Ejercicios, Tarea 2 | HMG

1) $X_{n \times k}$ - no estocástica

$b_{k \times 1}$ no estocástico

a) $U_{n \times 1}$ aleatorio

$\mathbb{E}[U]=0$, $var(U)=\sigma_U^2 \mathbb{I}_n$

$\hat{b}_{MCO} = b + (X'X)^{-1}X'U$.

ii) Demostrar que $Var(\hat{b}_{MCO}) = \sigma_U^2 (X'X)^{-1}$.

$Var(\hat{b}_{MCO}) = var(b + (X'X)^{-1}X'U)$

Nótese que $(X'X)^{-1}X'$ es matriz no estocástica, también que U es aleatorio, y que b es vector no estocástico, por hipótesis.

$\Rightarrow$ Por una proposición

$var(\hat{b}_{MCO}) = (X'X)^{-1}X' \Sigma_U [(X'X)^{-1}X']'$

donde Σ_U es la varianza del vector aleatorio U.

Como $(X'X)$ es matriz simétrica

$\Rightarrow (X'X)^{-1}$ es matriz simétrica

$\Rightarrow$ Por propiedades de la ~~ma~~ transpuesta:

$$\operatorname{var}(\hat{b}_{MCO}) = (X^t X)^{-1} X^t \Sigma_u (X^t)^t [(X^t X)^{-1}]^t =$$
$$= (X^t X)^{-1} X^t \Sigma_u X (X^t X)^{-1} =$$

Por hipótesis $\Sigma_u = \sigma_u^2 I_n$

$$\Rightarrow \operatorname{var}(\hat{b}_{MCO}) = (X^t X)^{-1} X^t \sigma_u^2 I X (X^t X)^{-1} =$$
$$= (X^t X)^{-1} X^t \sigma_u^2 X (X^t X)^{-1}$$

y como σ_u^2 es un escalar

$$\Rightarrow \operatorname{var}(\hat{b}_{MCO}) = \sigma_u^2 (X^t X)^{-1} X^t X (X^t X)^{-1}$$

y por ~~[illegible]~~ propiedades de la matriz inver

$$\Rightarrow \operatorname{var}(\hat{b}_{MCO}) = \sigma_u^2 (X^t X)^{-1} I =$$
$$= \sigma_u^2 (X^t X)^{-1}$$

$\blacksquare$

$\hat{b}_{MCG} \equiv b + (X^t X)^{-1} X^t V^{-1} U$

b) $U_{n\times 1}$ aleatorio , $E[U]=0$, $var(U)=\sigma_U^2 V$

$V_{n\times n}$ matriz simétrica, no aleatoria, no-negativa definida, invertible.

i) Calcular $var(\hat{b}_{MCG})$.

$var(\hat{b}_{MCG}) = var(b + (X^t X)^{-1} X^t V^{-1} U)$

Como $(X^t X)^{-1} X^t V^{-1}$ es no estocástica
b es no estocástico
U es aleatorio

$\Rightarrow$ Por una proposición:

$var(\hat{b}_{MCG}) = (X^t X)^{-1} X^t V^{-1} \Sigma_U [(X^t X)^{-1} (X^t V^{-1})]^t$

donde $\Sigma_U = \sigma_U^2 V$ por hipótesis.

$\Rightarrow$ Por propiedades de la transpuesta

$var(\hat{b}_{MCG}) = (X^t X)^{-1} X^t V^{-1} \sigma_U^2 V \ (X^t V^{-1})^t [(X^t X)^{-1}]^t =$

$= \sigma_U^2 (X^t X)^{-1} X^t \underbrace{V^{-1} V}_{I} (V^{-1})^t (X^t)^t (X^t X)^{-1} =$

$= \sigma_U^2 (X^t X) X^t V^{-1} X (X^t X)^{-1}$.

que era lo que se pedía calcular.

c) $Z_{n\times k}$ no estocástica.

$U_{n\times 1}$ aleatorio

$$E[U]=0,\ var(U)=\sigma_0^2\,\mathbb{I}_n$$

$$\hat{b}_{VI} = b + (Z'X)^{-1}Z'U$$

vi) Calcular $var(\hat{b}_{VI})$

Siguiendo un procedimiento análogo al de los incisos anteriores:

$$var(\hat{b}_{VI}) = var\left(b + (Z'X)^{-1}Z'U\right)$$

$$= (Z'X)^{-1} Z' \text{[redacted]} \Sigma_U \left[(Z'X)^{-1}(Z' \text{[redacted]})\right]' =$$

$$= (Z'X)^{-1} Z' \text{[redacted]} \sigma_0^2 \mathbb{I} \,(Z' \text{[redacted]})' \left[(Z'X)^{-1}\right]' =$$

$$= \sigma_0^2 (Z'X)^{-1} Z' \text{[redacted]} Z \,(X'Z)^{-1} =$$

$$= \sigma_0^2 (Z'X)^{-1} Z'Z\,(X'Z)^{-1}$$

que era lo que se pedía calcular.

$$\operatorname{cov}(U,V) \equiv \mathbb{E}[(U-\mathbb{E}[U])(V-\mathbb{E}[V])']$$

2) $X_{m\times 1}$ aleatorio, $Y_{n\times 1}$ aleatorio.

i) Demostrar que $\operatorname{cov}(Y,X) = (\operatorname{cov}(X,Y))'$

Por propiedades de la transpuesta:

$$\operatorname{cov}(Y,X) = ((\operatorname{cov}(Y,X))')'$$

Usando la definición de $\operatorname{cov}(U,V)$ dada en el ejercicio:

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(Y,X) = ((\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])(X-\mathbb{E}[X])'])')'$$

Además, usamos el hecho de que $(\mathbb{E}[X])' = \mathbb{E}[X']$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(Y,X) = (\mathbb{E}[((Y-\mathbb{E}[Y])(X'\,\mathbb{E}[X])')'])'$$

Y por propiedades de la transpuesta:

$$\operatorname{cov}(Y,X) = (\mathbb{E}[((X-\mathbb{E}[X])')'(Y-\mathbb{E}[Y])'])' =$$

$$= (\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])'])'$$

Usando nuevamente la definición de covarianza

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(Y,X) = (\operatorname{cov}(X,Y))' \quad \square$$