Математическая статистика
и её приложения
Домашняя работа №3

№1.

$$U_t = \beta_1 U_{t-1} + \beta_2 \cdot U_{t-2} + \varepsilon_t,\ U_0 = 0,\ \{\varepsilon_t\} \sim i.i.d.,\ \mathbb{E}\varepsilon_i^2 < \infty$$

• $\measuredangle\ U_{n+1} = \beta_1 \cdot U_n + \beta_2 \cdot U_{n-1} + \varepsilon_{n+1}$

$\measuredangle\ U_{n+1}^* = \mathbb{E}(U_{n+1} \mid \sigma(U_1, \dots, U_n)) = \beta_1 U_n + \beta_2 \cdot U_{n-1} + \overset{=0}{\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1})} =$

$= \boxed{\beta_1 \cdot U_n + \beta_2 \cdot U_{n-1}}$

• $\mathbb{E}(U_{n+1} - U_{n+1}^*)^2 = \mathbb{E}(\cancel{\beta_1 U_n} + \cancel{\beta_2 U_{n-1}} + \varepsilon_{n+1} - \cancel{\beta_1 U_n} - \cancel{\beta_2 U_{n-1}})^2 =$

$= \mathbb{E}(\varepsilon_{n+1})^2 = \{\text{т.к. } \{\varepsilon_t\} \sim i.i.d\} = \boxed{\mathbb{E}\varepsilon_1^2}$

№2.

$$U_t = \varepsilon_t - \alpha \cdot \varepsilon_{t-1},\ t = 1, \dots, n,\ \varepsilon_0 = 0,\ \{\varepsilon_t\} \sim N(0;1)$$

1) $\varepsilon_1 = U_1 + \alpha \cdot \varepsilon_0 = U_1$

$\varepsilon_2 = U_2 + \alpha \cdot \varepsilon_1 = U_2 + \alpha U_1$

$\varepsilon_3 = U_3 + \alpha \cdot \varepsilon_2 = U_3 + \alpha U_2 + \alpha^2 U_1$

$\varepsilon_4 = U_4 + \alpha \varepsilon_3 = U_4 + \alpha U_3 + \alpha^2 U_2 + \alpha^3 U_1$

Итак, выделим зависимость: $\varepsilon_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \alpha^{i-j} U_j$

2)
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ \alpha & 1 & & & 0 & & \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & & & & \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \alpha^{n-1} & \dots & & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

3) $g_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \{\mu = 0,\ \sigma = 1\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$g_U(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \overset{=1}{\frac{1}{|\det B^{-1}|}} \cdot g_\varepsilon(B\bar{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} g\left(\sum\limits_{j=1}^{i} \alpha^{i-j} x_j\right) =$

$= \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{i} \alpha^{i-j} x_j\right)^2}$

№2 (продолжение)

$$\Rightarrow \ln(q_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \alpha^{i-j} X_j\right)^2 \longrightarrow \max_{\alpha}$$

Это равносильно $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \alpha^{i-j} X_j\right)^2 \longrightarrow \min_{\alpha}}$

№3.

Схема засорения имеет вид:

$$\begin{cases} u_t = \beta\cdot u_{t-1} + \varepsilon_t, \ t\in\mathbb{Z}, \ |\beta|<1, \ \{\varepsilon_t\}\sim i.i.d, \ \mathbb{E}\varepsilon_1 = 0, \ 0<\mathbb{E}\varepsilon_1^2<\infty \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma}\cdot\xi_t, \ \beta\neq 0 \end{cases}$$

Оценка параметра β_n^* ищется как корень ур-я $\sum_{t=1}^{n} y_{t-2}(y_t-\theta\cdot y_{t-1}) = 0$

1) $l_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_{t-2}(y_t-\theta\cdot y_{t-1}) = 0$. По ЗБЧ для пос-тей с сильным перемешиванием $l_n(\theta)\xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mathbb{E}y_0(y_2-\theta y_1) \equiv \Lambda(\gamma;\theta)$

$\Rightarrow \Lambda(\gamma;\theta) = \mathbb{E}y_0(y_2-\theta y_1) = \mathbb{E}(u_0+z_0^{\gamma}\cdot\xi_0)(u_2+z_2^{\gamma}\cdot\xi_2-\theta(u_1+z_1^{\gamma}\xi_1)) =$

$u_0, u_1, u_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2$ — фикс. числа, т.е. случ. величины здесь только $z_0^{\gamma}, z_1^{\gamma}, z_2^{\gamma}\in\{0;1\}$ $\Rightarrow$ всего 8 вариантов:

$= (1-\gamma)^3\cdot\mathbb{E}u_0(u_2-\theta u_1) + \ldots$ {оставшиеся 7 слагаемых писать не имеет смысла, т.к. они входят в Σ с коэф. γ, а далее мы будем проверять усл-я теоремы при $\gamma=0$}

2) $\Lambda(0;\beta_n^*) = \mathbb{E}u_0(u_2-\beta_n^* u_1) = \mathbb{E}u_0(\cancel{\beta_n^* u_1}+\varepsilon_2-\cancel{\beta_n^* u_1}) = \mathbb{E}u_0\varepsilon_2 = 0$

3) Частн. произв. $\frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma}$ и $\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}$ сущ-ют, т.к. $\Lambda(\gamma;\theta)$ — полином

4) $\left.\frac{\partial\Lambda(\gamma;\theta)}{\partial\theta}\right|_{(0;\beta_n^*)} = \left.\frac{\partial\left((1-\gamma)^3\cdot(\mathbb{E}u_0u_2-\mathbb{E}\theta u_0u_1)\right)}{\partial\theta}\right|_{(0;\beta_n^*)} = -\mathbb{E}u_0u_1\neq 0$

Тогда, по теореме о нахождении функционала влияния в общем случае, $IF\Big|_{\substack{\gamma=0\\ \theta=\beta_n^*}} = -\left(\frac{\partial\Lambda(\gamma;\theta)}{\partial\theta}\right)^{-1}\Big|_{\gamma=0}\cdot\frac{\partial\Lambda(\gamma;\theta)}{\partial\gamma}\Big|_{\substack{\gamma=0\\ \theta=\beta_n^*}} =$

$= -\frac{u_0\cdot\mathbb{E}\xi_2-\beta_n^* u_0\cdot\mathbb{E}\xi_1-\beta_n^* u_1\cdot\mathbb{E}\xi_0+u_2\cdot\mathbb{E}\xi_0}{-u_0u_1}$ {я посчитал это выраж-е на черновике}

$GES = \sup_{\mu_\xi\in M_\xi}\left|IF\Big|_{\substack{\gamma=0\\ \theta=\beta_n^*}}\right| \leq \frac{|u_0\cdot\mathbb{E}\xi_2|+|\beta_n^* u_0\cdot\mathbb{E}\xi_1|+\ldots}{|u_0u_1|} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ данная $\boxed{\text{оценка } \beta_n^* \text{ не робастная}}$