ПРАКТИЧНА РОБОТА №3

Модель «хижак – жертва» (модель Вольтера)

Мета роботи:

1. Навчитися складати та вирішувати (аналітично і за допомогою числових методів) кінетичні рівняння при моделюванні процесів зміни чисельності популяцій.
2. Проводити аналіз отриманих результатів, графічно представити результати.

Теоретичні відомості:

На рис. 1 наведені експериментальні дані по кількості числа впольованих шкурок зайця та рисі у Канаді з 1845 по 1935 роки.

Розглянемо модель.

Серед припущень, наведених у роботі № 1, скасуємо припущення 4. Нехай у деякому просторі живуть два види особин: зайці (жертви) і рисі (хижаки). Зайці харчуються рослинною їжею, яка наявна завжди у достатній кількості (між ними відсутня внутрішньовидова боротьба). Рисі можуть харчуватися лише зайцями.

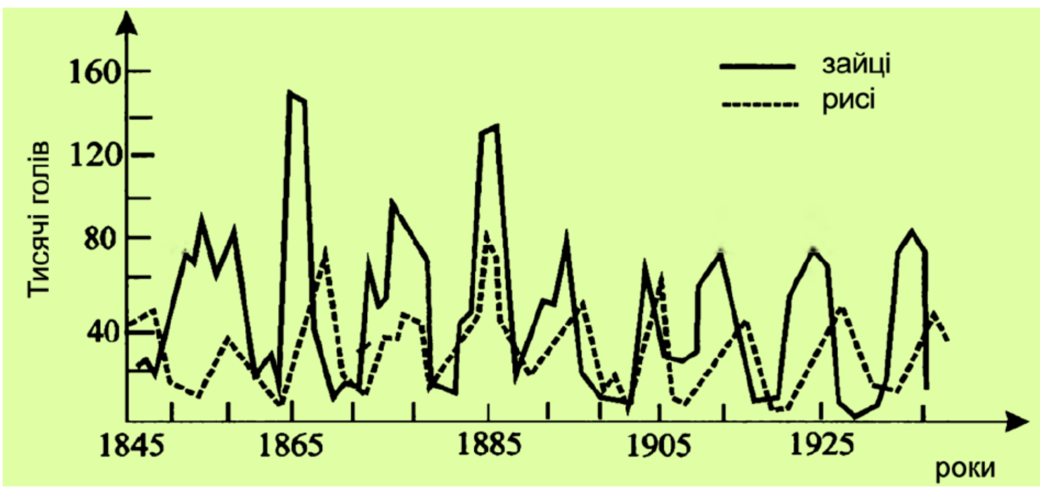

Рис. 1 Динаміка популяцій зайців та рисі

Введемо величини:

x — число жертв у момент часу t; y — число хижаків у момент часу t.

Рівняння балансу між чисельністю народжених особин і тих, що гинуть:

Жертви:

$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \sigma x - \alpha xy$, де γx - швидкість розмноження; σx - швидкість природнього вимирання; αxy - швидкість вимирання за рахунок зустрічі з хижаком.

Хижаки:

$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \beta y$ або $\frac{dy}{dt} = \varepsilon x - \alpha xy$, де δxy - швидкість розмноження популяції хижаків; βy – швидкість природнього вимирання. У загальному вигляді $x(t)$ та $y(t)$ - нелінійні функції часу. Ці рівняння вирішуються за допомогою числових методів.

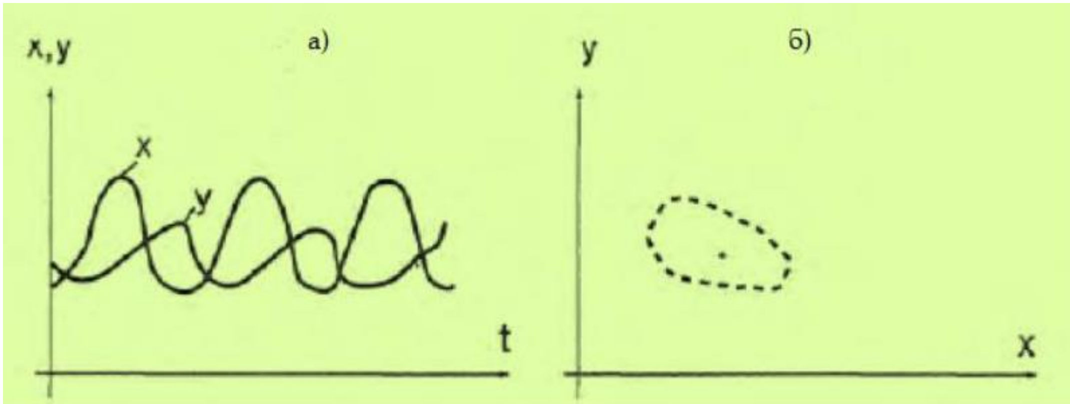

Рис. 2 Функції $x(t)$ та $y(t)$ - (а) і відповідно фазовий портрет системи (б) – схематичне зображення

Аналітичний розв’язок при малих відхиленнях від стаціонарних значень.
Знайдемо стаціонарне значення x_{CT} і y_{CT} , тобто $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$.
Із системи рівнянь отримаємо алгебраїчні рівняння, з яких знайдемо:

$$x_{CT} = \frac{\beta}{\delta} \text{ і } y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

При малих відхиленнях $u(t)$ від x_{CT} і $v(t)$ від y_{CT} система рівнянь зводиться до диференціальних рівнянь другого порядку, що описують гармонічні коливання величин u і v:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon\beta u = 0;$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \varepsilon\beta v = 0;$$

розв’язок рівняння представимо у такому вигляді:

$$U = U_{max} \sin\sqrt{\varepsilon\beta}t$$

$$V = V_{max} \sin(\sqrt{\varepsilon\beta}t + \varphi_0)$$

Відношення амплітуд відповідних відхилень чисельності:

$$\frac{U_{max}}{V_{max}} = \frac{\delta}{\alpha}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}$$

У результаті чисельність особин при малих відхиленнях від стаціонарних значень може бути описана:

$$x(t) = x_{CT} + U_{max} \sin\sqrt{\varepsilon\beta}t$$

$$y(t) = y_{CT} + V_{max} \sin(\sqrt{\varepsilon\beta}t + \varphi_0)$$

На рис. 3 схематично представлені графіки гармонічних змін $x(t)$ та $y(t)$, (а) - при малих відхиленнях від стаціонарних (СТ) значень і відповідний їм фазовий портрет системи у вигляді еліпса (б).

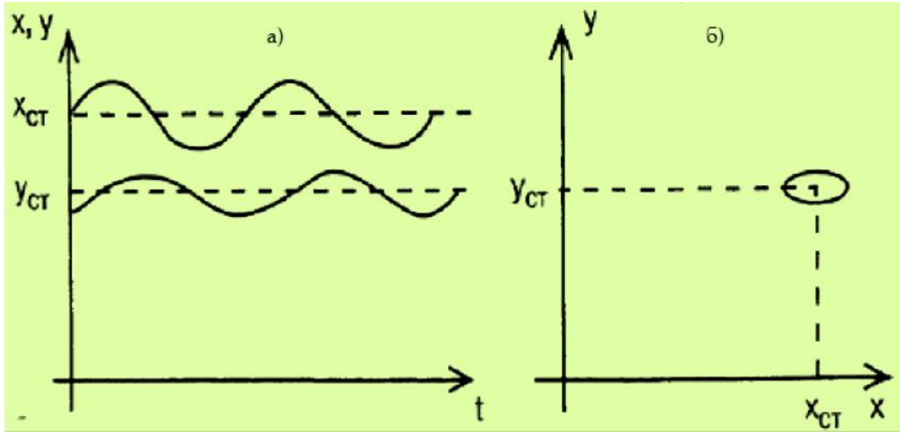

Рис. 3 Зміна $x(t)$ та $y(t)$, (а) - при малих відхиленнях (а) і фазовий портрет системи (б)

Хід роботи:

Завдання. Проаналізуйте поведінку системи при різних параметрах $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$, а також при різних початкових умовах x_0 та y_0.

Для цього:

1. Для кожної сукупності параметрів побудуйте серію графіків залежності $x(t)$ та $y(t)$ (на одному рисунку) і відповідні їм фазові портрети систем. Числові розрахунки, на основі яких було побудовано серію графіків, наведені у файлі 'pract.py'.

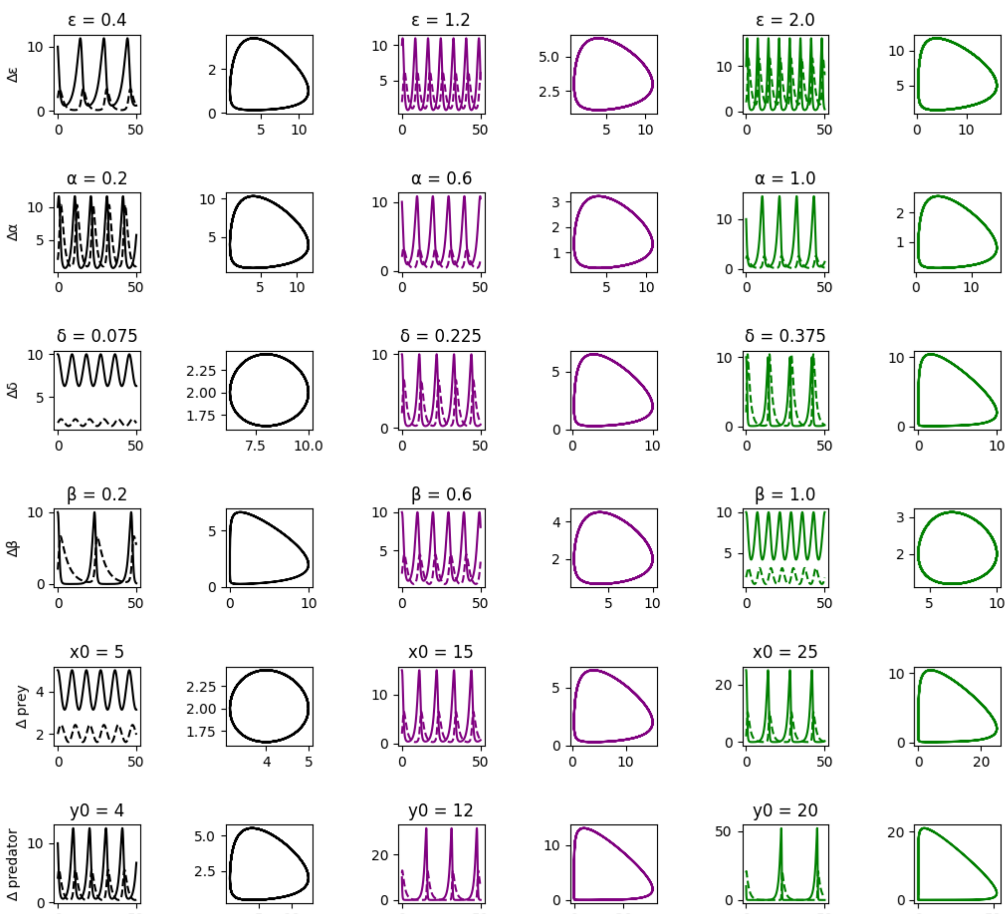

Рис. 4 Серія графіків залежності $x(t)$ та $y(t)$ при різних параметрах $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$ і відповідні їм фазові портрети систем.

2. З графіків зробіть оцінку періоду коливань чисельності хижаків та жертв.

Криві x(t) та $y(t)$ для різних ε ($\alpha = 0.4, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

ε	t	N	$T = t/N$	$T = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\beta}$	ΔT
0.4		3.4	14.71	12.83	1.88
1.2	50	6.4	7.81	7.40	0.41
2.0		7.7	6.50	5.74	0.76

Криві x(t) та $y(t)$ для різних α ($\varepsilon = 0.8, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

α	t	N	$T = t/N$	$T = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\beta}$	ΔT
0.2		5	10.00	9.07	0.93
0.6	50	5	10.00	9.07	0.93
1.0		4.5	11.11	9.07	2.04

Криві x(t) та $y(t)$ для різних δ ($\alpha = 0.4, \varepsilon = 0.8, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

δ	t	N	$T = t/N$	$T = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\beta}$	ΔT
0.075		5.5	9.09	9.07	0.02
0.225	50	4.5	11.11	9.07	2.04
0.375		3.5	14.28	9.07	5.21

Криві x(t) та $y(t)$ для різних β ($\alpha = 0.4, \varepsilon = 0.8, \delta = 0.15, x_0 = 10, y_0 = 2$)

β	t	N	$T = t/N$	$T = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\beta}$	ΔT
0.2		2.2	22.72	15.71	7.01
0.6	50	5.1	9.80	9.07	0.73
1.0		7	7.14	7.02	0.12

Криві x(t) та $y(t)$ для різних x_0
($\alpha = 0.4, \varepsilon = 0.8, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 5, y_0 = 2$)

x_0	t	N	$T = t/N$	$T = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\beta}$	ΔT
5		5.5	9.09	9.07	0.02
15	50	4.4	11.36	9.07	2.27
25		3.5	14.28	9.07	5.21

Криві x(t) та $y(t)$ для різних y_0
($\varepsilon = 0.8, \alpha = 0.4, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

y_0	t	N	$T = t/N$	$T = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\beta}$	ΔT
4		4.6	10.86	9.07	1.77
12	50	3.1	16.12	9.07	7.03
20		2.1	23.80	9.07	14.73

Таблиця 1. Оцінка періоду коливань чисельності хижаків та жертв для числових розв'язків моделі Вольтера при різних параметрах $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$ та при різних початкових умовах x_0 та y_0.

3. Також з графіків оцініть, при яких відхиленнях від x_{CT} і y_{CT} гармонічні коливання зміняться на складні коливання, а форма фазової траєкторії стане відмінною від еліпсоїдальної (за можливості).

Криві x(t) та $y(t)$ для різних ε ($\alpha = 0.4, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

ε	α	δ	β	x_{CT}	y_{CT}	$x_{CT} = \frac{\beta}{\delta}$	$y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha}$
0.4	0.4	0.15	0.6	3.99	1.01	4	1
1.2	0.4	0.15	0.6	4.01	3.03	4	3
2.0	0.4	0.15	0.6	4.11	5.05	4	5

Криві x(t) та $y(t)$ для різних α ($\varepsilon = 0.8, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

α	ε	δ	β	x_{CT}	y_{CT}	$x_{CT} = \frac{\beta}{\delta}$	$y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha}$
0.2	0.8	0.15	0.6	4.69	4	4	4
0.6	0.8	0.15	0.6	4.89	1.63	4	1.33
1.0	0.8	0.15	0.6	6.02	0.8	4	0.98

Криві x(t) та $y(t)$ для різних δ ($\alpha = 0.4, \varepsilon = 0.8, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

δ	ε	α	β	x_{CT}	y_{CT}	$x_{CT} = \frac{\beta}{\delta}$	$y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha}$
0.075	0.8	0.4	0.6	8	2	8	2
0.225	0.8	0.4	0.6	3.96	2.4	2.66	2
0.375	0.8	0.4	0.6	2.98	2.4	1.6	2

Криві x(t) та $y(t)$ для різних β ($\alpha = 0.4, \varepsilon = 0.8, \delta = 0.15, x_0 = 10, y_0 = 2$)

β	ε	α	δ	x_{CT}	y_{CT}	$x_{CT} = \frac{\beta}{\delta}$	$y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha}$
0.2	0.8	0.4	0.15	3.33	2.01	1.33	2
0.6	0.8	0.4	0.15	4.6	2.5	4	2
1.0	0.8	0.4	0.15	7.06	2.11	6.66	2

Криві x(t) та $y(t)$ для різних x_0
($\alpha = 0.4, \varepsilon = 0.8, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 5, y_0 = 2$)

x_0	ε	α	δ	β	x_{CT}	y_{CT}	$x_{CT} = \frac{\beta}{\delta}$	$y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha}$
5	0.8	0.4	0.15	0.6	4	2.09	4	2
15	0.8	0.4	0.15	0.6	5.12	2.79	4	2
25	0.8	0.4	0.15	0.6	5.67	3.4	4	2

Криві x(t) та $y(t)$ для різних y_0
($\varepsilon = 0.8, \alpha = 0.4, \delta = 0.15, \beta = 0.6, x_0 = 10, y_0 = 2$)

y_0	ε	α	δ	β	x_{CT}	y_{CT}	$x_{CT} = \frac{\beta}{\delta}$	$y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha}$
4	0.8	0.4	0.15	0.6	4.89	3	4	2
12	0.8	0.4	0.15	0.6	9.7	5.1	4	2
20	0.8	0.4	0.15	0.6	12.6	5.8	4	2

Таблиця 2. Оцінка x_{CT}(стаціонарного значення чисельності популяції жертв) і y_{CT}(стаціонарного значення чисельності популяції хижаків) для числових розв'язків моделі Вольтера при різних параметрах $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$ та при різних початкових умовах x_0 та y_0.

Червоним виділено розрахункові значення x_{CT} і y_{CT} з мінімальними відхиленнями від стаціонарних значень, при яких гармонічні коливання зміняться на складні, а форма фазової траєкторії стане відмінною від еліпсоїдальної.

4. Проведіть дослідження за допомогою числових методів для загальної системи рівнянь, при яких співвідношеннях параметрів модель «хижак - жертва» практично перетворюється у модель природнього росту. Співставте розрахункові криві змін $x(t)$ та $y(t)$ з експериментальними кривими, представленими на рис. 1. Зробіть висновки. Числові розрахунки наведені у файлі ‘pract standart.py’.

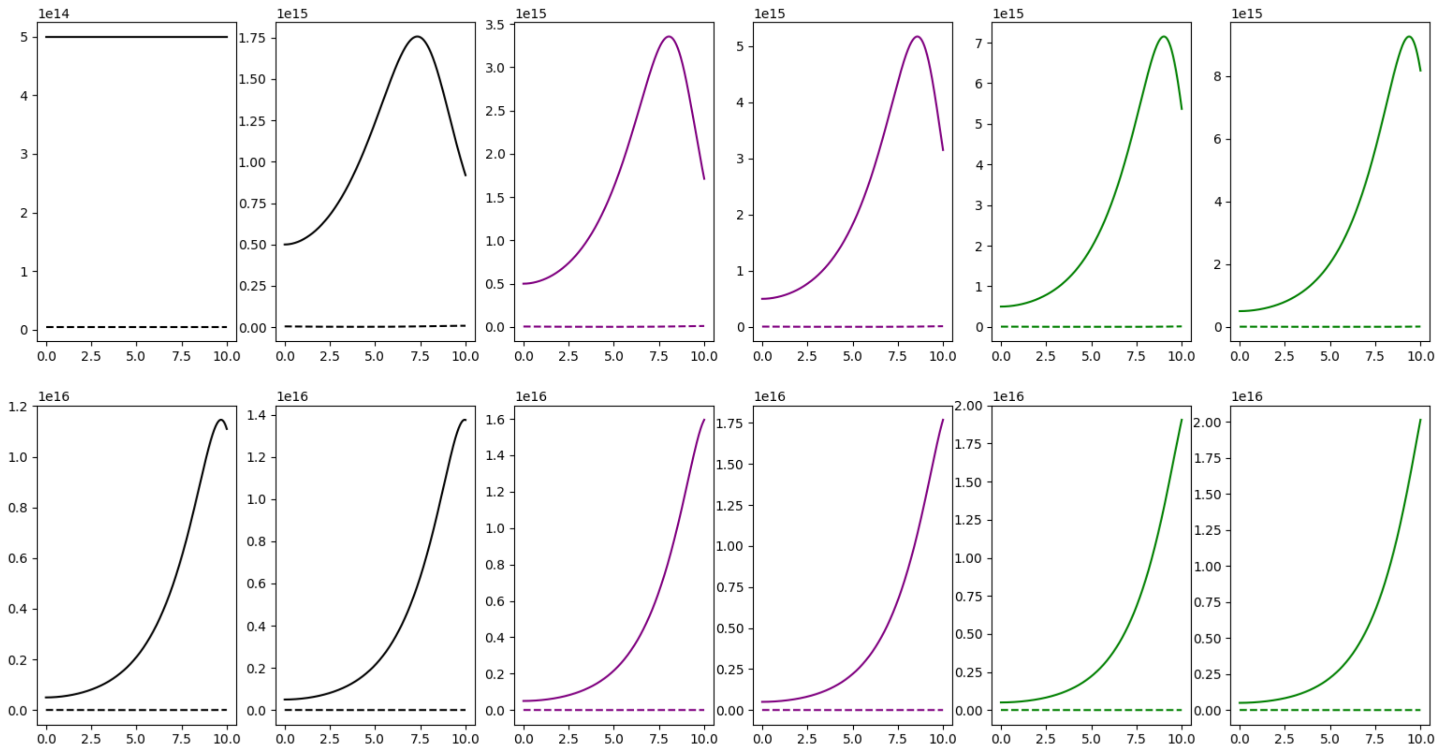

Рис. 5 Серія графіків залежності $x(t)$ та $y(t)$ при різних співвідношеннях параметрів $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$, за яких модель Вольтера практично перетворюється у модель природнього росту.

Висновки:

Під час виконання лабораторної роботи з теми “Модель «хижак – жертва» (модель Вольтера)”, я навчився складати та розраховувати кінетичні рівняння при моделюванні процесів зміни чисельності популяцій із використанням аналітичних та числових методів, а також проводити аналіз отриманих розв’язків, графічно представляти результати. Наведені розрахунки та розв’язки були отримані мною за допомогою інтегрованого середовища розробки VS Code і мови програмування Python.

Спершу я побудував серію графіків залежності $x(t)$ та $y(t)$ при різних параметрах $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$ і відповідні їм фазові портрети систем (Рисунок 4).

Далі я провів аналіз графіків й оцінив періоди коливань чисельності хижаків та жертв. На основі отриманих даних побудував Таблицю 1.
Потім я визначив, при яких відхиленнях від стаціонарних значень чисельності популяцій (x_{CT} і y_{CT}) гармонічні коливання зміняться на складні коливання, а форма фазової траєкторії стане відмінною від еліпсоїдальної (див. Таблицю 2).
На останньому етапі практичної роботи я чисельно визначив співвідношення параметрів системи, за яких модель Вольтера практично перетворюється у модель природнього росту. Початкові значення чисельності популяцій хижаків та жертв були рівними відповідним стаціонарним $x_{CT} = \frac{\beta}{\delta} + \varphi_1$ і $y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha} + \varphi_2$, де $\varphi_{1,2}$ – коефіцієнт мінімального відхилення. Значення ε і β, були обрані набагато більшими за α і δ.

$$\varepsilon = 0.5, \alpha = 10^{-13}, \delta = 10^{-15}, \beta = 0.5, x_0 = 5 \cdot 10^{15}, y_0 = 5 \cdot 10^{13}$$

Далі я поступово зменшував значення параметра δ (коефіцієнт народжуваності популяції виду-хижака). Отримані дані зафіксовано на Рисунку 5.
Таким чином, виконуються основні умови моделі Мальтуса:

- Існують тільки процеси розмноження і природньої загибелі, швидкість яких пропорційні чисельності особин у цей момент часу.
- Біохімічні, фізіологічні процеси не враховуються.
- Нескінченно великий простір і кількість ресурсів, тобто немає боротьби між особинами за місце проживання та їжу.
- Популяція хижаків вимирає, тобто фактично розглядається одна популяція

Отже, модель Вольтера практично перетворюється у модель природнього росту популяції жертв, за умови, що $x_0 = x_{CT} = \frac{\beta}{\delta} + \varphi_1, y_0 = y_{CT} = \frac{\varepsilon}{\alpha} + \varphi_2$, де $\varphi_{1,2}$ – коефіцієнт мінімального відхилення, $\varepsilon \gg \alpha, \beta \gg \delta, \alpha \gg \delta$.
При порівнянні розрахованих кривих змін $x(t)$ та $y(t)$ з експериментальними кривими (представленими на Рисунку 1) я зафіксував наступні твердження:

- Показана на Рисунку 1 динаміка популяцій зайців та рисі описує реальні дані, а розраховані криві зображають змодельовану ситуацію, що має ряд похибок.
- На Рисунку 1 популяції зайців і рисі зростають паралельно, до того ж в деякі проміжки часу популяція рисі переважає над популяцією зайців, тоді як на змодельованих кривих популяція хижаків вимирає, що задовольняє умови моделі Мальтуса.
- Час спостереження суттєво різниться, у першому випадку він становить 100 років, тоді як у другому – 10.