1 Случай, когда $n < 2023$ никак не влияет на асимптотику, т.к. это $O(1)$ операций.

$$T(n) = 3 * T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + O(1) \Rightarrow d = 0, 1 < \log_4(3) = \log_b(a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{по мастер-теореме } T(n) = \Theta(n^{\log_4(3)})$$

2 Рассмотрим каждый пункт:

а) $T(n) = 36 * T(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor) + n^2 = 36 * T(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor) + O(n^2) \Rightarrow d = 2 == \log_6(36) = \log_b(a) \Rightarrow$ по мастер-теореме $T(n) = \Theta(n^2 * \log_2(n))$

б) $T(n) = 3 * T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n^2 = 3 * T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + O(n^2) \Rightarrow d = 2 > \log_3(3) = \log_b(a) \Rightarrow$ по мастер-теореме $T(n) = \Theta(n^2)$

в) $T(n) = 4 * T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{\log_2(n)} \rfloor = 4 * T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + O(n) \Rightarrow d = 1 < \log_2(4) = \log_b(a) \Rightarrow$ по мастер-теореме $T(n) = \Theta(n^2)$

3 $T(n) = n * T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \Theta(n) = n * T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + C * n = \sum_{k=0}^{h-1} C * n^k * \frac{n}{2^k} + d * n^h = C * n * \sum_{k=0}^{h-1} (\frac{n}{2})^k + d * n^{\log_2(n)}$

Рассмотрим $\sum_{k=0}^{h-1} (\frac{n}{2})^k = \frac{(\frac{n}{2})^h - 1}{\frac{n}{2} - 1} = \Theta(n^{\log_2(n)})$

Таким образом, $T(n) = \Theta(n^{\log_2(n)})$

4 Не успеваю затехать((((

5 Не успеваю затехать((((

6 Данная задача красиво решается рекурсивно: (пусть у нас b - всегда меньшее число для удобства записи) $a * b = b^2 + (a - b) * b$. В таком случае для того, чтобы посчитать произведение a на b, мы должны поситать (a-b) на b (вызываем рекурсию). Тогда, сложность совершенно очевидно доказывается через ММИ (пусть ф-я линейна - для n = 1 верно; тогда если известно для (n-1)-ого шага, то $a * b = b^2 + (a - b) * b = O(n) + O(n)$ (по предположению индукции), а значит $a * b$ - линейно. Корректность также доказывается несложно: рекурсия точно остановится, т.к. на каждом шаге рекурсии мы уменьшаем больший множитель на меньший, и он может стать либо меньше меньшего, либо равным ему. ВО втором случае один из множителей становится равным нулю, и рекурсия останавливается, а в первом она равно или поздно придет ко второму. Также наш алгоритм выдаст именно тот, нужный нам результат, потому что мы банально разложили число a на сумму $b + (a - b)$.

7 Рассмотрим каждый пункт:

а) По аналогии с алгоритмом на семинаре строим дерево рекурсии, и видим, что на каждом шаге получается $C * n$ операций, а тогда мы можем так ограничить $T(n)$: $T_{h_1}(n) \leqslant T(n) \leqslant T_{h_2}(n)$. Также нам известно, что $T_{h_1}(n) = \Theta(n * \log_2(n)) \Rightarrow T(n) = \Theta(n * \log_2(n))$

б) Данный пункт абсолютно аналогичен по алгоритму нахождения ответа. Ответ в данном пунке точно такой же, как и в пункте а).

в) $T(n) = 27 * T(\frac{n}{3}) + \frac{n^3}{(\log_2(n))^2} = \sum_{k=0}^{h-1} 27^k * \frac{(\frac{n}{3^k})^3}{(\log_2(\frac{n}{3^k}))^2} = n^3 * (log_3(2))^2 * (\frac{1}{(\log_3(n))^2} + ... + \frac{1}{(\log_3(\frac{n}{3^{h-1}}))^2}) = n^3 * (log_3(2))^2 * \sum_{k=0}^{h-1} \frac{1}{k^2} < n^3 * (log_3(2))^2 * \pi = \Theta(n^3)$