

# Proyecto Fase 2

ALEJANDRO CAMPOS, DARIAN DOMINGUEZ, NELSON MENDOZA

Facultad de Matemática y Computación  
Universidad de la Habana  
2021

## Resumen

*Resumen here*

### I. INTRODUCCIÓN

introduction here

### II. SET DE DATOS

El set de datos que se analizará a continuación es el conjunto de datos de Delft, utilizado para predecir el rendimiento hidrodinámico de los yates de vela a partir de las dimensiones y velocidad. Esta base de datos muestra el comportamiento de las siguientes variables:

1. Posición longitudinal del centro de flotabilidad, adimensional.
2. Coeficiente prismático, adimensional.
3. Relación longitud-desplazamiento, adimensional.
4. Relación haz-tiro, adimensional.
5. Relación longitud-haz, adimensional.
6. Número de Froude, adimensional.
7. Resistencia residual por unidad de peso de desplazamiento, adimensional.

### I. Variables principales

De las variables anteriores se catalogan como principales, por su importancia, el coeficiente prismático, el número de Froude y la resistencia residual. El coeficiente prismático nos da una idea de cómo está diseñado el barco para "penetrar" en el agua, es decir, la facilidad para que el barco se ponga a planear y aumente su velocidad. Indica, además, la relación entre el volumen sumergido y el volumen definido por su manga máxima. Dicho de otra manera, indica el cociente entre el volumen sumergido y el volumen de la pieza a partir de la cual se ha podido "tallar" el casco. Cuanto menor sea este coeficiente más finos serán la popa y proa y, por tanto, mejor afrontarán las olas. El número de Froude relaciona el efecto de las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad que actúan sobre un fluido, estas fuerzas están presentes en el accionar de las olas causadas por un barco al navegar, por ello, esta variable es de suma importancia para el rendimiento hidrodinámico de un buque. Con el número de Froude se puede predecir la resistencia al avance de los barcos, estimando la resistencia que estos presentan ante las olas, que depende de la resistencia de fricción (debida a la superficie mojada del casco) y la

resistencia residual (debida a la formación de olas). Finalmente, la resistencia residual por unidad de peso de desplazamiento es causada por la presión que genera el casco al abrirse paso a través del agua, esta variable es de gran valor para los yates de vela en la etapa de diseño inicial, para evaluar el rendimiento del buque y estimar la potencia propulsora requerida.

### III. REGRESIÓN LINEAL

Utilizaremos el método backward para realizar un modelo de regresión lineal que explique el comportamiento de la resistencia residual. Luego nuestro modelo comienza con todas las variables principales, analicemos los resultados:

```
Call:
lm(formula = ResiduaryResistance ~ PrismCoeff + FroudeNumber,
    data = yatch_data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.823   -7.586   -1.732    5.922   31.519

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -13.993     12.409   -1.128   0.260
PrismCoeff    -18.597     21.827   -0.852   0.395
FroudeNumber  121.668     5.036   24.159 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 8.907 on 305 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6571,    Adjusted R-squared:  0.6548
F-statistic: 292.2 on 2 and 305 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Podemos observar que la variable coeficiente prismático (*PrismCoeff*) ni el intercepto son significativos en el modelo, es decir, sus coeficientes no le aportan nada a este. Si analizamos la matriz de correlación obtenemos:

```

              ID LongPosition PrismCoeff LengthDisRatio
ID            1.000000000 -6.774668e-02 1.431321e-02 -2.875420e-02
LongPosition  -0.06774668 1.000000e+00 -8.610666e-03 -2.674076e-03
PrismCoeff     0.01431321 -8.610666e-03 1.000000e+00 -4.631607e-02
LengthDisRatio -0.02875420 -2.674076e-03 -4.631607e-02 1.000000e+00
BeamDraughtRatio -0.05865198 2.928595e-03 3.394618e-01 3.768233e-01
LengthBeamRatio -0.04870850 -3.369351e-03 -8.669450e-02 6.763646e-01
FroudeNumber    0.04533868 -1.457676e-20 3.462115e-20 3.456373e-21
ResiduaryResistance 0.05232963 1.930617e-02 -2.856912e-02 -2.967365e-03
BeamDraughtRatio LengthBeamRatio FroudeNumber ResiduaryResistance
ID            -5.865198e-02 -4.870850e-02 4.533868e-02 0.052329630
LongPosition  -2.928595e-03 -3.369351e-03 -1.457676e-20 0.019306170
PrismCoeff     3.394618e-01 -8.669450e-02 3.462115e-20 -0.028569120
LengthDisRatio 3.768233e-01 6.763646e-01 3.456373e-21 -0.002967365
BeamDraughtRatio 1.000000e+00 -3.802223e-01 -1.396091e-20 -0.012421130
LengthBeamRatio -3.802223e-01 1.000000e+00 -4.408595e-21 -0.001025470
FroudeNumber    -1.396091e-20 -4.408595e-21 1.000000e+00 0.810092224
ResiduaryResistance -1.242113e-02 -1.025470e-03 8.100922e-03 1.000000000

```

Al analizar la matriz es fácil darse cuenta de que las variables coeficiente prismático y

resistencia residual no están correlacionadas, de hecho, ninguna de las variables están correlacionadas entre sí, a excepción del número de Froude y resistencia residual. Como en el caso de este modelo en particular la variable dependiente *ResiduaryResistance* no está correlacionada con la variable independiente *PrismCoeff*, debemos eliminarla. Por lo tanto tenemos un nuevo modelo sin la variable *PrismCoeff* que, además habíamos visto, no era significativa.

Luego llegamos a un modelo que tiene a *ResiduaryResistance* como variable dependiente y a *FroudeNumber* como variable independiente. Los resultados obtenidos con este modelo son los siguientes:

```
Call:
lm(formula = ResiduaryResistance ~ FroudeNumber, data = yatch_data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.240   -7.669   -1.726    6.404   32.154

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -24.484     1.534   -15.96 <2e-16 ***
FroudeNumber  121.668     5.034   24.17 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 8.903 on 306 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6562,    Adjusted R-squared:  0.6551
F-statistic: 384.2 on 1 and 306 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Ahora tenemos que  $\Pr(> |t|)$  de la variable independiente y del intercepto son menores que 0.05. El p-value también es menor que 0.05. Por lo tanto, podemos proceder a hacer un análisis de la precisión del modelo. El modelo resultante es:

$$\hat{ResiduaryResistance} = -24.484 + 121.668 * FroudeNumber$$

Se observa que el coeficiente del intercepto es mucho menor que el coeficiente del número de Froude, por lo tanto podemos decir que la mayor parte de la resistencia residual de los barcos está explicada a partir del número de Froude. El coeficiente del número de Froude es significativo al 0% y el del intercepto también es significativo al 0%. Analizando los valores de estos coeficientes, se puede afirmar que por cada aumento unitario en el número de Froude debemos esperar que la resistencia residual aumente en 121.668.

Pasando al análisis de los residuos tenemos que el R-cuadrado ajustado es 0.66, menor

que 0.70 por lo que podemos decir que es un modelo bastante malo, no obstante, sigamos con el análisis. El error estándar es 8.9, no es tan pequeño, no es lo ideal. El p-value del estadígrafo F, como se había dicho, es menor que 0.05, lo que quiere decir que existe al menos una variable significativamente diferente a cero en el modelo.

Veamos ahora si el modelo cumple los supuestos.

Recordemos que los supuestos son:

1. Existe una relación lineal entre las variables dependientes e independientes.
2. Los errores  $(e_1, \dots, e_n)$  son independientes.
3. El valor esperado del error aleatorio  $e_i$  es cero ( $E(e_i) = 0$ )
4. La Varianza del error aleatorio es constante ( $V(e_i) = \theta^2$ ). Homocedasticidad.
5. Los errores además de ser independientes son idénticamente distribuidos y siguen distribución normal con media cero y varianza constante ( $e_i \sim N(0, \theta^2)$ )
6. Las variables independientes del modelo no están correlacionadas.

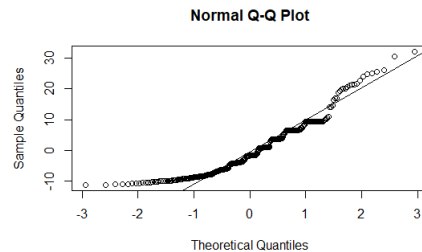
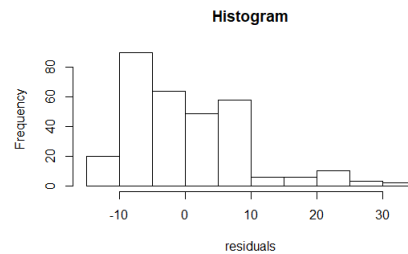
Los supuestos 1 y 6 se cumplen en el modelo en cuestión, pues el número de Froude esta correlacionado con la resistencia residual (ver matriz de correlación) y no hay más variables independientes que el mismo número de Froude.

Realicemos un análisis de los residuos para verificar si el resto de los supuestos se cumple:

Para analizar el cumplimiento del supuesto 3 debemos verificar si la media de los errores es cero y la suma de los errores es cero. Con ayuda de los comandos de R, **mean** y **sum**, se llega a que, en efecto, este supuesto se cumple.

```
> mean(residuals)
[1] -7.139401e-17
> sum(residuals)
[1] -2.187139e-14
```

Para verificar el cumplimiento del supuesto 5 debemos comprobar si los errores están normalmente distribuidos. El histograma de residuos y el gráfico QQ-plot son formas de evaluar visualmente si los residuos siguen una distribución normal. Por tanto, buscamos que el histograma tenga forma de campana y en el QQ-plot que la mayoría de los puntos de los residuos se encuentren sobre la recta o muy cercana a ella. Con ayuda de R construimos los gráficos antes mencionados para este modelo:



Parece que los residuos no siguen una distribución normal, comprobémoslo con el test de Shapiro-Wilk, con ayuda de R.

```
shapiro-wilk normality test
data: residuals
W = 0.90797, p-value = 8.997e-13
```

Como se observa, el p-valor del test de Shapiro-wilk es menor que 0.05, luego se rechaza la hipótesis nula por lo que los errores no siguen una distribución normal. Ya habíamos visto que este modelo era bastante malo, y ahora no cumple uno de los supuestos, por lo tanto ya podemos desecharlo. Sin

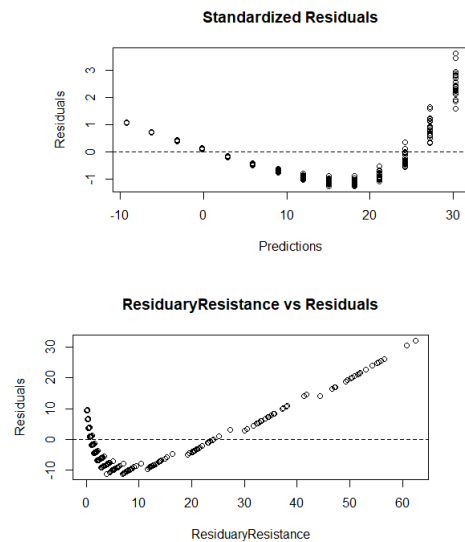
embargo, analicemos el resto de los supuestos.

La prueba Durbin-Watson se usa para probar si los residuos son independientes. La hipótesis nula de esta prueba es que los errores son independientes.

```
Durbin-Watson test
data: backward
DW = 0.50842, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

Como el p-valor de esta prueba es menor que 0.05 se rechaza la hipótesis nula, por lo que podemos afirmar que tampoco se cumple el supuesto 2.

Para probar el supuesto 4 de la Homocedasticidad podemos graficar los residuos como se muestra a continuación:



Con estos gráficos se comprueba que estos puntos no siguen una franja, por lo que es muy probable que este supuesto tampoco se cumpla. Utilicemos la prueba de Breusch-Pagan, que se utiliza para determinar la heterocedasticidad en un modelo de regresión lineal, para verificar lo anterior.

studentized Breusch-Pagan test

```
data: backward
BP = 62.16, df = 1, p-value = 3.166e-15
```

Como el p-valor de esta prueba es menor que 0.05 se rechaza la hipótesis nula por lo que podemos afirmar que se cumple la heterocedasticidad. Por lo que el supuesto de Homocedasticidad no se cumple.

Se concluye que para estos datos no existe un modelo de regresión lineal que se ajuste a ellos.

No podemos dejar de mencionar que, dado el análisis de la matriz de correlación realizado en esta sección, no es posible utilizar otra combinación de variables para realizar otro modelo de regresión, ya que las variables no tienen correlación entre sí, a excepción de las que se analizaron. El único modelo que se podría hacer con estos datos fue el que analizamos anteriormente, ya que el resto de combinaciones de modelos posibles no cumple, a priori, el supuesto 1.

El análisis de correlación también se aborda de una forma mejor explicativa en la sección X del presente informe.

## IV. ANOVA

Realicemos un análisis de ANOVA a fin de investigar si el número de Froude afecta la resistencia residual de los barcos veleros. Además, debemos considerar como factor secundario el coeficiente prismático de estos. Es decir, tenemos la variable de estudio *ResiduaryResistance*, y es claro que el número de Froude se puede ver como tratamiento y el coeficiente prismático como bloque.

Luego el problema que acabamos de plantear responde al siguiente modelo estadístico de bloques:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

Donde  $Y_{ij}$  es la medición que corresponde

al tratamiento  $i$  y al bloque  $j$ , en este caso la resistencia residual de los barcos;  $\mu$  es la media global poblacional;  $\alpha_i$  es el efecto debido al tratamiento  $i$ , en este caso los distintos números de Froude;  $\beta_j$  es el efecto debido al bloque  $j$ , en este caso los distintos coeficientes prismáticos, y  $e_{ij}$  es el error aleatorio atribuible a la medición  $Y_{ij}$ .

La hipótesis que debemos formular es la siguiente:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{14} = \mu$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j$$

La cual se puede reescribir de forma equivalente como:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{14} = 0$$

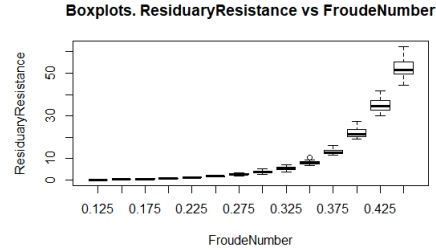
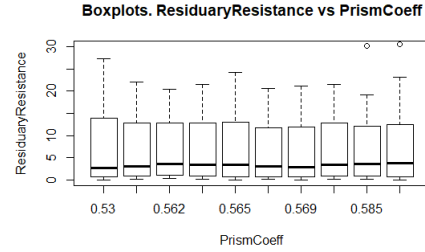
$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

Primero deberíamos acomodar los datos para poder trabajar con ellos. Lo que buscamos es tenerlos de la siguiente forma:

FroudeNumber	PrismCoeff	ResiduaryRes
f1	p1	r1
f1	p2	r2
f1	p3	r3
⋮	⋮	⋮
f1	p10	r10
f2	p1	r11
⋮	⋮	⋮
f14	p10	r308

Como tenemos 14 números de Froude distintos y 10 coeficientes prismáticos distintos, entonces ponemos en la primera columna secuencialmente 10 veces el primer número de Froude, luego el segundo y así sucesivamente, para poder listar en la segunda columna los valores de los coeficientes prismáticos en cada caso y, por último, listar la resistencia residual de cada barco.

Luego necesitamos comparar las medias de los 14 niveles del factor y las medias de los 10 niveles del bloque. Para esto realizamos gráficos de cajas con las medias de cada uno.



Podemos observar que las medias de la resistencia residual de los coeficientes prismáticos son bastante cercanas, oscilando entre 2 y 3 aproximadamente, por lo que es posible que el coeficiente prismático no tenga efecto sobre la resistencia residual de los veleros.

Por otro lado, el gráfico de la resistencia residual y el número de Froude muestra mucha diferencia en las medias, podemos apreciar que empieza en valores muy cercanos a 0 y, a medida que el número de Froude aumenta, obtenemos valores de resistencia residual promedio de 50. Por lo tanto, es muy probable que el número de Froude tenga efecto sobre la resistencia residual de los veleros.

```

Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
PrismCoeff 1 58 58 0.726 0.395
FroudeNumber 1 46306 46306 583.657 <2e-16 ***
Residuals 305 24198 79
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Notamos que en el caso del coeficiente prismático el p-valor es mayor que 0.05, luego no podemos rechazar  $H_0$  por lo que se acepta que este no influye en la resistencia residual de los barcos.

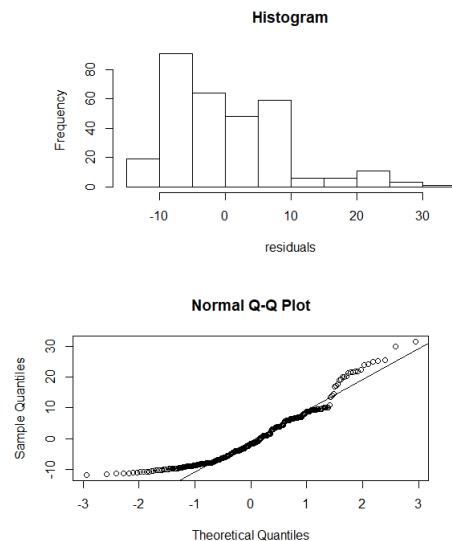
En el caso del número de Froude, como el p-valor es menor que la significación prefijada  $\alpha = 0.05$ , entonces se rechaza  $H_0$  y se acepta que al menos un par de números de Froude

tienen una resistencia promedio diferente, es decir, influyen sobre la resistencia residual de los barcos.

Verifiquemos si el modelo cumple los supuestos. Recordemos que estos son:

1. Los  $e_{ij}$  siguen una distribución normal con media cero.
2. Los  $e_{ij}$  son independientes entre sí.
3. Los residuos de cada tratamiento tienen la misma varianza  $\theta^2$ .

Para verificar el cumplimiento del supuesto 1 debemos comprobar si los errores están normalmente distribuidos. El histograma de residuos y el gráfico QQ-plot son formas de evaluar visualmente si los residuos siguen una distribución normal. Por tanto, buscamos que el histograma tenga forma de campana y en el QQ-plot que la mayoría de los puntos de los residuos se encuentren sobre la recta o muy cercana a ella. Con ayuda de R construimos los gráficos antes mencionados para este modelo:



Parece que los residuos no siguen una distribución normal, utilizaremos el test de Shapiro-Wilk, con ayuda de R, para

comprobarlo.

```
shapiro-wilk normality test
data: residuals
W = 0.91326, p-value = 2.424e-12
```

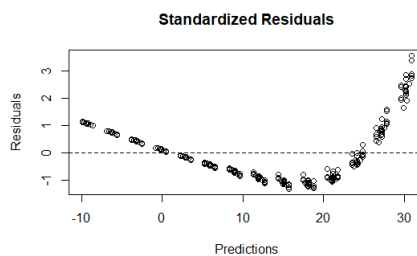
Como se observa, el p-valor del test de Shapiro-wilk es menor que 0.05, luego se rechaza la hipótesis nula por lo que los errores no siguen una distribución normal. Podemos desechar este modelo, no obstante, analicemos el resto de los supuestos.

La prueba Durbin-Watson se usa para probar si los residuos son independientes. La hipótesis nula de esta prueba es que los errores son independientes.

```
Durbin-Watson test
data: anova
DW = 0.50717, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

Como el p-valor de esta prueba es menor que 0.05 se rechaza la hipótesis nula, por lo que podemos afirmar que tampoco se cumple el supuesto 2.

Por último, para probar el supuesto 3 de la Homocedasticidad podemos graficar los residuos como se muestra a continuación:



Los puntos no forman una franja, parece ser no que tienen varianza constante. Utilicemos la prueba de Bartlett para confirmarlo.

```
Bartlett test of homogeneity of variances
data: residuals and FroudeNumber
Bartlett's K-squared = 329.23, df = 13, p-value < 2.2e-16
```

Como el p-valor de esta prueba es menor que 0.05 se rechaza la hipótesis nula por lo que el supuesto de Homocedasticidad no se cumple.

ANOVA considerando otras variables, pero por desgracia ninguno resultó válido. Solo se refleja en este informe el realizado con las variables principales visto anteriormente.

De forma análoga a como se desarrolló en esta sección, se realizaron varios análisis de

## V. REDUCCIÓN DE DIMENSIÓN