Raízes: "Zeros reais de funções reais"

Equações Não-Lineares

O problema de calcular uma raiz pode ser dividido em duas fases:

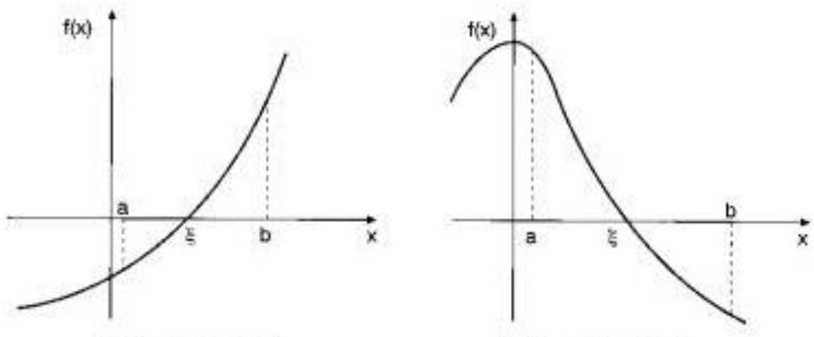
Fase I: Isolamento da raiz, isto é, encontrar um intervalo $[a, b]$ que contenha uma, e somente uma, raiz de $f(x) = 0$.

Fase II: Refinamento da raiz, que consiste em, escolhidas aproximações iniciais no intervalo encontrado na Fase I, melhorá-las sucessivamente até obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão ϵ pré-fixada.

Fase I: Isolamento das Raízes

Teorema . *Seja $f(x)$ uma função* **contínua** *num intervalo $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$. Além disso, se $f'(x)$ não muda de sinal em $[a, b]$ então $\overline{x}$ é a única raiz de $f(x)$ neste intervalo.*

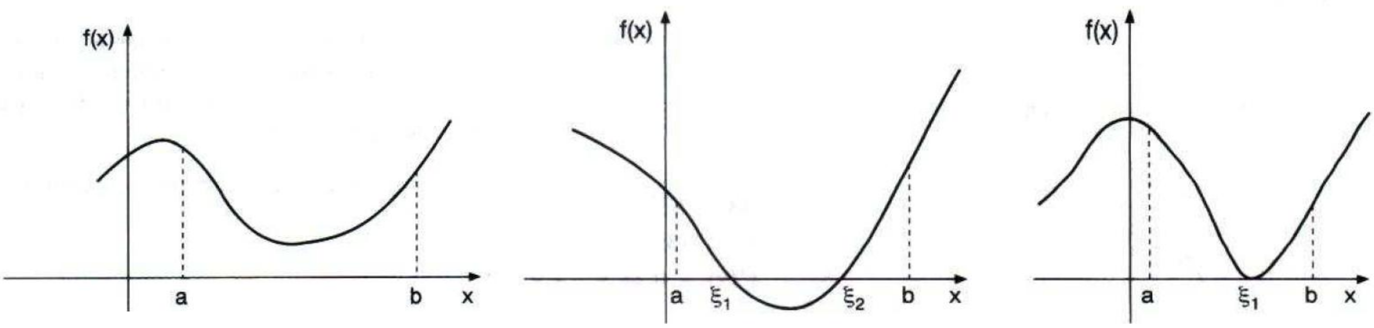
GRAFICAMENTE



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$

$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

Se f(a)f(b) > 0 então podemos ter várias situações no intervalo [a, b], conforme mostram os gráficos:



A análise gráfica da função $f(x)$ ou da equação $f(x) = 0$ é fundamental para obter boas aproximações para a raiz. Para tanto, podemos executar os seguintes procedimentos:

1. Esboçar o gráfico da função $f(x)$ e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{ox}$;
2. A partir da equação $f(x) = 0$, obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam, pois neste caso $f(\overline{x}) = 0 \iff g(\overline{x}) = h(\overline{x})$;
3. Usar os programas que traçam gráficos de funções, disponíveis em algumas calculadoras ou softwares matemáticos.

Fase II: Refinamento

Serão apresentados aqui três métodos numéricos de refinamento da raiz: o método da Bisseção, de Newton e das Secantes. A forma como se efetua o refinamento é o que diferencia os métodos. Porém, antes de descrever estes métodos, veremos os critérios de parada adotados.

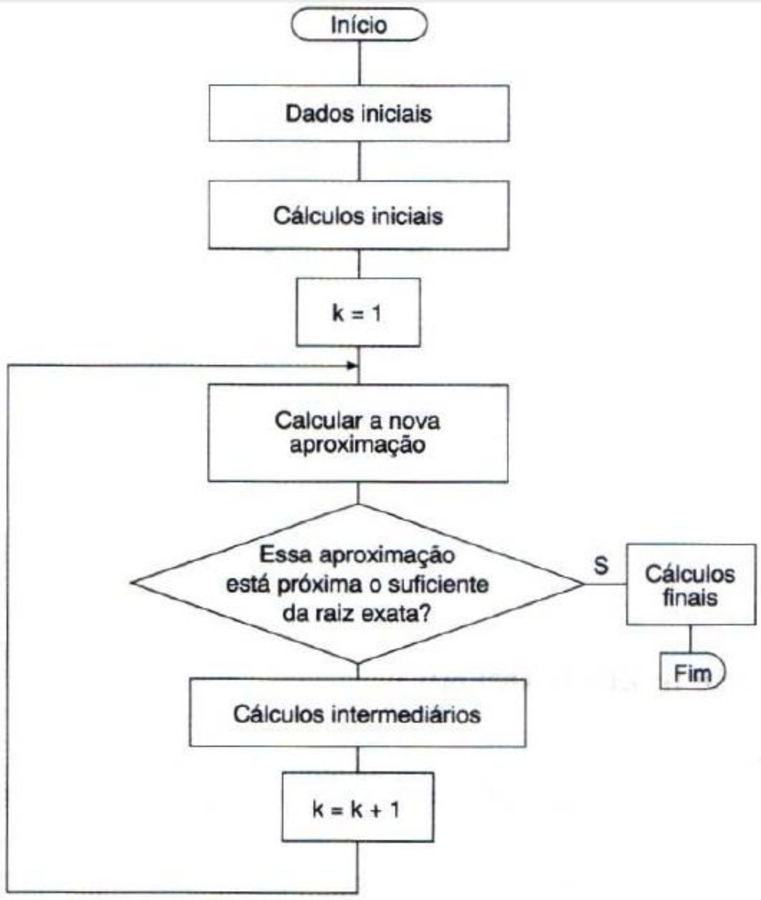
Estudaremos neste item vários métodos numéricos de refinamento de raiz. A forma como se efetua o refinamento é que diferencia os métodos. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos.

Um *método iterativo* consiste em uma seqüência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos.

A execução de um ciclo recebe o nome de *iteração*. Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes que permitem verificar se foi atingido um resultado próximo o suficiente do resultado esperado.

Observamos que os métodos iterativos para obter zeros de funções fornecem apenas uma aproximação para a solução exata.

Os métodos iterativos para refinamento da aproximação inicial para a raiz exata podem ser colocados num diagrama de fluxo:



Critério de Parada

O *critério de parada* interrompe a seqüência gerada pelos métodos. Este deve avaliar quando x_k, na k-ésima iteração, está suficientemente próximo da raiz exata. Contudo, o valor exato da raiz é desconhecido na maioria dos casos, logo, o processo é interrompido quando pelo menos um dos critérios a seguir é satisfeito:

1. Avaliação do ponto na função:
$$|f(x_k)| \leq \epsilon;$$

2. Avaliação do tamanho do intervalo:
$$|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \leq \epsilon;$$

para ϵ suficientemente pequeno (precisão desejada).

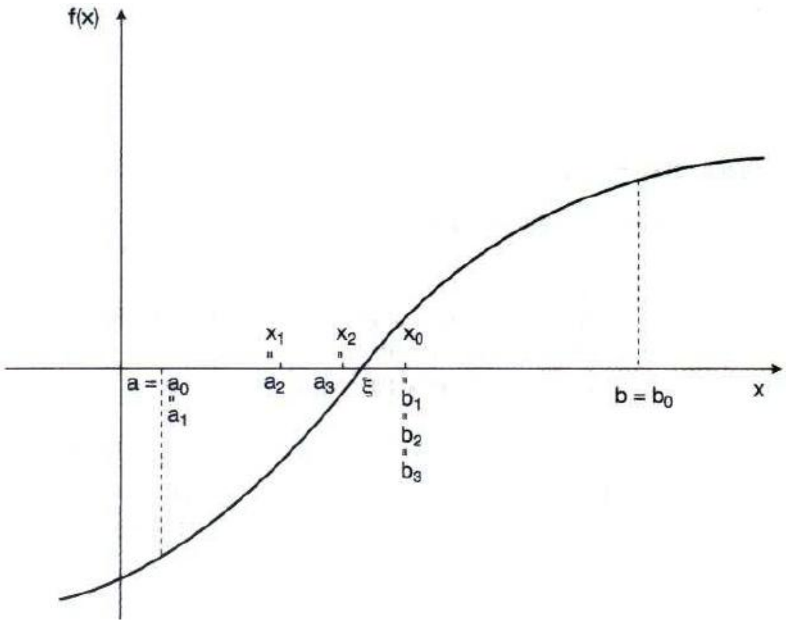
MÉTODOS ITERATIVOS PARA SE OBTER ZEROS REAIS DE FUNÇÕES

I. MÉTODO DA BISSECÇÃO

Seja a função f(x) contínua no intervalo [a, b] e tal que f(a)f(b) < 0.

Vamos supor, para simplificar, que o intervalo (a, b) contenha uma única raiz da equação f(x) = 0.

O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida: $(b - a) < \varepsilon$, usando para isto a sucessiva divisão de [a, b] ao meio.



Pelo exemplo trabalhado inicialmente em sala de aula, temos a seguinte tabela de iterações:

$f(x) = x^3 - 9x + 3$ $\quad$ $I = [0, 1]$ $\quad$ $\varepsilon = 10^{-3}$

Iteração	x	f(x)	b − a
1	.5	−1.375	.5
2	.25	.765625	.25
3	.375	−.322265625	.125
4	.3125	.218017578	.0625
5	.34375	−.0531311035	.03125
6	.328125	.0822029114	.015625
7	.3359375	.0144743919	7.8125×10^{-3}
8	.33984375	−.0193439126	3.90625×10^{-3}
9	.337890625	$-2.43862718 \times 10^{-3}$	1.953125×10^{-3}
10	.336914063	$6.01691846 \times 10^{-3}$	9.765625×10^{-4}

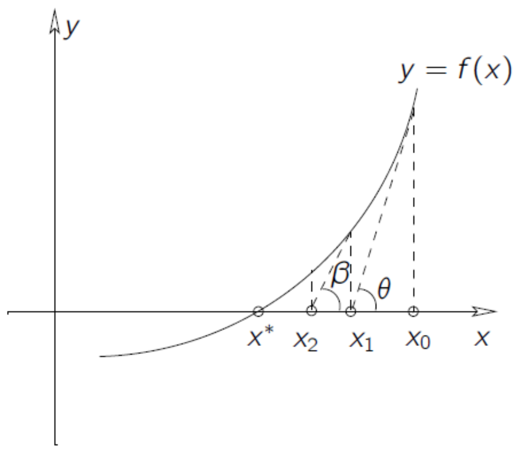
Então $\bar{x}$ = .337402344 em dez iterações. Observe que neste exemplo escolhemos $\bar{x} = \dfrac{a + b}{2}$.

Método de Newton

Isaac Newton (1642–1727) publicou seu método para encontrar raízes de equações não-lineares em 1687. Este método também é conhecido como *Newton-Raphson*, devido à sistematização apresentada por Joseph Raphson em 1690.

O método de Newton combina duas idéias comuns nas aproximações numéricas: **linearização** e **iteração**. A linearização substitui a curva $y = f(x)$ por sua reta tangente.

Seja x_0 uma aproximação inicial da raiz, como ilustra a Figura 3.7. Aproximando a curva $y = f(x)$ por sua reta tangente traçada no ponto $(x_0, f(x_0))$ obtemos a aproximação linear. Encontrando o ponto de intersecção desta reta com o eixo x, obteremos uma nova aproximação para a raiz, o ponto x_1 da figura.



Para estabelecer expressões analíticas que permitam o cálculo de $x_1, x_2, \ldots$ observamos que a tangente do ângulo θ pode ser obtida tanto da definição da função trigonométrica tangente quanto pela derivada de $f(x)$ no ponto x_0 (inclinação da reta tangente). Assim, da Figura 3.7, temos:

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad \longrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1) \quad \longrightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Genericamente, o processo consiste em evoluir da aproximação x_k para a aproximação x_{k+1} usando a fórmula:

$$x_{x+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

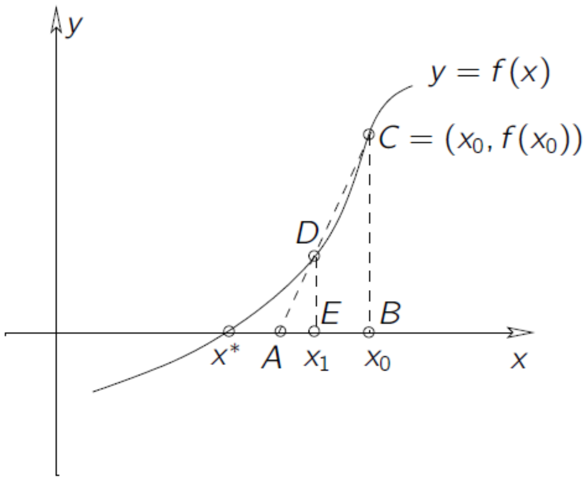
Exemplo *Aplique o método de Newton para encontrar a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ tomando $x_0 = 0.5$, para $\epsilon = 10^{-4}$ (a Tabela 3.2 apresenta os passos deste exemplo).*

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0.5	-1.375	-8.25	1.6667
1	0.3333	0.0370	-8.6667	0.0042735
2	0.3376068	0.0000183	-8.6581	0.0000021
3	0.337609	4.545×10^{-12}		

Tabela 3.2: Resultado do Exemplo

Método da Secante

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$ e calcular seu valor numérico a cada iteração. Uma alternativa é usar retas secantes como aproximações lineares locais da função, em vez de tangentes. Neste caso, são necessárias duas aproximações para inicializarmos o processo, x_0 e x_1.



No método da Secante, tomamos a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ como uma aproximação linear da curva $y = f(x)$

Para estabelecermos a relação de recorrência do *Método da Secantes*, usamos a semelhança de triângulos ABC e AED:

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

onde x_2 é o ponto denotado por A na Figura 3.8. Explicitando o valor da incógnita x_2 teremos:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Generalizando, no método das secantes usamos duas aproximações x_{k-1} e x_k, para calcular uma nova aproximação x_{k+1}, através da fórmula:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$