Семестровая контрольная II

Необоснованные ответы не оцениваются! Если в задаче требуется построение алгоритма, то нужно построить оптимальный алгоритм (за неэффективность снижается оценка), доказать его корректность и оценить время работы (если в условии не оговорено иное).

1 (3). В ориентированном взвешенном графе G с положительными весами на рёбрах на каждом ребре записана одна из трёх букв: a, b или c. Путь называется $a-b-c$ путём, если буквы на рёбрах вдоль него идут в порядке $a-b-c-a-b-c-\ldots$, путь может начинаться с любой буквы. Нужно найти кратчайший $a-b-c$ путь из вершины s до вершины t.

2 (3). В оперативной памяти хранится (непустое) бинарное дерево, вам дан указатель на его корень. Каждому узлу приписано целое число. Необходимо найти корень поддерева максимального размера, в котором все элементы одинаковые.

3 (3). Корневое дерево на n вершинах хранится в оперативной памяти. На вход задачи подаётся число m и m запросов: запрос (u, v) означает «Является ли вершина u предком вершины v». Постройте алгоритм, верно отвечающий на все запросы за $O(n+m)$.

4 (3). Постройте эффективный алгоритм, который, получив на вход взвешенный связный неориентированный граф $G(V, E)$ с целыми весами на рёбрах, находит множество рёбер $F \subseteq E$ минимального веса, такое что граф $G'(V, E \setminus F)$ является связным.

5 (4). Даны два массива целых чисел $a[1..n]$ и $b[1..k]$, причем все элементы b различны. Предложите алгоритм, находящий набор индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ с минимальной разностью $i_k - i_1$, для которого набор $a[i_1], \ldots, a[i_k]$ является перестановкой элементов массива b. Ограничение по времени — $O(n \log n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

6 (2+2+2). На в ход подаётся массив $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являющийся перестановкой (целых чисел от 1 до n). Вы можете изменять массив, применяя к нему следующую операцию состоящую из последовательности действий несколько (возможно, ноль) раз:

- выбрать произвольное x $(2 \leq x \leq n)$;
- создать новую перестановку так:
  - сначала выписать все элементы a_i, значения которых меньше x, без изменения их порядка;
  - затем выписать все элементы a_i, значения которых больше или равны x, без изменения их порядка;
- заменить массив a полученной перестановкой.

Например, если изначально $a = [6, 4, 3, 5, 2, 1]$ и выбрано $x = 4$, то сначала нужно выписать $[3, 2, 1]$, затем справа дописать $[6, 4, 5]$. Так, массив a будет заменён на $[3, 2, 1, 6, 4, 5]$.

1. Докажите, что всегда есть последовательность операций, сортирующая массив (превращающая исходный массив в перестановку $[1, 2, \ldots, n]$).

2. Найдите наименьшее число операций, необходимое для сортировки (ответ зависит от массива a).

3. Докажите нижнюю оценку на полученное число операций.

7 (5). На вход подаётся число n и последовательность положительных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Требуется найти её подпоследовательность $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ с максимальной суммой, удовлетворяющую следующему условию. Подпоследовательность $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ не содержит соседних элементов последовательности a_i, т.е. $i_{j+1} \neq i_j + 1$.