Лекция 5

Тема: Криволинейные интегралы (продолжение)

Формула Грина

Теорема. Если D – замкнутая плоская область, ограниченная кусочно-гладким контуром Γ, функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то имеет место формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy,$$

где граница Γ обходится против часовой стрелки.

Формула Грина позволяет свести криволинейный интеграл к вычислению двойного.

Рассмотрим **формулу для площади плоской области**. Для этого положим $P(x,y) = -y$ и $Q(x,y) = x$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

и

$$2\iint_D dxdy = \oint_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение.

Уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

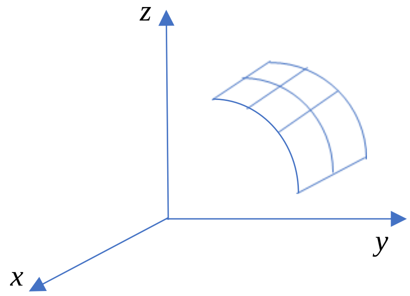
$$S = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Тема: Поверхностные интегралы

I. Поверхностные интегралы первого рода

Рассмотрим гладкую поверхность $S = \{z = f(x,y), (x,y) \in D\}$, где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные в ограниченной замкнутой области D.



На S рассмотрим непрерывную функцию $F(x,y,z)$.

Разобьем поверхность S на элементы S_i. В каждом S_i возьмем точку (a_i, b_i, c_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим ΔS_i – площадь i-го элемента.

Составим сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} F(a_i, b_i, c_i)\Delta S_i.$$

Определение. Если существует

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} F(a_i, b_i, c_i)\Delta S_i,$$

не зависящий от способа разбиения и выбора точек, тогда его называют **поверхностным интегралом первого рода** и обозначают

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)dS.$$

Формула вычисления через двойной интеграл:

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}dxdy.$$

Геометрический смысл:

$$\iint\limits_{S} dS - \text{площадь поверхности } S.$$

Физический смысл: если $F(x, y, z)$ – плотность, распределенная по поверхности, то

$$\iint_S F(x, y, z)dS \text{ – масса поверхности } S.$$

II. Поверхностный интеграл второго рода

Определение. Всякую непрерывную единичную нормаль на поверхности назовем **ориентацией поверхности**.

Но в каждой точке поверхности $S = \{z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ имеются лишь две единичные нормали:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}}\left(-f'_x, -f'_y, 1\right) \quad \text{и} \quad -\vec{n}.$$

Поэтому у поверхности S имеются только две ориентации $\vec{n}$ и $-\vec{n}$.

В случае, когда выбирается нормаль $\vec{n}$, говорят о *верхней стороне* поверхности S– S_+ (положительная ориентация), если выбирается нормаль $-\vec{n}$ – о *нижней стороне* поверхности S – S_- (отрицательная ориентация).

Пусть на поверхности S заданы непрерывные функции

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z).$$

Обозначим $\Delta\Pi_i$ – проекцию элемента S_i на плоскость Oxy.

Определение. Предел суммы

$$\sum_{i=1}^{n} R(a_i, b_i, c_i)\Delta\Pi_i$$

при мелкости разбиения, стремящейся к нулю ($\Delta S_i \to 0$), называется **поверхностным интегралом второго рода**. Обозначается

$$\iint_{S_+} R(x, y, z)dxdy.$$

Аналогично, если рассматривать проекцию на плоскость Oxz:

$$\iint_{S_+} Q(x, y, z)dzdx$$

и на плоскость Oyz:

$$\iint\limits_{S_+} P(x,y,z)dydz.$$

Полный поверхностный интеграл второго рода по верхней стороне поверхности S имеет вид:

$$\iint\limits_{S_+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

Формулы для вычисления

1. Через поверхностный интеграл первого рода:
   $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – вектор нормали к поверхности, где α, β, γ – углы между $\vec{n}$ и осями координат x, y, z соответственно. Тогда

$$\iint\limits_{S_+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS.$$

2. Через двойной интеграл:

$$\iint\limits_{S_+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \Big(-{f'}_x(x,y)P\big(x,y,f(x,y)\big) - {f'}_x(x,y)Q\big(x,y,f(x,y)\big) + R\big(x,y,f(x,y)\big)\Big)\,dxdy,$$

где $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\left({f'}_x\right)^2+\left({f'}_y\right)^2}}\left(-{f'}_x, -{f'}_y, 1\right)$ – вектор внешней нормали к поверхности S: $z = f(x,y)$, D – проекция поверхности на плоскость Oxy.

Поверхностные интегралы обладают свойствами линейности, аддитивности.

Поверхностный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации поверхности:

$$\iint\limits_{S_+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

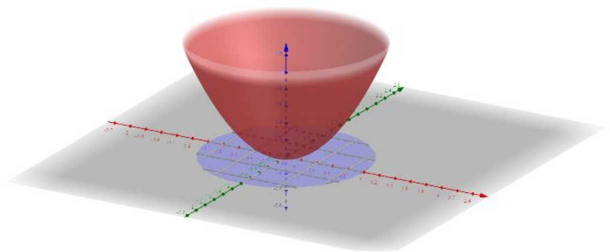
$$= -\iint\limits_{S_-} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Пример. Вычислить

$$\iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

по верхней стороне параболоида $S = \{z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

Решение.



$D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$ – проекция на плоскость Oxy.

$$S: z = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)}$$

$$f_x' = 2x, f_y' = 2y$$

$$P = x, \qquad Q = y, \qquad R = z = x^2 + y^2$$

Тогда

$$\iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} (-2x \cdot x - 2y \cdot y + x^2 + y^2)dxdy = -\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{полярные координаты} \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \\ 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right| = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 \cdot rdr = -2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}$$

Тема: Элементы теории поля

Будем называть числовые функции – ***скалярными полями***, а векторные функции – ***векторными полями***.

Определение. **Градиентом** скалярного поля $u(x,y,z)$ называется вектор

$$\mathrm{grad}u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Определение. **Дивергенцией** векторного поля $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ называется скалярное поле

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Определение. **Ротором** (вихрем) векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + {}$ $+R(x,y,z)\vec{k}$ называется векторное поле

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Определение. **Циркуляцией** векторного поля $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ по замкнутому контуру Γ называется криволинейный интеграл второго рода

$$\text{Ц} = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a}\, d\vec{l} = \{\text{обозначение}\} = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Определение. **Потоком** векторного поля $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ через поверхность S называется поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi = \iint\limits_{S} \vec{a} d\vec{S} = \{\text{обозначение}\} = \iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Теорема Стокса. Если векторное поле $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ непрерывно дифференцируемо в некоторой области трехмерного пространства, содержащей поверхность S, то имеет место *формула Стокса*:

$$\iint\limits_{S} \mathrm{rot}\vec{a} d\vec{S} = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a}\, d\vec{l},$$

где Γ – край поверхности S.

Эта формула означает, что поток ротора (вихря) векторного поля через поверхность равен циркуляции векторного поля по краю поверхности.

В координатной записи:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz.$$

Замечание. При использовании формулы Стокса для нахождения циркуляции вдоль заданного контура Г в качестве S можно брать любую гладкую поверхность, стягивающую Г. Если Г – плоский контур, то в качестве S можно взять плоскую поверхность, ограниченную этим контуром.

Теорема Гаусса-Остроградского. Пусть G – замкнутая область в трехмерном пространстве, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S; векторное поле $\vec{a}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ непрерывно дифференцируемо на G. Тогда имеет место *формула Гаусса-Остроградского*:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz=\iint\limits_{S_+}\vec{a}d\vec{S}.$$

Это равенство означает, что тройной интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую область, в направлении внешней нормали.

В координатной записи:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_{S_+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

Формулу Гаусса-Остроградского чаще используют при вычислении поверхностных интегралов, сводя их к тройным.

Пример. Вычислить

$$\iint\limits_{S_+} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy,$$

где S – внешняя сторона границы куба $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$.

Решение.

Имеем $\vec{a}=(x^2,y^2,z^2)$. Тогда $\operatorname{div}\vec{a}=2x+2y+2z$ и

$$\iint\limits_{S_+} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a\\0\le z\le a}} 2(x+y+z)dxdydz=$$

$$=2\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a (x+y+z)dz=$$

$$=2\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a \left(ax+ay+\frac{a^2}{2}\right)dy=2\int\limits_0^a (a^2x+a^3)\,dx=3a^4.$$

Замечание. Если в формуле Гаусса-Остроградского положить

$$P = x, Q = y, R = z,$$

то есть

$$\vec{a} = (x, y, z),\ \operatorname{div}\vec{a} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Следовательно,

$$3\underbrace{\iiint\limits_G dxdydz}_{V} = \iint\limits_{S_+} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Отсюда получается *формула для вычисления объема через поверхностный интеграл*:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_+} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$