Математическая статистика
и её приложения

Домашняя работа №4

№3.

Дано:

По статистике, собр. в больнице такое распр-е поступивших:

ПН - 36, ВТ - 53, СР - 35, ЧТ - 26, ПТ - 30, СБ - 44, ВС - 28

Вопрос.

Согласуются ли данные с гипотезой о том, что попадание в больницу не зависит от дня недели на ур. знач. 0.05?

Решение:

1) Гипотеза о том, что попадание не зависит от дня недели эквивалентно тому, что распр-е равномерно.

2) Общее число больных: $252 = n$

3) Из (1) $\Rightarrow p_i^0 = \frac{1}{7} \quad \forall i = \overline{1,7} \Rightarrow n \cdot p_i^0 = 252 \cdot \frac{1}{7} = 36$

4) ∡ статистику Пирсона: $X_n^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(x_i - n \cdot p_i^0)^2}{n \cdot p_i^0}$ ⊜

ПН) $(36-36)^2 = 0$

ВТ) $(53-36)^2 = 289$

СР) $(35-36)^2 = 1$

ЧТ) $(26-36)^2 = 100$

ПТ) $(30-36)^2 = 36$

СБ) $(44-36)^2 = 64$

ВС) $(28-36)^2 = 64$

⊜ $\frac{554}{36} = 15,39 > \chi_{0,05}(6) = 12,6 \Rightarrow$ $\boxed{\text{отвергаем гипотезу}}$

№2.

Дано:

$x_1, \ldots, x_n \sim exp(\theta)$

Вопрос.

Построить р.н.м.к. ур. знач. α для $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta > \theta_0$

Решение:

1) $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$

Выберем фикс. θ_1 из мн-ва $\theta > \theta_0$

$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$

$f_0(x_i) = \theta_0 \cdot e^{-\theta_0 x_i} \cdot \mathbb{I}\{x_i \geq 0\}$

$f_1(x_i) = \theta_1 \cdot e^{-\theta_1 \cdot x_i} \cdot \mathbb{I}\{x_i \geq 0\}$

№2 (продолжение)

2) $\forall\ S_\lambda = \left\{ \dfrac{\prod_{i=1}^n f_1(x_i)}{\prod_{i=1}^n f_0(x_i)} \geq \lambda \right\},\ \lambda > 0$

$$S_\lambda = \left\{ \frac{\theta_1^n \cdot e^{-\theta_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i}}{\theta_0^n \cdot e^{-\theta_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i}} \geq \lambda \right\}$$

$$S_{\lambda'} = \left\{ e^{(\theta_0 - \theta_1)\cdot \sum_{i=1}^n x_i} \geq \lambda' \right\}$$

$S_{\lambda''} = \left\{ (\theta_0 - \theta_1) \cdot \sum_{i=1}^n x_i \geq \lambda'' \right\}$. Т.к. $(\theta_0 - \theta_1) < 0$, то меняем знак:

$$S_t = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \leq t \right\}$$

Итак, мы избавились от зависимости от параметров, теперь реш-е о принятии или отвержении крит-я зав-т только от самой выборки.

3) Ур. знач-ти α: $\mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n x_i \leq t \right) \leq \alpha$

Т.к. $X_i \sim exp(\theta_0)$, то $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, 1/\theta_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq t \right) = \int_0^t \frac{\theta_0^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\theta_0 x} dx \leq \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\theta_0^n}{n!} \cdot \int_0^t x^{n-1} \cdot e^{-\theta_0 x} dx \leq \alpha}$$

Далее, считаем этот интеграл при заданных θ_0, n и получаем зависимость t от α.

№1.

Дано: $X_1, \dots, X_n \sim Unif([0; \theta])$

Вопрос: Построить р.н.м.к. ур. знач. α для $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$ в виде $S = \{X_{(n)} \leq c\theta_0\}$

Решение:

1) $\forall\ \mathbb{P}_{\theta_0}(X_{(n)} \leq c \cdot \theta_0) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\theta_0}(X_i \leq c\cdot\theta_0) = \left(\dfrac{c \cdot \theta_0 - 0}{\theta_0 - 0} \right)^n = c^n \leq \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow c_0 = \sqrt[n]{\alpha} \Rightarrow S(X_1, \dots, X_n) = \{ X_{(n)} \leq \sqrt[n]{\alpha} \cdot \theta_0 \}$

2) Этот критерий явл-ся р.н.м.к., т.к. мы выбрали макс. из возм. знач-й для c, тем самым увеличив доверит. интервал

№4.

Дано: $X \sim Bin(2; \theta)$, $n = 128$, $\underset{\text{кол-во "0"}}{\mu_1} = \frac{n}{4}$, $\underset{\text{кол-во "1"}}{\mu_2} = \frac{n}{4}$, $\underset{\text{кол-во "2"}}{\mu_3} = \frac{n}{2}$

Вопрос:

Проверить на уровне знач. α гипотезу о том, что дано

Решение:

1) $L(x;\theta) = \left(C_2^0 \cdot \theta^0 \cdot (1-\theta)^2\right)^{\frac{n}{4}} \cdot \left(C_2^1 \cdot \theta^1 \cdot (1-\theta)^1\right)^{\frac{n}{4}} \cdot \left(C_2^2 \cdot \theta^2 \cdot (1-\theta)^0\right)^{\frac{n}{2}} =$

$= (1-\theta)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{4}} \cdot \theta^{\frac{n}{4}} \cdot (1-\theta)^{\frac{n}{4}} \cdot \theta^n = 2^{\frac{n}{4}} \cdot (1-\theta)^{\frac{3n}{4}} \cdot \theta^{\frac{5n}{4}}$

$\ln L(x;\theta) = \frac{5n}{4} \ln\theta + \frac{3n}{4} \ln(1-\theta) + \frac{n}{4} \ln 2$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{5n}{4} \cdot \frac{1}{\theta} - \frac{3n}{4} \cdot \frac{1}{1-\theta} = \frac{5n \cdot (1-\theta) - 3n \cdot \theta}{4\theta(1-\theta)} = \frac{5n - 8n\theta}{4\theta(1-\theta)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{5}{8}$

2) Критерий χ_n^2 для ОМП: $\sum_{i=1}^{3} \frac{(\mu_i - n \cdot p_i(\hat{\theta}))^2}{n \cdot p_i(\hat{\theta})} =$

$= \frac{(128/4 - 128 \cdot 5/8)^2}{128 \cdot 5/8} + \frac{(128/4 - 128 \cdot 5/8)^2}{128 \cdot 5/8} + \frac{(128/2 - 128 \cdot 5/8)^2}{128 \cdot 5/8} =$

$= 28,8 + 28,8 + 3,2 = 60,8 > \chi_\alpha^2(3-1-1) \ \forall \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{отвергаем гипотезу}}$