

1. Differenza tra calibrazione cinematica e identificazione parametrica

La *calibrazione cinematica* è una procedura, realizzata nel calcolo della cinematica diretta, che ha lo scopo di determinare in maniera quanto più precisa i parametri di DH; in particolare, permette di ricavare in maniera accurata i parametri di DH a partire da una serie di misure effettuate sulla posa dell'organo terminale del manipolatore. Presenta un'elevata precisione utilizzando tecniche di triangolazione, vincolando l'organo terminale in posizioni con precisione nota a priori.

L'*identificazione parametrica* è una procedura, realizzata nel calcolo della dinamica, che ha lo scopo di individuare i parametri del modello dinamico e per far ciò sfrutta la proprietà di linearità di tali parametri. In particolare, permette di ricavare il vettore dei parametri π sulla base di misure effettuate, durante l'esecuzione di opportune traiettorie di moto, sulle coppie ai giunti τ e sulle grandezze che consentono di specificare numericamente la matrice Y .

Nel caso della calibrazione cinematica si vuole identificare il modello $x=k(q)$ che non è lineare per cui bisogna prima effettuare una linearizzazione in un intorno della posa nominale e poi individuare i parametri invece, nell'identificazione parametrica il modello è lineare in π per cui non bisogna effettuare nessuna linearizzazione; ciò fa sì che l'identificazione parametrica sia caratterizzata da un onere computazionale inferiore.

Inoltre, la calibrazione dinamica è più semplice poiché si caricano delle traiettorie con molti punti e istanti di tempo, per poi far partire l'algoritmo invece in quella cinematica bisogna cambiare la posa dell'organo terminale sacco di volte, fin tanto che l'errore di scostamento dei parametri di DH non sia inferiore di una data soglia, per poi attuare l'algoritmo.

2. Singularità cinematiche

La cinematica differenziale è una scienza che definisce la relazione che sussiste tra le velocità all'organo terminale (twist), nello spazio operativo, note le velocità ai giunti secondo la relazione:

$$v_e = J(q)\dot{q}$$

Vi sono delle configurazioni in cui lo jacobiano perde di rango, dette "singularità cinematiche", e comportano una perdita di mobilità, infinite soluzioni del problema cinematico inverso e generazione di velocità che nello spazio operativo sono basse mentre nello spazio ai giunti sono elevate.

Esistono due tipologie di singularità:

- Ai confini dello spazio di lavoro: si hanno ai confini dello spazio di lavoro raggiungibile, ad esempio quando il manipolatore è totalmente steso o totalmente piegato, e possono essere evitate pianificando la traiettoria in maniera tale che il manipolatore non arrivi in tali punti;
- All'interno dello spazio di lavoro: si hanno quando due o più assi di moto si allineano per cui sono molto più complesse da evitare.

Per capire quando il manipolatore si trova in singularità bisogna studiare i valori per cui $\det(J)=0$ e nel caso di strutture più complesse è conveniente adoperare il *disaccoppiamento delle singularità*; in particolare, il disaccoppiamento può essere effettuato SOLO in presenza di un polso sferico e consiste nell'andare a considerare separatamente le singularità della struttura portante e del polso sferico essendo:

$$\det(J) = \det(J_{11}) \det(J_{22})$$

Le singularità della struttura portante sono:

- *Singularità di spalla*: si ha quando il centro del polso si trova lungo l'asse di rotazione di base z_0 ;
- *Singularità di gomito*: si ha quando il manipolatore è tutto steso ($\theta_3 = 0$) o completamente piegato ($\theta_3 = \pi$).

Invece, la *singularità di polso* si ha quando $\theta_5 = 0$ e ciò comporta che θ_4 e θ_6 siano rotazioni uguale e opposte.

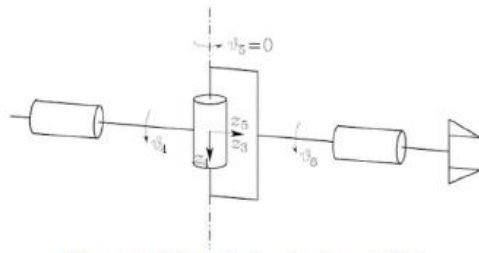


Figura 1 Polso sferico in singolarità

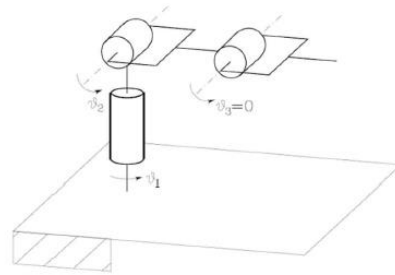


Figura 2 Manipolatore antropomorfo singolarità di gomito

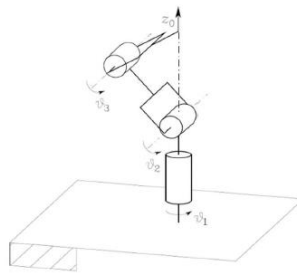


Figura 3 Manipolatore antropomorfo in singolarità di spalla

La singolarità di polso è evitabile solo nello spazio di lavoro, la singolarità di spalla è evitabile se il manipolatore non ricade su/nei dintorni di θ_1 mentre la singolarità di gomito è possibile evitarla facendo che il manipolatore pianificando il moto in modo tale che il manipolatore non passi per tali configurazioni.

3. Problema della ridondanza

Il concetto di ridondanza dipende da tre parametri: numero di gradi di libertà n , numero di variabili di giunto nello spazio operativo m e numero di variabili di giunto nello spazio operativo necessario per specificare il compito. In particolare:

- $n > m$ = ridondanza intrinseca;
- $r > m$ = ridondanza funzionale;
- $n > r$ = manipolatore cinematicamente ridondante.

L'equazione della cinematica differenziale $v_e = J(q)\dot{q}$ definisce una relazione tramite una trasformata lineare tra due insiemi: immagine dello jacobiano $R(J)$ e nullo dello jacobiano $N(J)$. In particolare, si definisce immagine di J il sottospazio $R(J)$ dato dall'insieme delle velocità all'organo terminale generate dalla velocità ai giunti mentre si definisce nullo di J il sottospazio $N(J)$ dato dall'insieme delle velocità ai giunti che non producono velocità all'organo terminale.

Se lo jacobiano è pieno si ha $\dim(R(J))=r$ e $\dim(N(J))=n-r$ mentre, in presenza di singolarità, la dimensione dell'immagine diminuisce ed aumenta quella del nullo $\dim(R(J))+\dim(N(J))=n$.

Il nullo risulta essere diverso dal vuoto nel caso in cui il manipolatore risulti essere ridondante e in questo modo è possibile definire un'ulteriore soluzione dell'equazione della cinematica pari a:

$$\dot{q} = \dot{q}^* + P\dot{q}_o$$

\dot{q}_o viene scelta in modo tale da non provocare velocità all'organo terminale; infatti, è moltiplicata per il proiettore nello spazio nullo P , ma permette di generare dei moti interni facendo sì che il manipolatore arrivi in un intorno della singolarità adottando posture più destre.

4. Gestione della ridondanza ed evitamento delle singolarità

Nel caso in cui il manipolatore sia ridondanza sorge il problema della di trovare le soluzioni dell'equazione cinematica in quanto ne esisteranno più di una; un metodo per risolvere tale problema è quello di supporre di voler risolvere un problema di ottimo vincolato. Assegnate le velocità all'organo terminale e lo jacobiano, si vogliono ricevere delle soluzioni che minimizzino il funzionale di costo:

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q}$$

e un metodo di risoluzione dei sistemi lineari è il metodo dei moltiplicatori di Lagrange in cui si introduce uno stack di matrici λ tale da non considerare più solo il funzionale di costo ma anche il vincolo:

$$g(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q} + \lambda^T (v_e - J \dot{q})$$

Attraverso l'applicazione delle seguenti condizioni di stazionarietà/ottimalità:

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0$$

si ricava la seguente soluzione per i manipolatori ridondanti:

$$\dot{q} = J^+ v_e + (I - J^+ J) \dot{q}_o$$

dove:

$$\dot{q}_o = k_o \left(\frac{\partial w(q)}{\partial q} \right)^T$$

La quantità $w(q)$ può essere scelta in diversi modi:

- Misura di manipolabilità: $w(q) = \sqrt{\det(J) J^T}$
- Distanza di fine corsa: $w(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{iM}} \right)^2$
- Distanza da un ostacolo: $w(q) = \min ||p(q) - o||$

Nel caso di singolarità o nell'intorno di singolarità si ha che lo jacobiano perde di rango per cui l'inversione cinematica è complessa da effettuare; per risolvere tale problema si adopera *la matrice inversa smorzata ai minimi quadrati* che può essere adoperata indipendente dalla geometria del manipolatore.

$$J^* = J^T (J J^T + K^2 I)^{-1}$$

Tale matrice presenta un termine di smorzamento che permette di ricondizionare la matrice, agevolandone l'inversione e permette di irrobustire il manipolatore così da non avere velocità elevate. Permette di minimizzare il funzionale di costo e rispettare il vincolo però, d'altra parte, ugualmente si perde di soluzione.

Cambiano la velocità è possibile uscire dalla singolarità? Si può uscire dalla singolarità cambiando la velocità solo se questa viene specificata nello spazio dei giunti in quanto nello spazio dei giunti le singolarità non vi sono poiché non viene adoperata l'inversa dello jacobiano.

Adoperando la pseudo-inversa ci si mantiene sempre distanti dalla singolarità? Dall'espressione della cinematica differenziale si ottiene $\dot{q} = J^{-1} V_e$ e, dal momento in cui si ha un sistema composto da m equazioni ed n incognite, per poter ricavarne la soluzione si sceglie di volere una velocità a norma minima. In un intorno della singolarità la matrice pseudo inversa ricade sulla matrice inversa e, seppur si abbia soluzione minima, il fatto che si vada incontro ad una singolarità è funzione della singola postura. Quindi, si parte da una q muovendosi con velocità piccole e si arriva in una nuova configurazione che può trovarsi in un'intorno della singolarità!

5. Per quale motivo si adopera l'inversione della cinematica con lo jacobiano

La cinematica permette di calcolare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale, nello spazio operativo, a partire dalla posizione delle variabili di giunto ma tale legame presenta una struttura fortemente non lineare per cui sorgono problemi nel caso in cui si volesse risolvere il problema cinematico inverso.

A tal proposito, è possibile adoperare la cinematica differenziale, la quale definisce una relazione lineare, tramite una trasformazione lineare, tra le velocità all'organo terminale (spazio operativo) e le velocità ai giunti (spazio dei giunti) per cui la si può adoperare per risolvere il problema cinematico inverso:

$$V_e = J(q)\dot{q} \rightarrow \dot{q} = J(q)^{-1}V_e$$

6. Algoritmi di inversione cinematica + schema a blocchi

Quando si adopera la cinematica differenziale per il calcolo della cinematica inversa insorge il problema del drif (deriva della soluzione) per cui in corrispondenza delle variabili di giunto calcolate corrisponde, nello spazio operativo, una posa dell'organo terminale diversa rispetto alla posa desiderata:

$$e = x_d - x_e$$

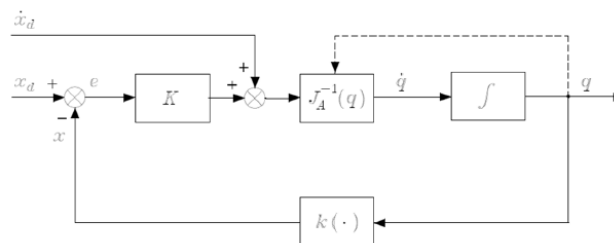
$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x}_e \rightarrow \dot{e} = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q}$$

Per portare l'errore a zero si adoperano gli algoritmi CLIK (closed loop inverse cinematics) e vi sono tre tipologie: algoritmo clik con inversa dello jacobiano, algoritmo clik con trasposta dello jacobiano e algoritmo clik con pseudo-inversa dello jacobiano.

Nel caso dell'algoritmo clik con inversa dello jacobiano, si sceglie:

$$\dot{q} = J_A^{-1}(\dot{x}_d + Ke) \rightarrow \dot{e} + Ke = 0$$

In questo caso, lo schema a blocchi è riportato nella figura sottostante:



Nel caso in cui il manipolatore dovesse essere ridondante, si adopera l'algoritmo clik con la pseudo-inversa dello jacobiano:

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke) + (I - J_A^+(q)J_A(q))\dot{q}_o$$

Un algoritmo per l'inversione cinematica, più semplice dei precedenti, consiste di individuare un legame tra le velocità ai giunti e l'errore che assicuri la convergenza a zero dell'errore senza andare a linearizzare il sistema, è individuato dall'algoritmo clik con la trasposta dello jacobiano.

In particolare, essendo un sistema non lineare, per la definizione di un legame che assicuri l'asintotica stabilità del sistema di errore si adopera il metodo di Lyapunov. Si sceglie come funzione candidata di Lyapunov la seguente forma quadratica:

$$V(e) = \frac{1}{2}e^T Ke$$

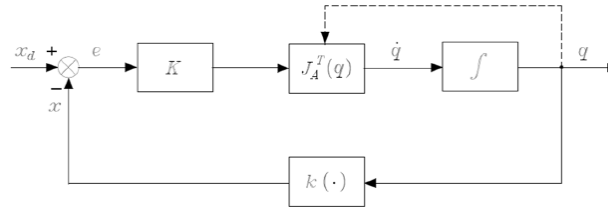
$$\dot{V}(e) = e^T K \dot{x}_d - e^T K \dot{x}_e = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A \dot{q}$$

A questo punto si sceglie:

$$\dot{q} = J_A^T(q)Ke$$

$$\dot{V}(e) = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A J_A^T K e$$

e lo schema a blocchi è fatto come segue:



Si possono verificare tre casistiche:

- se $\dot{x}_d = 0 \rightarrow \dot{V} < 0$ con $V > 0$ per cui il sistema è asintoticamente stabile;
- se $N(J_A^T) \neq \emptyset$ la funzione è semidefinita negativa e l'algoritmo potrebbe trovarsi in una condizione di stallo con errore diverso da zero. Ciò si ha solo nel caso in cui la posizione assegnata all'organo terminale non sia effettivamente raggiungibile a partire dalla configurazione corrente;
- se $\dot{x}_d \neq 0$ il secondo membro non viene cancellato e non si può dire nulla sull'asintotica stabilità del sistema. In questo caso $e(t)$ è tanto più piccolo quanto più è grande la norma dei guadagni di k .

Si può aumentare K indiscriminatamente? Se K è una matrice definita positiva, il sistema risulta asintoticamente stabile per cui l'errore tenderà a zero lungo una traiettoria con una velocità di convergenza che è direttamente proporzionale agli autovalori di K . D'altra parte, poiché si tratta di uno schema a tempo discreto, in dipendenza del periodo di campionamento, si avrà un valore limite massimo dell'autovalore di K che assicura l'asintotica stabilità del sistema di errore.

7. Errore di orientamento

Gli algoritmi click adoperano lo jacobiano analitico perché operano su variabili di errore definite nello spazio operativo, pari alla differenza tra la posa desiderata e la posa corrente. Si ricorda che col termine posa si intende la posizione e l'orientamento dell'organo terminale per cui si definisce un errore di posizione e un errore di orientamento.

L'errore di posizione presenta la seguente espressione:

$$e_p = p_d - p_e \rightarrow \dot{e}_p = \dot{p}_d - \dot{p}_e$$

Invece, per quanto riguarda l'errore di orientamento, la sua espressione cambia in base a quale rappresentazione si adopera per la definizione dell'orientamento.

- Angoli di Eulero

La rappresentazione in termini di angoli di Eulero è una rappresentazione minima dell'orientamento il quale viene espresso tramite una terna di angoli $\Phi = [\varphi \ \theta \ \psi]^T$ per cui l'errore di orientamento è pari a:

$$e_o = \Phi_d - \Phi_e \rightarrow \dot{e}_o = \dot{\Phi}_d - \dot{\Phi}_e$$

Per tanto, assumendo che non ci siano singolarità cinematiche o di rappresentazione, la soluzione con inversa dello jacobiano nel caso di manipolatore non ridondante è nella forma:

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{p}_d + K_p e_p \\ \dot{\Phi}_d + K_o e_o \end{bmatrix}$$

Si ricordi che l'orientamento non sempre è noto in forma diretta per cui, nel caso in cui non lo fosse, bisogna passare per il calcolo delle matrici di rotazione:

- Nel caso di manipolatore normale si calcola R_d , da cui si ricava Φ_d , e R_e , da cui si ricava Φ_e ;
- Nel caso di manipolatore con polso sferisco si adopera il disaccoppiamento della cinematica e si calcola q_d , da cui si ricava R_w e da $R_w^T R_d$ si ricava q_o .

- Asse-angolo

La rappresentazione in termini di asse-angolo permette di rappresentare l'orientamento come la rotazione di un angolo θ intorno al versore r dell'asse di rotazione per cui, in questo caso, si definisce l'errore di orientamento come:

$$e_o = r \sin \theta = \frac{1}{2} (n_e x n_d + s_e x s_d + a_e x a_d)$$

In particolare, l'angolo e r si ricavano dal calcolo della matrice di rotazione $R(\theta r) = R_d R_e^T$ che descrive la rotazione per sovrapporre R_e a R_d .

Derivando si ottiene:

$$\dot{e}_o = L^T \omega_d - L \omega_e \text{ con } L = -\frac{1}{2} (S(n_d)S(n_e) + S(s_d)S(s_e) + S(a_d)S(a_e))$$

e la soluzione con l'inversa dello jacobiano viene scelta pari a:

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{p}_d + K_p e_p \\ L^{-1}(L^T \omega_d - K_o e_o) \end{bmatrix}$$

Tale soluzione dovrebbe offrire prestazioni migliori in quanto, adoperando lo jacobiano geometrico, non incorre in singolarità di rappresentazione.

- Quaternione unitario

In questo caso l'errore di orientamento è definito come:

$$e_o = \eta_e(q) \varepsilon_d - \eta_d(q) \varepsilon_e - S(\varepsilon_d) \varepsilon_e(q)$$

per cui è necessario passare dalla cinematica diretta per il calcolo di η_e e ε_e tramite le matrici di rotazione e la soluzione con inversa dello jacobiano ha la seguente forma:

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{p}_d + K_p e_p \\ \omega_d + K_o e_o \end{bmatrix}$$

Si noti che l'equazione dell'errore non è lineare poiché contiene l'errore di velocità angolare per cui bisogna considerare la relazione tra la derivata temporale del quaternione unitario e la velocità angolare, chiamato proporzione del quaternione:

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2} \varepsilon^T \omega \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\eta I - S(\varepsilon)) \omega$$

Essendo un sistema non lineare, per lo studio della stabilità si adoperava il metodo di Lyapunov scegliendo una funzione candida nella seguente forma:

$$V = (\eta_d - \eta)^2 + (\varepsilon_d - \varepsilon)^T (\varepsilon_d - \varepsilon)$$

$$\dot{V} = -e_o^T K_o e_o$$

Nel caso degli schemi click che vantaggio si ha nell'usare il quaternione unitario? La rappresentazione dell'orientamento con il quaternione unitario è una rappresentazione in cui l'orientamento viene espresso in funzione di quattro parametri che, a differenza della rappresentazione con angoli di Eulero e di asse angolo, non incorre in singolarità in quanto si adoperava lo jacobiano geometrico.

8. Dualità cineto-statica

La cinematica permette di definire una relazione che sussiste tra le velocità all'organo terminale (twist) note le velocità ai giunti mentre la statica permette di definire la relazione che sussiste tra forze e momenti applicati all'organo terminale (wrench) e forse e/o coppie applicate ai giunti. In particolare, nella cinematica note le variabili dello spazio dei giunti si ricavano, tramite lo jacobiano geometrico, le variabili di spazio operativo mentre nella statica note le variabili di spazio dei giunti si ricavano le variabili di spazio operativo tramite la trasposta dello jacobiano. Tale dualità tra cinematica e statica è racchiusa *nella proprietà della croce di sant'Andrea*:

$$V_e = J(q)\dot{q}$$

$$\tau = J^T(q)\gamma_e$$

Sostanzialmente, la statica definisce una relazione tra l'immagine della trasposta dello jacobiano e il nullo della trasposta dello jacobiano, pari a:

$$R^+(J) = N(J^T) \text{ e } N^+(J) = R(J^T)$$

9. Ellissoidi di manipolabilità

Il manipolatore è un trasformatore meccanico di energia, cioè di potenza, pari al prodotto tra le forze e le velocità; esistono degli strumenti algebrici che permettono di definire l'attitudine del manipolatore a sviluppare forze e velocità e questi prendono, rispettivamente, il nome di ellissoidi di manipolabilità in forza ed ellissoidi di manipolabilità in velocità.

Per quanto riguarda l'ellissoide di manipolabilità in velocità si definisca nello spazio dei giunti una sfera, i cui punti della superficie sono dati dall'insieme delle velocità ai giunti a norma unitaria:

$$\dot{q}^T \dot{q} = 1$$

Nel caso di manipolatore ridondante in configurazione non singolare, si considera la soluzione a norma minima:

$$\dot{q} = J^+ V_e$$

$$V_e^T (J^{+T} J^+) V_e = 1 \text{ e nel caso più generale } V_e^T (J J^T)^{-1} V_e = 1$$

In maniera duale, per l'ellissoide di manipolabilità in forza si definisce nello spazio delle coppie giunti una sfera, i cui punti della superficie sono dati dall'insieme delle coppie ai giunti a norma unitaria:

$$\tau^T \tau = 1 \text{ con } \tau = J^T \gamma_e \rightarrow \gamma_e^T J J^T \gamma_e = 1$$

Sostanzialmente, definita una sfera nello spazio dei giunti, si ha un ellissoide nello spazio operativo dove la direzione degli assi è data dagli autovettori di JJ^T mentre la dimensione dagli autovalori; quanto più l'ellisse è prossima ad una sfera tanto meglio l'organo terminale può muoversi in modo isotropo in tutte le direzioni dello spazio operativo.

L'asse maggiore è l'asse sul quale si ha maggior manipolabilità e, data la dualità, gli assi dell'ellissoide di manipolabilità in forza coincidono con quelli dell'ellissoide di manipolata in velocità. Inoltre, la direzione lungo al quale si ha miglior manipolabilità in velocità è la direzione lungo la quale si ha minor manipolabilità in forza e viceversa.

Se si vuole una misura rappresentativa dell'abilità globale di manipolazione si può fare riferimento al volume dell'ellissoide proporzionale alla seguente quantità:

$$w(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))}$$

10. Task di controllo e di sensibilità (attuazione)

Considerando il manipolatore come un trasformatore meccanico di velocità e forze, dallo spazio dei giunti allo spazio operativo, e considerando un generico ellissoide in cui "u" indica la direzione lungo la quale si esercita una forza/velocità allora, se u indica il versore unitario della direzione, la quantità $\alpha(u)$ indica la lunghezza del segmento lungo tale direzione.

In particolare, il rapporto di trasformazione lungo una direzione per l'ellissoide di manipolabilità in forze è:

$$\alpha(u) = (u^T J(q) J^T(q) u)^{-1/2}$$

in maniera duale, il rapporto di trasformazione lungo una direzione per l'ellissoide di manipolabilità in velocità è:

$$\beta(u) = (u^T [J(q)J^T(q)]^{-1} u)^{-1/2}$$

Si possono distinguere due task: *task di attuazione* e *task di controllo/sensibilità*. In particolare, il task di attuazione consiste nello spendere un tot di coppie per avere la massima velocità o forza in punta mentre il task di controllo consiste nel variare finemente la coppia ai giunti per variare finemente la velocità o la coppia all'organo terminale.

11. Pianificazione della traiettoria nello spazio operativo

La pianificazione della traiettoria nello spazio dei giunti non permette di conoscere le traiettorie all'organo terminale per cui, per conoscere le traiettorie all'organo terminale, bisogna pianificare nello spazio operativo. In questo caso, dal momento in cui si adopera l'inversione cinematica per definire le variabili dei giunti, a partire dalle variabili di spazio operativo, si ha una complessità computazionale maggiore oltre ad imporre un limite superiore sulla frequenza di campionamento.

Inoltre, gli algoritmi di raccordo dei punti visti per le variabili di giunto possono essere adoperati anche per raccordare i singoli componenti del vettore posa; in particolare, nello spazio operativo si vuole pianificare una $x(tk)$ che permetta di portare l'organo terminale da una posa iniziale ed una posa finale e, nel caso in cui si volesse definire approssimativamente il percorso, si possono usare i metodi visti nel caso della pianificazione della traiettoria nello spazio dei giunti, altrimenti bisogna definire le primitive di percorso cioè fornire una rappresentazione analitica del moto.

Nello spazio operativo, una rappresentazione parametrica della curva è nella forma: $p = f(\sigma)$ dove f è una funzione vettoriale che parametrizza la curva al variare di σ da un valore iniziale ad un valore finale. In

particolare, tale parametro viene scelto pari ad s ovvero pari all'ascissa curvilinea, la quale rappresenta la lunghezza dell'arco che collega il punto iniziale p_i ad un generico punto p .

La posizione del punto p è data dalla terna $[t \ n \ b]$ dove t è detto versore tangente e giace sulla retta tangente in p sulla curva ed è orientato nel verso positivo indotto da s , n è il versore normale e giace sul piano osculatore cioè il piano limite in cui è definito t , mentre b viene posizionato in modo da avere una terna levogira. In particolare:

$$t = \frac{dp}{ds} \quad n = \frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left| \frac{d^2p}{ds^2} \right|} \quad b = txn$$

Nel caso il punto finale e il punto iniziale dovessero essere collegati da un segmento:

$$p(s) = p_i + \frac{s}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i)$$

$$t = \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \quad n = 0$$

Invece, nel caso in cui i punti dovessero essere collegati tramite una circonferenza:

$$p(s) = c + Rp' \quad \text{dove } p' = R \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$t = R \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & 0 \end{bmatrix}^T \quad n = R \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\rho}\right)/\rho & -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right)/\rho & 0 \end{bmatrix}^T$$

Per quanto riguarda la traiettoria in termini di posizione ed orientamento, nello spazio operativo, per la posizione si ha:

$$\dot{p}_e = \frac{\dot{s}}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \quad \ddot{p}_e = \frac{\ddot{s}}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \quad \text{nel caso di segmento}$$

$$\dot{p}_e = R \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \dot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{p}_e = R \begin{bmatrix} -\dot{s}^2 \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} - \frac{\ddot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)}{\rho} \\ -\dot{s}^2 \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} - \frac{\ddot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right)}{\rho} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{nel caso di circonferenza}$$

Per quanto riguarda l'orientamento, invece, questo può essere espresso sia in termini di angoli di Eulero che con la rappresentazione in termini di asse-angolo. Nel caso in cui si adoperasse la rappresentazione in termini di angoli di Eulero le espressioni sono identiche al caso del segmento però invece di p c'è ϕ ; in realtà, si preferisce adoperare la rappresentazione in termini di asse-angolo perché fornisce una più chiara interpretazione e, poiché adopera lo jacobiano geometrico, non incorre in singolarità di rappresentazione.

Nel caso di asse angolo, si ha:

$$R_e(t) = R_i R^i(t)$$

$$\dot{\omega}_e(t) = R_i \dot{\omega}^i(t) \text{ con } \omega^i(t) = \dot{\theta} r'$$

$$\ddot{\omega}_e(t) = R_i \ddot{\omega}^i(t)$$

12. Metodi di identificazione dei parametri, calibrazione dei parametri dinamici

L'identificazione dei parametri dinamica è una tecnica che sfrutta la proprietà di linearità dei parametri dinamici e ha lo scopo di individuare il vettore dei parametri π . Supposto di aver ricavato posizione, velocità, accelerazione e coppie ai giunti, effettuando un numero elevato ripetuto di misura (in modo da aumentarne la precisione ed evitare problemi di mal condizionamento) si ottiene:

$$\bar{\tau} = [\tau(t_1) \dots \tau(t_N)]^T = [Y(t_1) \dots Y(t_N)]^T \pi \rightarrow \bar{\tau} = \bar{Y} \pi \\ \rightarrow \pi = (\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T \bar{\tau}$$

La quantità $(\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T$ è detta matrice *pseudoinversa sinistra*, di dimensioni $n \times m$, essendo Y di dimensioni $m \times n$ con $m > n$ e si hanno diverse soluzioni:

- Se la matrice Y è triangolare si adopera un metodo ricorsivo: la matrice Y è rettangolare alta e sulla prima riga presenta i parametri dal braccio 1 al braccio n , sulla seconda riga dal braccio 2 al braccio n e così via. Tramite un metodo di eliminazione di Gauss si può andare dal basso verso l'alto a determinare i parametri: si calcolano i parametri del braccio n , poi del braccio $n-1$ etc. Tale procedura, però, può presentare l'inconveniente di cumulare errori indotti da mal condizionamenti della matrice.
- Se la matrice Y perde di rango si adopera la matrice inversa smorzata ai minimi quadrati;
- Sempre per quanto riguarda il rango, vi sono dei parametri dinamici che non possono essere identificati poiché, per qualche tipo di traiettoria, non danno contributo all'equazione di moto. In corrispondenza di tali parametri si avranno colonne di Y nulle, che vengono rimosse. Inoltre, alcuni parametri sono definibili in combinazione lineare per cui, per ognuna esse, bisogna rimuovere un numero di colonne pari al numero di parametri presenti nella combinazione.

In caso di perdita di rango della matrice Y si adopera la *matrice inversa ai minimi quadrati smorzata* che fornisce soluzioni più o meno accurate a seconda del peso del fattore di smorzamento.

13. Identificazione dei parametri dinamici tramite encoder

Gli encoder sono trasduttori di posizione realizzati con un disco di vetro ottico sul quale vi sono delle corone circolari concentriche, chiamate tracce, su cui sono presenti dei settori opachi e dei settori trasparenti. Dietro ogni traccia vi è un emettitore di luce che viene captato da un fotodiodo presente al lato opposto e, disponendo opportunamente i settori, si riesce a ricavare la posizione angolare; la posizione angolare viene definita da una stringa di bit e più è lunga tale stringa maggiore è la risoluzione dell'encoder.

Collegando l'encoder ad un circuito esterno, ad ogni transizione di settore di può emettere un impulso e studiando il treno di impulsi è possibile ricavare la velocità tramite un convertitore frequenza/tensione, misurando la frequenza o misurando il periodo di campionamento del treno.

14. Dinamica diretta ed inversa, complessità computazionale

La *dinamica diretta* ha lo scopo di definire per $t > t_o$ le risultati accelerazioni ai giunti, e quindi anche velocità e posizione, ed eventuali forze all'organo terminale $h_e(t)$ note $q(t_o)$, $\dot{q}(t_o)$, $\ddot{q}(t_o)$ e $\tau(t)$. Viceversa, la *dinamica inversa* ha lo scopo di definire le coppie ai giunti, note accelerazioni, velocità e posizione ai giunti ed eventuali forze all'organo terminale.

Il numero di operazioni richieste nella dinamica diretta è di $O(n^2)$ mentre per la dinamica inversa è di $O(n)$; vi è un numero inferiore di operazioni, e quindi un onere computazionale inferiore, perché nella dinamica inversa non si effettuano inversioni di matrici e integrazioni di equazioni differenziali. Inoltre, la dinamica diretta è utile alla simulazione mentre la dinamica inversa per la pianificazione e il controllo.

15. Modello dinamico nello spazio operativo

Per individuare il modello dinamico nello spazio operativo si parte del modello dinamico nello spazio dei giunti, nella forma:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

$$\ddot{q} = -B(q)^{-1}C(q, \dot{q})\dot{q} - B(q)^{-1}G(q) + B^{-1}J^T(q)(\gamma_e - h_e)$$

Nello spazio operativo valgono le seguenti equazioni:

$$\dot{x}_e = J_A \dot{q} \rightarrow \ddot{x}_e = J_A \ddot{q} + \dot{J}_A \dot{q}$$

da cui, sostituendovi l'espressione dell'accelerazione:

$$\ddot{x}_e = -J_A B^{-1} C \dot{q} - J_A B^{-1} G + J_A B^{-1} J_A^T (\gamma_A - h_A) + \dot{J}_A \dot{q}$$

La quantità $(J_A B^{-1} J_A^T)^{-1}$ gioca il ruolo dell'inversa della matrice di inerzia B_A per cui:

$$B_A = (J_A B^{-1} J_A^T)^{-1}$$

$$C_A \dot{x}_e = B_A J_A B^{-1} C \dot{q} - B_A \dot{J}_A \dot{q}$$

$$g_A = B_A J_A B^{-1} g$$

Riscrivendo:

$$B_A = J_A^{-T} B J_A^{-1}$$

$$C_A \dot{x}_e = J_A^{-T} C \dot{q} - B_A \dot{J}_A \dot{q}$$

$$g_A = J_A^{-T} g$$

e il modello dinamico nello spazio operativo è:

$$B_A(x_e) \ddot{x}_e + C(x_e, \dot{x}_e) \dot{x}_e + g_A(x_e) = (\gamma_A - h_A)$$

16. Problema della ridondanza nello spazio operativo

Per risolvere il problema della ridondanza nello spazio operativo si riscrive il modello dinamico:

$$B_A(\ddot{x}_e - \dot{J}_A \dot{q}) + B_A J_A B^{-1} C \dot{q} + B_A J_A B^{-1} g = \gamma_A - h_A$$

$$\rightarrow B_A J_A \ddot{q} + B_A J_A B^{-1} C \dot{q} + B_A J_A B^{-1} g = \gamma_A - h_A$$

La matrice \bar{J}_A^{-T} è la matrice pseudo inversa destra pesata secondo B^{-1} di:

$$\bar{J}_A^{-T} = B_A J_A B^{-1} \rightarrow \gamma_A - h_A = \bar{J}_A^{-T} (B \ddot{q} + C \dot{q} + g)$$

da cui:

$$\gamma_A - h_A = \bar{J}_A^{-T} (\tau - J_A^T h_A) \rightarrow \bar{J}_A^{-T} \tau = \gamma_A$$

La soluzione generare dell'ultima espressione è:

$$\tau = J_A^T(q) \gamma_A + (I - J_A^T \bar{J}_A^{-T}) \tau_o$$

Sostanzialmente, tramite la scelta di τ_o , le coppie generano dei moti interni per la risoluzione della ridondanza, oltre a realizzare il modo specificato per l'organo terminale.

17. Scalatura dinamica di traiettorie

Ogni attuatore ha un range massimo di coppie che può sviluppare per cui può accedere che assegnata una traiettoria non è detto che l'attuatore riesca a sviluppare delle coppie. L'obiettivo della scalatura è rallentare/velocizzare le traiettorie, tramite una modifica della scala temporale, affinché le coppie rientrino nei vincoli. Si ricordi che l'espressione delle coppie è la seguente:

$$\begin{aligned}\tau(t) &= B(q)\ddot{q} + C(q(t), \dot{q}(t)) + g(q(t)) \\ &= B(q)\ddot{q} + \Gamma(q(t))[\dot{q}(t)\dot{q}(t)] + g(q(t)) \\ &\rightarrow \tau(t) = \tau_s(t) + g(q(t))\end{aligned}$$

Si introduce una scala temporale fittizia $r(t)$ con il vincolo che $r(0)=0$ e $r(t_f) = \bar{t}_f \neq t_f$ ottenendo:

$$q(t) = \bar{q}(r(t)) \rightarrow \begin{aligned} \dot{q} &= \dot{r}\bar{q}'(r) \\ \ddot{q} &= \dot{r}^2\bar{q}''(r) + \ddot{r}\bar{q}'(r(t)) \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione della velocità e dell'accelerazione nell'espressione delle coppie:

$$\tau = B(\bar{q}(r))(\dot{r}^2\bar{q}''(r) + \ddot{r}\bar{q}'(r)) + \Gamma(\bar{q}(r))\dot{r}^2[\bar{q}'(r)\bar{q}'(r)] + g(\bar{q}(r)) = \tau_s(t) + g(\bar{q}(r))$$

dove:

$$\tau_s(t) = \dot{r}^2\bar{\tau}_s(r) + B(\bar{q}(r))\ddot{r}\bar{q}'(r) \text{ con } \bar{\tau}_s(r) = B(\bar{q}(r))\bar{q}''(r) + \Gamma(\bar{q}(r))[\bar{q}'(r)\bar{q}'(r)]$$

Per semplicità si sceglie $r(t)=ct$ dove c è una costante: se $c<1$ si accelera mentre se $c>1$ si rallenta.

18. Organi di trasmissione

Gli organi di trasmissione rappresentano l'elemento finale di un sistema di attuazione (sorgente – amplificatore di potenza – servomotore – organo di trasmissione) e definiscono la potenza necessaria per l'attuazione del moto al giunto. Essi sono in grado di cambiare quantitativamente (dato un moto in uscita all'albero motore caratterizzato da elevate velocità e basse forze, lo trasforma in un moto caratterizzato da basse velocità e forze elevate) e qualitativamente (dato un moto rotazionale in uscita all'albero motore lo trasformano in un moto traslazionale in ingresso ai giunti) le caratteristiche del moto.

Vi sono diverse tipologie di organi di trasmissione:

- *Ruote dentate*: sono in grado di cambiare l'asse di rotazione e/o traslarne il punto di applicazione, per cui cambiano quantitativamente le caratteristiche del moto;
- *Coppie vite madre vite*: dato un moto rotatorio in uscita all'albero motore, lo trasformano in un moto traslatorio in ingresso ai giunti per cui sono adoperati per la realizzazione di giunti prismatici;
- *Cinghie dentate e catene*: permettono di allocare il motore distante dall'asse di moto del giunto che si intende attuare. Le cinghie sono deformabili per cui vengono operate in presenza di velocità elevate e basse forze mentre le catene sono adoperate in presenza di velocità basse e forze elevate.

19. Tipologie di attuatori + differenza tra attuatori elettrici e idraulici

In un sistema di attuazione, i servomotori sono posti tra l'amplificatore di potenza e l'organo di trasmissione e hanno la funzione definire l'asse di rotazione e fornire potenza meccanica all'organo di trasmissione. Esistono tre tipologie di servomotori:

- Pneumatici: utilizzano l'energia pneumatica, fornita da compressori, e la trasformano in energia meccanica tramite pistoni o turbine ad aria;
- Idraulici: utilizzano l'energia idraulica, immagazzinata in un serbatoio, e la trasformano in energia meccanica tramite delle pompe;
- Elettrici: prelevano l'energia elettrica dalla rete di distribuzione e la trasformano in energia meccanica.

Gli attuatori realizzati per i robot industriali sono molto diversi da quelli adoperati in automazione in quanto devono avere la capacità di inseguire la traiettoria pianificata, nonché l'inversione cinematica. In particolare, essi presentano:

- Bassa inerzia ed elevato rapporto potenza/peso;
- Capacità di sviluppare elevate accelerazioni e di coppie impulsive;
- Elevato campo di variazione della velocità;
- Elevata precisione di posizionamento.

Date le mansioni svolte dal robot industriale, si preferiscono utilizzare dei motori elettrici in quanto sono meno ingombranti, a meno che non si abbia la necessità di aprire/chiudere una pinza, e tra i più utilizzati vi sono il servomotore a corrente continua con magneti permanenti e il servomotore a commutazione elettronica.

Inoltre, da un punto di vista del controllo, i servomotori elettrici sono più versatili in quanto le prestazioni dinamiche di un servomotore idraulico dipendono dalla temperatura del fluido di pressione. Inoltre, per modificare il controllo bisogna sostituire pezzi dell'azionamento mentre in quello elettrico basta modificare i valori di corrente o tensione, a livello software.

Il servomotore a corrente continua con magneti permanenti presenta:

- Un generatore (circuito statorico) di flusso magnetico di eccitazione che presenta dei magneti permanenti realizzati con terre rare o materiali ceramici;
- Un circuito di armatura (rotore) che reca un avvolgimento costituito da delle spire di un solenoide avvolto in materiale ferromagnetico;
- Un collettore che consente di collegare i circuiti ad un circuito esterno di alimentazione.

Il servomotore a commutazione elettronica presenta:

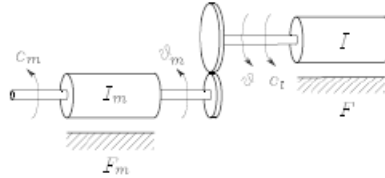
- Un generatore di flusso magnetico di eccitazione anch'esso composto da magneti permanenti e opera da rotore;
- Un circuito di armatura composto da un avvolgimento polifase, che funge da statore;
- Un circuito di commutazione che converte i segnali di posizioni, ricavati da sensori di posizione posto sull'albero motore, in sequenze di alimentazione delle fasi.

I vantaggi dei motori elettrici sono: basso costo, elevata gamma di prodotti, disponibilità diffusa di sorgenti di alimentazione, facile manutenzione e non inquinano l'ambiente di lavoro. Gli svantaggi sono: surriscaldamento e, in ambienti infiammabili, devono essere dotati di un opportuno isolamento.

I vantaggi dei motori idraulici sono: non c'è pericolo di surriscaldamento, sono autolubrificanti, sono intrinsecamente sicuri e hanno un ottimo rapporto potenza/peso. Gli svantaggi sono: costo elevato, gamma ridotta, inquinano, necessità di sorgente di alimentazione idraulica, manutenzione periodica, basso rendimento.

20. Riduttore meccanico

Per studiare gli effetti introdotti da un riduttore meccanico, cioè da un organo di trasmissione posto tra il servomotore e il giunto da esso azionato, si fa riferimento all'accoppiamento meccanico tra due ruote dentate supponendo che la coppia motrice sia ideale e collega l'asse di rotazione del servomotore con quello del giunto:



Sia dal lato motore che dal lato carico è possibile definire un momento di inerzia, velocità angolare, forza di attrito viscoso e rispettivamente una coppia motrice elettro meccanica e una coppia resistente di carico. Inoltre, la forza f scambiata tra le due ruote genera una coppia resistente per il moto dell'asse al motore e una coppia motrice per il moto di rotazione del carico per cui, applicando l'equilibrio, si ottengono le seguenti equazioni:

$$c_m = I_m \dot{\omega}_m + F_m \omega_m + f r_m$$

$$f r = I \dot{\omega} + F \omega + c_l$$

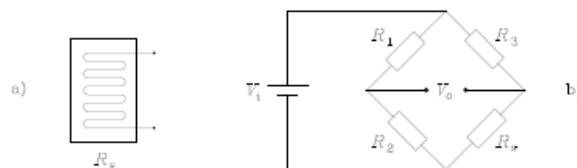
Combinando le due equazioni, l'equilibrio dinamico lato motore è pari a:

$$c_m = I_{eq} \dot{\omega} + F_{eq} \omega + \frac{c_l}{k_r} \text{ con } k_r \gg 1$$

Sostanzialmente, gli effetti che si hanno è che il momento di inerzia del carico viene ridotto di una quantità $1/k_r^2$ mentre la forza d'attrito e la coppia resistente di carico di una quantità $1/k_r$.

21. Sensore di forza

I sensori di forza sono dei sensori esteroceettivi e forniscono una misura di una forza/coppia tramite la misura di una deformazione indotta da una forza/coppia applicata ad un elemento elastico di opportune caratteristiche; il componente base dei sensori di forza sono gli estensimetri che sono degli elementi che hanno la capacità di variare la loro resistenza in funzione di una variazione delle loro dimensioni. Per trasformare le variazioni di resistenza in segnali elettrici, l'estensimetro viene adoperato come uno dei rami di un ponte di wheatstone portato all'equilibrio in assenza di sollecitazioni sull'estensimetro stesso:



$$V_o = V_i \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_s}{R_s + R_3} \right)$$

- Sensore di coppia all'albero

Viene utilizzato per misurare la coppia trasmessa dal servomotore al giunto e si compone di una serie di estensimetri montati su un organo deformabile interposto tra motore e il giunto. Tale organo deve avere bassa rigidezza torsionale ed elevata rigidezza flessionale, oltre a dover assicurare la proporzionalità tra la coppia applicata e la deformazione indotta.

La coppia misurata, essendo quella trasmessa dal servomotore al giunto, non coincide con la forza motrice elettromeccanica infatti la misura non porta in conto i contributi di inerzia, coppia di attrito del moto e della trasmissione a monte dei punti di misura.

- Sensore di forza al polso

Viene utilizzato come organo di connessione tra l'ultimo braccio e l'organo terminale: la connessione viene realizzata con un numero elevato di estensimetri che hanno la capacità di deformarsi sotto l'azione di una forza e momento qualunque sia il loro orientamento. Inoltre, la singola componente di forza rispetto alla terna solidale al sensore deve indurre il minor numero di deformazioni possibili.

Un esempio di sensore di forza al polso è quello a **croce di malta**: si ha un blocco in cui viene posto l'organo terminale e su ciascun lato sono presenti dei parallelepipedi sulle cui facce opposte è incollata una coppia di estensimetri per cui è possibile definire otto deformazioni.

La matrice che lega le misure di deformazione alle componenti di forza riferite alla terna s solidale al sensore è detta matrice di calibrazione e presenta la seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \\ \mu_x^s \\ \mu_y^s \\ \mu_z^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 & c_{17} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & c_{34} & 0 & c_{36} & 0 & c_{38} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & c_{48} \\ 0 & c_{52} & 0 & 0 & 0 & c_{56} & 0 & 0 \\ c_{61} & 0 & c_{63} & 0 & c_{65} & 0 & c_{67} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix}.$$

Da cosa si deduce quale è il sensore migliore? Il sensore che possiede una matrice di calibrazione con più zeri o con valori più bassi è quella che permette di ottenere un miglior disaccoppiamento strutturale delle componenti di forza e di momenti.

22. Sensore di visione

I sensori di visione sono dei sensori esterocettivi in quanto forniscono un'informazione sull'ambiente col quale il manipolatore entra in contatto infatti hanno il compito di trasformare l'energia luminosa in energia elettrico; a tale scopo si adopera come elemento sensibile il pixel e i sensori di visioni più diffusi, che si basano sull'effetto fotoelettrico dei semiconduttori, sono il CCD e il CMOS.

Il CCD è un sensore composto da una matrice rettangolare di pixel dove, quando un fotone colpisce la superficie dell'elemento sensibile, si genera un numero di elettroni liberi che assorbe una quantità di energia pari all'integrale temporale dell'intensità luminosa incidente sull'elemento. Il segnale elettrico viene poi elaborato in modo da ottenere il segnale video reale.

Il CMOS è un sensore composto da una matrice rettangolare di fotodiodi dove ciascuna giunzione è precaricata e si scarica quando viene colpita da un fotone. Un amplificatore integrato per ogni pixel trasforma questa carica in un livello di tensione di corrente per cui, non essendovi nessuna integrazione, non si ha l'effetto di focatura.

La telecamera è un sensore di visione dato da un insieme di elementi; in particolare, è un otturatore che effettua un campionamento temporale e vi è una lente che permette di convogliare la luce riflessa dall'oggetto su un punto del piano immagine, piano su cui giace il sensore. Si immagini di conoscere un punto P dell'oggetto e di conoscerne la posizione \tilde{P} in terna base. La posizione del punto \tilde{P} in terna camera è data da:

$$\tilde{P}^c = T_b^c \tilde{P}$$

Si vuole determinare la posizione di tale punto sul piano immagine per cui, dopo aver definito la terna (X,Y) sul piano immagine, con assi paralleli a quelli della terna camera, si ottiene:

$$X = -f \frac{\tilde{P}_x^c}{\tilde{P}_z^c} \quad Y = -f \frac{\tilde{P}_y^c}{\tilde{P}_z^c}$$

dove f rappresenta la distanza tra la lente e il piano immagine ed è detta distanza focale. A questo punto, non importa conoscere la posizione del punto ma l'intensità luminosa ad essa associata per cui bisogna effettuare un campionamento spaziale ottenendo le seguenti coordinate:

$$x_I = \alpha_x X + X_o \quad y_I = \alpha_y Y + Y_o$$

dove α sono parametri intrinseci del sensore mentre X_o e Y_o sono l'origine della terna pixel rispetto alla terna ottica. Tale trasformazione non lineare può essere scritta in una forma lineare tramite la rappresentazione omogenea di un punto:

$$X_I = \frac{x_I}{\lambda} \quad Y_I = \frac{y_I}{\lambda} \quad \lambda > 0$$

per cui si può riscrivere:

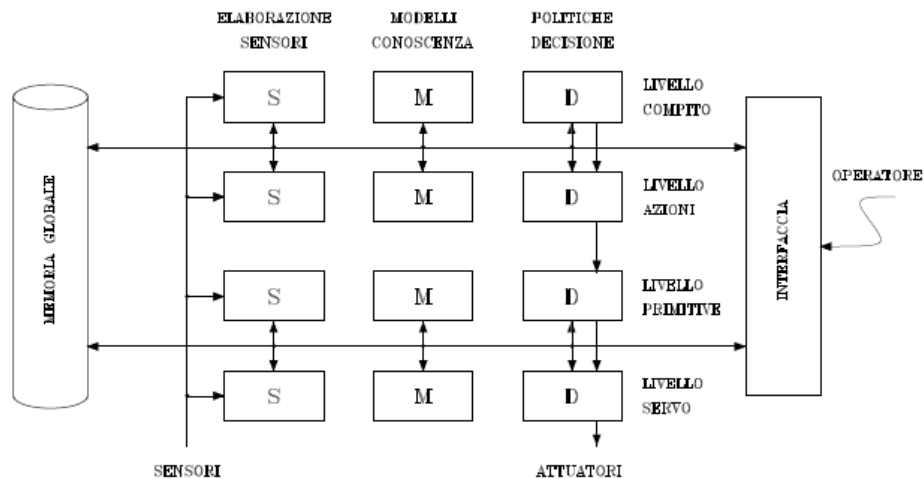
$$\begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ 1 \end{bmatrix} = \Omega \Pi \begin{bmatrix} p_x^c \\ p_y^c \\ p_z^c \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \Omega = \begin{bmatrix} f\alpha_x & 0 & X_o \\ 0 & f\alpha_y & Y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto, la trasformazione complessiva dallo spazio cartesiano allo spazio delle immagini è pari a:

$$\mathcal{E} = \Omega \Pi T_b^c$$

e rappresenta la *matrice di calibrazione della telecamera*.

23. Architettura funzionale dell'unità di governo



L'unità di governo a cui è affidata la gestione delle attività di un sistema robotizzato deve possedere strumenti che conferiscano al sistema le seguenti funzioni: capacità di manipolazione, capacità sensoriali, capacità di comportamento intelligente e capacità di elaborazione dei dati. Una realizzazione efficiente di queste funzioni può essere ottenuta con una architettura funzionale concepita come sovrapposizione di vari livelli di attività organizzati secondo una struttura gerarchica. Con riferimento alle funzioni dell'unità di governo che realizzano la gestione delle attività del sistema precedentemente elencate, è opportuno prevedere che in linea generale a ogni livello siano presenti tre moduli funzionali.

I *moduli sensoriali* acquisiscono, elaborano, correlano e integrano informazioni sensoriali nel tempo e nello spazio al fine di riconoscere e misurare lo stato del sistema e le caratteristiche dell'ambiente, i *moduli modellistici* contengono modelli dedotti sulla base di una conoscenza a priori del sistema e dell'ambiente; mentre *moduli decisionali* realizzano la decomposizione di compiti ad alto livello in azioni a basso livello; la decomposizione del compito coinvolge sia una decomposizione temporale in azioni sequenziali, sia una decomposizione spaziale in azioni concorrenti.

L'architettura funzionale necessita di una interfaccia operatore a ogni livello della gerarchia per consentire a un operatore di esplicare funzioni di supervisione e di intervento sul sistema robotizzato. Inoltre, l'operatore può essere informato sullo stato del sistema e fornire il suo contributo di conoscenza e di decisione ai moduli modellistico e sensoriale.

Al *livello del compito*, l'utente specifica il compito che il sistema robotizzato deve eseguire e tale specificazione avviene a un livello di astrazione elevato. Il compito desiderato viene analizzato e decomposto in una serie di azioni che, con un loro coordinamento spazio-temporale, ne consentono la realizzazione. La scelta delle azioni avviene sulla base dei modelli di conoscenza e della scena in cui il compito si inquadra. Per poter definire le azioni elementari da trasmettere al modulo decisionale del livello inferiore, il modulo decisionale deve consultare la sua base di conoscenza disponibile nel modulo modellistico.

Al *livello delle azioni*, i comandi simbolici provenienti dal livello del compito vengono tradotti in sequenze di configurazioni intermedie che individuano percorsi di moto relativi alle azioni elementari. Con riferimento a una delle azioni generate dal livello del compito di assemblaggio, il modulo decisionale sceglie il sistema di coordinate più appropriato per calcolare le pose dell'organo terminale del manipolatore, decide se operare in spazio giunti o spazio operativo, provvede al calcolo della sequenza di punti intermedi, definendo in tale ultimo caso le modalità di interpolazione.

Al *livello delle primitive*, sulla base della sequenza di configurazioni ricevute dal livello delle azioni, vengono calcolate traiettorie di moto ammissibili e viene definita la strategia di controllo. Il modulo decisionale calcola il percorso geometrico associando a esso una traiettoria individuata sulla base della conoscenza del modello dinamico del manipolatore disponibile nel modulo modellistico; definisce inoltre le caratteristiche della legge di controllo specificandone i relativi guadagni, e ove necessario realizza opportune trasformazioni di coordinate. Il modulo sensoriale provvede a fornire informazioni sull'instaurarsi di conflitti tra la pianificazione del movimento e la sua esecuzione.

Al *livello dei servo*, sulla base delle traiettorie di moto e delle modalità controllo impartite dal livello delle primitive, vengono realizzati gli algoritmi di controllo per fornire i segnali di attuazione ai servomotori dei giunti. L'algoritmo di controllo opera su segnali di errore tra i riferimenti e i valori effettivi delle grandezze controllate, eventualmente utilizzando la conoscenza del modello dinamico e della cinematica del manipolatore.

24. Architettura hardware dell'unità di governo

Le schede sono collegate a un bus (per esempio, un bus VME) che consente di sostenere lo scambio di comunicazione; la banda passante del bus deve essere sufficientemente larga in modo da soddisfare i requisiti imposti dai vincoli di tempo reale.

La *scheda sistema* è tipicamente una CPU dotata di: un microprocessore con coprocessore matematico, una memoria EPROM di inizializzazione, una memoria RAM locale, una memoria RAM condivisa con le altre schede attraverso il bus, un insieme di porte seriali e parallele di interfaccia con il bus e con il mondo esterno, contatori, registri, temporizzatori, gestore delle interruzioni. In essa vengono implementate le seguenti funzioni: interfaccia con l'operatore attraverso teach pendant, tastiera, video, stampante, interfaccia con una memoria esterna (disco rigido) usata per immagazzinare dati e programmi applicativi, interfaccia con rete locale di connessione (per esempio, Ethernet) con stazioni di lavoro e con altre unità di governo, interfaccia

I/O con apparecchiature periferiche presenti nell'area di lavoro (alimentatori, nastri trasportatori, sensori ON/OFF), inizializzazione del sistema, interprete del linguaggio di programmazione, arbitro del bus.

Nella *scheda cinematica* sono implementate le funzioni di: calcolo delle primitive di moto, calcolo della cinematica diretta, della cinematica inversa e dello Jacobiano, verifica di congruenza della traiettoria, gestione della ridondanza cinematica.

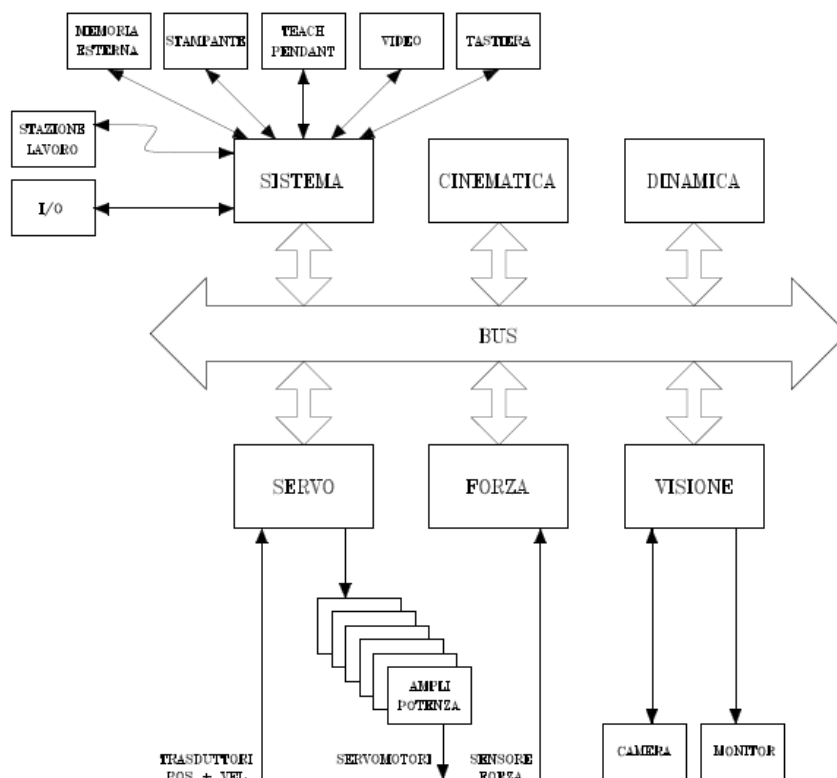
La *scheda dinamica* è dedicata al: calcolo della dinamica inversa.

La *scheda servo* svolge funzioni di: microinterpolazione dei riferimenti, calcolo dell'algoritmo di controllo, conversione D/A e interfaccia con gli amplificatori di potenza, elaborazione dei dati dei trasduttori di posizione e di velocità, interruzione del moto in situazioni di malfunzionamento.

La *scheda forza* effettua operazioni di: condizionamento dei segnali forniti dal sensore di forza e rappresentazione delle forze in una terna di coordinate assegnata.

La *scheda visione* provvede alla: elaborazione dei segnali forniti dalla telecamera, estrazione di caratteristiche geometriche della scena, localizzazione degli oggetti in terne di coordinate assegnate.

Le schede non comunicano tutte alla stessa frequenza: quelle collegate ai sensori propriocettivi scambiano i dati con il robot a frequenze da 100 a 1000 Hz, sia per assicurare prestazioni dinamiche di rilievo al controllo del moto, sia per rilevare situazioni di contatto dell'organo terminale in tempi molto brevi. Le schede cinematica e dinamica implementano funzioni di modello e non richiedono aggiornamento di dati a frequenze così elevate; infatti, la postura del manipolatore non varia in maniera apprezzabile in tempi molto brevi, per lo meno con riferimento alle velocità e/o accelerazioni operative tipiche dei robot industriali attuali, e frequenze di campionamento nell'intervallo (10,100) Hz sono usuali. La scheda visione non richiede elevata frequenza di aggiornamento dei dati sia perché la scena è quasi-statica, sia perché le elaborazioni connesse a fenomeni interpretativi sono tipicamente complesse, per cui frequenze tipiche sono nell'intervallo (1,10) Hz.



25. Controllo in velocità e controllo in coppia (controllo nello spazio dei giunti)

Dato il modello dinamico nello spazio dei giunti:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v(q)\dot{q} + g(q) = \tau$$

controllare nello spazio dei giunti consiste nell'andare a sintetizzare la coppia τ tale che:

$$q(t) = q_d(t) \rightarrow \text{problema dell'inseguimento}$$

$$q(t) = q_d \rightarrow \text{problema di regolazione}$$

Dal momento in cui le coppie vengono sviluppate dagli attuatori, potrebbe esserci una trasmissione meccanica:

$$k_r q = q_m \text{ con } k_r \gg 1$$

Riscrivendo tale equazione canale per canale, k_r sarebbe una matrice diagonale i cui elementi sono dati dai rapporti di induzione canale per canale e, sfruttando la dualità cineto-statica, si ottiene:

$$\tau = k_r \tau_m$$

Poiché le coppie sono sviluppate dagli attuatori, si vogliono riscrivere tali relazioni lato motore per cui, dalla teoria degli azionamenti elettrici, si ottiene:

$$k_r^{-1} \tau = k_t i_a$$

$$V_a = R_a i_a + k_t \dot{q}_m$$

$$V_a = G_v V_c$$

$$\rightarrow \tau = k_r k_t R_a^{-1} (G_v V_c - k_t k_r \dot{q})$$

Dunque, il modello può essere riscritto come:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(q)\dot{q} + g(q) = u$$

$$\text{con } F = F_v + k_r k_t R_a^{-1} k_t k_r \text{ e } u = k_r k_t R_a^{-1} G_v V_c$$

ottenendo un sistema controllato in velocità. Inoltre, se $k_r \gg 1$, R_a è composta da elementi piccoli e le coppie non sono elevate, si può assumere che:

$$G_v V_c \approx K_v K_r \dot{q}$$

Il controllo di velocità (o tensione) presenta caratteristiche di robustezza, rispetto alle variazioni dei parametri del modello del manipolatore, che sono enfatizzate dal valore dei rapporti di induzione e l'assunzione soprastante implica che la velocità dell' i -esimo giunto dipenda solo dall' i -esima tensione di controllo per cui il sistema presenta una struttura di controllo decentralizzato.

Invece, nel caso di controllo in coppia bisogna sintetizzare la τ per cui bisogna conoscere perfettamente i rapporti di induzione e la resistenza del circuito di armatura e, al fine di ridurre la sensibilità alla variazione parametrica, si considera:

$$\tau = u = K_r K_t G_t V_c$$

In questo caso si ottiene una struttura di controllo centralizzato in cui i risultati, in termine di precisione, saranno più elevati quanto maggiori saranno i rapporti di trasmissione e non bisogna necessariamente calcolare il modello dinamico.

26. Controllo decentralizzato, in tensione e corrente

Il controllo decentralizzato consiste nell'andare a considerare il manipolatore come un insieme di n sistemi indipendenti controllando ogni asse di giunto come un sistema a un ingresso e un'uscita; in particolare, consiste nell'andare a realizzare uno schema di controllo per ogni giunto, in maniera indipendente l'uno dall'altro.

Dalla teoria del controllo indipendente ai giunti si ottiene:

$$\tau_m = K_r \tau \quad q_m = k_r q$$

per cui, sostituendo tali valori nel modello dinamico, si ottiene:

$$k_r^{-1} B(q) k_r^{-1} \ddot{q}_m + k_r^{-1} C(q, \dot{q}) k_r^{-1} \dot{q}_m + k_r^{-1} F_v(q) k_r^{-1} \dot{q}_m + k_r^{-1} g(q) = \tau_m$$

La matrice di inerzia $B(q)$ è una matrice diagonale, definita positiva, dipendente dalla configurazione che presenta degli elementi in funzione di q , sulla diagonale principale, ed elementi non dipendenti da q , al di fuori della diagonale principale, per cui si può dire che:

$$B(q) = \bar{B} + \Delta B(q)$$

inoltre, il termine di forza d'attrito viscoso è lineare per cui si può riscrivere:

$$F_m = +k_r^{-1} F_v(q) k_r^{-1}$$

A questo punto, il modello dinamico può essere riscritto come segue:

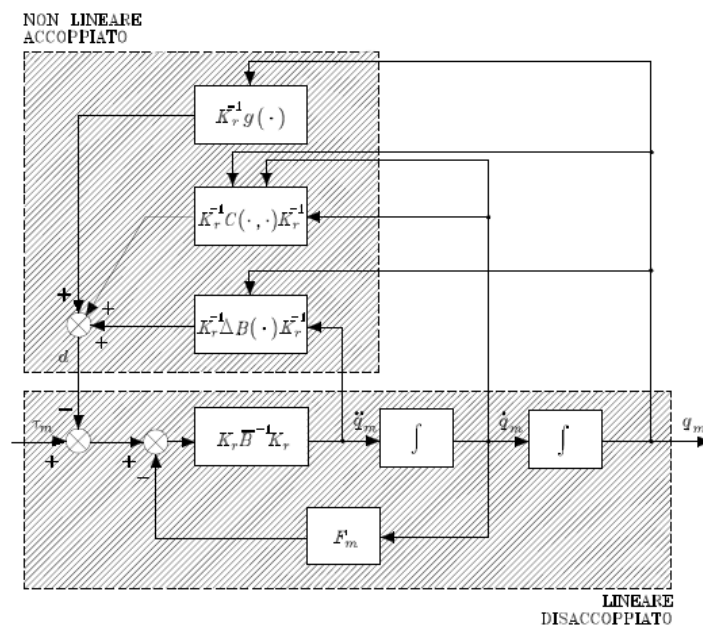
$$k_r^{-1} \bar{B} k_r^{-1} \ddot{q}_m + F_m \dot{q}_m + d = \tau_m$$

dove d è pari a:

$$d = k_r^{-1} \Delta B(q) k_r^{-1} \ddot{q}_m + k_r^{-1} C(q, \dot{q}) k_r^{-1} \dot{q}_m + k_r^{-1} g(q)$$

Sostanzialmente, nel caso del controllo decentralizzato il sistema viene visto come l'insieme di due sottosistemi di cui uno lineare disaccoppiato ed uno non lineare accoppiato; sostanzialmente, l'uscita del non lineare accoppiato viene posta in ingresso al sistema lineare disaccoppiato sottoforma di disturbo.

Il controllore di giunto deve garantire elevate prestazioni in termini di forte reiezione ai disturbi e capacità di inseguimento delle traiettorie di riferimento; la struttura prende il nome di controllo indipendente ai giunti e si basa sull'errore tra l'uscita desiderata e l'uscita effettiva.



27. Controllo indipendente ai giunti con retroazione di posizione e velocità

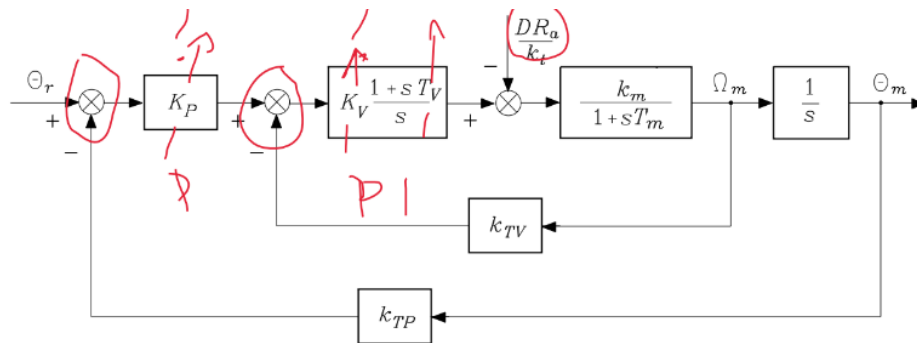
Essendovi un disturbo in ingresso nello schema di controllo decentralizzato, si vuole realizzare un controllore che permetta di ridurre gli effetti del disturbo sull'uscita e per far ciò si utilizza un'azione proporzionale integrale:

$$C(s) = K_c \frac{(1 + sT_c)}{s}$$

Si adopera questa tipologia di azione in quanto:

- L'azione proporzionale permette di aumentare i guadagni degli amplificatori a monte del punto di applicazione del disturbo, riducendone gli effetti sull'uscita;
- L'azione integrale permette di annullare gli effetti della componente gravitazione, a regime, sull'uscita.

Nel caso di un controllo indipendente ai giunti con retroazione di posizione e velocità, lo schema a blocchi è fatto come segue:



per cui la funzione di trasferimento di azione indiretta è pari a:

$$C(s)G(s) = \frac{K_p K_v K_m (1 + sT_v)}{s^2 (1 + sT_m)}$$

mentre la funzione di trasferimento di azione diretta è pari a:

$$H(s) = K_{TP} \left(1 + \frac{sK_{TV}}{K_P K_{TP}} \right)$$

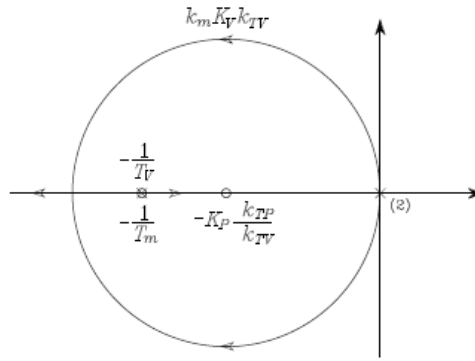
Per realizzare il controllo si fa riferimento al luogo delle radici che consiste nel legare la posizione di poli e zeri del sistema a ciclo aperto con quelli del sistema a ciclo chiuso e si ricorda che appartengono al luogo delle radici quei rami che lasciando alla propria destra un numero dispari di radici.

Nel caso in esame, il sistema presenta un'azione PI in posizione e una posizione PI in velocità per cui ha:

- Uno zero in $s = -1/T_v$;
- Uno zero in $s = -K_P K_{TP} / K_{TV}$;
- Un polo in $s = -1/T_m$;
- Un polo doppio in $s=0$.

e presenta tre gradi di libertà: K_P , K_V e T_V .

Si può scegliere $T_V = T_m$ in modo da cancellare un polo con uno zero, cosa non fattibile nel solo caso di retroazione di posizione perché si ottiene un sistema al limite della stabilità, e il luogo delle radici è fatto come segue:



Si hanno due asintoti che partono dal polo doppio con una pendenza di $\pm 90^\circ$, si incontrano nel punto doppio e poi un ramo converge nello zero e un ramo diverge a $-\infty$. Inoltre, tramite la scelta dei guadagni, si fa un modo che da avere dei poli complessi e coniugati, al fine di migliorare le caratteristiche del sistema.

La funzione di trasferimento che lega l'ingresso all'uscita è pari a:

$$\frac{\theta_m(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{K_{TP}}}{1 + \frac{sK_{TV}}{K_{TP}K_p} + \frac{s^2}{K_m K_{TP} K_p K_v}}$$

mentre, la funzione di trasferimento che lega l'uscita al disturbo è pari a:

$$\frac{\theta_m(s)}{D(s)} = \frac{-sR_a/K_t K_{TP} K_p K_v (1 + T_m = T_v)}{1 + \frac{sK_{TV}}{K_{TP}K_p} + \frac{s^2}{K_m K_{TP} K_p K_v}}$$

La f.d.t ingresso-uscita può essere confrontata con la f.d.t tipica del secondo ordine:

$$W(s) = \frac{\frac{1}{K_{TP}}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

da cui, eguagliando i coefficienti, si ottengono i parametri di progetto:

$$\frac{2\xi\omega_n}{K_m} = K_V K_{TV}$$

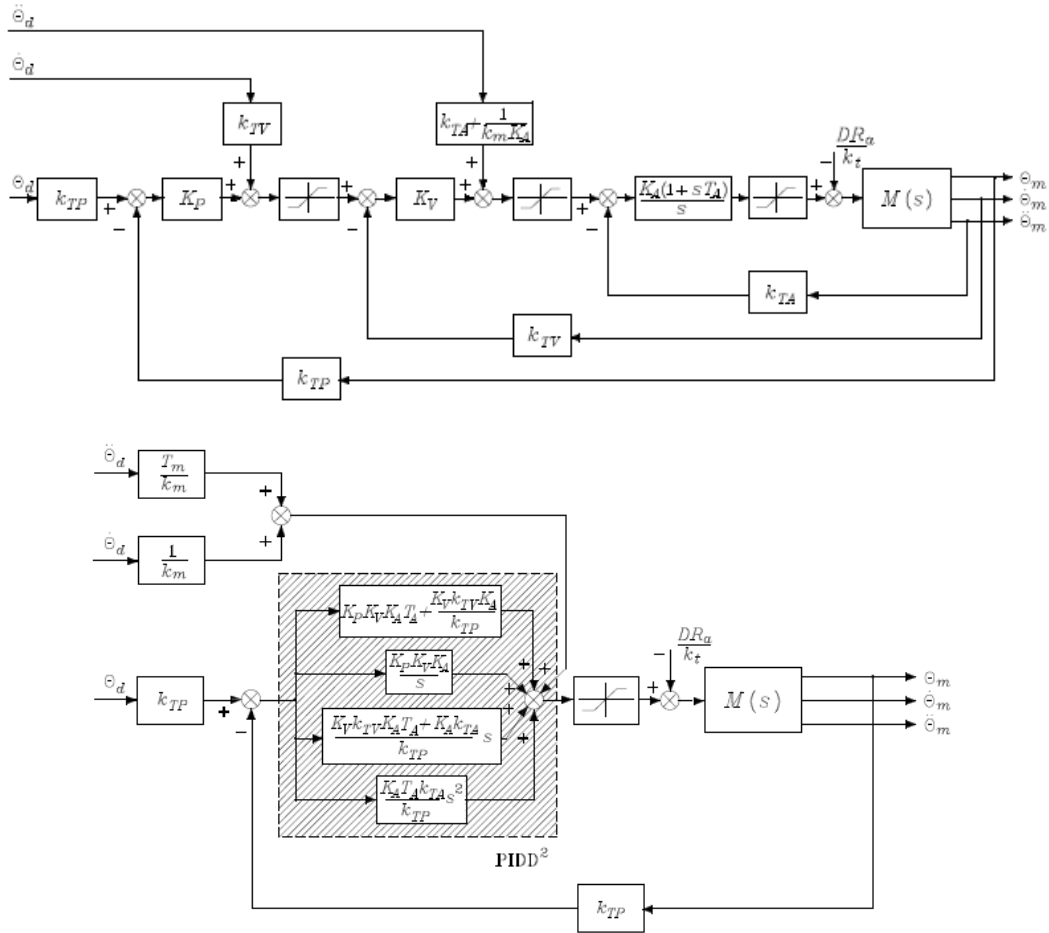
$$\frac{\omega_n^2}{K_m} = K_{TP} K_p K_v = X_R \text{ (fattore di reiezione)}$$

$$T_R = \max\left(T_m; \frac{1}{\xi\omega_n}\right) \text{ (recovery time)}$$

Il disturbo viene ridotto tramite K_p , l'ampiezza in transitorio viene attenuata da K_V , si riduce il recovery time che può essere pari proprio al tempo del sistema; presenta delle caratteristiche di attenuazione migliori ed un recovery time inferiore rispetto alla sola retroazione in posizione.

28. Compensazione in avanti con coppia precalcolata

Dato lo schema di controllo del $PIDD^2$:



Per capire se e come introdurre un controllo centralizzato bisogna studiarne l'uscita:

$$a_2 \ddot{e} + a_1 \dot{e} + a_0 e + a_{-1} \int e(\xi) d\xi + \frac{T_m}{K_m} \ddot{\theta}_m + \frac{1}{K_m} \dot{\theta}_m - \frac{R_a}{K_t} d = \frac{T_m}{K_m} \ddot{\theta}_{md} + \frac{1}{K_m} \dot{\theta}_{md}$$

Tale segnale è proporzionale all'errore $e = K_{TP}\theta_{md} - K_{TP}\theta_m$ moltiplicato per a_0 , $a_1 \dot{e}$ è dovuto ad un'azione derivativa, $a_2 \ddot{e}$ è dovuto ad un'azione D^2 e $a_{-1} \int e(\xi) d\xi$ è dovuto ad un'azione integrale.

Spostando tutti i termini a sinistra ad esclusione del termine legato al disturbo che viene spostato a destra, si ottiene:

$$\left(a_2 + \frac{T_m}{K_m}\right) \ddot{e} + \left(a_1 + \frac{1}{K_m}\right) \dot{e} + a_0 e + a_{-1} \int e(\xi) d\xi = \frac{R_a}{K_t} d$$

da cui:

$$a_2' \ddot{e} + a_1' \dot{e} + a_0' e + a_{-1}' \int e(\xi) d\xi = \frac{R_a}{K_t} d$$

$$\rightarrow \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-s \frac{K_t}{R_a}}{a_2' s^3 + a_1' s^2 + a_0' s + a_{-1}'}$$

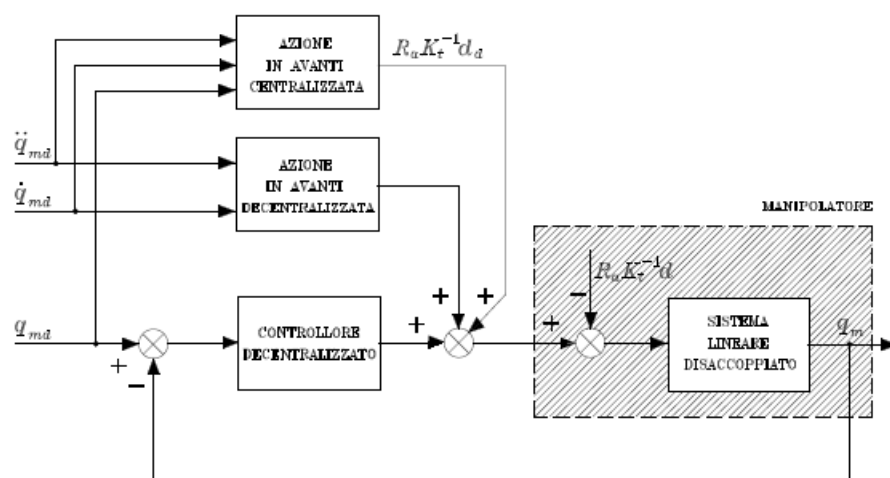
I coefficienti dipendono dai guadagni e quanto più i guadagni saranno elevati maggiore sarà la robustezza anche se i guadagni devono comunque essere scelti in maniera tale da rendere il sistema globalmente stabile. Il disturbo è pari a $-R_a/K_t d$ dove d è pari a tutti i termini non lineari accoppiati del modello dinamico ma, poiché si dispone di un set di traiettorie desiderate, è possibile calcolare il disturbo desiderato:

$$d_d = k_r^{-1} \Delta B(q) k_r^{-1} \ddot{q}_{md} + k_r^{-1} C(q, \dot{q}) k_r^{-1} \dot{q}_{md} + k_r^{-1} g(q)$$

Lo scopo sarebbe quello di definire un disturbo desiderato tale che $R_a/K_t d_d$ cancelli $R_a/K_t d$ ma tale cancellazione non è perfetta, dal momento in cui il disturbo dipende da come si muove il manipolatore, e il disturbo viene attenuato di una quantità:

$$\tilde{d} = d_d - d$$

Quindi, il controllo centralizzato permette di ridurre lo sforzo del controllo decentralizzato di eiettare tutto il disturbo d , dal momento in cui adesso va si vuole eiettare solo \tilde{d} , e ciò permette di ridurre i guadagni.



29. Controllo centralizzato

Quando si realizza un controllo centralizzato il manipolatore viene visto come un sistema composto da n sottosistemi non lineare accoppiati per cui si parte dallo studio del modello dinamico:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(q)\dot{q} + g(q) = \tau$$

Nel caso del controllo centralizzato si vedono due tipologie di controllo: a dinamica inversa e PD con compensazione di gravità.

- Controllo centralizzato a dinamica inversa

Il controllo a dinamica inversa si basa sulla proprietà che la matrice di inversa $B(q)$ sia definita positiva così da effettuare una feedback linearization ovvero si utilizza un'azione in retroazione che vada a linearizzare il sistema; in realtà, sarebbe più corretto parlare di compensazione poiché si adopera un'azione che permetta di rimuovere i termini non lineari dal modello.

In particolare:

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = u$$

$$u = B(q)y + n(q, \dot{q})$$

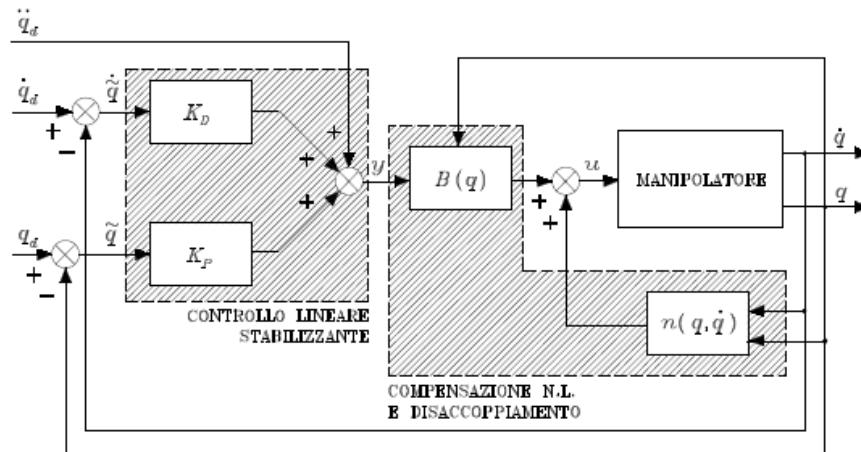
$$\rightarrow \ddot{q} = y$$

In questo modo si passa da un sistema non lineare accoppiato ad un sistema composto da n integratori lineari e disaccoppiati, e l'ingresso y viene scelto in maniera tale da andare a stabilizzare il sistema. In particolare, avendo un sistema del secondo ordine, si sceglie:

$$y = \ddot{q}_d + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} \quad \text{con } \tilde{q} = q_d - q$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{q}} + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} = 0$$

Essendo K_D e K_P definite positive, il sistema risulta essere asintoticamente stabile e lo schema a blocchi è fatto come segue:



Sostanzialmente, il controllo centralizzato a dinamica inversa permette di risolvere un problema di inseguimento tramite la scelta di una legge di controllo che vada a compensare i termini inerziali e i termini non lineari e di un ingresso che vada a stabilizzare il sistema. Ovviamente, per far ciò, bisogna conoscere perfettamente il modello dinamico e qual ora ciò non sia possibile, di base, si realizzerebbe una compensazione imperfetta; per risolvere tale problema si utilizza un'azione di controllo PI.

- Controllo centralizzato PD con compensazione di gravità

Si vuole realizzare un controllo che permetta di risolvere un problema di regolazione, cioè, che permetta di avere una $q_d = \text{cost}$; nel controllo decentralizzato si aveva un sistema non lineare per cui si andava a linearizzare per poi definire la legge di controllo. Nel caso del controllo centralizzato, invece, si vuole ricavare una legge di controllo senza linearizzare il sistema.

Per ricavare una legge di controllo che assicuri la stabilità del sistema si utilizza, in maniera puramente costruttiva, il metodo di Lyapunov per cui scelto lo stato pari a:

$$x = [\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T$$

la funzione candidata di Lyapunov è pari a:

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_P \tilde{q}$$

Tale quantità risulta essere definita e si annulla nell'origine di stato, per cui le prime due ipotesi previste dal metodo sono soddisfatte, si studi ora la derivata:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q} B(q) \dot{q} - \dot{q}^T K_P \tilde{q}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} (\dot{B}(q) - 2C) - \dot{q}^T F_V \dot{q} - \dot{q}^T (K_P \tilde{q} + g - u)$$

Il primo termine è nullo per il teorema di conservazione dell'energia, il secondo è definito negativo mentre il terzo, al fine di annullarlo, si sceglie:

$$u = K_P \tilde{q} + g$$

In realtà, poiché si vuole che le traiettorie vadano più velocemente a zero, si aggiunge un termine derivativo che consenta di migliorare la prontezza del sistema:

$$u = -K_D \dot{q} + K_P \tilde{q} + g$$

In questo modo si ottiene un controllo PD, essendoci un'azione proporzionale che agisce sulla velocità e un'azione proporzionale che agisce sull'errore di posizione, con compensazione di gravità, poiché il termine derivativo viene cancellato infatti:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T (F + K_D) \dot{q}$$

Tale quantità si annulla quando $\dot{q} = 0$ ma si vuole anche che $\tilde{q} = 0$ dal momento in cui si vuole una posa costante; per dimostrare l'asintotica stabilità si utilizza il criterio di Lasal il quale dice che se il più grosso invariante tale per cui $\dot{V} = 0$ coincide con l'origine dello spazio di stato, allora il sistema è globalmente asintoticamente stabile.

Quindi, sostituendo la legge di controllo nel modello:

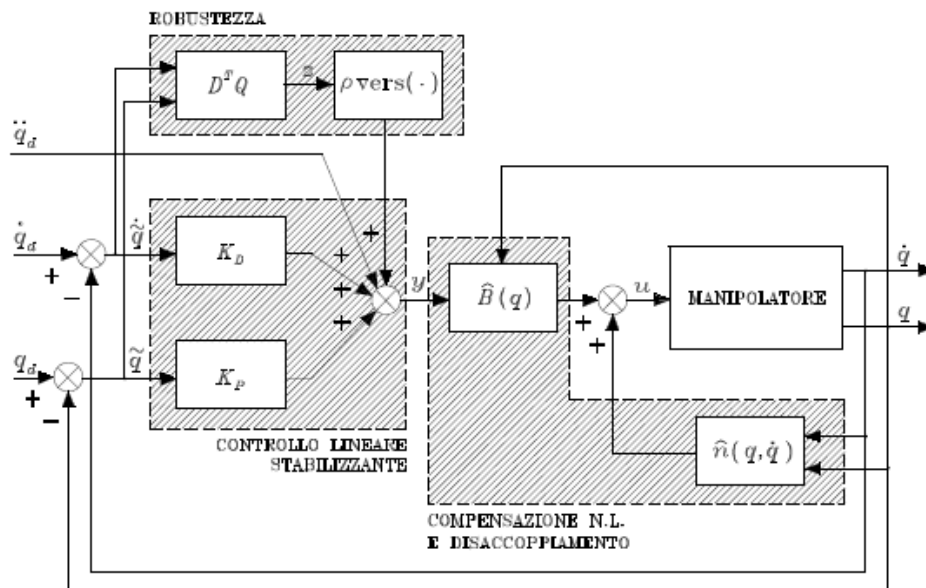
$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + F(q)\dot{q} + g(q) = g(q) + K_P \tilde{q} + K_D \dot{q}$$

a regime, cioè per $\dot{q} = 0$, si ottiene:

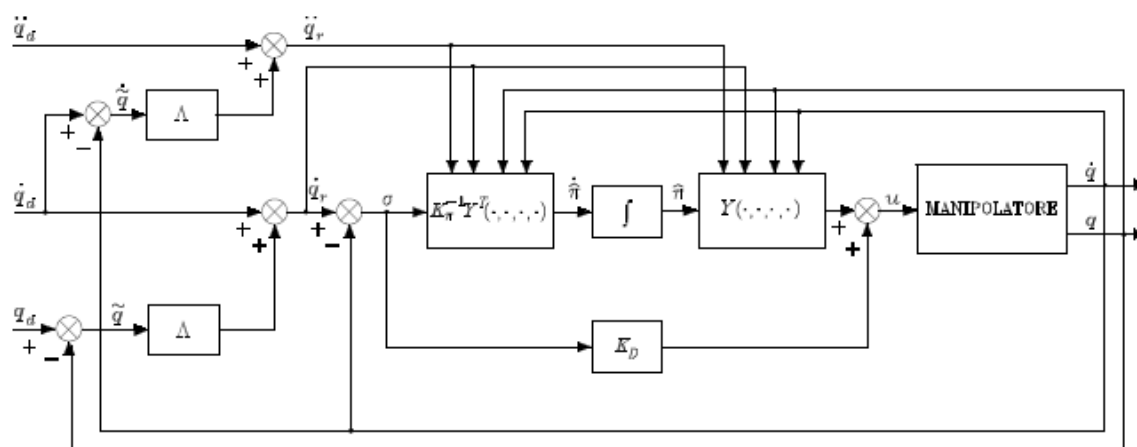
$$K_P \tilde{q} = 0 \rightarrow \tilde{q} = q_d - q = 0$$

Per cui il sistema risulta essere globalmente asintoticamente stabile se la legge di controllo presenta un'azione lineare PD e un'azione di compensazione dei termini gravitazionali, purché le matrici siano definite positive.

30. Controllo robusto + superfici di sliding



31. Controllo adattativo



32. Controllo PD+ (trasposta) e con dinamica inversa (inversa) nello spazio operativo

