

1(2). Дан массив из n целых чисел. Предложите алгоритм, сортирующий их по остатку при делении на 5 за время $O(n)$ (в каком порядке будут расположены числа, имеющие один и тот же остаток, неважно). Ограничение по дополнительной памяти — $O(1)$; модель вычислений атомарная.

2(2). На прямой задано n отрезков, причем известно, что они образуют систему строго вложенных отрезков (их можно упорядочить так, чтобы каждый строго содержался в следующем). Отрезки заданы координатами концов $[l_i, r_i]$ (и могут быть даны в неупорядоченном виде). Предложите асимптотически эффективный алгоритм (с точки зрения количества арифметических операций), который находит все точки прямой, которые покрыты ровно $2n/3$ отрезками.

3(3). 1. Оцените глубину стека (рекурсивных вызовов) при работе быстрой сортировки в худшем случае.

2. Измените алгоритм быстрой сортировки так, чтобы глубина стека в худшем случае была $\Theta(\log n)$.

4 (3). На вход задачи подаётся число n и массив чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Постройте линейный алгоритм, находящий число s , при котором достигается минимум суммы

$$\sum_{i=1}^{2n+1} |x_i - s|.$$

5 (5). На вход алгоритма подаётся массив натуральных чисел A и число x . Постройте алгоритм, работающий за $O(n \log n)$, который проверяет, есть ли в массиве A два элемента, сумма которых равна x .

6 (6). Дан массив a из n положительных целых чисел. Нужно разбить этот массив на максимальное количество непрерывных подмассивов так, чтобы после сортировки элементов внутри каждого подмассива весь массив стал отсортированным.

Более формально, нужно выбрать индексы i_1, \dots, i_{k-1} ($i_k = n$), такие что массив разбивается на подмассивы

$$[a_1, \dots, a_{i_1}], [a_{i_1+1}, \dots, a_{i_2}], \dots, [a_{i_{k-1}+1}, \dots, a_{i_k}],$$

в результате сортировки каждого из которых (и обратной склейки) получается отсортированный исходный массив; количество блоков разбиения k должно быть максимально возможным.

Предложите $O(n \log n)$ алгоритм для решения этой задачи, можно использовать $O(n)$ дополнительной памяти.

7(6). Массив $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ является перестановкой чисел от 1 до n . На вход задачи подаётся массив $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]$, в котором f_k — число элементов a_j , стоящих левее числа $k = a_i$ в массиве A и таких, что $a_j > a_i$ ($j < i$). Постройте эффективный алгоритм, который восстанавливает массив A по массиву F .