

ADAPTAÇÃO DE UM ALGORITMO DE CAMINHO MÍNIMO EM GRAFOS COM CUSTOS NOS ARCOS E RESTRIÇÕES DE TEMPO FUZZY

FÁBIO HERNANDES

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
13.083-970, caixa postal 6101, Campinas - SP
fabio@dt.fee.unicamp.br

MARCIA TOMIE TAKAHASHI

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121 Campus Santa Mônica
Bloco 1F - Sala 1F118
38.400-902, Uberlândia - MG
mtomie@famat.ufu.br

Resumo – Analisa-se, neste trabalho, o problema de caminho mínimo com restrições de tempo e incertezas nos parâmetros. As incertezas são modeladas por meio da teoria de conjuntos fuzzy, utilizando-se como base formulações anteriores para o problema de caminho mínimo com custo fuzzy. Propõe-se um algoritmo baseado no algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman cuja solução é um conjunto fuzzy de caminhos não-dominados.

Palavras-chave - programação matemática, grafos fuzzy, problemas de caminho mínimo.

Abstract – We study a shortest path problem with time constraints and uncertain parameters. We model the uncertainties according to the fuzzy graph theory, using existing models for the fuzzy shortest path problem as a starting point. We present an algorithm, which is based on the classic Ford-Moore-Bellman algorithm, whose outcome is a fuzzy set of non-dominated paths.

Keywords - mathematical programming, fuzzy graphs, shortest path problems.

1. Introdução

Incerteza, imprecisão e ambiguidade são fatores que nem sempre podem ser ignorados na resolução de problemas. Introduzida por Zadeh (Zadeh, 1965; Zadeh, 1968), a teoria de conjuntos fuzzy é uma ferramenta frequentemente utilizada na modelagem desses fatores. Problemas de controle (Shaw e Simões, 1988), sistemas de suporte à decisão (Bellman e Zadeh, 1970), reconhecimento de padrões (Bedzek, 1981) e programação matemática (Malik e Moderson, 2001) constituem uma pequena amostra do espectro de aplicações da teoria de conjuntos fuzzy.

Na área de programação matemática, o trabalho de Rosenfeld (1975) figura entre os primeiros exemplos de utilização da teoria de grafos fuzzy. Um grafo, no contexto da teoria de conjuntos fuzzy, pode apresentar incertezas em diferentes níveis. Existem, entretanto, dois tipos de problemas que são estudados com mais frequência na literatura:

1. Problemas com estrutura bem definida, modelada por meio de um grafo clássico (*crisp*), e incerteza em um ou mais parâmetros. Incertezas podem estar associadas a parâmetros tais como custo, capacidade, tempo, etc. Esses parâmetros são tratados como imprecisos por natureza e modelados como números fuzzy.
2. Problemas envolvendo um conjunto finito de itens cuja estrutura associada não é clara. Esta é modelada como um conjunto de nós e arcos fuzzy, denominado grafo fuzzy.

Dado o seu grande número de aplicações, o problema de caminho mínimo fuzzy foi um dos primeiros a merecer atenção (Dubois e Prade, 1980; Klein, 1991; Lin e Chern, 1993, etc.). De fato, o problema de caminho mínimo fuzzy pode ser utilizado em modelos de telecomunicações, transporte, transmissão de energia, dentre outras aplicações.

Neste trabalho, propõe-se um algoritmo para o problema de caminho mínimo em um grafo *crisp* com custos e restrições de tempo fuzzy. Este algoritmo, baseado no algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman (Bellman, 1958), tem como finalidade encontrar os caminhos não-dominados (de menor custo), entre o nó inicial e todos os demais nós do grafo, que satisfaçam as restrições de tempo. A fim de detectar os caminhos não-dominados, utilizou-se a definição de dominância aplicada em Okada e Soper (2000).

A Seção 2 traz uma breve revisão bibliográfica do problema de caminho mínimo fuzzy. Conceitos e definições da teoria de conjuntos fuzzy e possibilidade são apresentados na Seção 3. Na Seção 4, apresenta-se o algoritmo proposto, enquanto detalhes de implementação e resultados computacionais são apresentados na Seção 5. Finalmente, na Seção 6 encontram-se as conclusões e propostas futuras.

2. Revisão Bibliográfica

O trabalho de Dubois e Prade (1980) é um dos primeiros a tratar o problema de caminho mínimo fuzzy. Os autores propõem a simples extensão dos algoritmos clássicos de Floyd e de Ford-Moore-Bellman, substituindo as operações clássicas por operações da teoria de conjuntos fuzzy. Verificou-se, no entanto, que ambos os algoritmos podem retornar comprimentos sem um caminho associado (um exemplo pode ser encontrado em Malik e Moderson (2001)). No trabalho de Klein (1991), a dificuldade encontrada em Dubois e Prade (1980) é contornada com o uso de dominância de conjuntos fuzzy ao invés do conceito de mínimo fuzzy.

Já Lin e Chern (1993) propõem um algoritmo utilizando programação linear fuzzy, parametrização e partição do problema, mostrando como obter uma função de pertinência para o caminho mínimo obtido. O objetivo dos autores é definir os arcos vitais, isto é, aqueles cuja remoção da rede resulta em um aumento da distância mínima. Em Chang e Lee (1999), utiliza-se um método de ordenamento de números fuzzy que associa a cada número fuzzy um valor *crisp* e, com este valor, resolvem um problema clássico associado.

Okada e Soper (2000) caracterizam a solução não como o caminho com maior grau de pertinência possível, mas como um conjunto fuzzy onde cada elemento é um caminho mínimo com um dado grau de pertinência ao conjunto, caracterização esta que tem sido usada nos trabalhos subsequentes. Nesse trabalho, define-se uma relação de ordem entre números fuzzy e introduz-se o conceito de dominância entre caminhos.

O artigo de Blue *et al* (2002) apresenta uma taxonomia para grafos fuzzy e propõe alguns algoritmos para os principais problemas de grafos. No algoritmo para caminho mínimo fuzzy proposto, encontra-se um valor de corte para limitar o número de caminhos a serem analisados. Em seguida, aplica-se uma versão modificada do algoritmo dos k-caminhos mínimos (*crisp*) proposto por Eppstein (1994), a fim de se determinar os caminhos com algum grau de possibilidade de ser o caminho mínimo, em tempo polinomial.

Okada (2004) estudou a interatividade entre os caminhos fuzzy e desenvolveu um algoritmo utilizando a teoria de possibilidade, no qual introduz-se o conceito de grau de possibilidade de um arco pertencer a um caminho mínimo. Neste caso, o conjunto solução engloba todos os caminhos com algum grau de possibilidade de ser o caminho mínimo, em contraste com o algoritmo proposto por Okada e Soper (2000), no qual apenas os caminhos não-dominados pertencem ao conjunto solução.

Os autores desconhecem, até a presente data, a existência de publicações relativas ao problema de caminho mínimo fuzzy com restrições de tempo.

3. Conceitos, Definições e Formulação Matemática

Nesta Seção são apresentados alguns conceitos e definições que utilizamos no algoritmo proposto, bem como a formulação matemática do problema.

3.1 Números Fuzzy

Existe uma grande variedade de tipos de números fuzzy (Pedrycz e Gomide (1998)), entretanto neste trabalho tratamos apenas com números fuzzy triangulares.

Definição 3.1.1: Um *número fuzzy triangular* pode ser definido como $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$, sendo sua *função de pertinência*, $\mu_{\tilde{a}}(x)$, definida pela expressão:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{se } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & \text{se } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & \text{se } x \geq a_3 \end{cases}$$

tal que:

a_1 : limitante inferior;

a_2 : valor modal; e

a_3 : limitante superior.

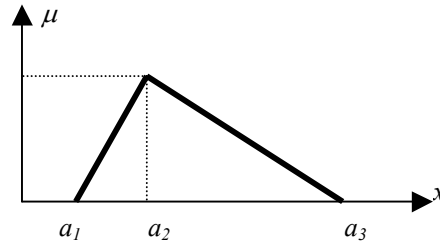


Figura 1: Exemplo de um número fuzzy

Definição 3.1.2: *Valor modal* é o valor $x \in [a_1, a_3]$ para o qual a função de pertinência tem valor máximo. Quando $\max_x \{\mu_{\tilde{a}}(x)\} = 1$, para algum valor de $x \in [a_1, a_3]$, dizemos que o número fuzzy é *normalizado*.

Definição 3.1.3: Sejam \tilde{a} e \tilde{b} números fuzzy tal que $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Então a *soma fuzzy* pode ser notada por:

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Definição 3.1.4: Um α -corte de subconjunto fuzzy é um conjunto $[\tilde{a}]_{\alpha} = \{x \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$ onde $\alpha \in [0, 1]$. Os limitantes inferior e superior de um conjunto α -corte $[\tilde{a}]_{\alpha}$ são iguais a $\inf_x [\tilde{a}]_{\alpha}$ e $\sup_x [\tilde{a}]_{\alpha}$. Supõe-se que ambos valores sejam finitos.

3.2 Cálculo de Possibilidade

Definição 3.2: A *medida de possibilidade* de um conjunto fuzzy A ser menor do que um conjunto fuzzy B , denotado por $Poss(A, B)$, é definida como:

$$Poss(A, B) = \sup_{x \in X} [\min(A(x), B(x))]$$

tal que: $A(x)$ e $B(x)$ são as funções de pertinência e X o intervalo onde estes conjuntos fuzzy estão determinados.

3.3 Relação de Ordem

Definição 3.3: Para dois números fuzzy \tilde{a} e \tilde{b} temos que $\tilde{a} \preceq \tilde{b} \Leftrightarrow \sup [\tilde{a}]_{\alpha} \leq \sup [\tilde{b}]_{\alpha}$ e $\inf [\tilde{a}]_{\alpha} \leq \inf [\tilde{b}]_{\alpha}$ para $\alpha \in [0, 1]$.

3.4 Dominância

Axioma 3.4: Sejam \tilde{a} e \tilde{b} números fuzzy tal que $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Então $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ (\tilde{a} domina \tilde{b}) se e somente se as seguintes inequações forem satisfeitas:

$$a_1 < b_1; a_2 < b_2; a_3 < b_3$$

3.7 Formulação Matemática do Problema

A formulação do problema, sem restrições de tempo, foi proposta por Okada e Soper (2000). Apresenta-se abaixo uma adaptação desta formulação incluindo estas restrições:

$$\min \tilde{f}(x) = \sum_{(i,j) \in A} \tilde{c}_{ij} x_{ij} \quad (M1)$$

$$s.a : \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1 \\ 0, & \text{se } i \neq 1, t \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ -1, & \text{se } i = t \end{cases} \quad (M2)$$

$$\sum_{\substack{(k,j) \in A \\ k,j=1,\dots,i}} \tilde{t}_{kj} x_{kj} = \tilde{t}_i \quad (M3)$$

$$\underline{\tilde{t}}_i \prec \tilde{t}_i \prec \bar{\tilde{t}}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (M4)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \text{ para algum } (i, j) \in A \quad (M5)$$

tal que A é o conjunto dos arcos da rede, \tilde{c}_{ij} é o custo do arco $(i, j) \in A$, \tilde{t}_{ij} é o tempo necessário para percorrer o arco $(i, j) \in A$, $\underline{\tilde{t}}_i$ e $\bar{\tilde{t}}_i$ são os tempos mínimo e máximo, respectivamente, que um caminho entre o nó 1 e o nó i deve satisfazer. O Σ na função objetivo significa a adição \oplus entre números fuzzy. Considerando esta formulação, seja X o poliedro convexo definido pelas restrições.

Neste modelo, os custos dos arcos são números fuzzy, portanto o custo total do caminho, dado pela função objetivo (M1) será um número fuzzy. As restrições (M2) e (M5) são as originais do problema de caminho mínimo, sendo a primeira referente à conservação de fluxo e a segunda aos valores que as variáveis podem assumir no problema. As restrições (M3) e (M4) foram adicionadas ao modelo original. A restrição (M3) refere-se ao tempo de duração de um caminho do nó 1 ao nó i e a restrição (M4) refere-se aos tempos mínimo e máximo permitidos para um caminho entre o nó 1 e o nó i . Estas duas restrições trabalham com números fuzzy, conseqüentemente o tempo resultante será um número fuzzy.

4. Estudo e Apresentação do Algoritmo Proposto

Em Okada (2004) constatou-se que um algoritmo que encontra o conjunto fuzzy solução com todos os caminhos que possuem algum grau de possibilidade de ser a solução ótima é do tipo NP-completo pois, além de proceder a enumeração dos caminhos entre dois nós, estes caminhos devem ser comparados para determinação do grau de possibilidade. Além disso, estes procedimentos sofrem a influência da incerteza e da dimensão do problema a ser resolvido. Por estes fatores, um algoritmo que construa um subconjunto representativo do conjunto fuzzy de soluções seria mais atraente para o decisor. Neste trabalho, utiliza-se o conceito de dominância de caminhos para a construção do conjunto solução (Okada e Soper, 2000) definido a seguir:

Definição 4.1: Sejam $x, y \in X$ duas soluções factíveis distintas do problema formulado anteriormente, x domina y se e somente se $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(y)$. Ou seja, um caminho p_{li} é um caminho não-dominado (Pareto-Ótimo) se e somente se não existe outro caminho p'_{li} tal que $\tilde{d}(p'_{li}) \prec \tilde{d}(p_{li})$.

Para todo caminho analisado, a restrição de tempo é verificada através da relação de ordem (Definição 3.3). Satisfeita esta relação, determina-se a medida de possibilidade do tempo total

(Definição 3.2) deste caminho satisfazer à restrição (M4). Com isso, temos duas medidas de possibilidade associadas a cada caminho: uma referente à sua otimalidade (custo) e outra à sua factibilidade (tempo).

Os testes para verificação de dominância e factibilidade dos caminhos gerados são incluídos no algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman (FMB), que constrói os caminhos mínimos entre o nó 1 e todos os outros nós do grafo, baseado em informações de etiquetas (rótulos que armazenam os caminhos) associadas a cada nó do grafo. Na Seção a seguir, o algoritmo proposto é descrito e apresentado.

4.1 Descrição e Apresentação do Algoritmo

O algoritmo está organizado da seguinte forma: no Passo 0, atribui-se etiquetas e comprimentos iniciais aos caminhos. No Passo 1, procede-se a seleção de novas etiquetas, os testes de factibilidade e dominância e o cálculo da medida de possibilidade dos caminhos associados a cada etiqueta. No Passo 2, verifica-se o critério de parada: inexistência de atualizações das etiquetas de uma iteração para outra. Caso o critério de parada seja satisfeito, os caminhos não-dominados são construídos no Passo 3 e o algoritmo é encerrado no Passo 4. Caso contrário, retorna-se ao Passo 1.

4.1.1 Informações sobre o algoritmo:

$\tilde{l}_{(i,q)}^k$: custo do caminho entre o nó 1 e o i com a etiqueta q na iteração k ;

\tilde{l}_{ij} : custo do arco (i, j) ;

$\tilde{t}_{(i,q)}^k$: tempo total do caminho entre os nós 1 e i com a etiqueta q na iteração k ;

\tilde{t}_{ij} : tempo do arco (i, j) ;

Γ_i^{-1} : conjunto dos nós predecessores de i ;

$T_{(i,q)}$: tempo total gasto no caminho com etiqueta q entre o nó 1 e o nó i (\tilde{t}_i : formulação); e

TR_i : tempo da restrição do nó i (\tilde{t}_i : formulação).

4.1.2. Algoritmo Proposto

Algoritmo Proposto

PASSO 0: Inicialização das variáveis:

1. $M = \sum_{i=1}^m |l_s|$, tal que l_s é o limitante superior dos arcos fuzzy e m é o número de arcos do grafo;
2. $\tilde{t}_{(1,1)}^0 = (0, 0, 0)$;
3. $\tilde{l}_{(1,1)}^0 = (0, 0, 0)$;
4. $\tilde{l}_{(j,1)}^0 = (M + 1, M + 2, M + 3)$, $j = 2, 3, \dots, n$;
 n : número de nós.
5. $k \leftarrow 1$.

PASSO 1: Seleção das etiquetas e verificação da dominância:

1. $\forall j \in \Gamma_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, faça:
 - $\tilde{l}_{(i,q)}^k = \tilde{l}_{(j,q_1)}^{k-1} \oplus \tilde{l}_{ji}$; tal que q_1 é a numeração das etiquetas do nó j .
 - $\tilde{t}_{(i,q)}^k = \tilde{t}_{(j,q_1)}^{k-1} \oplus \tilde{t}_{ji}$.
2. Para todos os caminhos entre o nó 1 e o nó i faça:
 - Se o caminho q do nó i satisfizer as restrições de tempo do nó i faça:
 - i. Verifique a dominância entre elas:

- Se $\tilde{l}_{(i,q)}^k \succ \tilde{l}_{(i,q_2)}^k \Rightarrow$ elimine a q – *ésima* etiqueta;
- Se $\tilde{l}_{(i,q)}^k \prec \tilde{l}_{(i,q_2)}^k \Rightarrow$ elimine a q_2 – *ésima* etiqueta.

ii. Calcule $Poss(T_{(i,q)}, TR_i)$

- Senão elimine a q - *ésima* etiqueta.
3. Entre os caminhos não-dominados do nó 1 ao i que satisfazem as restrições de tempo faça:
- Verifique o que possui menor valor modal (\tilde{c}_{im}^k);
 - Calcule $Poss(\tilde{l}_{(i,q)}^k, \tilde{c}_{im}^k)$

PASSO 2: Critério de parada:

1. Se $\tilde{l}_{(i,q)}^k = \tilde{l}_{(i,q)}^{k-1} \forall i \in N \Rightarrow$ Passo 3;
2. Senão: $k \leftarrow k + 1 \Rightarrow$ volte ao passo 1.

PASSO 3: Composição dos caminhos não dominados:

- Encontre os caminhos não dominados de 1 para t .

PASSO 4: FIM.

Analisando-se o algoritmo observa-se que o limitante inferior das restrições de tempo ($\underline{\tilde{l}}_i$: formulação) adotado foi zero ($\tilde{0} = (0,0,0)$).

4.2 Estudo da Complexidade e Convergência do Algoritmo Proposto

4.2.1 Comentários gerais

Como citado em Goldbarg e Luna (2000), o algoritmo de Ford-Moore-Bellman (FMB) não analisa um único nó a cada iteração, mas sim examina todos os nós até que melhorias não mais sejam possíveis, podendo assim aceitar arcos com custos negativos. O critério de parada está associado à não modificação de todos os caminhos em uma iteração. Dado que o algoritmo proposto é uma adaptação do algoritmo de FMB, a estrutura é mantida.

4.2.2 Estudo da otimalidade

O algoritmo proposto busca um conjunto de soluções que satisfaz as restrições de tempo, sendo que cada solução possui um grau de otimalidade. O conceito de otimalidade utilizado é baseado no princípio de otimalidade de Bellman, que pode ser encontrado em Gondran e Minoux (1984).

4.2.3 Complexidade e convergência

Dado que o algoritmo de Ford-Moore-Bellman, em caso de existência de um circuito de custo negativo, converge em no máximo $N-1$ iterações, este algoritmo também irá convergir em no máximo $N-1$ iterações, visto que a análise de convergência dos dois algoritmos é a mesma.

Quanto ao estudo da complexidade deste algoritmo, temos que no passo 1 são efetuadas no máximo $2nV_{\max}$ somas para calcular o custo e o tempo de cada caminho, respectivamente, sendo n o número de nós e V_{\max} o máximo entre o número de rótulos (etiquetas) permanentes de todos os nós. Também temos no máximo nV_{\max} comparações para verificar quais são os caminhos que satisfazem as restrições de tempo de cada nó e nV_{\max}^2 comparações de dominância. Para cada iteração, temos então uma complexidade de $O(nV_{\max} + nV_{\max}^2) = O(nV_{\max}^2)$. Dado que o algoritmo executa no máximo $N-1$ iterações a complexidade se torna $O((n-1)(nV_{\max}^2)) = O(n^2V_{\max}^2 + nV_{\max}^2) = O(n^2V_{\max}^2)$.

5. Resultados Computacionais

O algoritmo proposto foi implementado na linguagem Matlab 6.5 e testado em duas redes. A primeira é a rede óptica europeia COST239 (Tan e Sinclair (1995)) e a segunda uma pequena rede com 10 nós e 17 arcos. Para o segundo exemplo, considera-se custo negativo em um arco.

Exemplo 1:

Neste exemplo consideramos a rede óptica europeia COST239 (Figura 2).

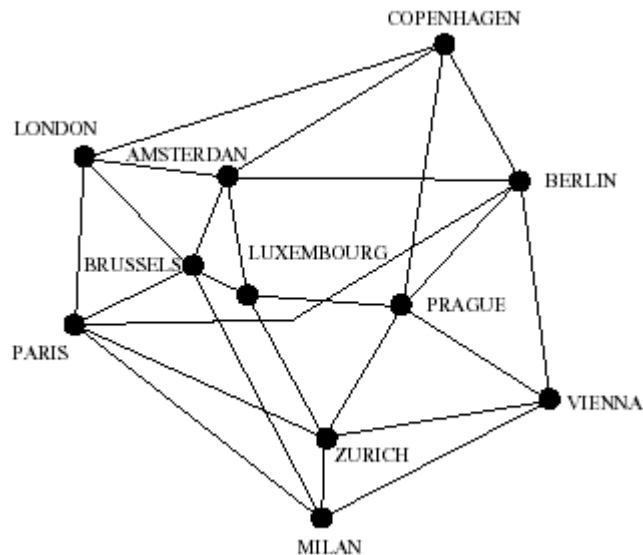


Figura 2: Rede óptica europeia COST239

Os nós da rede e suas restrições de tempo estão definidos respectivamente nas Tabelas 1 e 2. O tempo de restrição (Tabela 2) é o tempo máximo permitido para um caminho entre dois nós, mais especificamente entre o nó 1 e o nó i .

Nó	Cidade
1	Paris
2	Milan
3	Zurich
4	Prague
5	Vienna
6	Berlin
7	Amsterdan
8	Luxembourg
9	Brussels
10	London
11	Copenhagen

Tabela 1: Denominação dos nós da rede COST239

Nó	Restrição de Tempo
1	(0 0 0)
2	(1.6 1.7 2)
3	(0.9 1 1.3)
4	(1.4 1.7 1.9)
5	(2 2.2 2.5)
6	(0.8 1 1.1)
7	(0.7 0.8 0.9)
8	(0.9 1 1.1)
9	(0.3 0.45 0.5)
10	(1 1.2 1.3)
11	(1.65 1.95 2)

Tabela 2: Restrições de tempo da rede COST239

A Tabela 3 apresenta os nós origem e destino de cada arco, bem como os seus respectivos custos e tempos.

Arco	Origem	Destino	Custo	Tempo
1	1	2	(800 820 840)	(1.5 1.7 1.9)
2	1	3	(350 361 370)	(0.8 0.9 1)
3	1	6	(650 677 683)	(0.95 1.05 1.15)
4	1	9	(290 300 350)	(0.4 0.52 0.6)
5	1	10	(420 450 470)	(0.95 1 1.3)
6	2	3	(180 186 193)	(0.35 0.45 0.5)
7	2	5	(495 510 525)	(1.25 1.5 1.9)
8	2	9	(900 930 960)	(1.7 2 2.1)
9	3	4	(650 667 863)	(0.9 0.98 1.2)
10	3	5	(730 748 770)	(1.15 1.3 1.45)
11	3	8	(425 443 465)	(0.5 0.6 0.7)
12	4	5	(190 199 210)	(0.2 0.3 0.4)
13	4	6	(310 340 360)	(0.5 0.65 0.7)
14	4	11	(710 740 770)	(1.05 1.15 1.2)
15	5	6	(610 660 690)	(0.75 0.85 0.96)
16	6	11	(230 242 260)	(0.8 0.9 1)
17	7	6	(390 410 440)	(0.75 0.85 0.96)
18	7	11	(450 472 490)	(1 1.16 1.3)
19	8	4	(710 730 735)	(1.05 1.2 1.25)
20	8	7	(230 242 255)	(0.3 0.42 0.53)
21	9	8	(130 137 145)	(0.25 0.3 0.35)
22	9	7	(120 130 150)	(0.25 0.28 0.32)
23	9	10	(230 242 260)	(0.3 0.42 0.53)
24	10	7	(330 342 350)	(0.5 0.65 0.7)
25	10	11	(1250 1310 1430)	(2.3 2.45 2.6)

Tabela 3: Dados da rede COST239

Na Tabela a seguir têm-se os resultados do algoritmo proposto aplicado à rede COST239.

Origem	Destino	Caminho	Tempo Caminho	Custo Caminho	Poss Tempo	Poss Custo
1	2	1→2	(1.5 1.7 1.9)	(800 820 840)	1.0	1.0
1	3	1→3	(0.8 0.9 1)	(350 361 370)	0.5	1.0
1	4	1→3→4	(1.7 1.88 2.2)	(1000 1028 1233)	0.5263	1.0
1	4	1→9→8→4	(1.7 2.02 2.2)	(1130 1167 1230)	0.3846	0.4256
1	5	1→3→5	(1.95 2.2 2.45)	(1080 1109 1140)	1.0	1.0
1	6	1→6	(0.95 1.05 1.15)	(650 677 683)	0.75	1.0
1	7	1→9→7	(0.65 0.8 0.92)	(430 410 500)	1.0	1.0
1	8	1→9→8	(0.65 0.82 0.95)	(420 437 495)	0.2174	1.0
1	9	1→9	(0.4 0.52 0.6)	(290 300 350)	0.5882	1.0
1	10	1→10	(0.95 1 1.3)	(420 450 470)	0.6	1.0
1	11	1→6→11	(1.75 1.95 2.15)	(880 919 943)	0.8333	0.8661
1	11	1→9→7→11	(1.65 1.96 2.2)	(860 902 990)	1.0	1.0

Tabela 4: Resultados da rede COST239

Analisando os resultados da rede COST239 verifica-se que existem dois caminhos não-dominados entre os nós 1 e 4 (1→3→4; 1→9→8→4) e entre os nós 1 e 11 (1→6→11; 1→9→7→11) que satisfazem as restrições de tempo. Para os demais nós existe apenas um caminho não-dominado unindo o nó 1 a cada um destes. Verificando os dois caminhos entre os nós 1 e 4 percebe-se que o primeiro (1→3→4) é melhor do que o segundo, visto que tanto a medida de possibilidade em relação ao custo quanto em relação ao tempo são maiores do que as medidas do segundo caminho (1→9→8→4). Isto significa que o primeiro caminho satisfaz melhor as condições de otimalidade e factibilidade do que o segundo.

Seja, por exemplo, o caminho $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, sendo seu custo total (1630 1673 1896) e seu tempo (2.75 3.13 3.6). Analisando o custo, verifica-se que este caminho é dominado (segundo Definição 3.4) pelos custos dos outros caminhos da Tabela 4 (1000 1028 1233; 1130 1167 1230). Além disso, o tempo da restrição do nó 4 (Tabela 2) não é satisfeito, isto é, a medida de possibilidade é nula. Portanto, o caminho $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ não é considerado no conjunto solução. A análise dos caminhos entre os nós 1 e 11 é semelhante à análise feita em relação aos caminhos entre os nós 1 e 4.

Para este exemplo, caso não seja aplicada a definição de dominância e relaxando a restrição de tempo do nó (1.3 3.0 4.0), o conjunto solução obtido seria composto de 30 caminhos entre os nós 1 e 11 com algum grau de possibilidade de ser o caminho de custo mínimo. Este número pode ser considerado excessivo, a menos que o decisor julgue necessário obter informações completas sobre o conjunto solução. Neste caso, bastaria retirar os testes de dominância de caminhos do algoritmo para encontrar o conjunto fuzzy solução. Mas, a medida em que a dimensão dos problema e a incerteza dos dados aumentarem, é recomendável o uso do teste de dominância (Okada e Soper (2001)).

Exemplo 2:

A rede proposta neste exemplo possui 10 nós e 17 arcos (Figura 3) sendo que esta foi testada para dois casos: o primeiro com todos os arcos com custos positivos, conforme Tabela 5, sendo o arco 11 com custos (16 19 21), e o segundo com os valores da Tabela 5 incluindo o valor negativo para o arco 11.

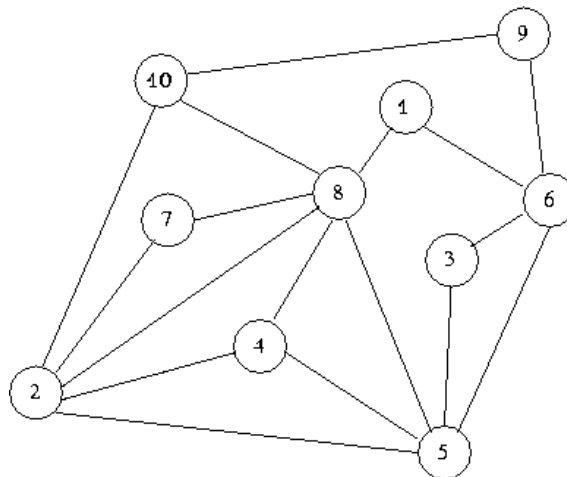


Figura 3: Rede com custo negativo

Arco	Origem	Destino	Custo	Tempo
1	1	6	(41 49 56)	(0.2 0.25 0.28)
2	1	8	(21 25 28)	(0.1 0.12 0.14)
3	4	2	(31 37 42)	(0.15 0.19 0.21)
4	2	5	(29 35 40)	(0.15 0.18 0.21)
5	2	7	(28 34 39)	(0.14 0.17 0.2)
6	8	2	(35 42 48)	(0.18 0.21 0.24)
7	2	10	(52 62 71)	(0.26 0.31 0.36)
8	5	3	(38 45 51)	(0.19 0.23 0.26)
9	3	6	(40 48 55)	(0.2 0.24 0.28)
10	4	5	(13 16 18)	(0.07 0.08 0.09)
11	8	4	(-21 -19 -16)	(0.08 0.1 0.11)
12	5	6	(53 63 72)	(0.27 0.32 0.36)
13	8	5	(29 35 40)	(0.15 0.18 0.2)
14	6	9	(12 15 17)	(0.06 0.08 0.09)
15	8	7	(22 26 29)	(0.11 0.13 0.15)
16	8	10	(50 60 68)	(0.25 0.3 0.34)
17	10	9	(62 73 83)	(0.31 0.37 0.42)

Tabela 5: Dados da rede de custo negativo

A Tabela 6 apresenta as restrições de tempo de cada nó e as Tabelas 7 e 8 os resultados.

Nó	Restrição de Tempo
1	(0 0 0)
2	(0.25 0.3 0.35)
3	(0.5 0.56 0.6)
4	(0.15 0.2 0.25)
5	(0.25 0.3 0.35)
6	(0.15 0.2 0.25)
7	(0.15 0.2 0.23)
8	(0.07 0.15 0.2)
9	(0.3 0.4 0.45)
10	(0.35 0.4 0.45)

Tabela 6: Restrições de tempo da rede de custo negativo

Origem	Destino	Caminho	Tempo Caminho	Custo Caminho	Poss Tempo	Poss Custo
1	2	1→8→2	(0.28 0.33 0.38)	(56 67 76)	0.7	1.0
1	3	1→8→4→5→3	(0.44 0.53 0.6)	(88 105 118)	0.7692	1.0
1	3	1→8→5→3	(0.44 0.53 0.6)	(88 105 119)	0.7692	1.0
1	4	1→8→4	(0.18 0.22 0.25)	(37 44 49)	0.7778	1.0
1	5	1→8→4→5	(0.25 0.3 0.34)	(50 60 67)	1.0	1.0
1	5	1→8→5	(0.25 0.3 0.34)	(50 60 68)	1.0	1.0
1	6	1→6	(0.2 0.25 0.28)	(41 49 56)	0.5	1.0
1	7	1→8→7	(0.21 0.25 0.29)	(43 51 57)	0.2857	1.0
1	8	1→8	(0.1 0.12 0.14)	(21 25 28)	0.7	1.0
1	9	1→6→9	(0.26 0.33 0.37)	(53 64 73)	0.5	1.0
1	10	1→8→10	(0.35 0.42 0.48)	(71 85 96)	0.8333	1.0

Tabela 7: Resultados da rede com todos os custos positivos

Origem	Destino	Caminho	Tempo Caminho	Custo Caminho	Poss Tempo	Poss Custo
1	2	1→8→4→2	(0.33 0.41 0.46)	(31 43 54)	0.1538	1.0
1	3	1→8→4→5→3	(0.44 0.53 0.6)	(51 67 81)	0.7692	1.0
1	4	1→8→4	(0.18 0.22 0.25)	(0 6 12)	0.7778	1.0
1	5	1→8→4→5	(0.25 0.3 0.34)	(13 22 30)	1.0	1.0
1	6	1→6	(0.2 0.25 0.28)	(41 49 56)	0.5	1.0
1	7	1→8→7	(0.21 0.25 0.29)	(43 51 57)	0.2857	1.0
1	8	1→8	(0.1 0.12 0.14)	(21 25 28)	0.7	1.0
1	9	1→6→9	(0.26 0.33 0.37)	(53 64 73)	0.5	1.0
1	10	1→8→10	(0.35 0.42 0.48)	(71 85 96)	0.8333	1.0

Tabela 8: Resultados da rede com arco de custo negativo

Verificando os resultados (Tabelas 7 e 8) percebe-se que para os dois casos testados o desempenho do algoritmo foi semelhante.

Analisando a rede onde os custos dos arcos são todos positivos (Tabela 7) nota-se que esta apresenta dois caminhos entre os nós 1 e 3 e entre os nós 1 e 5, porém verifica-se que os caminhos possuem custos, tempos e medidas de possibilidade semelhantes ficando por conta do usuário a escolha de um deles. Em relação aos demais nós existe somente um caminho não-dominado entre o nó 1 e cada um destes.

Quanto à rede que possui um arco com custo negativo (Tabela 8) percebe-se que os nós que possuem mais de um caminho na rede positiva (entre 1 e 3 e entre 1 e 5) passaram a ter somente um na rede com arco negativo, isto se deve ao fato de que o arco com custo negativo reduz os custos de alguns caminhos passando assim estes a dominar outros.

6. Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo para o problema do caminho mínimo com parâmetros fuzzy. Os algoritmos de caminho mínimo para grafos fuzzy existentes na literatura apresentam apenas custos positivos fuzzy, enquanto que o algoritmo proposto trabalha com custos arbitrários e restrições de tempo fuzzy.

Considerando os trabalhos anteriores, temos ainda que o algoritmo proposto possui complexidade $\left(O\left(n^2 V_{\max}^2\right)\right)$, menor do que o do algoritmo de Okada e Soper (2000), $\left(O\left(n^3 V_{\max}^2\right)\right)$.

Quanto ao conjunto solução de caminhos é possível determinar um corte, ou seja, os caminhos que possuírem um nível de possibilidade (de tempo ou custo) menor do que uma determinada tolerância " α " estes poderão ser descartados.

Como trabalhos futuros propomos o estudo detalhado do comportamento destes algoritmos em redes com dimensões e densidades variadas, além de estudar uma métrica para fazer as comparações das possibilidades. Outra proposta seria a inclusão de fluxo neste problema.

7. Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) que concedeu ao autor Fábio Hernandes o afastamento para cursar doutorado na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Referências Bibliográficas

- Bellman, R. E. (1958). *On a routing problem*. Quart. Appl. Math. (16).
- Bellman, R. E. e Zadeh, L. (1970). *Decision making in a fuzzy environment*. Manag. Science (17).
- Bezdek, J. (1981). *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. Plenum Press.
- Blue, M., Bush, B. e Puckett, J. (2002). *Unifed approach to fuzzy graph problems*. Fuzzy Sets and Systems (125): 355-368.
- Chang, P. e Lee, E. (1999). *Fuzzy decision networks and deconvolution*. Computers and Mathematics with Applications 37 (11-12): 53-63.
- Dubois, D. e Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. Academic Press, New York.
- Eppstein, D. (1994) *Finding the k-shortest paths*. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp.154-165.
- Goldbarg, M. C. e Luna, H. P. L. (2000). *Otimização combinatória e programação linear*. Editora Campus, Rio de Janeiro.
- Gondran, M. e Minoux, M. (1984). *Graphs and algorithms*. John Wiley e Sons, New York.
- Klein, C. M. (1991). *Fuzzy shortest paths*. Fuzzy Sets and Systems (39): 27-41.
- Lin, C. e Chern, M. S. (1993). *The fuzzy shortest path problem and its most vital arcs*. Fuzzy Sets and Systems (58): 343-353.
- Malik, D. e Moderson, J. N. (2001). *Fuzzy discrete structures*. Physica-Verlag, New-York.
- Okada, S. (2004). *Fuzzy shortest path problems incorporating interactivity among paths*. Fuzzy Sets and Systems 142 (3): 335-357.
- Okada, S. e Soper, T. (2000). *A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths*. Fuzzy Sets and Systems (109): 129-140.

- Pedrycz, W. e Gomide, F. (1998). *An Introduction to fuzzy sets: analysis and design*. London: MIT Press.
- Rosenfeld, A. (1975). *Fuzzy graphs, fuzzy sets and their applications*. Academic Press.
- Shaw, I. S. e Simões, M. G. (1998). *Controle e modelagem fuzzy*. Edgar-Blucher/Fapesp.
- Tan, L. G. e Sinclair, M. C. (1995). *Wavelength assignment between the central nodes of the cost239 european optical network*. 11th UK Performance Engineering Workshop, Liverpool, 235-247.
- Zadeh, L. (1965). *Fuzzy sets*. Information and Control (8): 338-353.
- Zadeh, L. (1968). *Fuzzy algorithms*. Information and Control (12).