Лабораторная работа 4, ТВМС

Бочарников Андрей, M3238
Ковешников Глеб, M3238
Шишкин Алексей, M3238

23 апреля 2020 г.

Формулировка

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (a,σ^2), выполнить следующие действия:

1. Задать параметры распределения $X \sim N(a, \sigma^2)$.
2. Построить выборку генеральной совокупности X.
3. Построить график гистограммы.
4. Проверить гипотезу о виде распределения по критерию хи-квадрат.
Аналогично для $X \sim U(a, b)$ - равномерно распределенной на $[a, b]$ случайной величины.

Входные данные

- Размер выборки для построения гистограммы: $n = 10^6$
- Размер выборки для проверки критерия χ^2: $n = 10^4$
- Параметры нормального распределения: $\sigma = 1, \mu = 1$
- Параметры равномерного распределения: $a = 20, b = 80$
- $\alpha = 0.05$
- Количество тестов – 10^3

Программа 1

Нормальное распределение.
В первой части программы строится гистрограмма с использованием функции *hist* и выводится на экран вместе с графиком функции распределения.

Во второй части производится 4 запуска тестов:
1. Выборка генерируется с помощью нормального распределения; нижняя граница на количество элементов попавших в интервал отстутствует; проверяется гипотеза о нормальном распределении; оценивается вероятность ошибки первого рода.
2. Выборка генерируется с помощью нормального распределения; соседние интервалы объединяются, чтобы количество элементов попавших на каждый интервал было не меньше 6; проверяется гипотеза о нормальном распределении; оценивается вероятность ошибки первого рода.
3.Всё делается аналогично второму пункту, но математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение увеличиваются на 0.005. Считается ошибка второго рода.
4. Всё делается аналогично пункту 3, но математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение увеличиваются на 0.05. Считается ошибка второго рода.

3.1 Исходный код

```
pkg load statistics

clc;
```

```
clear all;

function res = test_Chi2_1(tests, n, m)
  res = 0;
  mu = 1;
  sigma = 1;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = normrnd(mu, sigma, n, 1);

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);

    #Выборочное среднее
    E = mean(X);
    #Выборочная отклонение
    SQRT_D = std(X);

    P = [];
    for i = 1 : m
      P(i) = normcdf(l + delta * i, E, SQRT_D) - normcdf(l + delta * (i - 1),
          E, SQRT_D);
    endfor

    hi2 = sum(((cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 >= chi2inv(1 - alpha, m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Normal distribution satisfies the hypothesis about normal 
      distribution\n")
  printf("For alpha = %d, probability of type I error is %d\n", alpha, res /
      tests)
endfunction

function res = test_Chi2_2(tests, n, m)
  res = 0;
  mu = 1;
  sigma = 1;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = normrnd(mu, sigma, n, 1);

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);
    walls = [];
    for i = 1 : m
      cur_l = (i - 1) * delta + l;
      cur_r = cur_l + delta;
      walls(i, 1) = cur_l;
      walls(i, 2) = cur_r;
    endfor

    #f means fixed, nj >= 6
    f_cnt_in_bucket = [];
    f_walls = [];
    f_m = 0;
    for i = 1 : m
      if (i == 1 || f_cnt_in_bucket(f_m) >= 6)
```

```
      f_m = f_m + 1;
      f_walls(f_m, 1) = walls(i, 1);
      f_cnt_in_bucket(f_m) = 0;
    endif
    f_walls(f_m, 2) = walls(i, 2);
    f_cnt_in_bucket(f_m) = f_cnt_in_bucket(f_m) + cnt_in_bucket(i);
  endfor

  #Выборочное среднее
  E = mean(X);
  #Выборочная отклонение
  SQRT_D = std(X);

  P = [];
  for i = 1 : f_m
    P(i) = normcdf(f_walls(i, 2), E, SQRT_D) - normcdf(f_walls(i, 1), E,
        SQRT_D);
  endfor

  hi2 = sum(((f_cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
  res = res + (hi2 >= chi2inv(1 - alpha, f_m - 1 - 2));
 endfor
 printf("Normal distribution satisfies the hypothesis about normal 
    distribution\n")
 printf("Sample grouped to met n_j >= 6\n")
 printf("For alpha = %d, probability of type I error is %d\n", alpha, res /
    tests)
endfunction

function res = test_Chi2_3(tests, n, m, d)
 res = 0;
 mu = 1;
 sigma = 1;
 alpha = 0.05;
 for t = 1 : tests
  X = normrnd(mu, sigma, n, 1);

  l = min(X);
  r = max(X);

  delta = (r - l) / m;
  cnt_in_bucket = hist(X, m);
  walls = [];
  for i = 1 : m
    cur_l = (i - 1) * delta + l;
    cur_r = cur_l + delta;
    walls(i, 1) = cur_l;
    walls(i, 2) = cur_r;
  endfor

  #f means fixed, nj >= 6
  f_cnt_in_bucket = [];
  f_walls = [];
  f_m = 0;
  for i = 1 : m
    if (i == 1 || f_cnt_in_bucket(f_m) >= 6)
      f_m = f_m + 1;
      f_walls(f_m, 1) = walls(i, 1);
      f_cnt_in_bucket(f_m) = 0;
    endif
    f_walls(f_m, 2) = walls(i, 2);
    f_cnt_in_bucket(f_m) = f_cnt_in_bucket(f_m) + cnt_in_bucket(i);
  endfor
```

```
    #Выборочное среднее
    E = mean(X) + d;
    #Выборочная отклонение
    SQRT_D = std(X) + d;

    P = [];
    for i = 1 : f_m
      P(i) = normcdf(f_walls(i, 2), E, SQRT_D) - normcdf(f_walls(i, 1), E,
          SQRT_D);
    endfor

    hi2 = sum(((f_cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 < chi2inv(1 - alpha, f_m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Normal distribution satisfies the hypothesis about normal
      distribution\n")
  printf("Sample mean and variance changed by %d\n", d)
  printf("For alpha = %d, probability of type II error is %d\n", alpha, res /
      tests)
endfunction

n = 10 ^ 6;
mu = 1;
sigma = 1;
m = 10 ^ 2;
tests = 10 ^ 3;

X = normrnd(mu, sigma, n, 1);

l = min(X);
r = max(X);
delta = (r - l) / m;
[y_coords x_coords] = hist(X, m);

x_coords_for_normpdf = l:0.1:r;
bar(x_coords, y_coords / (n * delta));
hold on;
plot(x_coords_for_normpdf, normpdf(x_coords_for_normpdf, mu, sigma));

printf("Sample size = %d\n", n)
printf("Length of intervals = %d\n", delta)
printf("Number of intervals = %d\n", m)

printf("\n")

# PART 2

test_Chi2_1(10 ^ 3, 10 ^ 4, m);

printf("\n")

test_Chi2_2(10 ^ 3, 10 ^ 4, m);

printf("\n")

test_Chi2_3(10 ^ 3, 10 ^ 4, m, 0.005);

printf("\n")

test_Chi2_3(10 ^ 3, 10 ^ 4, m, 0.05);

printf("\n")
```

3.2 Выходные данные

График гистограммы - график 1 в приложении после вывода.

Размер выборки = 1000000
Выбранная длина интервалов = 0.0965317
Количество интервалов = 100

Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном распределении
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки первого рода получается 0.307

Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном распределении
Данные сгруппированы, чтобы выполнялось $n_j >= 6$
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки первого рода получается 0.065

Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном распределении
Выборочное среднее и выборочная дисперсия изменены на 0.005 Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки второго рода получается 0.955

Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном распределении
Выборочное среднее и выборочная дисперсия изменены на 0.05
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки второго рода получается 0.001

Программа 2

Равномерное распределение.
В первой части программы строится гистрограмма с использованием функции *hist* и выводится на экран вместе с графиком функции распределения.

Во второй части производится три запуска тестов на проверку гипотез:
1. Выборка генерируется с помощью равномерного распределения; нижняя граница на количество элементов попавших в интервал отстутствует; проверяется гипотеза о равномерном распределении; оценивается вероятность ошибки первого рода. 2. Всё делается аналогично пункту 1, но сдвигаются границы распределения на 0.05 влево и вправо. Оценивается вероятность ошибки второго рода.
3. Всё делается аналогично пункту 1, но сдвигаются границы распределения на 3 влево и вправо. Оценивается вероятность ошибки второго рода.

4.1 Исходный код

```
pkg load statistics

clc;
clear all;

function res = test_Chi2_1(tests, n, m)
  res = 0;
  a = 20;
  b = 80;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = unifrnd(a, b, n, 1);

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);

    P = [];
```

```
    for i = 1 : m
      P(i) = unifcdf(l + i * delta, l, r) - unifcdf(l + (i - 1) * delta, l, r);
    endfor

    hi2 = sum(((cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 >= chi2inv(1 - alpha, m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Uniform distribution satisfies the hypothesis about uniform 
      distribution\n");
  printf("For alpha = %d, probability of type I error is %d\n", alpha, res /
      tests);
endfunction

function res = test_Chi2_2(tests, n, m, d)
  res = 0;
  a = 20;
  b = 80;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = unifrnd(a, b, n, 1);

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);

    P = [];
    for i = 1 : m
      P(i) = unifcdf(l + i * delta, l - d, r + d) - unifcdf(l + (i - 1) *
          delta, l - d, r + d);
    endfor

    hi2 = sum(((cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 < chi2inv(1 - alpha, m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Uniform distribution satisfies the hypothesis about uniform 
      distribution\n");
  printf("Left and right borders changed by %d\n", d)
  printf("For alpha = %d, probability of type II error is %d\n", alpha, res /
      tests)
endfunction

n = 10 ^ 6;
m = 10 ^ 2;
a = 20;
b = 80;

# PART 1

X = unifrnd(a, b, n, 1);

l = min(X);
r = max(X);
delta = (r - l) / m;
[y_coords x_coords] = hist(X, m);

real_y = 1 / (b - a);
bar(x_coords, y_coords / (n * delta));
hold on;
plot([a b], [real_y real_y], "linewidth", 1);

printf("Sample size = %d\n", n);
```

```
printf("Length of intervals = %d\n", delta);
printf("Number of intervals = %d\n", m);

printf("\n");

# PART 2

test_Chi2_1(10 ^ 3, 10 ^ 4, m);

printf("\n");

test_Chi2_2(10 ^ 3, 10 ^ 4, m, 0.05);

printf("\n");

test_Chi2_2(10 ^ 3, 10 ^ 4, m, 3);

printf("\n");
```

4.2 Выходные данные

График гистограммы - график 2 после вывода.

Размер выборки = 1000000
Выбранная длина интервалов = 0.599997
Количество интервалов = 100

Равномерное распределение проходит проверку гипотезы о равномерном распределении
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки первого рода получается 0.068

Равномерное распределение проходит проверку гипотезы о равномерном распределении
Левая и правая граница изменены на 0.05
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки второго рода получается 0.933

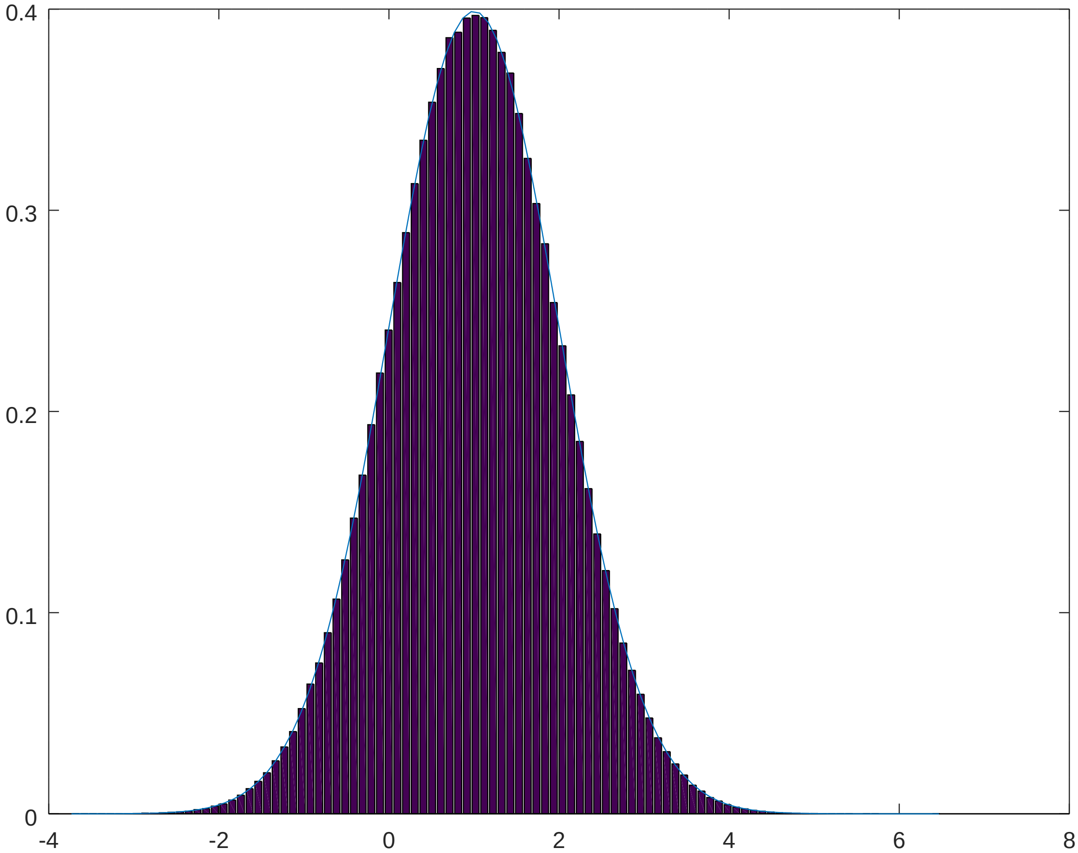
Равномерное распределение проходит проверку гипотезы о равномерном распределении
Левая и правая граница изменены на 3
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки второго рода получается 0

Вывод

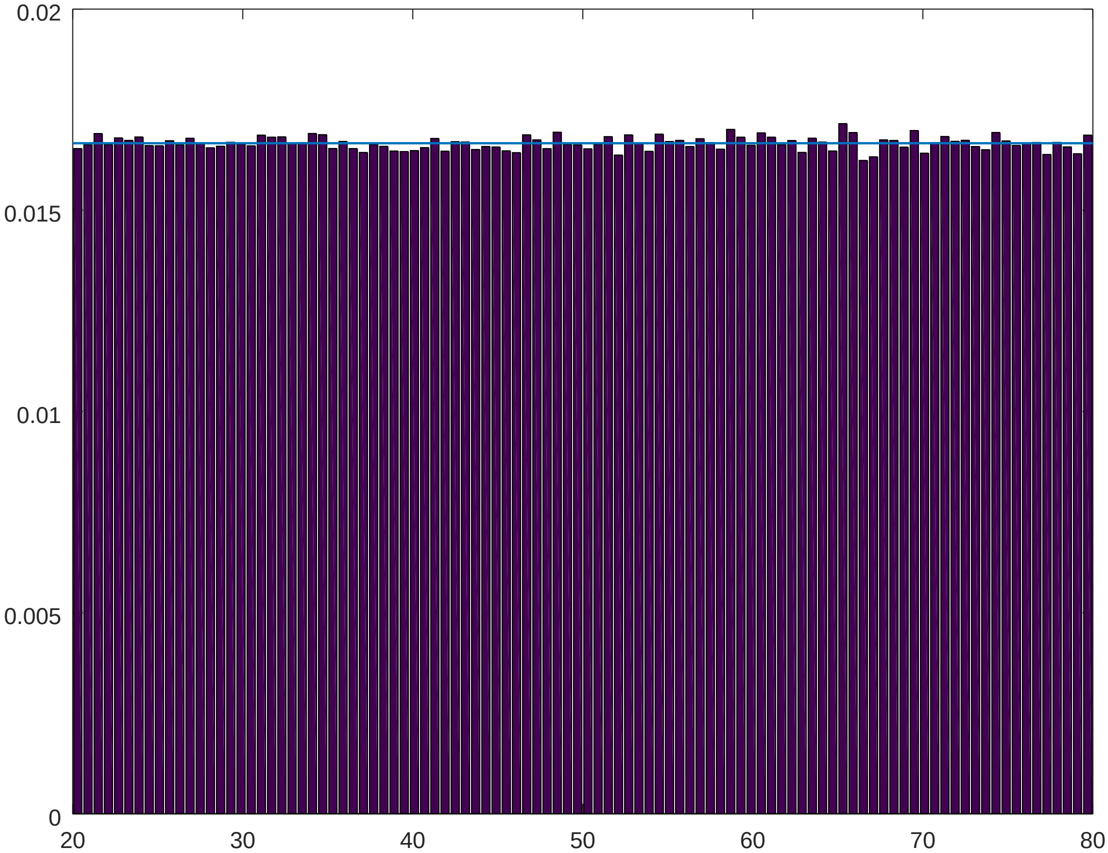
1. Как видно по рисунку, график гистограммы хорошо приближает график плотности распределения.

2. В случае равномерного распределения вероятность ошибки первого рода теста по критерию хи-квадрат для $\alpha = 0.05$, сходится к 0.05. В случае нормального распределения с целью получения корректных результатов потребовалось объединение соседних интервалов, чтобы на каждый попадало минимум 6 элементов выборки.

3. Для оценки вероятности ошибки 2 рода было проведено две проверки: с относительно небольшим и заметным изменением выборочных параметров. В первом случае по критерию хи квадрат получается что ложная гипотеза принимается с вероятность 0.955 и 0.933 в нормальном и равномерном случаях соотв., то есть хи квадрат не замечает разницы после изменения параметром на такое маленькое значение , во втором - вероятность что ложная гипотеза принимается близка к нулю - критерий хи квадрат "заметил"изменения параметра.



0.4
0.3
0.2
0.1
0
-4
-2
0
2
4
6
8


0.02
0.015
0.01
0.005
0
20
30
40
50
60
70
80