Глава I. Элементы выпуклого анализа

§ 1.1. Евклидово пространство. Выпуклые множества.

В этой главе рассматриваются функции определенные на множестве конечного евклидова пространства En, то есть линейно нормированного пространства со скалярным произведением.

a)$X^T+Y^T=Z^T=(z_1, z_2, \dots , z_n)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots , x_n+y_n)$ — сложение;

b)$\alpha X^T=(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots , \alpha x_n)$ - умножение на число;

c)(X,Y) — скалярное произведение;

d)||X||=(X,X) ½ — евклидова норма;

Для нормы выполняются свойства:

1. ||X||≥0
2. ||αX||=α||X||
3. ||X+Y||≤||X||+||Y|| - неравенство треугольника
4. |(X,Y)|=||X||*||Y|| - неравенство Коши-Буняковского

Определение 1: X называется предельной точкой En, если для любой последовательности {Xm} такая что

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathrm{x_m} - \mathrm{x}\| = 0, \text{ т.е. } \lim_{m\to\infty} \mathrm{x}_m = \mathrm{x}$$

Определение 2: Множество Uε(X)={Y: ||Y-X||≤ε} называется ε-окрестность точки X.

Определение 3: Множество X⊆ En называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, то есть такие точки, что для любой Uε(X) каждой из них принадлежит и бесконечное множество точек из X.

Определение 4: Точка x∈X называется граничной точкой множества X, если в любой ее окрестности содержится как точки принадлежащие множеству X, так и точки не принадлежащие множеству X.

Определение 5: Множество X n-мерного En называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками x,y ∈X ему принадлежит и соединяющий их отрезок [x,y], то есть из принадлежности x,y ∈X следует, что αX+(1-α)Y=Z ∈X, для любого 0≤α≤1.

Примеры: В E2 выпуклы: отрезок, полупрямая, прямая, круг, треугольник, полуплоскость и вся плоскость.

Определение 6: Точка Z называется выпуклой комбинацией точек $x_1, x_2,...x_m$, если

$$z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{x}_i \text{ для } \forall \alpha_i \geq 0 \text{ таких, что } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Теорема 1: Выпуклое множество X содержит все выпуклые комбинации своих точек.

Доказательство:

(по индукции) Согласно определению 5 множество X содержит все выпуклые комбинацию для любых двух своих точек . По индуктивному предположению X содержит выпуклые комбинации для любых (m-1) своих точек. Тогда точка $y=\beta_2 x_2+ \beta_3 x_3+\dots+ \beta_m x_m$ при $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}$ является выпуклой комбинацией по индуктивному предположению y ∈X. Поскольку Z = α x +(1-α)Y, то согласно определению 5 z ∈X.

Замечание

$$\sum_{i=2}^{m} \beta_i = \frac{1}{1-\alpha_1} * \sum_{2}^{m} \alpha_i = \frac{1}{1-\alpha_1} * (1-\alpha_1) = 1$$

Определение 7: Проекцией точки V на множество X называется точка p такая что r — расстояние от точки V до множества X.$\|p - V\| = \inf_{\mathrm{x} \in \chi} \|\mathrm{x} - \mathrm{V}\| = \rho(v, \chi) = \rho$

Теорема 2: Для любого замкнутого множества X и любой точки V, существует p ∈X, являющаяся проекцией точки V на множество X. Если, кроме того, X — выпукло, тогда точка p — единственна.

Доказательство:

a) Если $v \in X$, то очевидно, что p=v и r=0.

b) Если v — внешняя точка относительно X, то есть $v \notin X$. Согласно определению «нижней грани», существует последовательность $\{X_k\} \in X$, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - v\| = \rho$$

то есть $\{X_k\}$ — ограниченная. Тогда существует последовательность $\{X_{ki}\}$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = p$$

Так как X — замкнуто, тогда $p \in X$ и тогда ||p-v||=r .

c) Для доказательства ! проекции предположим что существует $p', p'' \in X$ и ($p' \neq p''$), что ||p'-v||=||p''-v||=r. Так как X — выпукло, ⇒

$$z = \frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}p''$$

Но тогда v, p', p'', z лежат в одной плоскости. Из равнобедренности треугольника с вершиной v и высоты [v,z] следует ||z-v||=r, что противоречит определению расстояния. r=||p'-v||=||p''-v||, то есть p — единственна.

Теорема 3: Для того,чтобы точка $p \in X$ была проекцией точки v на выпуклое замкнутое множество X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ выполнялось неравенство (x-p,v-p)≤0.*

Доказательство:

a) Пусть p — проекция точки v на X. Рассмотрим z = αx+(1-α)p для любого $x \in X$. В силу выпуклости X точка $z \in X$ для любой $\alpha \in [0,1]$.

Так как $\|z-v\|^2=(z-v,z-v)=(\alpha(x-p)+(p-v),\alpha(x-p)+(p-v))$

Тогда

$$\|z-v\|^2 = \alpha^2\|x-p\|^2 + 2\alpha(x-p, p-v) + \|p-v\|^2, \text{но } \|z-v\|^2 \geq \|p-v\|^2 = inf.$$

$$\text{Тогда } \alpha^2\|x-p\|^2 + 2\alpha(x-p, p-v) \geq 0$$

Так как это верно для $\alpha \in [0,1]$, тогда (x-p, p-v)≥0. Значит (x-p, v-p)≤0. Доказана «необходимость».

b) Пусть верно * , тогда для любого $x \in X$:

$\|x-v\|^2=\|(x-p)+(p-v)\|^2=\|x-p\|^2+2(x-p, p-v)+\|p-v\|^2\geq\|p-v\|$, то есть p — проекция точки v на X.

Утверждение: Для любого $x \in X$ $(x-v, x-p)=(x-p, x-p)+(p-v, x-p)\geq\|x-p\|^2$ в силу *.

(x-v=(x-p)+(p-v); $(p-v, x-p)=\|x-p\|^2$)

Определение 8: Гиперплоскостью в евклидовом пространстве En называется множество вида

$$\prod = \{x\colon (c, x) = \lambda\}, \text{где } c \neq 0 - \text{вектор}$$

Замечание: В En гиперплоскость определяет два полупространства: {X:(c,x)<λ} и {X:(c,x)≥λ}

Теорема 4 «отделимости»: Для любого выпуклого и замкнутого множества X и любой точки $v \notin X$, существует такая гиперплоскость Π, что (c,v)=λ и для любого $x \in X$ (c,x)<λ .

Доказательство:

Пусть p — проекция точки v на X, рассмотрим гиперплоскость Π={Y: (c,x)=λ, c=v-p, λ=(c,v)} для которой выполняется (c,v)=λ. Из теоремы 3, из неравенства * следует (x,v-p)≤(p,v-p)<(v,v-p), $x \in X$. Это следует из (p-v,v-p)<0 ⇔ (p,v-p)-(v,v-p)<0.

Окончательно: (c,x)=(v-p,x)<(v-p,v)=(c,v)= λ.

Замечание: X лежит в одном из полупространств, разделенных гиперплоскостью Π.

Теорема 5 «об опорной гиперплоскости»: В любой граничной точке $x^{(0)}$ выпуклого множества X существует опорная гиперплоскость, то есть существуют c≠0 и λ такие, что Π={Y: (c,y)=λ}, $\lambda=(c,x^{(0)})$ и для любого $x \in X$(c,x)≤λ .

Доказательство:

Рассмотрим последовательность {Vk}, внешних относительно замыкания X и таких, что

$$\lim_{k\to\infty} V_k = x^{(0)}$$

По теореме 4 «отделимости» для любой Vk существует Пk={X: $(c_k,y)=\lambda_k$}, где $\lambda_k=(c,v_k)$ и $(c_k,x)<\lambda_k$ для любого $x \in X$. Можно для определенности считать нормированным c_k, то есть $\|c_k\|=1$ и

$$\lim_{k\to\infty} c_k = c\,.\text{Тогда } \lim_{k\to\infty}(c_k, V_k) = \left(c, \mathrm{x}^{(0)}\right) = \lambda$$

и $(c,x)\le\lambda$. Таким образом П={x: $(c,x)=\lambda$} — опорная.

Теорема 6 «о разделяющей гиперплоскости»: Если множество X_0 внутренних точек выпуклого множества X не пусто и не пересекается с выпуклым множеством Y ($X_0 \cap Y=\emptyset$), то для множеств X и Y существует разделяющая гиперплоскость П, то есть существует вектор $c\neq0$ такой, что $(c,y)\le(c,x)$ для любого $x \in X$ и $y \in Y$.

Доказательство:

Множество Z={z: z=y-x, $y \in Y$, $x \in \prod_0$ } - выпукло и z=0 — не является его внутренней точкой. Тогда из теоремы 4 и теоремы 5 следует существование $c\neq0$ такого, что для любого $y \in Y$ и $x\in\prod_0$ $(c,z)=(c,y-x)\le(c,0)=0$. Тогда $(c,y)-(c,x)\le0$ или $(c,y)\le(c,x)$. это будет верно для любого $x\in X$, то есть для граничных точек.

Определение 9: Точка $x \in X$ называется угловой (или крайней) точкой, если в X не существует таких точек x' и x", x'=x", что x=α x'+(1-α)x" при некотором $\alpha\in(0,1)$.

Замечание: Для круга точки окружности — угловые; вершины выпуклого многогранника — угловые.

Теорема 7 «о представлении»: Любая точка $x^{(0)}$ выпуклого замкнутого ограниченного множества X может быть представлена в виде выпуклой комбинации конечного числа угловых точек этого множества.

Доказательство (по индукции):

I. если n=1, то X — отрезок, тогда очевидно, так как выпуклая комбинация для $x^{(0)}$ — есть среднеквадратичное

$$\mathrm{x}^{(0)} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, \mathrm{x}_i;\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

II. предположим, что

§ 1.2. Конус. Теорема Фаркоша.

Определение 1: Множество K называется конусом, если из $x\in K$ следует, что $\lambda x\in K$ для любой $\lambda>0$.

Примеры:

1. En — конус
2. его подпространства — конусы
3. неотрицательный ортант {X:X≥0}
4. множества {X:AX≤0} и {Y: Y=AX, X≥0} — конусы

Утверждение: Множество (конус) Y={Y: Y=AX, X≥0} — замкнуто.

Доказательство:

Пусть матрица A как набор столбцов — векторов записана следующим образом: $A=[A_1, A_2, \dots, A_m]$, тогда докажем по индукции:

I. m=1, множество Y является полупрямой, то есть замкнуто.
II. Предположим m=k-1 и конус Y, порожденный векторами $A_1, A_2, \dots, A_{к-1}$, замкнут. Докажем для m=k.
III. Если конусу Y принадлежит: $-A_1, -A_2, \dots, -A_к$, то он является подпространством размерности ≤ k и следовательно конус — замкнутое множество.

Предположим, что хотя бы один вектор, например вектор $-A_к\notin Y$. Для любого $y \in Y$ представим $y=y+\alpha A_к$, где $y \in Y$ и существует $\alpha\ge0$. Рассмотрим последовательность $\{Yn\} \to Y$. Тогда $y_n=y_n+\alpha_n A_к$ для любого n и существующего $\alpha_n\ge0$, а так же

Следовательно, также $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Следовательно $y - \alpha A_k = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n - \alpha_n A_k) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \overline{y_n} = \bar{y} \in \bar{Y}$ в виду замкнутости $\bar{Y}$
в виду замкнутости Y. Значит $y=y+\alpha A_к \in Y$ получено при условии ограниченности (сходимости) $|\alpha_n|<\infty$.
<u>Замечание</u>: Если предположить, что $|\alpha_n| \to \infty\ \ n \to \infty$
тогда $\frac{1}{\alpha_n} y_n = \frac{1}{\alpha_n}\overline{y_n} + A_k,\ \frac{1}{\alpha_n} y_n \to 0$
тогда $\lim\limits_{n\gg\infty} \frac{1}{\alpha_n}\overline{y_n} = \bar{y} \in \bar{Y},\ \bar{y} = -A_k \in \bar{Y}$ – противоречие.

<u>Теорема Фаркоша:</u> Неравенство $(v,x)\le 0$ выполняется для любого $X\in\{X: BX\le 0\}$ в том и только том случае, если существует вектор $U\ge 0$, что $V=B^TU$.
Доказательство:

I. Достаточность: Дано $U\ge 0$ и $V=B^TU$. Тогда для любого $x\in\{x: Bx\le 0\}$ будет $(v,x)=(B^TU,x)=(U,Bx)\le 0$.
II. Необходимость: Пусть для любого $x\in\{x: Bx\le 0\}$ верно $(v,x)\le 0$. Рассмотрим конус $Y=\{y{:}y=B^TU,\ U\ge 0\}$

а) если $v\in Y$, то теорема доказана.
б) предположим, что $v\notin Y$. Множество выпукло (определение 5, теорема 1) и замкнуто (на основе утверждения), поэтому по «отделимости» существует вектор $c\neq 0$ такой, что $\lambda(c,y)<(c,v)$ для любого $y \in Y$. Так как $\lambda\ y \in Y$ при любой $\lambda\ge 0$, тогда из условия следует, что $\lambda(c,y)<(c,v)$, при любой $\lambda\ge 0$. Значит $(c,y)\le 0$. Но $(c,y)=(c,\ B^TU)=(U,Bc)\le 0$. И так как это верно для любого $U\ge 0$, тогда $Bc\le 0$. Но $y=0$ тоже принадлежит Y, поэтому $(c,v)>(c,y)=0$, то есть $(c,v)>0$. Если принять $x=c$, тогда $(x,v)>0$ и $Bx\le 0$, что противоречит условиям теоремы, следовательно, $v\in Y$. Теорема доказана.
<u>Следствие 1</u>: Для любой матрицы B и любого вектора v имеет место следующая альтернатива: либо имеет решение система $\{Bx\ge 0,(v,x)<0\}$, либо имеет решение система $\{V=B^TU,\ U\ge 0\}$.
Доказательство:

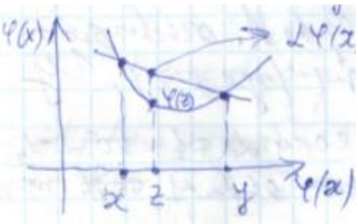
1. если решается 2-ая система, то из теоремы Фаркоша следует, что $\forall\ x \in \{x{:}\, Bx \ge 0\}$ будет верно $(v,x)\ge 0$ и значит 1-ая неразрешима.
2. если 2-ая система неразрешима, то по теореме Фаркоша для $\forall x \in \{x{:}\, Bx \ge 0\}$ не будет выполняться условие $(v,x)\ge 0$, а следовательно $(v,x)<0$ для некоторого $x \in \{x{:}\, Bx \ge 0\}$, т.е. 1-ая система разрешима.

<u>Следствие 2</u> (модификация следствия 1): Для любой матрицы B и любого вектора v имеет место следующая альтернатива: либо имеет решение система $\{Bx\ge 0,\ x\ge 0,\ (v,x)<0\}$, либо имеет решение система $\{V\ge B^TU,\ U\ge 0\}$.

§ 1.3. Выпуклые функции.

<u>Определение 1:</u> Функция $\varphi(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется выпуклой, если для любых $x,\ y \in\prod$ и для любого $\alpha \in[0,1]$ выполняется неравенство:

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y).*$$



$\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)$ — точка хорды выше либо равная ординате графика.
Вогнутой функцией называется такая $\varphi(x)$, для которой функция $(-\varphi(x))$ — выпукла, т е $\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)$

<u>Замечание:</u> Если любого $\alpha \in(0,1)$ неравенство * строгое, то $\varphi(x)$ называется строго выпуклой.
<u>Теорема:</u> Для того, чтобы квадратичная функция $\varphi(x) = (x, Bx) + (p, x)$
была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы симметрическая матрица B была положительно определенной.

Доказательство: $\varphi(\alpha * \mathrm{x} + (1-\alpha)\mathrm{y}) = \alpha^2(\mathrm{x}, \mathrm{Bx}) + 2\alpha(1-\alpha)(\mathrm{x}, \mathrm{By}) + (1-\alpha)^2(y, By) + \alpha(p, \mathrm{x}) + (1-\alpha)(p, y) = \alpha\varphi(\mathrm{x}) + (1-\alpha)\varphi(y) - \alpha(1-\alpha)\big(\mathrm{x}-\mathrm{y}, \mathrm{B}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\big)$ и при $\alpha \in (0,1)$ будет $\alpha(1-\alpha)(\mathrm{x}-y, B(\mathrm{x}-\mathrm{y})) \geq 0$ в том и только в том случае, если B - положительно определена.
в том и только том случае, если B — положительно определена.
Замечание: Для строгой выпуклости квадратичной функции φ(x) необходимо и достаточно строго положительно определить матрицы B.

§ 1.3.1. Свойства выпуклых функций.

1. Теорема 1: Для любой выпуклой функции φ(x), определенной на выпукло множестве X, и для любого числа λ множество $Z = \{\mathrm{x} \in \mathbf{X} \colon \varphi(\mathrm{x}) \leq \lambda\}$ выпукло.

Доказательство:
Согласно определению 5 достаточно показать, что из x, y ∈Z следует $z = \alpha\mathrm{x} + (1-\alpha)\mathrm{y} \in \mathrm{Z}$ для любой α ∈[0,1]. Из выпуклости множества X следует, что z ∈∏. Используя определение выпуклой функции * получим:
$$\varphi(z) = \varphi(\alpha\mathrm{x} + (1-\alpha)\mathrm{y}) \leq \alpha\varphi(\mathrm{x}) + (1-\alpha)\varphi(y) \leq \alpha * \lambda + (1-\alpha)\lambda = \lambda$$
Замечание: Очевидно, что для вогнутой функции φ(x) выпуклым множеством будет
$$z = \{\mathrm{x} \in \mathbf{X} \colon \varphi(\mathrm{x}) \geq \lambda\}$$

2. Теорема 2 (неравенство Иенсена): Если φ(x) выпукла на выпуклом множестве X и
$$z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{x}_i, \text{где} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0,$$
$$\mathrm{x}_i \in \mathbf{X} \text{ для } i = \overline{1,m}, \text{то } \varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{x}_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(\mathrm{x}_i) \quad (*)$$

Доказательство: (по индукции)
I. m=1 — неравенство Иенсена очевидно.
II. Индуктивное предположение для m-1 (где m>1). Из теоремы 1 §1.1 следует, что z∈X
а) если $\alpha_m=1$, то $\alpha_1=\alpha_2= \ldots =\alpha_{m-1}=0$ и * очевидно.
б) если $0\leq\alpha_m<1$, то из выпуклости и индуктивности предположения следует:
$$\varphi(z) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{x}_i\right) = \varphi\left((1-\alpha_m) * \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} \mathrm{x_i} + \alpha_\mathrm{m}\mathrm{x}_\mathrm{m}\right) \leq (1-\alpha_m)$$
$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \mathrm{x_i}\right) + \alpha_m\varphi(\mathrm{x}_m) \leq (1-\alpha_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} \varphi(\mathrm{x_i}) + \alpha_m\varphi(\mathrm{x}_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\varphi(\mathrm{x}_i)$$

3. Теорема 3 (без доказательства): Выпуклая функция φ(x) определенная на выпуклом множестве X, в любой внутренней точке производную по любому направлению S (где
$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x})}{\partial s} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{\varphi(\mathrm{x}+\lambda\mathrm{s}) - \varphi(\mathrm{x})}{\lambda}$$
||S||=1):

Замечание: В методе «штрафных функций» используется следующие 2 свойства:

4. Теорема 4: Если X(x) — выпукла на всем множестве X, то на X выпуклая функция φ(x)=max{X(x),0}.

Доказательство:
Для любых x,y ∈X $\varphi(\alpha\mathrm{x} + (1-\alpha)\mathrm{y}) = \max\{æ(\alpha\mathrm{x} + (1-\alpha)\mathrm{y}), 0\} \leq \max\{\alpha æ(\mathrm{x}) + (1-\alpha)æ(y), 0\} \leq \alpha\max\{æ(\mathrm{x}), 0\} + (1-\alpha)\max\{æ(y), 0\} = \alpha\varphi(\mathrm{x}) + (1-\alpha)\varphi(y)$

5. Теорема 5: Если φ(x) — выпукла и неотрицательна на выпуклом множестве X, то на X будет выпукла функция φ^2(x).

Доказательство: $\varphi^2(\alpha\mathrm{x} + (1-\alpha)y) \leq \alpha^2\varphi^2(\mathrm{x}) + 2\alpha(1-\alpha)\varphi(\mathrm{x})\varphi(y) + (1-\alpha)^2\varphi^2(y) =$

$\alpha\varphi^2(\mathrm{x}) + (1-\alpha)\varphi^2(y) - \alpha(1-\alpha)[\varphi(\mathrm{x}) - \varphi(y)]^2 \le \alpha\varphi^2(\mathrm{x}) + (1-\alpha)\varphi^2(y).$

6. Часто используемое свойство. Теорема 6: Функция φ(x), дифференцируемая на выпуклом множестве X, выпукла в том и только том случае, если для любых x,y ∈X будет $(\varphi'(\mathrm{x}), y-\mathrm{x}) \le \varphi(y) - \varphi(\mathrm{x})$ $(+)$

Для вогнутой функции $(\varphi'(\mathrm{x}), y-\mathrm{x}) \ge \varphi(y) - \varphi(x)$ $(++)$

Доказательство:

I (Необходимость): Пусть φ(x) — выпукла. Тогда x,y ∈X, x≠y и для любых α таких, что 0 < α ≤ 1, справедливо неравенство $\varphi\big(\mathrm{x} + \alpha(\mathrm{y}-\mathrm{x})\big) \le \varphi(\mathrm{x}) + \alpha[\varphi(y) - \varphi(\mathrm{x})] \Rightarrow$

$$\|y-\mathrm{x}\| * \frac{\varphi(\mathrm{x}+\beta\mathrm{s}) - \varphi(\mathrm{x})}{\beta} \le \varphi(y) - \varphi(\mathrm{x}), \text{где } s = \frac{y-\mathrm{x}}{\|y-\mathrm{x}\|}, \qquad \beta = \alpha\|y-\mathrm{x}\|$$

Переходя к lim, получим

$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x})}{\partial s}\|y-\mathrm{x}\| \le \varphi(y) - \varphi(\mathrm{x}), \text{т. е.} (\varphi'(\mathrm{x}), s) * \|y-\mathrm{x}\| = (\varphi'(\mathrm{x}), y-\mathrm{x}) \le \varphi(y) - \varphi(\mathrm{x}).$$

II (Достаточность): Пусть выполняется *. Рассмотрим точку z=αx+(1-α)y при 0 ≤ α ≤ 1. Так как z ∈X, то $(\varphi'(z), \mathrm{x}-z) \le \varphi(\mathrm{x}) - \varphi(\mathrm{z})$ и $(\varphi'(z), y-z) \le \varphi(y) - \varphi(z)$

Умножив первое неравенство на α , второе на (1-α) и сложив полученные неравенства, имеем

$$0 = (\varphi'(z), 0) \le \alpha\varphi(\mathrm{x}) + (1-\alpha)\varphi(y) - \varphi(z), \text{т. е.}$$

$$\varphi(z) \le \alpha\varphi(\mathrm{x}) + (1 - \alpha\varphi(y)). - \text{доказана теорема}$$

Экстремальные свойства (поиск точек в которых достигается *min*)

7. Теорема 7: Если выпуклы функция φ(x) и множество X, то для любой точки x*∈X, являющаяся точкой локального минимума, будет оптимальной для задачи минимизации функции φ(x) на X.

Доказательство (от противного):

x* - не optim точка, то есть существует x' ∈X такая, что φ(x')<φ(x*). далее рассмотрим точку x=αx'+(1-α)x* и α ∈[0,1]. Точка x∈X, так как X — выпуклое множество из выпуклости φ(x) и optim-ти x' следует:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \varphi(\alpha\mathrm{x} + (1-\alpha)\mathrm{x}^*) \le \alpha\varphi(\mathrm{x}') + (1-\alpha)\varphi(\mathrm{x}^*) < 2\varphi(\mathrm{x}^*) + (1-\alpha)\varphi(\mathrm{x}^*) = \varphi(\mathrm{x}^*),$$

то есть φ(x)<φ(x*). При малых α~0 x в малой окрестности x* - локального минимума будет противоречие.

8. Теорема 8: Если выпуклы φ(x) и X, то множество оптимальных точек

$$\mathbf{X}^* = \{\mathrm{x}^* \in \mathbf{X}: \varphi(\mathrm{x}^*) = min\varphi(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \mathbf{X}\} = Arg\min\{\varphi(x): x \in \boldsymbol{X}\} - \text{ выпукло.}$$

Доказательство:

Пусть x', x''∈X*. Так как X*⊆X — выпуклое множество, то для любого α ∈[0,1] будет z=αx'+(1-α)x'' ∈X, а в виду выпуклости φ(x)

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha\mathrm{x}' + (1-\alpha)\mathrm{x}'') \le \alpha\varphi(\mathrm{x}') + (1-\alpha)\varphi(\mathrm{x}'') = \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \mu.$$

Кроме того, φ(z)≥μ, поэтому φ(z)=μ, то есть z∈X*.

9. Теорема 9: Если φ(x) строго выпукла на выпуклом множестве X и точка x*∈ X оптимальна, то есть μ=φ(x*)=*min* φ (x), x∈X, то для любого x∈X и x≠x* будет φ(x)>φ(x*) и, значит, x* - единственна.

Доказательство:

Предположим, что существует x'∈X, x'≠x* такая, что φ(x')=φ(x*)=μ. Тогда для любой α ∈[0,1] точка x=αx'+(1-α)x* ∈X и в силу строгой выпуклости φ(x) будет $\varphi(\mathrm{x}) = \varphi(\alpha\mathrm{x}' + (1-\alpha)\mathrm{x}^*) < \alpha\varphi(\mathrm{x}') + (1-\alpha)\varphi(\mathrm{x}^*) = \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \mu$ - противоречит оптимальности X*.

10. Теорема 10: Если φ(x) — вогнутая функция и φ(x)>φ(y), то для любой точки z ∈[x,y] такой, что φ(x)>φ(z)>φ(y), справедливо неравенство $\frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{\|z-y\|} \ge \frac{\varphi(\mathrm{x})-\varphi(z)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{z}\|}$ $(*)$

Доказательство:

Предположим обратное, что существует α ∈[0,1] такое, что для z=αx+(1-α)y в * вместо знака ≥ верным является знак <. Так как $\|z-y\| = \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x-z\|$, то

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{\|z-y\|}=\frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{\|x-z\|}*\frac{(1-\alpha)}{\alpha}<\frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{\|x-z\|}$$

- из предположения. Тогда (1-α)[φ(z)-φ(y)]<α[φ(x)-φ(z)], которое преобразуется в неравенство: φ(z)< αφ(x)+(1-α)φ(y) — противоречит вогнутости φ(x).

§ 1.3.2. Сильная выпуклость функций.

Сильная выпуклость функций — класс функций, определенных на любом не пустом замкнутом множестве, для которых всегда существует точка минимума (единственная).

Определение 2: Функцию φ(x), определенную на некотором множестве X, называют сильно выпуклой, если существует константа ρ>0 такая, что для любых x,y ∈X таких, что [x,y]⊂X и для любой α ∈[0,1] выполняется

$$\varphi(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)-\alpha(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2.$$

Величину ρ называют параметром сильной выпуклости.

Пример: квадратичная функция φ(x)=(x,Bx)+(p,x), где B — строго положительно определенная матрица.

Сильная выпуклость следует из:

$$\varphi(\alpha x+(1-\alpha)y)=\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)-\alpha(1-\alpha)*\big(x-y,B(x-y)\big),$$

поскольку $(x-y)B(x-y)\ge\lambda\|x-y\|^2$, где λ — наименьшее собственное число матрицы B.

Свойства сильно выпуклых функций.

1. Теорема 1: Если функция φ(x) сильно выпукла и непрерывна на выпуклом и замкнутом множестве X, то для любой точки y∈X множество $\mathbf{X}_0=\{x\in\mathbf{X}:\varphi(x)\le\varphi(y)\}$ ограниченно и существует точка $x^*=\arg\min\{\varphi(x):x\in\mathbf{X}\}$.

Доказательство:

2. Теорема 2: Если φ(x) сильно выпукла на выпуклом и замкнутом множестве X, то

а) для любого x∈X справедливо неравенство $\|x-x^*\|^2\le\frac{2}{\rho}(\varphi(x)-\varphi(x^*))$

если при этом φ(x) ∈C(X), то

б) для любых x,y ∈X будет $(\varphi'(x)-\varphi'(y),x-y)\ge\rho\|x-y\|^2$,

в)$\|x-x^*\|\le\frac{1}{\rho}\|\varphi'(x)\|$

г)$0\le\varphi(x)-\varphi(x^*)\le\frac{1}{\rho}\|\varphi'(x)\|^2$