

1(2). Определим  $f(n)$  как количество выводов «Hello, World!» следующей функцией (на входе  $n$ ). Оцените асимптотику роста  $f(n)$ .

```

1 Function HelloWorld( $n$ ):
2   if  $n > 2023$  then
3     HelloWorld( $\lfloor n/4 \rfloor$ );
4     print("Hello, World!");
5     HelloWorld( $\lfloor n/4 \rfloor$ );
6     for  $i = 1$  to 2023 do
7       | print("Hello, World!");
8     end
9     HelloWorld( $\lfloor n/4 \rfloor$ );
10  else
11    for  $i = 1$  to  $n$  do
12      | print("Hello, World!");
13    end
14  end
15 end

```

**Комментарий:** Для простоты можно, считать, что в рекуррентных соотношениях числа не целые, а вещественные. Тогда можно игнорировать округления.

2(3). Найдите  $\Theta$ -асимптотику рекуррент:

а)  $T(n) = 36T(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor) + n^2$ ;    б)  $T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n^2$ ;    в)  $T(n) = 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{\log n} \rfloor$ .

3(4). Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера  $n$  на  $n$  задач размеров  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  каждая, используя для этого  $\Theta(n)$  операций.

1. Можно считать  $n$  степенью двойки.

2\*. Решите для произвольного  $n$  (избавляться от округлений недопустимо).

4(3) [ДПВ 1.33]. Постройте эффективный алгоритм для вычисления НОК и оцените его сложность. В данной задаче используется модель вычислений с атомарными битовыми операциями (т. е. время выполнения арифметических действий пропорционально длине чисел).

5(3). На вход подаётся числовой массив  $A$  из  $n$  элементов. Требуется найти число инверсий в массиве, т. е. пар индексов  $(i, j)$ , таких что  $i < j$  и  $a[i] > a[j]$ .

**Указание.** Модифицируйте алгоритм сортировки слиянием.

6(2). Предположим, удалось установить, что любое число можно возвести в квадрат за  $O(n)$ , где  $n$  – длина числа в двоичной записи. Докажите, что тогда любые два числа можно перемножать за  $O(n)$ , где  $n$  – длина максимального из чисел в двоичной записи.

7(6). Найдите  $\Theta$ -асимптотику рекуррентной последовательности  $T(n)$ , считая что  $T(n)$  ограничено константой при достаточно малых  $n$ :

**а)**  $T(n) = T(\lfloor \alpha n \rfloor) + T(\lfloor (1 - \alpha)n \rfloor) + \Theta(n) \quad (0 < \alpha < 1);$

**б)**  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2 \cdot T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n);$

**в)**  $T(n) = 27T(\frac{n}{3}) + \frac{n^3}{\log^2 n}.$

**8 (7).** На вход подается массив натуральных чисел  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , предложите эффективный алгоритм нахождения непрерывного подмассива  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  с максимальным произведением количества элементов в подмассиве и минимума по подмассиву.