

ДЗ

Шишкин Алексей

26 мая 2023 г.

## 1 Укорененные деревья

Сначала посчитаем количество укорененных деревьев размера  $n$ .

Считаем деревья рекурсивно. Разделим множество помеченных листьев по двум детям в корне, создадим внутреннюю вершину, запустимся рекурсивно для левого и правого детей, приняв во внимание размеры их множеств листьев.

Учтем при этом 2 ограничения филогенетических деревьев:

1) Порядка на детях не имеется, то есть деревья, которые отличаются только обменами левого и правого ребенка, считаются одинаковыми. Тогда, чтобы не посчитать такие деревья несколько раз, представим, что минимальный (предположим, что на них есть некий порядок, главное что бы он был стабильный, например, лексикографический) из помеченных листьев всегда должен отправляться в левого ребенка.

2) Оба ребенка должны иметь непустой набор листьев (иначе степень текущей вершины будет равна двум) Значит, способов разнести  $n$  листьев по двум детям равняется  $\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1}$ . Здесь  $i$  - количество листьев в левом ребенке.

Теперь остается добавить в эту формулу результат рекурсивных вычислений. Финальная формула имеет вид:  $T_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} * T_i * T_{n-i}$

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = C_1^0 * T_1 * T_1 = 1$$

$$T_3 = C_2^0 * T_1 * T_2 + C_2^1 * T_2 * T_1 = 3$$

$$T_4 = C_3^0 * T_1 * T_3 + C_3^1 * T_2 * T_2 + C_3^2 * T_3 * T_1 = 15$$

## 2 Неукорененные деревья

Так как мы имеем помеченные листья, можно просто подвесить за фиксированный минимальный лист. Тогда количество неукорененных деревьев размера  $n$  равно  $T_{n-1}$