1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(23-2n^2)(3n^2+17)^2}{4n^6+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-18n^6+\ldots}{4n^6\ldots} = -\dfrac{9}{2}$

а) $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-8n^3+\ldots}{6n^3+\ldots} = -\dfrac{4}{3}$

б) $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+\ldots}{-4n^3+\ldots} = -\dfrac{1}{2}$

г) $= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \lim\limits_{n\to\infty} n = \emptyset$

д) $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+5\,b^n}{\frac{a^n}{a}+b^n\cdot b^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a+\sqrt[n]{5}\cdot b)^n+\ldots}{\left(\frac{a}{\sqrt[n]{a}}+\sqrt[n]{b^2}\cdot b\right)^n+\ldots} = 1$

е) $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum^{n}\frac{1}{n} - \sum^{n-1}\frac{1}{n}\right) = \lim\sum^{n}\frac{1}{n} - \lim\sum^{n-1}\frac{1}{n} =$

$= \lim \dfrac{(2\cdot 3+2\cdot 1)\cdot(3\cdot 4+1)\cdot(4\cdot 5+1)\cdot\ldots\cdot(n(n-1)+1)}{n!\,(n-1)!} = \emptyset$

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}+\frac{9}{18} = 1$

3) $\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}_{1/4} + \underbrace{\frac{1}{50}+\frac{1}{200}}_{1/4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$

~~1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\sin(n+\varepsilon)}{2^{n+\varepsilon}} - \frac{\sin n}{2^n}\right| < 1$~~

~~поскольку $\sin(n)$ лежит в пределах $[-1; 1]$,~~

~~выражение $\left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \to 0$~~

~~Из этого заметно будет что $\varepsilon = 10^{-7}$ ...~~

~~что $|\sin(n)| < 1$ $n \in N^*$~~

4)

$$|x_{n+p}-x_n| = \left|\frac{\sin\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\sin(n+p)\alpha}{2^{n+p}}-\left(\frac{\sin\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\ldots\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)\alpha}{2^{n+2}}+\ldots\frac{\sin(n+p)\alpha}{2^{n+p}}\right| \le \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}} <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}+\ldots = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

рассматриваемая последовательность фундаментальная, удовлетворяет критерию Коши и является сходящейся

23 член можно взять для $\varepsilon = 10^{-7}$ учитывая $\sin n \in (-1;1)$ $n \in N^*$

5) Предположим $n=2k$, $m=k$ $k \in N$

$$|x_n - x_m| = |x_{2k}-x_k| = \frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k}k = \frac{1}{2}$$

следовательно в силу критерия Коши последовательность расходится