annexe :.....	10

Etude de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies

On rappelle l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in]0, 1[, \quad \forall t \in]0, T[\\ u(0, t) = u_g, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(1, t) = u_d, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

Et on étudie cette équation avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f(x, t) = 0, \\ u_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{4} \sin(10\pi x), \\ u_g = 0, \quad u_d = 0. \end{cases}$$

Pour étudier cette équation on utilisera 2 schémas :

-le schéma explicite :

$$U^{(j+1)} = U^{(j)} - \Delta t A_h U^{(j)} + \Delta t C^{(j)}, \quad j = 0, \dots, M \quad (1)$$

-le schéma implicite :

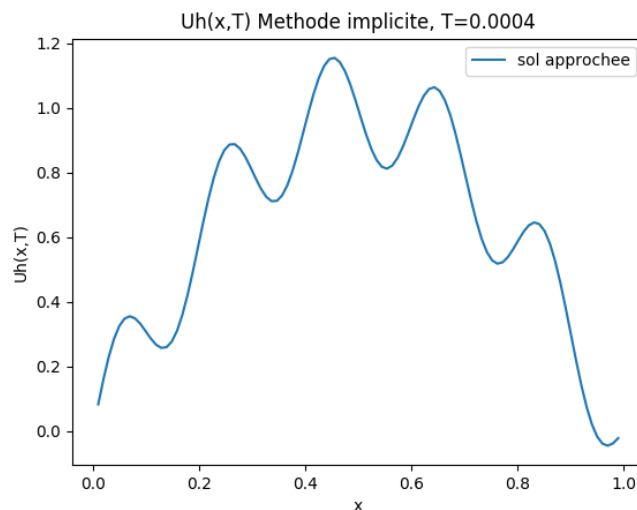
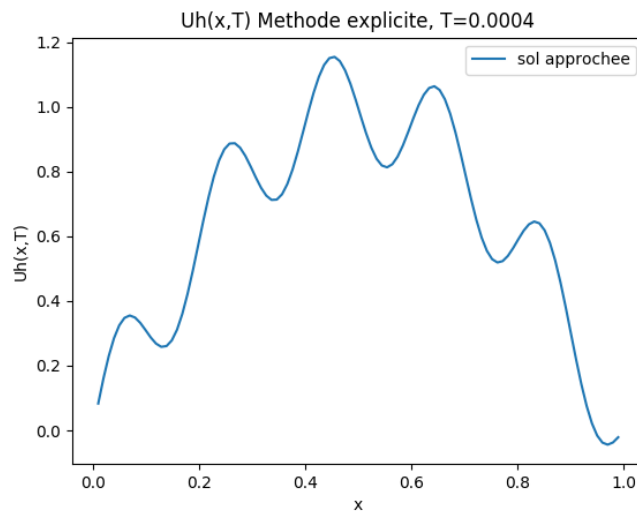
$$U^{(j)} = U^{(j-1)} - \Delta t A_h U^{(j)} + \Delta t C^{(j)}, \quad j = 1, \dots, M + 1 \quad (2)$$

On remarque que pour ces 2 schémas les conditions nous donne $C^{(j)}=0$ pour tout j .

Etude des graphes de la solution approchée $U_h(x,T)$ pour x dans $[0,1]$ à $t=T$

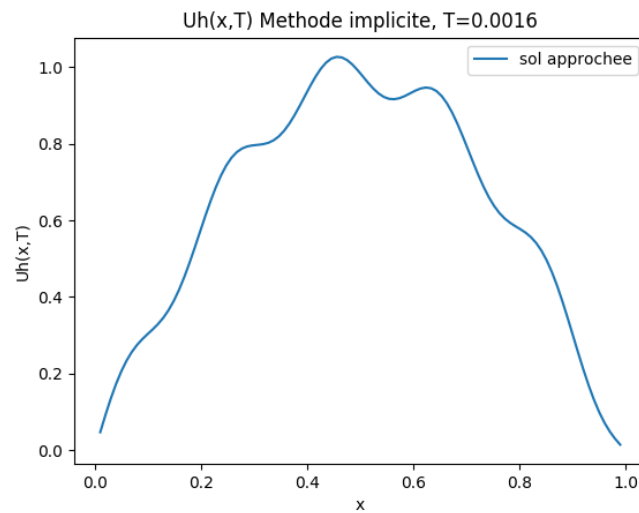
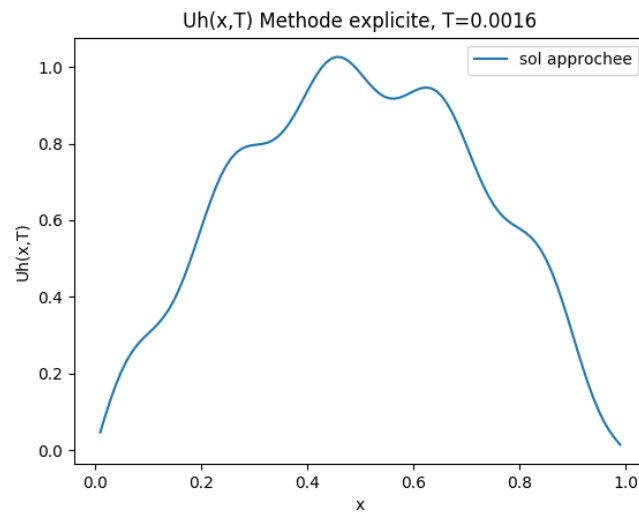
On fixe N à 100 et Δt à 0.00001, ce qui nous donne les différents graphes en prenant des T différents :

$T=0.0004$:



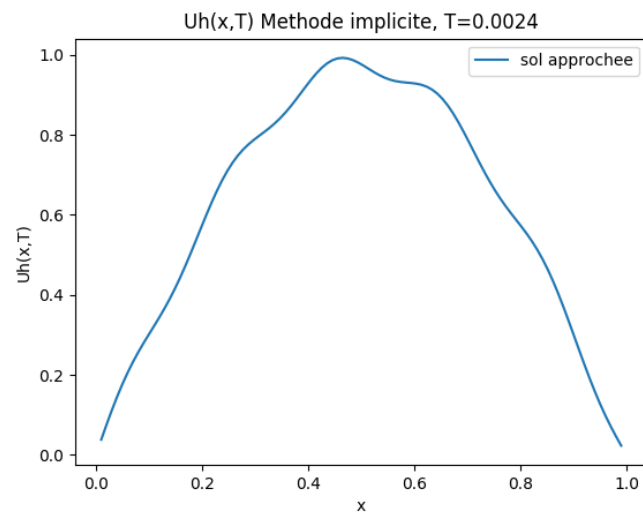
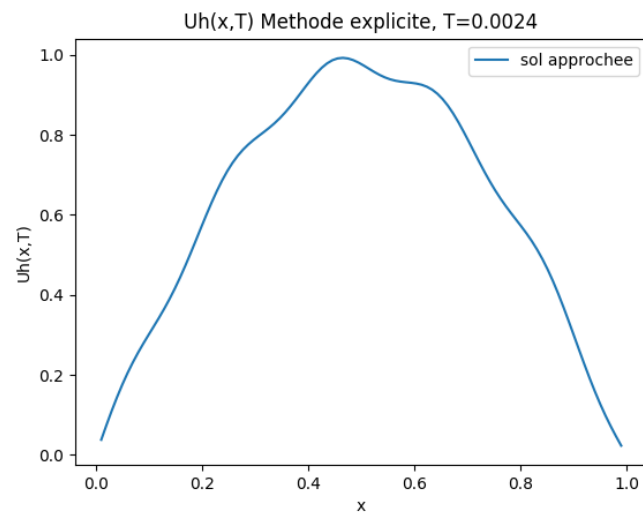
Ici on reconnaît bien la fonction $U_0(x)$ et on voit qu'avec ce N et ce Δt fixé les solution approchées des 2 schémas collent bien à la solution exacte.

$T=0,0016$:



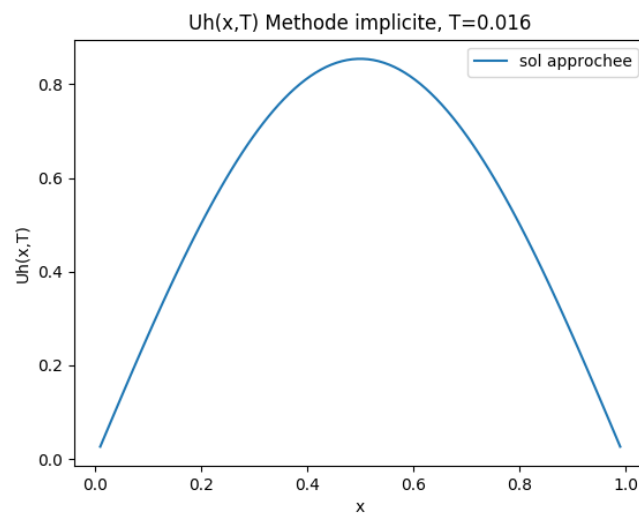
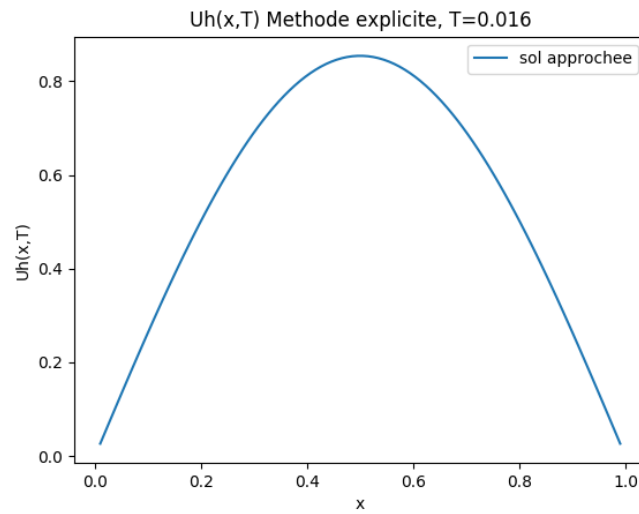
Ici on voit qu'à $T=0.0016$ le graphe de la fonction $U_h(x,T)$ commence à se lisser pour se rapprocher de la fonction $\sin(\pi x)$ c , avec c une constante ≈ 1 .

T=0,0024 :



Pareil à T=0.0024,

T=0,016 :



A $T=0.016$ le $\sin(10\pi x)$ n'est plus visible car $U_h(x, T)$ suit la solution exacte qui est définie par :

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t) + \frac{1}{4} \sin(10\pi x) \exp(-100\pi^2 t)$$

donc à $T=0.016$, $\exp(-100\pi^2 T) = 1.38e-7$ et $\exp(-\pi^2 T) = 0.85$.

Ce qui donne ce graphe de la forme $0.85 \cdot \sin(\pi x)$.

Conclusion

Les deux schémas semblent converger vers la solution exacte avec N et Δt bien choisis, ces conditions seront étudiés dans la deuxième partie.

Etude de l'erreur max des deux schémas

Soit $T=0.016$, on fait varier h et Δt et regarde l'évolution de l'erreur max.

Erreur du schéma explicite :

On fixe $\Delta t=0.0001$ et on fait varier h :

h	0.1	0.05	0.015	0.013	0.01
erreur	1.03507e-3	1.55059e-2	2.58991e-2	1.94493e+17	4.55092e+59

On fixe maintenant $h=0.01$ et on fait varier Δt :

Δt	0.00001	0.00004	0.00005	0.00006	0.0001
erreur	3.05385e-4	1.07464e-3	1.54246e-3	1.34328e+22	4.55092e+59

On voit d'après ces 2 tableaux que l'erreur max du schéma explicite dépend de h et de Δt .

En effet à Δt fixé l'erreur est stable pour un h aux alentours de $h \geq \sqrt{2\Delta t}$.

On fait la même observation en fixant cette fois h et en faisant varier Δt , l'erreur est stable lorsque $\Delta t \leq (h^2/2)$.

On reconnaît la condition CFL ($\Delta t/h^2 \leq (1/2)$).

Et on peut supposer que le schéma converge sous cette condition.

Erreur du schéma implicite :

On fixe $\Delta t = 0.0001$ et on fait varier h :

h	0.1	0.05	0.015	0.013	0.01
erreur	1.16546e-3	2.28277e-2	2.58545e-2	3.15007e-2	5.08564e-3

On fixe maintenant $h = 0.01$ et on fait varier Δt :

Δt	0.00001	0.00004	0.00005	0.00006	0.0001
erreur	1.20663e-3	2.53140e-3	2.96574e-3	3.39728e-3	5.08564e-3

Pour le schéma implicite on observe que l'erreur ne semble pas dépendre de h et de Δt .

En effet que se soit en fixant h et en faisant varier Δt ou l'inverse, l'erreur reste stable.

On peut donc supposer que le schéma implicite converge sans condition.

Conclusion : Convergence

D'après les tableaux et en accord avec les résultats vu en cour disant que si la solution u de l'équation est C^4 relativement à x et C^2 relativement à t alors sous la condition CFL $(\Delta t/h^2) \leq (1/2)$ le schéma explicite est convergent d'ordre 2 en espace et 1 en temps.

Ici on a bien la solution exacte qui est C^4 relativement à x car somme de fonctions sin qui sont C^∞ et C^2 relativement à t car somme de fonctions exp qui sont C^∞ .

De plus, d'après les tableaux et en accord avec les résultats vu en cour, le schéma implicite est également convergent d'ordre 2 en espace et 1 en temps car la solution est C^4 relativement à x et C^2 relativement à t mais sans condition sur h et sur Δt .

Annexe :