ЛЕКЦИЯ 5

1.5. Исчисление высказываний – теория L. ЕЕ аксиоматизации

Определение 1. Исчисление высказываний – это Формальная Теория L, в которой:

1. Алфавит:

   а) пропозициональные переменные: a, b, c, d, e…..; A, B, C, D, E…

   б) служебные символы: левая и правая скобки: (,);

   в) логические связки: отрицание $\neg$ и импликация $\rightarrow$.

2. Формулы:

   а) пропозициональные переменные – это суть формул;

   б) если A и B – формулы, то $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \rightarrow B$ – формулы.

3. Аксиомы Новикова:

   A_1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ – аксиома «*упрощения*»;

   A_2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$ – аксиома «*само-дистрибутивности*»;

   A_3: $(\overline{B}\rightarrow\overline{A})\rightarrow((\overline{B}\rightarrow A)\rightarrow B)$

4. Правило вывода “Modus Ponens” (лат., «правило отделения»)

$$\frac{A, A\rightarrow B}{B} MP$$

Определение 2. Если в формуле $A(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n)$ осуществить групповую подстановку $\{B_i // x_i\}_{i=1}^{n}$, то таким образом полученная формула $C{=}A(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n)\{B_i // x_i\}_{i=1}^{n}$ называется «*частным случаем формулы*» $A(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n)$, а набор подстановок $\{B_i // x_i\}_{i=1}^{n}$ называется «*унификатором*».

Определение 3. Если формула C, является *частным случаем формул* A и B, тогда формула C называется «*совместным частным случаем формул*» A и B, а сами формулы A и B называются «*унифицируемыми*», т.е.

$$C= A(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\{D_i // x_i\}_{i=1}^{n}=B(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\{D_i // x_i\}_{i=1}^{n}.$$

Набор подстановок $\{D_i // x_i\}_{i=1}^{n}$ называется «*общим унификатором*» (возможно, он может быть не один!). *Наименьший унификатор* называется «*наиболее общим унификатором*».

Определение 4. Набор формул $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ называется «*частным случаем набора формул*» $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, если любая формула B_i является *частным случаем формулы* A_i при одном и том же наборе подстановок $\{D_i // x_i\}_{i=1}^{n}$.

Определение 5. Набор $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ называется «*совместным частным случаем наборов формул*» $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, если любая формула C_i является *частным случаем формул* A_i и B_i при одном и том же наборе подстановок $\{D_i // x_i\}_{i=1}^{n}$.

Системы аксиом (аксиоматизации) ИВ – теории L

1. система аксиом Гильберта – Аккермана; 2. система аксиом Россера; 3. система аксиом Клини; 4. система аксиом Никода; 5. система аксиом Лукасевича; 6. система аксиом Генцена; 7. система аксиом Новикова.

Например, в систему аксиом Клини входят:

A_1: $(A \to (B \to A))$

A_2: $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A_3: $(A \to (A \vee B))$

A_4: $(B \to (A \vee B))$

A_5: $((A \wedge B) \to A)$

A_6: $((A \wedge B) \to B)$

A_7: $((A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A}))$

A_8: $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

A_9: $(A \to (B \to (A \wedge B)))$

A_{10}: $\overline{\overline{A}} = A$

Теорема 1. $\vdash_L A \to A$

Доказательство (в виде алгоритма):

1. Используя аксиому «*упрощения*» A_1 и подстановку $\{A\to A//B\}$, т.е. запишем:

$(A\to(B\to A))\{A\to A//B\}$ и получим *выводимую* формулу (*тавтологию*)

$$A\to((A\to A)\to A) \qquad (1)$$

2. Используя аксиому «*самодистрибутивности*» A_2 и подстановку $\{A\to A//B;\ A//C\}$, т.е. запишем: $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))\{A\to A//B;\ A//C\}$ и получим *выводимую* формулу (*тавтологию*)

$$(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A)) \qquad (2)$$

3. Применяем правило вывода «Modus ponens (MP)”:

$$\frac{(1), (2) = (A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A))}{(A\to(A\to A))\to(A\to A)}\text{MP},$$

т.е. получили *выводимую* формулу (*тавтологию*)

$$(A\to(A\to A))\to(A\to A). \qquad (3)$$

4. Используя аксиому A_1 и подстановку $\{A//B\}$, т.е. запишем:

$(A\to(B\to A))\{A//B\}$ и получим *выводимую* формулу (*тавтологию*)

$$A\to(A\to A). \qquad (4)$$

5. Применяем правило вывода «Modus ponens (MP)”:

$$\frac{(4) = A\to(A\to A), (3) = (A\to(A\to A))\to(A\to A)}{A\to A}\text{MP},$$

т.е. получили *выводимую* формулу (*тавтологию*)

$$A\to A. \qquad (5)$$

Следовательно, последовательность *выводимых* формул (*тавтологий*) (1), (2), (3), (4), (5) представляет собой «*правильно построенный вывод*», который использовал только лишь аксиомы и правило вывода MP (без гипотез) и на этом основании является *доказанной теоремой* $\vdash_L A \to A$.

Теорема 2. Вывод $A \vdash_L (B\to A)$ является «*правильно построенным выводом*».

Доказательство. Сам вывод $A|-_L(B \to A)$ не является теоремой, так как используется гипотеза *A*. Необходимо доказать, что высказывание «о правильно построенном выводе $A|-_L(B \to A)$» является истинным. Обозначим это высказывание символом *C*. Тогда символически теорема 2 будет записана как

$$|-_L C$$

и нужно доказать, что высказывание С:= «вывод $A|-_L(B \to A)$ является *правильно построенным выводом*» является *истинным.* Алгоритм доказательства следующий:

1. А – гипотеза;
2. Используем аксиому «*упрощения*» A_1: А→(В→А).
3. Применяем правило вывода «modus ponens (MP)»

$$\frac{A, A \to (B \to A)}{B \to A}\text{MP}.$$

Таким образом, получили *выводимую* формулу $(B \to A)$. *Выводимая* формула $(B \to A)$ будет *истинной* в случае *истинности* формулы *A*, и она может быть *ложной* в случае *ложности* формулы *A* и *истинности* формулы *B*.

В итоге, *вывод* (1), (2) и (3) является *правильно построенным*, т.е. этот вывод (способ или алгоритм доказательства) является правильным. Т.е., *такой алгоритм доказательства может использоваться в других доказательствах (доказательствах теорем) и в этом его ценность*.

Смысл теоремы и вывода $A|-_L(B \to A)$:

Доказанная теорема позволяет сформулировать новое «*производное правило вывода*» в качестве «*доказанной выводимости*», которое называется «*правилом введения импликации*» и его можно обозначить как

$$\frac{A}{B \to A}\to^{+}$$

Это правило вывода является *производным правилом*, так как оно является *следствием из правила «modus ponens (MP)»*.

ЛЕКЦИЯ 6

1.6. Дедукция и теорема дедукции

Замечание: импликация тесно связана с понятием «*выводимости*».

Теорема «дедукции». Формула *B выводима* (*доказуема*) из формулы *A* тогда и только тогда, когда *выводима* (*доказуема*) формула $A \to B$. Другими словами, вывод $\Gamma, A|-B$ является *правильно построенным* тогда и только тогда, когда вывод $\Gamma|-(A \to B)$ также является *правильно построенным*.

1. *Доказательство прямой теоремы* (*необходимость*). Дано: вывод $\Gamma, A|-B$ является *правильно построенным*. Доказать, что вывод $\Gamma|-(A \to B)$ также является *правильно построенным*.

Вывод $\Gamma, A|-B$ представлен последовательностью формул E_1, E_2,….., E_n и $E_n = B$. Дальнейшее доказательство *прямой теоремы* произведем методом «*математической индукции*». Т.е., с помощью *индукции* покажем верность вывода $\Gamma|-(A \to E_i)$, где $i = 1, 2, ..., n$.

Для индукции необходимо выполнить три этапа. На первом этапе необходимо доказать верность вывода $\Gamma|-(A \to E_1)$. На втором этапе производится *индукционное предположение*: верны выводы $\Gamma|-(A \to E_i)$ и $\Gamma|-(A \to E_j)$, где $i<j<n$. Причем, на втором этапе можно фиксировать любые индексы *i*, *j*, меньшие конечного индекса *n*. Поэтому индексы *i* и *j* выбираются теми, чтобы $E_j = E_i \to E_n$. На третьем этапе необходимо доказать $\Gamma|-(A \to E_n)$.

Выполняем первый этап доказательства согласно метода «математической индукции».

Возможны три случая: E_1 – аксиома; $E_1 \in \Gamma$; $E_1 = A$.

Для всех трех случаев можно использовать один алгоритм доказательства (одну схему): используем первую аксиому *упрощения* $A \to (B \to A)$ с подстановкой $\{A//B,\ E_1//A\}$, т.е. получим формулу $E_1 \to (A \to E_1)$. Далее по правилу вывода «modus ponens(MP)» получаем выводимую формулу $(A \to E_1)$:

$$\frac{E_1,\ E_1 \to (A \to E_1)}{A \to E_1} MP.$$

Т.о., вывод $\Gamma | -(A \to E_1)$ доказан.

Выполняем третий этап доказательства согласно метода «математической индукции», опираясь на 2-ой этап.

Здесь также возможны те же три случая (E_n – аксиома; $E_n \in \Gamma$; $E_n = A$) и еще один случай: формула E_n получена из формул E_i и E_j , где $E_j = E_i \to E_n$. Напомним индукционные предположения: верны выводы $\Gamma | -(A \to E_i)$ и $\Gamma | -(A \to E_j) = (A \to (E_i \to E_n))$, где $i<j<n$. Далее используем вторую аксиому «*самодистрибутивности*» (A→(B→C))→((A→B)→(A→C)) с подстановкой $\{E_i//B,\ E_n//C\}$. В результате подстановки получим

(A→(E_i→E_n))→((A→E_i)→(A→E_n)) или (A→E_j)→((A→E_i)→(A→E_n)).

Далее, используя индукционное предположение $\Gamma | -(A \to E_j)$ и последнюю формулу (A→E_j)→((A→E_i)→(A→E_n)), с помощью правила вывода MP получим

$$\frac{A \to E_j,\ (A \to E_j) \to ((A \to E_i) \to (A \to E_n))}{(A \to E_i) \to (A \to E_n)} MP,$$

т.е. верен вывод $\Gamma | -(A \to E_i) \to (A \to E_n)$. Далее, используя индукционное предположение $\Gamma | -(A \to E_i)$ и полученный вывод $\Gamma | -(A \to E_i) \to (A \to E_n)$, с помощью правила вывода MP получим выводимую формулу $(A \to E_n)$:

$$\frac{A \to E_i,\ (A \to E_i) \to (A \to E_n)}{A \to E_n} MP.$$

Таким образом, прямая теорема дедукции доказана: верен вывод $\Gamma \mid\!- (A \to E_n)$ или $\Gamma \mid\!- (A \to B)$, так как $B = E_n$.

2. *Доказательство обратной теоремы* (*достаточность*). Дано: вывод $\Gamma \mid\!- (A \to B)$ является *правильно построенным*. Доказать, что вывод $\Gamma, A \mid\!- B$ также является *правильно построенным*.

Имеем выводимую формулу $(A \to B)$. Добавим формулу A в качестве гипотезы. Тогда по правилу вывода MP получим *выводимую* формулу B:

$$\frac{A,\ A \to B}{B} MP.$$

Таким образом, обратная теорема дедукции доказана и доказана теорема дедукции полностью.

Важный вывод. В процессе доказательства использовались лишь две из трех аксиом ИВ (теории L). Таким образом, *теорема дедукции* верна не только в ИВ, но и в других более широких теориях, базирующихся на меньшем количестве аксиом, чем теория ИВ (теория L).

Следствия из теоремы дедукции

***Следствие* 1**. Если верен вывод $A \mid\!- B$, тогда верен и вывод (теорема) $\mid\!- A \to B$.

Следствие практически очевидно, так как оно является частным случаем прямой теоремы дедукции ($\Gamma = \varnothing$).

***Следствие* 2**. Верен вывод $A \to B, B \to C \mid\!- A \to C$.

Доказательство. Добавим к исходным двум гипотезам еще одну гипотезу A. Применяем два раза правило вывода MP:

$$\frac{A,\ A \to B}{B} MP \quad \text{и} \quad \frac{B,\ B \to C}{C} MP.$$

Получили выводимую формулу C. Следовательно правильно построенным выводом будет $A \to B, B \to C, A \mid\!- C$. Далее, применяя *прямую теорему дедукции*, получим правильно построенный вывод $A \to B, B \to C \mid\!- A \to C$.

Полученный вывод можно интерпретировать как новое «производное» правило вывода – ***правило «транзитивности»*** (***Tr***)

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C} Tr.$$

***Следствие* 3.** Верен вывод $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$.

Доказательство. Добавим к исходным двум гипотезам еще одну гипотезу A. Применяем два раза правило вывода MP:

$$\frac{A, A \to (B \to C)}{B \to C} MP \quad \text{и} \quad \frac{B, B \to C}{C} MP.$$

Получили выводимую формулу C. Следовательно правильно построенным выводом будет $A \to (B \to C), B, A \vdash C$. Далее, применяя *прямую теорему дедукции*, получим правильно построенный вывод $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$. Полученный вывод можно интерпретировать как новое «производное» правило вывода – ***правило «сечения»*** (***S***)

ЛЕКЦИЯ 7

1.7. Некоторые важные теоремы ИВ

Групповая Теорема: В теории L *доказуемы* следующие теоремы:

а) $\vdash_L \overline{\overline{A}} \to A$ (подобная нотация: $\mapsto_{L:} \neg\neg A \to A$)

б) $\vdash_L A \to \overline{\overline{A}}$ (подобная нотация: $\mapsto_{L:} A \to \neg\neg A$)

в) $\vdash_L \overline{A} \to (A \to B)$ (подобная нотация: $\mapsto_{L:} \overline{A} \to (A \to B)$)

г) $\vdash_L (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$ (подобная нотация: $\mapsto_{L:} (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$)

д) $\vdash_L (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ (подобная нотация: $\mapsto_{L:} (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$)

е) $\vdash_L A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$ (подобная нотация: $\mapsto_{L:} A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$)

ж) $\vdash_L (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$ (подобная нотация:

$\mapsto_{L:} (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$)

Доказательства теорем а) – ж)

Теорема а) – теорема «*удаления двойного отрицания*»: $\vdash_L \bar{\bar{A}} \to A$

Доказательство.

1. аксиома А$_3\{A//B,\ \bar{A}//A\}$: тавтология $(\bar{A} \to \bar{\bar{A}}) \to ((\bar{A} \to \bar{A}) \to A)$ **(1)**

2. теорема 1 $\{\bar{A}//A\}$: тавтология $(\bar{A} \to \bar{A})$ **(2)**

3. Следствие 3 (правило *сечения*) из теоремы «*дедукции*» $\bar{A} \to (B \to C), B \vdash (A \to C)$ с подстановкой $\{(\bar{A} \to \bar{\bar{A}})//A,\ (\bar{A} \to \bar{A})//B,\ A//C\}$:

$(1),(2) \vdash (\bar{A} \to \bar{\bar{A}}) \to A$, т.е. выводима тавтология $(\bar{A} \to \bar{\bar{A}}) \to A$ **(3)**

4. аксиома А$_1\{\bar{A}//B,\ \bar{\bar{A}}//A\}$: тавтология $(\bar{\bar{A}} \to (\bar{A} \to \bar{\bar{A}})$ **(4)**

5. Следствие 2 (правило *транзитивности*) из теоремы «*дедукции*» $(A \to B),(B \to C) \vdash (A \to C)$ с подстановкой $\{(\bar{\bar{A}})//A,\ (\bar{A} \to \bar{\bar{A}})//B,\ A//C\}$:

$$(4),(3) \vdash (\bar{\bar{A}} \to A). \qquad \textbf{(5)}$$

Так как (3) и (4) – тавтологии, то выводимая формула (5)$(\bar{\bar{A}} \to A)$ является *тавтологией*. Т.о., теорема доказана.

Теорема б) – теорема «введения двойного отрицания»: $\vdash_L A \to \bar{\bar{A}}$

Доказательство.

1. аксиома А$_3\{\bar{\bar{A}}//B\}$: тавтология $(\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}) \to ((\bar{\bar{\bar{A}}} \to A) \to \bar{\bar{A}})$ **(1)**

2. теорема **а)** $\{\bar{A}//A\}$: тавтология $(\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A})$ **(2)**

3. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(2),(1) = (2) \to (3)}{(3) = (\bar{\bar{\bar{A}}} \to A) \to \bar{\bar{A}}}$

4. аксиома А$_1\{\bar{\bar{\bar{A}}}//B\}$: тавтология $(A \to (\bar{\bar{\bar{A}}} \to A)$ **(4)**

5. Следствие 2 (правило *транзитивности*) из теоремы «*дедукции*» $(A \to B),(B \to C) \vdash (A \to C)$ с подстановкой $\{(A//A,\ (\bar{\bar{\bar{A}}} \to A)//B,\ \bar{\bar{A}}//C\}$:

$$(4),(3) \vdash (A \to \bar{\bar{A}}). \qquad \textbf{(5)}$$

Так как (3) и (4) – тавтологии, то выводимая формула (5) $(A \to \overline{\overline{A}})$ является *тавтологией*. Т.о., теорема доказана.

<u>Вывод</u>: доказанные **теоремы а) и б) позволяют считать доказанным «эквивалентность $\overline{\overline{A}} \equiv A$», другими словами, верно свойство «инволютивности».**

Теорема в): $\vdash_L \overline{A} \to (A \to B)$

Доказательство.

1. $\overline{A}$ – гипотеза;

2. A – гипотеза;

3. аксиома A$_1\{\overline{B}//B\}$: тавтология $A \to (\overline{B} \to A)$ **(3)**

4. аксиома A$_1\{\overline{A}//A,\ \overline{B}//B\}$: тавтология $\overline{A} \to (\overline{B} \to \overline{A})$ **(4)**

5. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(2)=A,(3)=(2)\to(5)}{(5)=(\overline{B}\to A)}$

6. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(1)=\overline{A},(4)=(1)\to(6)}{(6)=\overline{B}\to\overline{A}}$

7. аксиома A$_3$: тавтология $(\overline{B}\to\overline{A})\to((\overline{B}\to A)\to B)$ **(7)**

8. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(6),(7)=(6)\to(8)}{(8)=(\overline{B}\to A)\to B}$

9. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(5),(8)=(5)\to(9)}{(9)=B}$

10. Последовательность выводимых формул (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) – это правильно построенный вывод, базирующийся на двух гипотезах (1), (2), и его символическая запись $\overline{A}, A \vdash B$ **(10)**

11. Применяем *прямую* теорему дедукции: $\overline{A} \vdash A \to B$ **(11)**

12. Применяем еще раз *прямую* теорему дедукции: $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$ **(12)**

Т.о., теорема доказана.

Теорема г) - «1-ая теорема контрапозиции»:

$$\vdash_L (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$$

Доказательство.

1. $\overline{B} \to \overline{A}$ – гипотеза;

2. A – гипотеза;

3. аксиома A_3**:** тавтология $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$ **(3)**

4. аксиома $A_1\{\overline{B}//B\}$: $A \to (\overline{B} \to A)$ **(4)**

5. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(1),(3) = (1) \to (5)}{(5) = (\overline{B} \to A) \to B}$

6. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(2),(4) = (2) \to (6)}{(6) = \overline{B} \to A}$

7. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(6),(4) = (5) \to (7)}{(7) = B}$

8. Последовательность выводимых формул (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) – это правильно построенный вывод, базирующийся на двух гипотезах (1), (2), и его символическая запись $\overline{B} \to \overline{A}, A \vdash B$ **(8)**

9. Применяем *прямую* теорему дедукции: $\overline{B} \to \overline{A} \vdash A \to B$ **(9)**

10. Применяем еще раз *прямую* теорему дедукции: $\vdash (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$

Т.о., теорема доказана.

Теорема д) - «2-ая теорема контрапозиции»:

$$\vdash_L (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$$

Доказательство.

1. $A \to B$ – гипотеза;

2. Применяем теорему **а)**: $\vdash \overline{\overline{A}} \to A$ **(2)**

3. Следствие 2 (правило *транзитивности*) из теоремы *«дедукции»* $(A \to B),(B \to C) \vdash (A \to C)$ с подстановкой $\{\overline{\overline{A}}//A, A//B, B//C\}$:

$$(2),(1) \vdash \bar{\bar{A}} \to B. \qquad \textbf{(3)}$$

4. Применяем теорему **б)** $\{B//A\}$: $\vdash B \to \bar{\bar{B}}$ **(4)**

5. Следствие 2 (правило *транзитивности*) из теоремы «*дедукции*» $(A \to B),(B \to C) \vdash (A \to C)$ с подстановкой $\{\bar{\bar{A}}//A,\ \bar{\bar{B}}//C\}$:

$$(3),(4) \vdash \bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}}. \qquad \textbf{(5)}$$

6. Применяем теорему **г)** $\{\bar{B}//A,\ \bar{A}//\mathrm{B}\}$: $(\bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}}) \to (\bar{B} \to \bar{A})$ **(6)**

7. Применяем правило вывода MP: $\dfrac{(5),(6) = (5) \to (7)}{(7) = \bar{B} \to \bar{A}}$

8. Последовательность выводимых формул (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) – это правильно построенный вывод, базирующийся на гипотезт (1), и его символическая запись $A \to B \vdash \bar{B} \to \bar{A}$ **(8)**

9. Применяем *прямую* теорему дедукции: $\vdash (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$

Т.о., теорема доказана.

<u>**Вывод**</u>: доказанные **теоремы г) и д) позволяют считать доказанным «эквивалентность** $\bar{B} \to \bar{A} \equiv A \to B$**», другими словами, верно Утверждение: «прямая теорема и противоположная обратной теореме эквивалентны». Т.о., вместо прямой теоремы можно доказывать ей эквивалентную «противоположную обратной», которая соответствует методу доказательства «от противного (от обратного)».**

Теорема е): $\vdash_L A \to (\bar{B} \to \overline{A \to B})$

Доказательство.

1. A – гипотеза;

2. $A \to B$ – гипотеза;

3. Применяем правило вывода MP: $\dfrac{(1) = A, (2) = (1) \to (3)}{(3) = B}$

4. Последовательность выводимых формул (1), (2), (3) – это правильно построенный вывод, базирующийся на двух гипотезах (1), (2), и его символическая запись $A, A \to B \vdash B$ **(4)**

5. Применяем *прямую* теорему дедукции: $A \vdash (A \to B) \to B$ **(5)**

6. Применяем еще раз *прямую* теорему дедукции: $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$ **(6)**

7. Применяем теорему **д)**$\{A \to B // A\}$: $\vdash ((A \to B) \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$ **(7)**

8. Следствие 2 (правило *транзитивности*) из теоремы «*дедукции*» $(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)$ с подстановкой $\{(A \to B) \to B // B,$ $\overline{B} \to \overline{A \to B} // C\}$: $(6), (7) \vdash A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$. **(8)**

Выводимые формулы (6), (7) – тавтологии, поэтому они имеют статус, равный аксиомам. Т.о., теорема доказана.

Теорема ж): $\vdash_L (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$

Доказательство.

1. $A \to B$ – гипотеза;

2. $\overline{A} \to B$ – гипотеза;

3. Применяем теорему **д):** $\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ **(3)**

4. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(1),(3) = (1) \to (4)}{(4) = \overline{B} \to \overline{A}}$ **(4)**

5. Применяем теорему **д)**$\{\overline{A} // A\}$: $\vdash (\overline{A} \to B) \to (\overline{B} \to \overline{\overline{A}})$ **(5)**

6. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(2),(5) = (2) \to (6)}{(6) = \overline{B} \to \overline{\overline{A}}}$

7. аксиома $A_3\{\overline{A} // A\}$: $(\overline{B} \to \overline{\overline{A}}) \to ((\overline{B} \to \overline{A}) \to B)$ **(7)**

8. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(6),(7) = (6) \to (8)}{(8) = (\overline{B} \to \overline{A}) \to B}$ **(8)**

9. Применяем правило вывода МР: $\dfrac{(4),(8) = (4) \to (9)}{(9) = B}$ **(9)**

10. Последовательность выводимых формул (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9),– это правильно построенный вывод, базирующийся на двух гипотезах (1), (2), и его символическая запись $A \to B, \overline{A} \to B \vdash B$ **(10)**

11. Применяем *прямую* теорему дедукции: $A \to B \vdash (\overline{A} \to B) \to B$ **(11)**

12. Применяем еще раз *прямую* теорему дедукции: $\vdash (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$.

Теорема ж) доказана.

ЛЕКЦИЯ 8

1.8. Метатеоремы о “полноте» и «формальной непротиворечивости» ИВ (теории L)

Пусть имеется формула $A(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ и задана интерпретация $I(A)$. Обозначим:

$$A_i' := \begin{cases} a_i, \text{если } a_i = 1; \\ \overline{a}_i, \text{если } a_i = 0; \end{cases} \qquad A' := \begin{cases} A, \text{если } A = 1; \\ \overline{A}, \text{если } A = 0; \end{cases}$$

Лемма. Вывод $A_1', A_2', \ldots\ldots, A_n' \vdash A'$ **верен в любой интерпретации.**

Доказательство *по индукции (по структуре формул: переменные и операции «отрицания и импликации» определяют различные структуры формул ИВ).*

1. *Структура формулы А: переменная – суть формулы, т.е. А=а - переменная.*

Тогда лемма записывается так $A' \vdash A'$. Применяя *прямую* теорему дедукции, получим вывод $\vdash A' \to A'$, совпадающий по структуре с ранее доказанной *Теоремой* 1 (см. подраздел 1.5). Другими словами два случая леммы $a \vdash a$ и $\overline{a} \vdash \overline{a}$ эквивалентны (согласно применению *прямой* теоремы дедукции) выводам (теоремам): $\vdash a \to a$ и $\vdash \overline{a} \to \overline{a}$, которые являются частными случаями теоремы $\vdash A' \to A'$. Т.о., доказана лемма для первого случая $A=a$.

2. *Структура формулы A получена отрицанием другой формулы B, для которой по «индукционному предположению» выполняется лемма* $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B'$. Т.е. имеем структуру $A = \overline{B}$.

Рассмотрим два случая интерпретации формулы B:

а) Пусть $I(B)=1$. Тогда $I(A)=0$ и $A' = \overline{A} = \overline{\overline{B}}$. По «индукционному предположению» выполняется лемма $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B' = B$, т.е. по лемме выводима формула B. Используя теорему б) из подраздела 1.7 и подстановку $\{B//A\}$, а именно: $\vdash B \to \overline{\overline{B}}$, и применяя правило вывода MP: $\dfrac{B' = B,\, B \to \overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{B}}}$, получаем правильно построенный вывод $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash \overline{\overline{B}} = A'$.

б) Пусть $I(B)=0$. Тогда $I(A)=1$ и $A' = A = \overline{B}$. По «индукционному предположению» выполняется лемма $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B' = \overline{B} = A'$.

Т.о., доказана лемма для второго случая $A = \overline{B}$.

3. *Структура формулы A получена импликацией двух формул B и C, для которых по «индукционному предположению» выполняются леммы* $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B'$ и $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash C'$. Т.е. имеем структуру $A = B \to C$.

Для данной структуры формулы A возможны 4 случая интерпретации. Однако первые два случая можно объединить в одно доказательство, т.е. когда $I(B)=0$, так как для двух случаев а) и б) интерпретации $I(C)=1$ и $I(C)=0$ формула А принимает истинное значение ($I(A)=1$).

а) и б) $I(B)=0$. Тогда при любом значении формулы $I(C)$ имеем значение $I(A)=1$. Тогда $A' = A = B \to C$ и $B' = \overline{B}$. Используя *индукционное предположение* $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B' = \overline{B}$ и *теорему* **в)**: $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$ с подстановкой $\{B//A,\ C//B\}$, в результате которой имеем $\vdash \overline{B} \to (B \to C)$, а также применив правило вывода МР: $\dfrac{B' = \overline{B}, \overline{B} \to (B \to C)}{B \to C}$, получаем правильно построенный вывод $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B \to C = A = A'$.

в) Пусть $I(B)$=1 и $I(C)$=1. Тогда $I(A)$=1, $A' = A = B \to C$, $B' = B$, $C' = C$. Используем аксиому A_1: $A \to (B \to A)$ с подстановкой $\{C//A\}$ и получаем $C \to (B \to C)$. С учетом *индукционного предположения* $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash C' = C$ применяем правило вывода МР: $\dfrac{C' = C, C \to (B \to C)}{B \to C}$ получаем выводимую формулу $C = A = A'$. Следовательно, имеем правильно построенный вывод $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash C' = C = A'$.

г) Пусть $I(B)$=1 и $I(C)$=0. Тогда $I(A)$=0, $A' = \overline{A} = \overline{B \to C}$, $B' = B$, $C' = \overline{C}$.

Далее используем *теорему* **е)**: $\vdash A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$ с подстановкой $\{B//A,\ C//B\}$, в результате которой имеем $\vdash B \to (\overline{C} \to \overline{B \to C})$. С учетом *индукционного предположения* $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B' = B$ применяем правило вывода МР: $\dfrac{B' = B, B \to (\overline{C} \to \overline{B \to C})}{\overline{C} \to \overline{B \to C}}$, получаем выводимую формулу $\overline{C} \to \overline{B \to C}$. Далее, используя *индукционное предположение* $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash C' = \overline{C}$ и правило вывода МР: $\dfrac{C' = \overline{C}, \overline{C} \to \overline{B \to C}}{\overline{B \to C}}$, получаем выводимую формулу $\overline{B \to C} = \overline{A} = A'$, т.е. имеем правильно построенный вывод $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash \overline{B \to C} = \overline{A} = A'$.

Т.о., все случаи третьей структуры формулы $A = B \to C$ доказаны и, тем самым, лемма полностью доказана.

Метатеорема «о полноте» ИВ (теории L). Выводимыми формулами в теоремах ИВ (теории L) являются общезначимые формулы (тавтологии) и только они:

$$(\vdash_L A) \equiv (\text{A - тавтология})$$

I. Доказательство *обратной* теоремы (достаточность): если формула A – тавтология, то верна теорема $\vdash_L A$.

Пусть A – тавтология. Тогда по лемме в любой интерпретации верен вывод $A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash A' = A$. В области гипотез имеется n величин, каждая из которых принимает два значения $A_i' := \begin{cases} a_i, \text{если } a_i = 1; \\ \overline{a}_i, \text{если } a_i = 0; \end{cases}$

Поэтому количество вариантов интерпретаций для них равно 2^n. Сначала рассмотрим два варианта для последней переменной: $A_1', A_2', \ldots, a_n \vdash A$ и $A_1', A_2', \ldots, \overline{a}_n \vdash A$. Применяя *прямую теорему дедукции*, получим:

$$A_1', A_2', \ldots, A_{n-1}' \vdash a_n \to A, \tag{1}$$

$$A_1', A_2', \ldots, A_{n-1}' \vdash \overline{a}_n \to A. \tag{2}$$

Применяя *теорему* **ж)**: $\vdash_L (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$ с подстановкой $\{a_n // A, A // B\}$, получим

$$\vdash_L (a_n \to A) \to ((\overline{a}_n \to A) \to A). \tag{3}$$

Далее, используя вывод (1) и теорему (3), применяем правило вывода MP: $\dfrac{a_n \to A, (a_n \to A) \to ((\overline{a}_n \to A) \to A)}{(\overline{a}_n \to A) \to A}$, в результате получаем выводимую формулу $(\overline{a}_n \to A) \to A$, наряду с которой используем вывод (2) и вновь правило вывода MP: $\dfrac{\overline{a}_n \to A, (\overline{a}_n \to A) \to A}{A}$. Получили выводимую формулу A, т.е. имеем правильно построенный вывод на основании (1) и (2):

$$A_1', A_2', \ldots, A_{n-1}' \vdash A. \tag{4}$$

Далее, действуя аналогичным образом, на следующем шаге получим правильно построенный вывод $A_1', A_2', \ldots, A_{n-2}' \vdash A$.

Т.е., проделав еще (n-2) раза аналогичную процедуру доказательства, на последнем шаге на основании верного вывода $A_1' \vdash A$ получим правильно построенный вывод (теорему) $\vdash_L A$.

Т.о., *обратная теорема* доказана.

II. Доказательство *прямой* теоремы (необходимость): если верна теорема $\vdash_L A$, тогда формула A – *тавтология*.

Аксиомы A_1, A_2 и A_3 являются *тавтологиями*. В теоремах ИВ на основании этих аксиом с помощью «логичного» правила вывода MP (см. теорему 2 в подразделе 1.2) выводимы только *тавтологии*. Т.е., A – *тавтология*.

Т.о., метатеорема «о полноте» доказана.

Метатеорема «о формальной непротиворечивости» ИВ (теории L) - **Следствие из метатеоремы "о полноте» ИВ.** Теория L формально непротиворечива.

Доказательство. Все выводимые формулы в теоремах ИВ являются тавтологиями (согласно *метатеореме «о полноте»* ИВ). Отрицание тавтологии не является тавтологией, т.е. в теореме ИВ это отрицание тавтологии не оказывается результатом выводимости (выводимы только тавтологии). Согласно определению «формальной непротиворечивости» теории (см. **Определение 11** в подразделе 1.4) наряду с формулой A (в нашем случае, тавтологией) не может быть одновременно выводима формула, являющаяся отрицанием формулы A. Поэтому ИВ – теория L является формально непротиворечивой.

Важный вывод: *логика высказываний* (в т.ч. «исчисление высказываний») является *основой языков общения между людьми, и она является «полной» и «непротиворечивой». Поэтому отношения в обществе между людьми, опирающиеся на логику высказываний, могут развиваться на «здоровой» основе и вселяют большой оптимизм на будущее.*