Лабораторная работа 4, ТВМС

Бочарников Андрей, М3238
Ковешников Глеб, М3238
Шишкин Алексей, М3238

15 апреля 2020 г.

Формулировка

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (a,σ^2), выполнить следующие действия:

1. Задать параметры распределения $X \sim N(a, \sigma^2)$.
2. Построить выборку генеральной совокупности X.
3. Построить график гистограммы.
4. Проверить гипотезу о виде распределения по критерию хи-квадрат.

Аналогично для $X \sim U(a, b)$ - равномерно распределенной на $[a, b]$ случайной величины.

Входные данные

- Размер выборки для построения гистограммы: $n = 10^6$
- Размер выборки для проверки критерия χ^2: $n = 10^4$
- Параметры нормального распределения: $\sigma = 1, \mu = 1$
- Параметры равномерного распределения: $a = 20, b = 80$
- $\alpha = 0.05$
- Количество тестов – 10^3

Программа 1

Нормальное распределение.
В первой части программы строится гистрограмма с использованием функции hist и выводится на экран вместе с графиком функции распределения.
Во второй части производится три запуска тестов на проверку гипотез:
1. Выборка генерируется с помощью нормального распределения; нижняя граница на количество элементов попавших в интервал отстутствует; проверяется гипотеза о нормальном распределении; оценивается вероятность ошибки первого рода.
2. Выборка генерируется с помощью нормального распределения; соседние интервалы объединяются, чтобы количество элементов попавших на каждый интервал было не меньше 6; проверяется гипотеза о нормальном распределении; оценивается вероятность ошибки первого рода.
3. Выборка генерируется с помощью нормального распределения; нижняя граница на количество элементов попавших в интервал отстутствует; проверяется гипотеза о равномерном распределении; оценивается вероятность ошибки второго рода.

3.1 Исходный код

```
pkg load statistics

clc;
clear all;
```

```
function res = test_Chi2_1(tests, n, m)
  res = 0;
  mu = 1;
  sigma = 1;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = sort(normrnd(mu, sigma, n, 1));

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);
    walls = [];
    x_coords = [];
    for i = 1 : m
      walls(i, 1) = l + delta * (i - 1);
      walls(i, 2) = l + delta * i;
      x_coords(i) = (walls(i, 2) + walls(i, 1)) / 2;
    endfor

    #Выборочное среднее
    E = sum(x_coords .* cnt_in_bucket) / n;
    #Выборочная дисперсия
    D = sum((x_coords - E) .^ 2 .* cnt_in_bucket) / n;
    SQRT_D = sqrt(D);

    P = [];
    for i = 1 : m
      P(i) = normcdf(walls(i, 2), E, SQRT_D) - normcdf(walls(i, 1), E, SQRT_D);
    endfor

    hi2 = sum(((cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 >= chi2inv(1 - alpha, m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном
      распределении\n");
  printf("Для alpha = %d, вероятность ошибки первого рода получается %d\n", alpha,
      res / tests);
endfunction

function res = test_Chi2_2(tests, n, m)
  res = 0;
  mu = 1;
  sigma = 1;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = sort(normrnd(mu, sigma, n, 1));

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);
    x_coords = [];
    walls = [];
    for i = 1 : m
      cur_l = (i - 1) * delta + l;
      cur_r = cur_l + delta;
      walls(i, 1) = cur_l;
      walls(i, 2) = cur_r;
      x_coords(i) = (cur_r + cur_l) / 2;
```

```
    endfor

    fixed_cnt_in_bucket = [];
    fixed_walls = [];
    fixed_x_coords = [];
    fixed_m = 0;
    for i = 1 : m
      if (i == 1 || fixed_cnt_in_bucket(fixed_m) >= 6)
        fixed_m = fixed_m + 1;
        fixed_walls(fixed_m, 1) = walls(i, 1);
        fixed_cnt_in_bucket(fixed_m) = 0;
        fixed_x_coords(fixed_m) = 0;
      endif
      fixed_walls(fixed_m, 2) = walls(i, 2);
      fixed_cnt_in_bucket(fixed_m) = fixed_cnt_in_bucket(fixed_m) +
          cnt_in_bucket(i);
      fixed_x_coords(fixed_m) = fixed_x_coords(fixed_m) + cnt_in_bucket(i) *
          x_coords(i);
    endfor

    fixed_x_coords = fixed_x_coords ./ fixed_cnt_in_bucket;

    #Выборочное среднее
    E = sum(fixed_x_coords .* fixed_cnt_in_bucket) / n;
    #Выборочная дисперсия
    D = sum((fixed_x_coords - E) .^ 2 .* fixed_cnt_in_bucket) / n;
    SQRT_D = sqrt(D);

    P = [];
    for i = 1 : fixed_m
      P(i) = normcdf(fixed_walls(i, 2), E, SQRT_D) - normcdf(fixed_walls(i,
          1), E, SQRT_D);
    endfor

    hi2 = sum(((fixed_cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 >= chi2inv(1 - alpha, fixed_m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном
      распределении\n");
  printf("Данные сгруппированы, чтобы выполнялось nj >= 6\n");
  printf("Для alpha = %d, вероятность ошибки первого рода получается %d\n", alpha,
      res / tests);
endfunction

function res = test_Chi2_3(tests, n, m)
  res = 0;
  mu = 1;
  sigma = 1;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = sort(normrnd(mu, sigma, n, 1));

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);
    x_coords = [];
    walls = [];
    for i = 1 : m
      walls(i, 1) = l + delta * (i - 1);
      walls(i, 2) = l + delta * i;
      x_coords(i) = (walls(i, 1) + walls(i, 2)) / 2;
```

```
    endfor

    #Выборочное среднее
    E = sum(x_coords .* cnt_in_bucket) / n;
    #Выборочная дисперсия
    D = sum((x_coords - E) .^ 2 .* cnt_in_bucket) / n;
    SQRT_D = sqrt(D);

    P = [];
    for i = 1 : m
      P(i) = unifcdf(walls(i, 2), l, r) - unifcdf(walls(i, 1), l, r);
    endfor

    hi2 = sum(((cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 < chi2inv(1 - alpha, m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Возьмём данные из нормального распределения и веротности из равномерного\n");
  printf("Тогда вероятность ошибки второго рода для alpha = %d, получается %d\n",
     alpha, res / tests);
endfunction

n = 10 ^ 6;
mu = 1;
sigma = 1;
m = 10 ^ 2;
tests = 10 ^ 3;

X = sort(normrnd(mu, sigma, n, 1));

l = min(X);
r = max(X);
delta = (r - l) / m;
x_coords = [];
y_coords = hist(X, m)' / (n * delta);

for i = 1 : m
  cur_l = (i - 1) * delta + l;
  cur_r = cur_l + delta;
  x_coords(i) = (cur_r + cur_l) / 2;
endfor

x_coords_for_normpdf = l:0.1:r;
stairs(x_coords, y_coords);
hold on;
plot(x_coords_for_normpdf, normpdf(x_coords_for_normpdf, mu, sigma));

printf("Размер выборки = %d\n", n);
printf("Выбранная длина интервалов = %d\n", delta);
printf("Количество интервалов = %d\n", m);

printf("\n");

# PART 2

test_Chi2_1(tests, 10 ^ 4, m);

printf("\n");

test_Chi2_2(tests, 10 ^ 4, m);

printf("\n");

test_Chi2_3(tests, 10 ^ 4, m);
```

3.2 Выходные данные

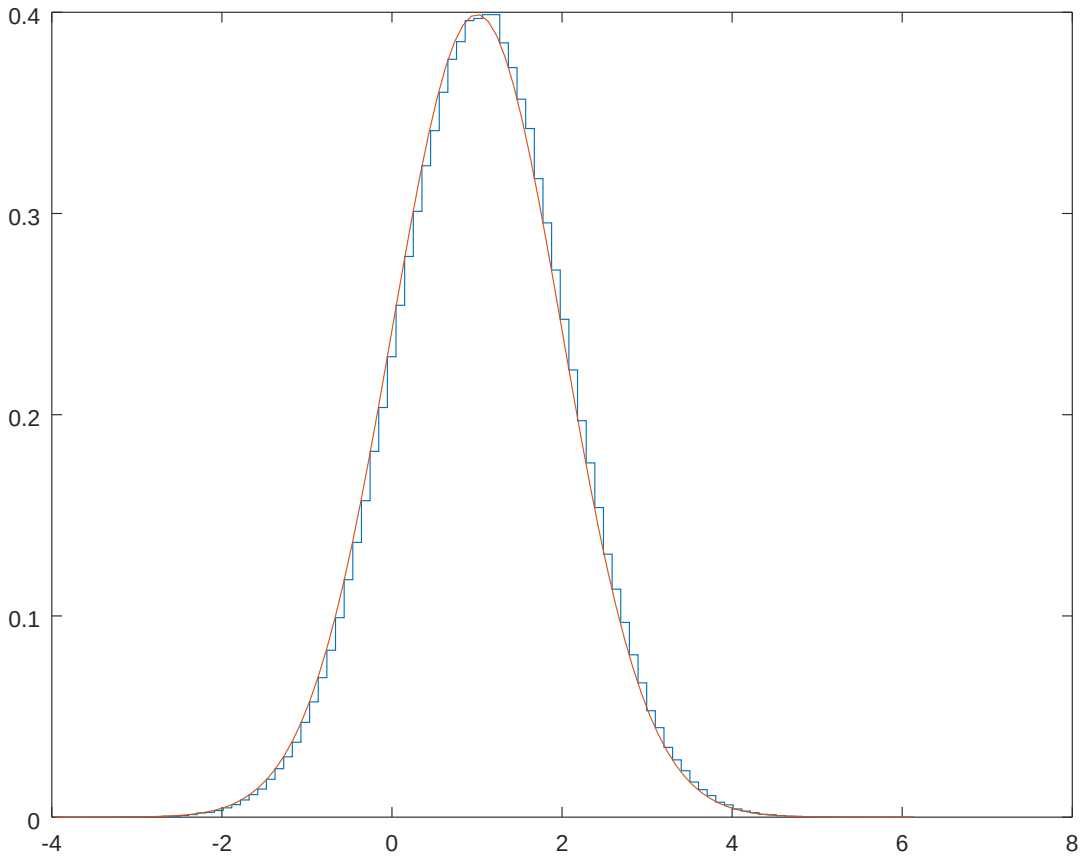
Размер выборки = 1000000
Выбранная длина интервалов = 0.0936386
Количество интервалов = 100

Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном распределении
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки первого рода получается 0.31

Нормальное распределение проходит проверку гипотезы о нормальном распределении
Данные сгруппированы, чтобы выполнялось $n_j >= 6$
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки первого рода получается 0.063

Возьмём данные из нормального распределения и веротности из равномерного
Тогда вероятность ошибки второго рода для $\alpha = 0.05$, получается 0

3.3 График


0.4
0.3
0.2
0.1
0
-4
-2
0
2
4
6
8

Программа 2

Равномерное распределение.
В первой части программы строится гистрограмма с использованием функции hist и выводится на экран вместе с графиком функции распределения.
Во второй части производится два запуска тестов на проверку гипотез:
1. Выборка генерируется с помощью равномерного распределения; нижняя граница на количество элементов попавших в интервал отстутствует; проверяется гипотеза о равномерном распределении; оценивается вероятность ошибки первого рода.
2. Выборка генерируется с помощью равномерного распределения; нижняя граница на количество элементов попавших в интервал отстутствует; проверяется гипотеза о нормальном распределении; оценивается вероятность ошибки второго рода.

4.1 Исходный код

```
pkg load statistics

clc;
clear all;

function res = test_Chi2_1(tests, n, m)
  res = 0;
  a = 20;
  b = 80;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = sort(unifrnd(a, b, n, 1));

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);
    walls = [];
    x_coords = [];
    for i = 1 : m
      walls(i, 1) = l + (i - 1) * delta;
      walls(i, 2) = l + i * delta;
      x_coords(i) = (walls(i, 2) + walls(i, 1)) / 2;
    endfor

    #Выборочное среднее
    E = sum(x_coords .* cnt_in_bucket) / n;
    #Выборочная дисперсия
    D = sum((x_coords - E) .^ 2 .* cnt_in_bucket) / n;
    SQRT_D = sqrt(D);

    P = [];
    for i = 1 : m
      P(i) = unifcdf(walls(i, 2), l, r) - unifcdf(walls(i, 1), l, r);
    endfor

    hi2 = sum(((cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 >= chi2inv(1 - alpha, m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Равномерное распределение проходит проверку гипотезы о равномерном
      распределении\n");
  printf("Для alpha = %d, вероятность ошибки первого рода получается %d\n", alpha,
      res / tests);
endfunction
```

```
function res = test_Chi2_2(tests, n, m)
  res = 0;
  a = 20;
  b = 80;
  alpha = 0.05;
  for t = 1 : tests
    X = sort(unifrnd(a, b, n, 1));

    l = min(X);
    r = max(X);

    delta = (r - l) / m;
    cnt_in_bucket = hist(X, m);
    walls = [];
    x_coords = [];
    for i = 1 : m
      walls(i, 1) = l + delta * (i - 1);
      walls(i, 2) = l + delta * i;
      x_coords(i) = (walls(i, 2) + walls(i, 1)) / 2;
    endfor

    #Выборочное среднее
    E = sum(x_coords .* cnt_in_bucket) / n;
    #Выборочная дисперсия
    D = sum((x_coords - E) .^ 2 .* cnt_in_bucket) / n;
    SQRT_D = sqrt(D);

    P = [];
    for i = 1 : m
      P(i) = normcdf(walls(i, 2), E, SQRT_D) - normcdf(walls(i, 1), E, SQRT_D);
    endfor

    hi2 = sum(((cnt_in_bucket - n .* P) .^ 2) ./ (n .* P));
    res = res + (hi2 < chi2inv(1 - alpha, m - 1 - 2));
  endfor
  printf("Возьмём данные из равномерного распределения и вероятности из
      нормального\n");
  printf("Тогда для alpha = %d, вероятность ошибки второго рода получается - %d\n",
      alpha, res / tests);
endfunction

n = 10 ^ 6;
m = 10 ^ 2;
a = 20;
b = 80;


# PART 1

X = sort(unifrnd(a, b, 1, n));

l = min(X);
r = max(X);
delta = (r - l) / m;
y_coords = hist(X, m) / (n * delta);

x_coords = [];
for i = 1 : m
  cur_l = (i - 1) * delta + l;
  cur_r = cur_l + delta;
  x_coords(i) = (cur_r + cur_l) / 2;
endfor
```

```
real_y = 1 / (b - a);
stairs(x_coords, y_coords);
hold on;
plot([a b], [real_y real_y], "linewidth", 1);

printf("Размер выборки = %d\n", n);
printf("Выбранная длина интервалов = %d\n", delta);
printf("Количество интервалов = %d\n", m);

printf("\n");

# PART 2

test_Chi2_1(10 ^ 3, 10 ^ 4, m);

printf("\n");

test_Chi2_2(10 ^ 3, 10 ^ 4, m);
```

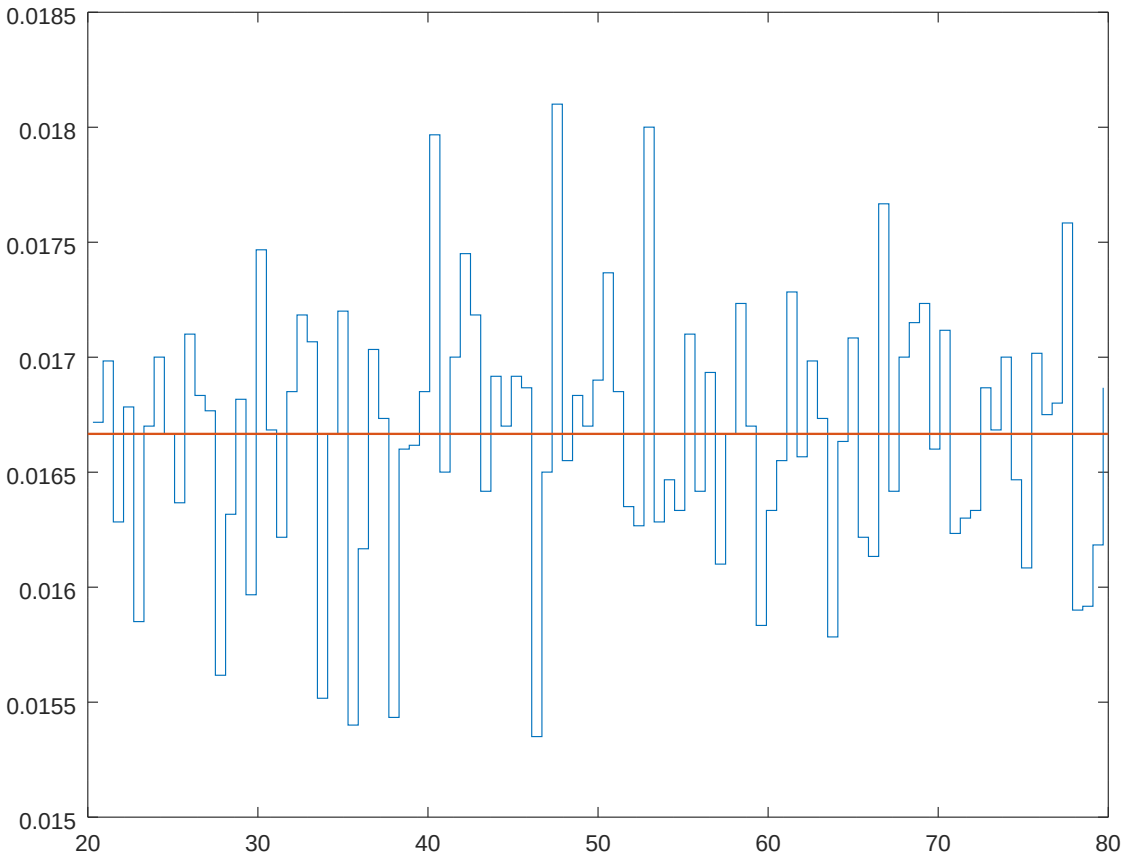
4.2 Выходные данные

Размер выборки = 1000000
Выбранная длина интервалов = 0.599999
Количество интервалов = 100

Равномерное распределение проходит проверку гипотезы о равномерном распределении
Для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки первого рода получается 0.071

Возьмём данные из равномерного распределения и вероятности из нормального
Тогда для $\alpha = 0.05$, вероятность ошибки второго рода получается - 0

4.3 График


0.0185
0.018
0.0175
0.017
0.0165
0.016
0.0155
0.015
20
30
40
50
60
70
80

Вывод

1. Как видно по рисунку, график гистограммы хорошо приближает график плотности распределения.

2. Как и нужно, вероятность ошибки первого рода теста по критерию хи-квадрат для $\alpha = 0.05$, сходится к 0.05. Вероятность ошибки второго рода для испорченной выборки сходится к 0.