Глава III. Теория линейного программирования.
§ 3.1. Основные понятия и основная задача

Определение 1: Основной задачей линейного программирования является экстремальная задача:

$$\min_{x\in R_1}(c, x), \quad R_1 = \{x: Ax \geq B, x \geq 0\}. \quad ①$$

Определение 2: Задачей, двойственной к основной задаче линейного программирования ①, будем называть задачу

$$\max_{y\in Q_1}(B, y), \quad Q_1 = \{y: A^T y \leq c, y \geq 0\}. \quad ②$$

Определение 3: Две экстремальные задачи называются эквивалентными, если либо множества их решений совпадают, либо обе задачи не имеют решений.
Замечание: Легко убедиться, что задача ① будет двойственной к задаче ②. Для этого достаточно рассмотреть задачу, эквивалентную задаче ②:

$$\min_{y\in Q_1}(-B, y), \qquad Q_1 = \{y: -A^T y \geq -c, y \geq 0\}$$

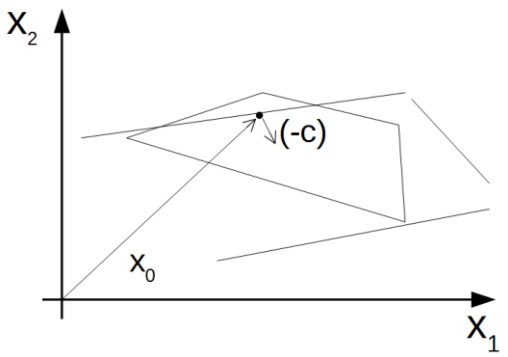
и построить, в соответствии с определением, к ней двойственную:

$$\max_{x\in R_1}(-c, x), \qquad R_1 = \{x: -Ax \leq -B, x \geq 0\}$$

Это и есть задача ①.
Вывод: Таким образом, задачи ①, ② — взаимно-двойственные.
Определение 4: Множества A=[A_1, A_2, … , A_n] называется матрицей условий задачи ①; ее столбцы A_i — называют векторами условий; вектор B — называют вектором ограничений; допустимую точку $x\in R$ называют также планом.
Иногда угловую точку множества R называют опорным планом, а решение задачи линейного программирования (оптимальную точку) называют оптимальным планом.

Геометрическая интерпретация.

В пространстве En множество K является пересечением полупространств (полуплоскостей при n=2). $(Ax)_i \geq B_i \quad (i = \overline{1,m}), \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$



Рассмотрим целевую функцию (c, x) и равенство (c, x)=λ — семейство параллельных гиперплоскостей (при n=2 — параллельных прямых). Вектор (-c) направлен в сторону убывания целевой функции. $\lambda_0 = (c, x_0)$

$$(c, x) = (c, x^*) \quad - \text{оптимальный (min)}$$

Замечание: Возможны случаи, когда:
1. R — неограниченна и решение существует
2. решение существует, но не единственно
3. R — неограниченна и (c, x) — неограниченна на R

§ 3.2. Основные теоремы

<u>Теорема 1:</u> (частный случай теоремы Кунна-Таккера; φ(x) — выпукла и линейно ограниченна, смотри конец **§ 2.5.3.**):

Для того чтобы точка x*∈R была <u>оптимальной</u> для основной задачи линейного программирования, необходимо и достаточно существования такого y*≥0, чтобы пара x*, y* была седловой точкой функции Лагранжа L(x, y) в области x≥0, y≥0, то есть:

$$L_1(\mathrm{x}^*, y) \leq L_1(\mathrm{x}^*, y^*) \leq L_1(\mathrm{x}, y^*) \qquad ①$$

где функция Лагранжа $L_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (c, \mathrm{x}) + (y_1 B - A\mathrm{x}) \quad (1')$

<u>Доказательство</u> не требуется!

<u>Замечание:</u> Из теоремы Кунна-Таккера и его условия (**§ 2.5.3.**) :

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum y_i^* f_i'(\mathrm{x}) + \sum_{j=1}^{n} v_j^* e_j$$

следует, что необходимым и достаточным условием оптимальности для задачи линейного программирования ① является представление вектора c:

$$-\mathrm{c} = -\sum_{i \in I(\mathrm{x}^*)} y_i^* A_i - \sum_{j \in J(\mathrm{x}^*)} v_j^* e_j, \quad y_i^* \geq 0, \ \ v_j^* \geq 0 \ \ ②$$

где

$$I(\mathrm{x}^*) = \{i = (A\mathrm{x}^*)_i = B_i\}, \quad J(\mathrm{x}^*) = \{j : \mathrm{x}_j^* = 0\}$$

Тогда из <u>теоремы 1</u> следует:

$$\mathrm{x}_i^*(c - A^T y^*)_i = 0, \quad i = \overline{1, n} \qquad ③$$
$$\mathrm{y}_j^*(B - A^T y^*)_j = 0, \quad j = \overline{1, m}$$

Теорема «двойственности»: Прямая и двойственная задачи либо обе имеют оптимальные точки x* и y*, при чем (c, x*)=(B, y*), ④ либо обе их не имеют.

<u>Доказательство:</u> Рассмотрим функцию Лагранжа для двойственной задачи ②. Для этого запишем эту задачу в виде основной задачи линейного программирования, то есть в виде ①: ясно, что задача:

$$\max_{y \in Q_1}(b, y); \ \ Q_1 = \{y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$$

эквивалентна задаче

$$\min_{y \in Q_1}(-b, y)\,, \qquad Q_1 = \{y : -A^T \geq -c, y \geq 0\}$$

Функция Лагранжа (как для прямой задачи):

$$L_2(y, \mathrm{x}) = \ -(B, y) + (\mathrm{x}, -\mathrm{c} + \mathrm{A}^{\mathrm{T}} y). \ ⑤$$

Седловой точкой для L_2(y, x) в области x≥0, y≥0 будет пара y', x' такая, что

$$L_2(y, \mathrm{x}) \leq L_2(y', \mathrm{x}') \leq L_2(y, \mathrm{x}') \quad ⑥$$

Сравнивая ⑤ и ① получим

$$L_2(y, \mathrm{x}) = -[(c, \mathrm{x}) + (y, B - A\mathrm{x})] = -L_1(y, \mathrm{x}). \ ⑦$$

Из ⑦, ⑥, ① следует, что если x*, y* - седловая точка для L_1(x, y), то x*, y* - седловая точка для L_2(y, x), а значит, либо x* и y* оптимальны, соответственно для задач ① и ②, либо, когда седловая точка не существует, и задача ① и двойственная задача ② не имеет решений.

Наконец, равенство ④ следует из формул ③.

Теорема 3: Для любых допустимых x∈R и y∈Q, выполняется неравенство (c, x)≥(B, y) ⑧

Доказательство: Из неравенств, определенных R и Q, следует

$$(c, \mathrm{x}) \geq (A^T y, \mathrm{x}) = (y, A\mathrm{x}) \geq (y, B) = (B, y).$$

Теорема 4: Если x*∈R и y∈Q, а (c, x*)=(B, y*), то x* и y* оптимальны соответственно для задач ① и ②, и обратно.

Доказательство: Для любого x∈R в силу ⑧ и условия теоремы будет (c, x)≥(B, y*)=(c, x*), то есть x* оптимален. Аналогично доказывается оптимальность y*. Обратное утверждение теоремы содержится в теоремы двойственности.

Теорема 5: Если

$$\inf_{\mathrm{x} \in \mathrm{R}_1} (c, \mathrm{x}) = M > -\infty,$$

то существует точка $\mathrm{x}^* = argmin\{(c, \mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathrm{R}_1\}$.

Доказательство:

Теорема 6: Для существования решения одной из двойственных задач (и, следовательно, обеих) необходимо и достаточно, чтобы R1≠Ø и Q1≠Ø .

Доказательство:

1. Необходимость очевидна
2. Достаточность. Пусть y∈Q1, тогда для любой точки x∈R имеет место ⑧: (c, x)≥(B, y), а тогда по теореме 5 задача ① имеет решение и, значит, имеет решение и задача ② по теореме двойственности.

Теорема 7: Если (c, x) (для двойственной задачи (B, y)) неограниченна снизу на R (сверху на Q для двойственной задачи), то Q1=Ø (R1=Ø).

Теорема 8: Если Q1=Ø (R1=Ø), а R1≠Ø (Q1=Ø), то R1 (Q1) неограниченно и (c, x) неограниченна снизу на R1 ((B, y) неограниченна сверху на Q).

Замечание: Теорема 7 и 8 следуют из теоремы 6 и предыдущих.

Теорема 9: Если

$$(c, \mathrm{x}^*) = \min_{R_1} (c, \mathrm{x})$$

и если существуют X1, X2, … , Xм такие, что

1. $\mathrm{x}_i \in R_1,\ i = \overline{1, M}$
2.

$$\mathrm{x}^* = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \mathrm{x}_i \text{, где } \sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, i = \overline{1, M} \text{, то}$$

$$(c, \mathrm{x}^*) = (c, \mathrm{x}_1) = \cdots = (c, \mathrm{x}_M).$$

Доказательство: Предположим, что

$$(c, \mathrm{x}^*) \leq (c, \mathrm{x}_1) \leq \cdots \leq (c, \mathrm{x}_M) \quad ⑨$$

Тогда

$$(c, \mathrm{x}^*) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i (c, \mathrm{x}_i) \geq \sum_{i=1}^{M} \alpha_i (c, \mathrm{x}_1) = (c, \mathrm{x}_1).$$

Учитывая ⑨, получаем (c, x*)=(c, x1). Сделаем индукционное предположение (c, x*)=(c,x_1)=...=($c_к$, $x_к$) и докажем, что (c, x*)=($c_к$, $x_{к+1}$). Действительно:

$$(c, \mathrm{x}^*) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i (c, \mathrm{x}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (c, \mathrm{x}_i) + \sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i (c, \mathrm{x}_i) \geq (c, \mathrm{x}^*) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + (c, \mathrm{x}_{k+1}) \sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i.$$

Отсюда

$$\left(1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)(c,\mathrm{x}^*) \geq \left(\sum_{i=k+1}^{M}\alpha_i\right)(c,\mathrm{x}_{k+1}) = \left(1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)(c,\mathrm{x}_{k+1}) \Rightarrow$$

(c, x*)≥($c_к$, $x_{к+1}$). Но учитывая ⑨, получаем (c, x*)=($c_к$, $x_{к+1}$) для любого k.

<u>Теорема 10:</u> Если задача ① имеет решение x*, то существуют угловая (крайняя) точка x такая, что

$$(c,\bar{\mathrm{x}}) = \min_{\mathrm{x}\in R_1}(c,\mathrm{x})$$

<u>Доказательство:</u>

1. Если R1 — ограниченно, то из теоремы 7 «о представлении» **§ 1.1.** следует, что существуют такие угловые точки x_1, x_2, … , x_n множества R_1, что для любого x∈R_1 и, в частности, для x* будет

$$\mathrm{x}^* = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mathrm{x}_i, \sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 1, \alpha_i > 0, i = \overline{1,N}.$$

Вычеркнем α_i=0, пронумеруем и перейдем к MK≤N (если существует α_i=0). Тогда

$$\mathrm{x}^* = \sum_{i=1}^{M}\alpha_i\mathrm{x}_i, \text{где } \sum_{i=1}^{M}\alpha_i = 1, \alpha_i > 0, i = \overline{1,M}$$

Тогда выполняются условия <u>теоремы 9</u> и теорема 10 доказана.

2. Пусть R1 неограниченна, а x* оптимален. Для достаточно большого μ>0 множество

$$L = \left\{\mathrm{x}: \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{X}_\mathrm{i} \leq \mu\right\} \text{ таково, что } \mathrm{x}^* \in R_1 \cap L \text{ и } \mathrm{x}^* \in l = \left\{\mathrm{x}: \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}x_\mathrm{i} = \mu\right\}.$$

Так как пересечение «ортанта x≥0» с множеством L ограничено, то R1∩L ограничено и, следовательно, существуют угловые точки x_1, x_2, … , x_m множества R1∩L такие что (c, x*)=(c, x_1)=...=($c_к$, x_m)

а) если хотя бы одна точка x_{i^*}∉e, то теорема доказана, поскольку тогда x_{i^*} будет угловой точкой множества R1.

б) если все x_i∈e, то из представления

$$\mathrm{x}^* = \sum_{i=1}^{M}\alpha_i\mathrm{x}_i, \text{где } \sum_{i=1}^{M}\alpha_i = 1, \alpha_i > 0$$

следует: x*∈e, что противоречит выбору μ>0 при построении множества L.

§ 3.3. Алгебраическая характеристика угловой точки

(чтобы не геометрическим способом, а геометрическим определить угловую точку)

Пусть как и прежде: I(x)={i: $A(x)_i$=B_i}, J(x)={j: x_j=0}, J={j=1, 2, … , n}.

Рассмотрим систему уравнений:

{$(Az)_i$=Bi, i∈I(x), z_j=0, j∈J(x)} ①

Переименуем:

$$I(\mathrm{x}) = \{i: i = 1,2,\ldots,r\}$$
$$J(\mathrm{x}) = \{j: j = k+1, k+2, \ldots, n\}$$

и тогда при r=k система ① будет квадратурной.

<u>Теорема 1:</u> Для того чтобы точка x≠0 являлась угловой точкой множества R1, необходимо и достаточно, чтобы в-р x удовлетворял неособенной квадратурной системе уравнений ①.

<u>Доказательство:</u>

1. Достаточность: Пусть x∈R1 и существует матрица:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

det B≠0 ②, такая, что Bx = B ③.

Здесь

$$\bar{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \bar{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}, x_{k+1=}x_{k+2=} \dots = x_n = 0 \ \mathrm{x} = \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{x}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ④$$

Предположим, что x — не угловая точка, то есть существуют x', x"$\in R_1$ и x' ≠ x" ≠ x такие, что x=αx'+(1-α)x", α∈(0,1). Для j>k $x_j=\alpha x'_j+(1-\alpha)x''_j=0$. И так как α>0, (1-α)>0, $x'_j\geq 0$, $x''_j\geq 0$, то $x'_j=x''_j=0$, $j=\overline{k+1,n}$.

Далее

$$B\bar{\mathrm{x}}' \geq \bar{b}, B\bar{\mathrm{x}}'' \geq \bar{b}, \alpha B\bar{\mathrm{x}}' + (1-\alpha)B\bar{\mathrm{x}}'' = \bar{\mathrm{b}},$$

поэтому

$$B\bar{\mathrm{x}}' = B\bar{\mathrm{x}}'' = \bar{b},$$

и поскольку det B≠0, то $\bar{\mathrm{x}}' = \bar{\mathrm{x}}''$.

Следовательно, x'=x", что противоречит предположению.

2. Необходимость: Пусть x — угловая точка множества R1.

Покажем, что хотя бы для одного i будет $(Ax)_i=B_i$. Предположим, что такого i не существует. Так как x≠0, то найдется такое j, что $x_j>0$. Рассмотрим

$$(\mathrm{x}')^T = (x_1, \quad x_2, \dots, x_{j-1}, x_j+\varepsilon, x_{j+1}, \dots, x_n) \geq 0 \quad \text{и}$$

$$(\mathrm{x}'')^T = (x_1, \quad x_2, \dots, x_{j-1}, x_j-\varepsilon, x_{j+1}, \dots, x_n) \geq 0.$$

Их предположения, что Ax>b, для достаточно малого ε следует Ax'≥b, Ax"≥b, то есть x', x"∈R1. Но

$$\mathrm{x} = \frac{1}{2}\mathrm{x}' + \frac{1}{2}\mathrm{x}'',$$

что противоречит предположению (точка по определению — угловая).

Пусть $(Ax)_i$=b для $i=\overline{1,r}$

и x_j=0 для $j=\overline{k+1,n}$

Обозначим

$$\overline{A_p} = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{rp} \end{pmatrix}, b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}, \bar{A} = [\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_k}]$$

В этих обозначениях $\bar{A}\cdot\bar{\mathrm{x}} = b'$ и $\bar{\mathrm{x}} > 0$

Докажем, что $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_k}$ линейно-независимы (в этом случае k≤r). Предположим противное, то есть что существует точка $\bar{\mathrm{x}}' \neq 0$ такой, что $\bar{A}\cdot\bar{\mathrm{x}} = 0$

Возьмем

$$\mathrm{x}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{x}}+\varepsilon\bar{\mathrm{x}}' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{x}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{x}}-\varepsilon\bar{\mathrm{x}}' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что x1∈R1 и x2∈R1 при малых ε. Но

$$\mathrm{x} = \frac{1}{2}\mathrm{x}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{x}_2$$

что противоречит предположению. Итак, k≤r. Вычеркнув (k-r) строк из A, получим B, для которой выполняется ②-④.

<u>Утверждение:</u> Число крайних (угловых) точек конечно, так как неособенных клеток (подматриц) матрицы условий конечно.

<u>Определение 1:</u> Если точка

$$\mathrm{x}_k^T = (\bar{\mathrm{x}}^T, 0, \dots, 0), \bar{\mathrm{x}} > 0,$$

угловая, то систему линейно-независимых неравенств $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_k}$ в представлении

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{k} x_i \bar{A}_i \,, x_i > 0, i = \overline{1,k}$$

называют базисом угловой точки, а матрицу $B = [\overline{A_1}, \dots, \overline{A_k}]$ мнимой базиса угловой точки.

§ 3.4. Двойственные задачи со смешанными ограничениями (наиболее общего вида)

I={i: i=1, 2, … , m}, J={j: j=1, 2, … , n}. $I_1 \subseteq I$, $I_2 = I \backslash I_1$

Аналогично, $J_1 \subseteq J$, $J_2 = J \backslash J_1$

<u>Определение 1:</u> Пару задач

$$\begin{gathered} \min(c, \mathrm{x})\,, (A\mathrm{x})_i \ge b_i, i \in I_1, \\ (A\mathrm{x})_i = b_i, i \in I_2, \\ x_j \ge 0, j \in J_1 \end{gathered} \qquad ① \text{ и}$$

$$\begin{gathered} \max(b, y)\,, (A^T y)_i \le c_j, j \in J_1, \\ (A^T \mathrm{y})_i = c_j, j \in J_2, \\ y_i \ge 0, i \in I_1 \end{gathered} \qquad ②$$

называют <u>двойственными задачами со сменными ограничениями</u>.

§ 3.4.1. Приведение к эквивалентным задачам основного вида

Матрицу условий A представим в клеточной структуре:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

а равенства в ограничениях заменим двумя неравенствами вида (φ≥0 и -φ≥0) или (φ≤0 и -φ≤0) с учетом ввода переменных:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \bar{\mathrm{x}}_2 \\ \bar{\bar{\mathrm{x}}}_2 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{\bar{y}}_2 \end{pmatrix}$$

Тогда задачи ①, ② можно заменить в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} min[(c_1, \mathrm{x}_1) + (c_2, \bar{\mathrm{x}}_2) - (c_2, \bar{\bar{\mathrm{x}}}_2)], \\ A_{11}\mathrm{x}_1 + A_{12}\bar{\mathrm{x}}_2 - A_{12}\bar{\bar{\mathrm{x}}}_2 \ge B_1 \\ A_{21}\mathrm{x}_1 + A_{22}\bar{\mathrm{x}}_2 - A_{22}\bar{\bar{\mathrm{x}}}_2 \ge B_2 \\ -A_{21}\mathrm{x}_1 - A_{22}\bar{\mathrm{x}}_2 + A_{22}\bar{\bar{\mathrm{x}}}_2 \ge -B_2 \\ \mathrm{x}_1 \ge 0, \bar{\mathrm{x}}_2 \ge 0, \bar{\bar{\mathrm{x}}}_2 \ge 0 \end{cases} \quad ③ \text{ и}$$

$$\begin{cases} max[(B_1, \mathrm{y}_1) + (B_2, \bar{\mathrm{y}}_2) - (B_2, \bar{\bar{\mathrm{y}}}_2)], \\ A_{11}^T\mathrm{y}_1 + A_{21}^T\bar{\mathrm{y}}_2 - A_{21}^T\bar{\bar{\mathrm{y}}}_2 \ge B_1 \\ A_{21}^T\mathrm{y}_1 + A_{22}^T\bar{\mathrm{y}}_2 - A_{22}^T\bar{\bar{\mathrm{y}}}_2 \ge B_2 \\ -A_{21}^T\mathrm{y}_1 - A_{22}^T\bar{\mathrm{y}}_2 + A_{22}^T\bar{\bar{\mathrm{y}}}_2 \ge -B_2 \\ \mathrm{y}_1 \ge 0, \bar{\mathrm{y}}_2 \ge 0, \bar{\bar{\mathrm{y}}}_2 \ge 0 \end{cases} \quad ④$$

§ 3.4.2. Канонический вид задачи линейного программирования

<u>Определение 2:</u> Задачу

$$\min_{\mathrm{x} \in \mathrm{R}_0}(c, \mathrm{x})\,, \qquad R_0 = \{\mathrm{x}: \mathrm{Ax} = \mathrm{B}, \mathrm{x} \ge 0\}$$

называют «задачей линейного программирования в каноническом виде».

<u>Замечание:</u> Этот вид является частным случаем, когда $I_1 \ne \varnothing$ и $J_2 \ne \varnothing$ задачи со сменными ограничениями.

Приведение основной задачи к каноническому виду осуществляется введением дополнительных переменных, то есть от основной задачи:

$$\min(c, \mathrm{x})$$

$$Ax \geq b, x \geq 0 \quad (5)$$

переход к эквивалентной задаче в каноническом виде выглядит так:

$$(6)\ \min(c, x), \qquad Ax - u = B, \qquad x \geq 0, \qquad u \geq 0$$

Замечание: Далее будем предполагать, что m<n. В реальных ситуациях всегда вводим дополнительное перемещение (искусственный базис), тем самым число переменных увеличивается от n до n+m.

Двойственной к обеим задачам ⑤ и ⑥ будет задача $(B, y),\ A^T y \leq c, y \geq 0$

§ 3.4.3. Невырожденная угловая точка

Определение 3: Угловую точку множества R_0 будем называть невырожденной, если матрица ее базиса имеет размерность m x m, то есть число положительных компонентов равных m.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \text{ – матрица базисаневырожденной угловой точки}$$

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \text{ угловая точка}, \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} > 0, \text{то}$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i = B\bar{x} = \bar{b}.$$

Пример: Пусть множество R_0 задано в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, R_0 — отрезок соед-й точки $x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Они обе угловые, но невырожденной является $x_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ так как m=2.

В случае. Когда угловая точка x множества R_0 вырождена, число ее положительных компонентов <m и при переходе от этой угловой вырожденной точки к другой угловой точке значение целевой функции может не убывать, то есть происходит «зацикливание». Также это может повлечь за собой неоднозначность выбора вектора, исключаемого из базиса при переходе угловой точки к вырожденной угловой точке.