Operações: erros e ponto flutuante

Profª Tânia Camila Kochmanscky Goulart

Aritmética por arredondamento

Considere uma máquina qualquer e uma série de operações aritméticas. Pelo fato do arredondamento ser feito após cada operação, temos, ao contrário do que é válido para números reais, que as operações aritméticas (adição, subtração, divisão e multiplicação) não são nem associativas e nem distributivas.

Para os exemplos abaixo, considere o sistema com base $\beta = 10$ e três dígitos significativos.

Efetue as operações indicadas:

a) $(11.4 + 3.18) + 5.05$ *e* $11.4 + (3.18 + 5.05)$

$$
\begin{aligned}
(11.4 + 3.18) + 5.05 &= 14.6 + 5.05 &= 19.7 \\
11.4 + (3.18 + 5.05) &= 11.4 + 8.23 &= 19.6
\end{aligned}
$$

Aritmética por arredondamento

b) $\dfrac{3.18 \times 11.4}{5.05}$ e $\left(\dfrac{3.18}{5.05}\right) \times 11.4$

$$\begin{aligned} \frac{3.18 \times 11.4}{5.05} &= \frac{36.3}{11.4} &= 7.18 \\ \left(\frac{3.18}{5.05}\right) \times 11.4 &= 3.18 \times 16.5 &= 7.19 \end{aligned}$$

c) $3.18 \times (5.05 + 11.4)$ e $3.18 \times 5.05 + 3.18 \times 11.4$

$$\begin{aligned} 3.18 \times (5.05 + 11.4) &= 3.18 \times 16.5 &= 52.3 \\ 3.18 \times 5.05 + 3.18 \times 11.4 &= 16.1 + 36.3 &= 52.4 \end{aligned}$$

Aritmética no ponto flutuante – Propagação de erros

Será mostrado um exemplo que ilustra como os erros descritos anteriormente podem influenciar no desenvolvimento de um cálculo.

Suponhamos que as operações indicadas nos itens a) e b) sejam processadas numa máquina com 4 dígitos significativos.

a) $(x_2 + x_1) - x_1$

b) $x_2 + (x_1 - x_1)$

Fazendo $x_1 = 0.3491 \times 10^4$ e $x_2 = 0,2345 \times 10^0$ temos:

$$
\begin{aligned}
a)\ (x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345.10^0 + 0,3491.10^4) - 0,3491.10^4 \\
&= 0.3491.10^4 - 0,3491.10^4 \\
&= 0,0000
\end{aligned}
$$

Aritmética no ponto flutuante – Propagação de erros

$$b)\ x_2 + (x_1 - x_1) = 0{,}2345.10^0 + (0{,}3491.10^4 - 0{,}3491.10^4)$$
$$= 0.2345.10^0 + 0{,}0000$$
$$= 0{,}2345$$

A causa da diferença nas operações anteriores foi um arredondamento que foi feito na adição $(x_2 + x_1)$ do item a), cujo resultado tem oito dígitos. Como a máquina só armazena 4 dígitos, os menos significativos foram desprezados.

Ao se utilizar uma máquina de calcular deve-se está atento a essas particularidades causadas pelo erro de arredondamento, não só na adição, mas também nas demais operações.

Assim, a aritmética do ponto flutuante não é **associativa** e nem **distributiva** (pesquisar!)

Exercício 1

Seja um sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos, base decimal e com acumulador de precisão dupla. Dados os números:

$x = 0.7237 \times 10^4$ $\quad y = 0.2145 \times 10^{-3}$ $\quad$ e $\quad z = 0.2585 \times 10^1$

efetue as seguintes operações e obtenha o erro relativo no resultado, supondo que x, y e z estão exatamente representados:

a) $x + y + z$

b) $x - y - z$

c) x/y

d) $(xy)/z$

e) $x(y/z)$

O que é **acumulador de precisão dupla**? E de **precisão simples**? (pesquisar!)

Resposta exercício 1

a) $x + y + z = 0.7240 \times 10^4$

b) $x - y - z = 0.7234 \times 10^4$

c) $x/y = 0.3374 \times 10^8$

d) $(xy) / z = 0.6004$

e) $x(y/z) = 0.6005$

Exercício 2

Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por: base decimal, 4 dígitos na mantissa (t=4), e expoentes no intervalo (-5,5). Pede-se:

a) Como será o número **73,758** nesta máquina se for usado o arredondamento?

E se for usado o truncamento?

b) Se **a=42450** e **b=3** qual o resultado de a+b?

Resposta exercício 2

a) 0.7375×10^2 (truncamento) 0.7376×10^2 (arredondamento)

b) 42450

Exercício 3

Use o sistema F(10,3,-5,5) para mostrar que:

a) $(4210 - 4.99) - 0.02 \neq 4210 - (4.99 + 0.02)$

b) $(0.123 / 7.97) * 84.9 \neq (0.123 * 84.9) / 7.97$

c) $15.9 * (4.99 + 0.02) \neq (15.9 * 4.99) + (15.9 * 0.02)$

Resposta exercício 3

$$a)\ (4210 - 4.99) - 0.02 \xrightarrow{A} 4210, \quad 4210 - (4.99 + 0.02) \xrightarrow{A} 4200$$

$$b)\ (0.123 / 7.97) * 84.9 \xrightarrow{A} 1.31, \quad (0.123 * 84.9) / 7.97 \xrightarrow{A} 1.30$$

$$c)\ 15.9 * (4.99 + 0.02) \xrightarrow{A} 79.7, \quad (15.9 * 4.99) + (15.9 * 0.02) \xrightarrow{A} 79.6$$

Exercício 4

Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por: $\beta = 10$, $t = 4$, $l = -5$ e $u = 5$. Pede-se:

qual o resultado da soma

$$S = 42450 + \sum_{k=1}^{10} 3$$

idem para a soma:

$$S = \sum_{k=1}^{10} 3 + 42450.$$

(Obviamente o resultado deveria ser o mesmo. Contudo, as operações devem ser realizadas na ordem em que aparecem as parcelas, o que conduzirá a resultados distintos).

Resposta exercício 4

Resp. $S1 = 42450 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

$= 0.4245\times10^5 + 0.00003\times10^5 = 0.42453\times10^5 \rightarrow 0.4245\times10^5$ (representado na mantissa com 4 dígitos)

depois teremos

$0.4245\times10^5 + 0.00003\times10^5 = 0.42453\times10^5$ (idem)

depois teremos

$0.4245\times10^5 + 0.00003\times10^5 = 0.42453\times10^5$

.... até terminar a última soma individual

$S1 = 0.4245\times10^5$

Resposta exercício 4

$$S2 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 42450$$

$$= 0.3000\times10^1 + 0.3000\times10^1 = 0.6000\times10^1$$

$$= \quad 0.6000\times10^1 \quad + 0.3000\times10^1 = 0.9000\times10^1$$

$$= \quad 0.9000\times10^1 \quad + 0.3000\times10^1 = 1.2000\times10^1 = 0.1200\times10^2$$

$$= \quad 0.1200\times10^2 \quad + 0.03000\times10^2 = 0.1500\times10^2$$

.... ate terminar o ultimo 3 que resultara no numero 0.3000×10^2. Depois é feita a soma com o número 42450 e no final teremos:

$0.3000\times10^2 \rightarrow 0.0003\times10^5$

$S2=0.0003\times10^5 + 0.4245\times10^5 = 0.4248\times10^5$

Exercício 5

Escreva um programa em alguma linguagem para obter o resultado da seguinte operação:

$$S = 10000 - \sum_{k=1}^{n} x$$

para: *a*) n = 100000 e x = 0.1; *b*) n = 80000 e x = 0.125.

Lista 03

- Os exercícios deste slide (1 a 5) devem ser apresentados no dia da avaliação.