ЛЕКЦИЯ 9

ГЛАВА 2. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

2.1. Исчисление предикатов (ИП) – формальная теория К: определение и состав ИП. Свободное и связанное вхождение переменных в формулы. Контрарные литералы. Определения «свободного терма» в формуле, «чистого» и «прикладного» ИП

Определение 1. Исчисление предикатов (ИП) 1-ого порядка – это формальная теория К, в которой определены следующие компоненты:

1. Алфавит:

а) логические связки (операции): основные связки: $\neg$, $\rightarrow$; дополнительные связки: $\wedge$, $\vee$;

б) служебные скобки (левая и правая): (,);

в) кванторы: $\forall$ – квантор всеобщности; $\exists$ – квантор существования;

г) предметные константы: $a, b, c, \ldots$; $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$;

д) предметные переменные: $x, y, z, \ldots$; $x_1, x_2, \ldots$, $y_1, y_2, \ldots$;

е) предметные предикаты: $P, Q, R, \ldots$;

ж) предметные функторы: $f, p, g, \ldots$;

<u>*Замечание 1*</u>: с каждым *предикатом* и *функтором* связано некоторое *натуральное число*, называемое «*арностью*» или «*местностью*» (например, *n*-арный или *n*-местный функтор). В качестве примеров, под *функторами* можно подразумевать арифметические операции (+, –, *, /) и функции, а под *предикатами* можно подразумевать различные арифметические выражения или отношения (<, ≤, >, ≥, =, ≠).

2. Формулы (определение):

а) <формула>:= <атом> | $\neg$ <формула> | <формула→ формула > |

$\forall_{<\text{переменная}>}$ <формула> | $\exists_{<\text{переменная}>}$ <формула>

б) <атом>:= <предикат> (<список термов>)

в) <список термов>:= <терм> | <терм>, <список термов>

г) <терм>:= <константа> | <переменная> | <функтор>(<список термов>)

Замечание 1: В терме $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ функтор f должен быть n-местным (n-арным). В атоме (атомарной формуле) $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ предикат P должен быть n-местным (n-арным).

Замечание 2 (определение): Вхождения переменных в атомарные формулы A и B называется ***свободными*** (т.е. на переменные не действуют кванторы). Эти вхождения будут также ***свободными*** и в формулах $\overline{A}, \overline{B}, A \to B$, и наоборот – ***связанными*** в формулах $\forall_x A, \exists_x B$ (т.е. на переменные действуют кванторы).

Замечание 3 (определение): Формула, не содержащая ***свободных вхождений***, называется ***замкнутой***.

Примеры: Формула $\forall_x (P(x) \to \exists_y Q(x, y))$ – замкнута. Формула $\exists_y Q(x, y))$ имеет свободное вхождение переменной x.

Замечание 4 (определение): Теория L (исчисление высказываний - ИВ) не содержит кванторов. Можно полагать, что они определены для любых значений переменных, в них входящих. Поэтому можно считать, что формулы теории L – замкнуты.

Замечание 5 (определение): Формулы A и $\overline{A} = \neg A$, где A – атомарная формула, называются ***литералами*** или ***литеральными формулами*** (***контрарными литералами***).

Замечание 6 (определение): В формулах $\forall_x A, \exists_x A$ подформула A называется ***областью действия квантора по переменной x.***

Замечание 7: Имеется приоритет: $\neg$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\to$.

Замечание 8 (определение): Терм t(…, x, y,…) для переменной x в формуле A(…, x, …, t(…., x, y, …)…), называется ***свободным***, если никакое *свободное вхождение* переменной x в формулу A не лежит в области действий никакого квантора по переменной y, входящей в терм t $t(\ldots, x, y, \ldots)$.

<u>*Пример*</u>: В формуле $A(t(x,y), \forall_y Q(x,y))$ терм $t(x,y)$ для переменной x ***не свободен***.

3. Аксиомы (***логические – чистые***)

В систему «***чистых***» аксиом **ИП** входит *любая* из систем аксиом (аксиоматизаций) теории L (исчисления высказываний ИВ) и две следующие аксиомы:

$$\mathbf{P_1}:\ \forall_x A(x) \to A(t); \qquad \mathbf{P_2}:\ A(t) \to \exists_x A(x),$$

где терм ***t*** **свободен** для переменой ***x*** в формуле A.

4. Правила вывода:

а) правило «**Modus ponens (MP)**» из теории L: $\dfrac{A, A \to B}{B} MP$;

б) правило «добавления квантора всеобщности $\forall$»

$$\frac{B \to A(x)}{B \to \forall_x A(x)} \forall^+;$$

в) правило «добавления квантора существования $\exists$»

$$\frac{A(x) \to B}{\exists_x A(x) \to B} \exists^+.$$

<u>*Замечание 9*</u>: в правилах а), б) и в) формула A содержит свободные вхождения переменной x, а формула B их не содержит.

Определение 2. ИП, не содержащее предметных констант, функторов, предикатов и ***собственных*** (***не логических***, ***прикладных***) аксиом предметной (прикладной) области, называется «***чистым***» или «***узким***» (ЧИП или УИП), в противном случае – «***прикладным***» (ПИП).

Определение 3. ИП, в котором кванторы могут связывать только предметные переменные (а не функторы и не предикаты), называется «***ИП***

первого порядка», а если еще могут связывать и функторы и предикаты, тогда – «***ИП высших порядков***».

<u>*Замечание 10*</u>: Прикладные ИП 1-го порядка практически достаточны для формализации «содержательных прикладных» формальных теорий.

2.2. Интерпретация ИП: определение, свойства интерпретации

Определение 1. Интерпретация ***I*** (прикладного) ИП с ***областью интерпретации*** (***носителем интерпретации***) **M** – это набор функций которые сопоставляют:

а) каждой предметной константе ***a*** элемент носителя $I(a) \in M$;

б) каждому n-местному функтору f операцию ***I***(***f***) на носителе **M**, т.е.

$$I(f): M^n \to M;$$

в) каждому n-местному предикату P отношение ***I***(***P***) на носителе **M**, т.е.

$$I(P) \subset M^n.$$

Свойства интерпретации (материал позднее будет перенабран)

(I) $\mathscr{A}$ ложно в данной интерпретации тогда и только тогда, когда $\neg\mathscr{A}$ истинно в той же интерпретации, и $\mathscr{A}$ истинно тогда и только тогда, когда $\neg\mathscr{A}$ ложно.

(II) Никакая формула не может быть одновременно истинной и ложной в одной и той же интерпретации.

(III) Если в данной интерпретации истинны $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, то истинно и $\mathscr{B}$.

(IV) $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ ложно в данной интерпретации тогда и только тогд когда $\mathscr{A}$ в этой интерпретации истинно, а $\mathscr{B}$ ложно.

(V) (i) $\mathscr{A} \& \mathscr{B}$ выполнено на последовательности s тогда и тольк тогда, когда $\mathscr{A}$ выполнено на s и $\mathscr{B}$ выполнено на s. $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ в полнено на s тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ выполнено на s или выполнено на s. $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ выполнено на s тогда и только тогда, когд либо $\mathscr{A}$ выполнено на s и $\mathscr{B}$ выполнено на s, либо $\mathscr{A}$ не выполнен на s и $\mathscr{B}$ не выполнено на s *).

(ii) $\exists x_i \mathscr{A}$ выполнено на s тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ вы полнено хотя бы на одной последовательности s′, отличающейся от не более чем одной только i-й компонентой*).

(VI) $\mathscr{A}$ истинно в данной интерпретации тогда и только тогда, когд в этой интерпретации истинно $\forall x_i \mathscr{A}$. *Замыканием* данной формулы назовем формулу, которая получается приписыванием к $\mathscr{A}$ сперед знаков кванторов всеобщности, содержащих в порядке убывания индексо все свободные переменные, входящие в $\mathscr{A}$. Замыканием формулы $\mathscr{A}$, не содержащей свободных переменных, будем называть саму формулу $\mathscr{A}$. (Например, если $\mathscr{A}$ есть $A_1^2(x_2, x_5) \supset \neg \exists x_2 A_1^3(x_1, x_2, x_3)$, то замыканием $\mathscr{A}$ будет формула $\forall x_5 \forall x_3 \forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$.)

(VII) Всякий частный случай всякой тавтологии истинен во всякой интерпретации. (Частным случаем данной пропозициональной формы мы называем всякую формулу, получаемую подстановкой формул в эту пропозициональную форму вместо пропозициональных букв с тем условием, чтобы вместо всех вхождений одной и той же пропозициональной буквы подставлялась одна и та же формула.) (Указание. Показать, что все частные случаи аксиом системы L истинны, а затем применить (III) и предложение 1.13.)

(VIII) Пусть свободные переменные (если таковые имеются) формулы $\mathscr{A}$ содержатся среди переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$. Тогда если у последовательностей s и s′ компоненты с номерами $i_1, \ldots, i_n$ совпадают, то формула $\mathscr{A}$ выполнена на s тогда и только тогда, когда она выполнена на s′. (Указание. Индукция по числу связок и кванторов в $\mathscr{A}$. Сначала доказать, что если переменные терма t встречаются среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, а члены последовательностей s и s′ с номерами $i_1, \ldots, i_n$ совпадают, то $s^*(t) = (s')^*(t)$. В частности, если t не содержит переменных, то $s_1^*(t) = s_2^*(t)$ для любых вообще последовательностей s_1 и s_2.) (Хотя, в силу (VIII), всякая формула с n свободными переменными выполнена или не выполнена по существу только на n-ках, а не на бесконечных последовательностях, все же общую теорию выполнимости для всех формул сразу удобнее развивать в терминах не конечных, а бесконечных последовательностей.)

Множество всех n-ок $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})$ элементов области D таких, что формула $\mathscr{A}$ выполнена на всякой последовательности s, у которой i_1-я, ..., i_n-я компоненты совпадают соответственно с $b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}$, называется отношением (или свойством) интерпретации, соответствующим формуле $\mathscr{A}$ *). Пусть, например, областью D служит множество всех человеческих существ, $A_1^2(x, y)$ и $A_2^2(x, y)$ интерпретируются соответственно как «x есть брат y» и «x есть родитель y»; тогда бинарное отношение в D, соответствующее формуле $\exists x_3(A_1^2(x_1, x_3) \& A_2^2(x_3, x_2))$, представляет собой отношение родства, связывающее дядю и племянника. Если в качестве области D взять множество целых положительных чисел, а A_1^2, f_1^2 и a_1 интерпретировать соответственно как $=$, умножение и 1, то формуле

$$\neg A_1^2(x_1, a_1) \& \forall x_2(\exists x_3 A_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)) \supset A_1^2(x_2, x_1) \vee A_1^2(x_2, a_1))$$

будет соответствовать в указанном смысле свойство числа быть простым.

(IX) Если формула $\mathscr{A}$ замкнута, то в любой данной интерпретации либо истинно $\mathscr{A}$, либо истинно $\neg\mathscr{A}$ (т. е. ложно $\mathscr{A}$). (Указание. Следует из (VIII).) При этом, разумеется, $\mathscr{A}$ может быть истинно в одних интерпретациях и ложно в других (например, $A_1^1(a_1)$).

Незамкнутая, т. е. содержащая свободные переменные, формула $\mathscr{A}$ может в некоторых интерпретациях быть и не истинной и не ложной. Пусть, например, $\mathscr{A}$ есть $A_1^2(x_1, x_2)$. Рассмотрим интерпретацию, областью которой служит множество целых чисел и в которой $A_1^2(x_1, x_2)$ интерпретируется как $x < y$. В этой интерпретации $\mathscr{A}$ выполнено только на последовательностях $s = (b_1, b_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $b_1 < b_2$. Следовательно, в этой интерпретации рассматриваемая формула $\mathscr{A}$ не истинна и не ложна.

(X) Лемма. *Пусть t и v — термы, s — последовательность из Σ, t' получается из t подстановкой v вместо всех вхождений x_i и s' получается из s заменой в ней ее i-й компоненты на $s^*(v)$; тогда* $s^*(t') = (s')^*(t)$. (Указание. Индукция по длине t **).)

Пусть теперь $\mathscr{A}(x_i)$ — формула, t — терм, свободный для x_i в $\mathscr{A}(x_i)$, и $\mathscr{A}(t)$ — формула, полученная подстановкой t вместо всех свободных вхождений x_i в $\mathscr{A}(x_i)$. Утверждается, что формула $\mathscr{A}(t)$ выполнена на последовательности $s = (b_1, b_2, \ldots)$ тогда и только тогда, когда она выполнена на последовательности s', полученной из s подстановкой $s^*(t)$ в s вместо b_i. (Указание. Индукция по числу связок и кванторов в $\mathscr{A}(x_i)$ с применением леммы.)

Следствие. *Если на последовательности s выполнена формула $\forall x_i \mathscr{A}(x_i)$, то выполнена и формула $\mathscr{A}(t)$. Следовательно, формула $\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \supset \mathscr{A}(t)$ истинна в каждой интерпретации.*

(XI) Если формула $\mathcal{A}$ не содержит x_i в качестве свободной пер менной, то формула

$$\forall x_i(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset (\mathcal{A} \supset \forall x_i \mathcal{B})$$

истинна во всякой интерпретации.

2.3. Общезначимость и ее определение. Две метатеоремы «о полноте» ЧИП

Определение 1. Формула ИП ***общезначима*** (***тавтология***) если она истинна в любой интерпретации

Теорема 1. Формула $\forall_x A(x) \to A(t)$, где терм ***t*** свободен для переменной ***x*** в формуле *A*, является ***общезначимой*** (***тавтологией***).

Теорема 2. Формула $A(t) \to \exists_x A(x)$, где терм ***t*** свободен для переменной ***x*** в формуле *A*, является ***общезначимой*** (***тавтологией***).

Метатеорема 1. Любая выводимая формула в теореме ЧИП 1-ого порядка является ***общезначимой*** (***тавтологией***).

Метатеорема 2. Любая *общезначимая* формула (***тавтология***) является **выводимой формулой** в какой-либо теореме ЧИП 1-ого порядка.

2.4. «Логическое следование» и «логическая эквивалентность». Некоторые важные следствия и эквивалентности

Определение 1. Формула ***B***, выполнимая на любом наборе в любой интерпретации, на котором выполнима формула ***A***, называется «***логическим следованием (следствием)***» формулы ***A***. Обозначение: $A \Rightarrow B$.

Определение 2. Формулы ***A*** и ***B*** «***логически эквивалентны***» ($A \Leftrightarrow B$), если они являются ***логическими следствиями друг друга*** (одновременно).

Некоторые важные Следствия и Эквивалентности:

1) $\overline{\forall_x A(x)} = \neg(\forall_x A(x)) \Leftrightarrow \exists_x \neg A(x) = \exists x \overline{A(x)}$; $\quad \overline{\exists_x A(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{A(x)}$

2) $\forall_x (A(x) \,\&\, B(x)) \Leftrightarrow \forall_x A(x) \,\&\, \forall_x B(x)$; $\quad \exists_x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists_x A(x) \vee \exists_x B(x)$

3) $\exists_x (A(x) \,\&\, B(x)) \Rightarrow \exists_x A(x) \,\&\, \exists_x B(x)$; $\quad \forall_x A(x) \vee \forall_x B(x) \Rightarrow \forall_x (A(x) \vee B(x))$

4) $\forall_x \forall_y A(x,y) \Leftrightarrow \forall_y \forall_x A(x,y)$; $\quad \exists_x \exists_y A(x,y) \Leftrightarrow \exists_y \exists_x A(x,y)$

5) $\forall_x (A(x) \,\&\, C) \Leftrightarrow \forall_x A(x) \,\&\, C$; $\quad \forall_x (A(x) \vee C) \Leftrightarrow \forall_x A(x) \vee C$

6) $\exists_x (A(x) \,\&\, C) \Leftrightarrow \exists_x A(x) \,\&\, C$; $\quad \exists_x (A(x) \vee C) \Leftrightarrow \exists_x A(x) \vee C$

7) $(C \to \forall_x A(x)) \Leftrightarrow \forall_x (C \to A(x))$; $\quad (C \to \exists_x A(x)) \Leftrightarrow \exists_x (C \to A(x))$

8) $(\forall_x A(x) \to C) \Rightarrow \exists_x (A(x) \to C)$; $\quad (\exists_x A(x) \to C) \Rightarrow \forall_x (A(x) \to C)$.

<u>*Замечание*</u>: В формулах 1) – 8) формула C не содержит никаких вхождений переменной x.

9) Для любой формулы ***A*** существует ***логически эквивалентная*** ей формула A' в «***предваренной***» форме:

$$A' = Q1_{x_1} Q2_{x_2} \ldots Qn_{x_n} \widetilde{A}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n),$$

где $Q1$, $Q2$, ..., Qn – некоторый набор кванторов из множества двух кванторов (всеобщности $\forall$ и существования $\exists$). Формула $\widetilde{A}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ – бескванторная формула (в ней нет кванторов).