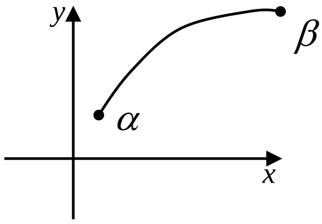
# Лекция 6
## Тема: Теория функция комплексной переменной (продолжение)

## Интегрирование функций комплексной переменной

Рассмотрим кривую $\Gamma$ с началом $\alpha$ и концом $\beta$.




На $\Gamma$ задана функция комплексной переменной $z = x + iy$:

$$f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y).$$

Разобьем $\Gamma$ произвольным образом точками $z_k = x_k + iy_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, на $n$ частей. На каждой дуге произвольно выберем точку $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

Составим сумму: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

*Определение*. Если существует $\lim\limits_{\max|\Delta z_k| \to 0} S_n$, то этот предел называется **интегралом от функции $f(z)$ по кривой** $\Gamma$ и обозначается $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$.

Интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ сводится к криволинейному интегралу второго рода:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \left| \begin{array}{l} f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y) \\ z = x + iy \\ dz = dx + idy \end{array} \right| = \int\limits_{\Gamma} (u(x, y) + i\upsilon(x, y))(dx + idy) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} u(x, y)dx - \upsilon(x, y)dy + i\int\limits_{\Gamma} \upsilon(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

(раскрыли скобки, выделили действительную и мнимую части выражения и представили интеграл в виде суммы двух криволинейных интегралов второго рода от действительных функций)

### *Свойства интеграла*

1) Пусть кривая $\Gamma$ задана уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ (то есть кривая задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$). Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt.$$

2) Пусть $\Gamma'$ – кривая с началом $\beta$ и концом $\alpha$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma'} f(z)dz.$$

3) Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

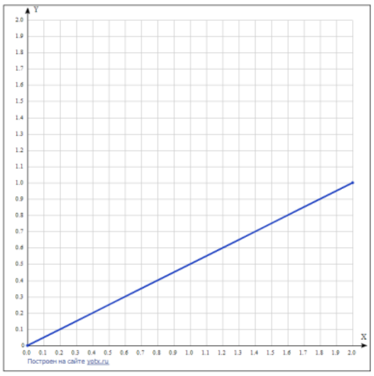
4) $\int\limits_{\Gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int\limits_{\Gamma} f(z)dz + \mu \int\limits_{\Gamma} g(z)dz.$

5) $\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\Gamma} |f(z)| \cdot |dz|.$

**Пример**. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{\Gamma} xdz$ по:

а) радиус-вектору точки $z = 2 + i$;
б) по полуокружности $|z| = 1$.

**Решение**.
а)



Определим уравнение радиус-вектора:

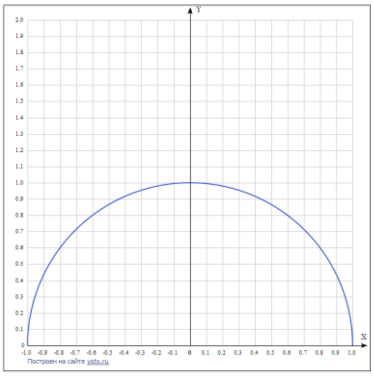
$y = kx$, подставляем координаты точки $x = 2$, $y = 1$, находим $k = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, $y = \dfrac{1}{2}x$, $0 \le x \le 2$.

Тогда $z = x + iy = x + \dfrac{1}{2}xi$, $dz = \left(x + \dfrac{1}{2}xi\right)' dx = \left(1 + \dfrac{1}{2}i\right)dx$. Значит,

$$I = \int\limits_{\Gamma} xdz = \int\limits_{0}^{2} x\left(1 + \frac{1}{2}i\right)dx = \left(1 + \frac{1}{2}i\right)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}i\right) = 2 + i.$$

б) $|z|=1,\ 0\le \arg z\le \pi$. Начало в точке $z=1$.



Уравнение окружности $|z|=1$ можно переписать как $x^2+y^2=1$ или в параметрическом виде: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, где $0\le t\le \pi$ для полуокружности.

Тогда $z=x+iy=\cos t+i\sin t$, $dz=(\cos t+i\sin t)'dt=(-\sin t+i\cos t)dt$.

Следовательно,

$$I=\int_\Gamma x\,dz=\int_0^\pi \cos t(-\sin t+i\cos t)dt=-\int_0^\pi \cos t\sin t\,dt+i\int_0^\pi \cos^2 t\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2t\,dt+\frac{i}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^\pi+\frac{i}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{2}i.$$

**Теорема Коши**. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D$ и $\gamma$ – любая замкнутая кусочно-гладкая кривая в $D$, то $\int_\gamma f(z)dz=0$.

*Упражнение*. Доказать теорему Коши (перейти к криволинейному интегралу второго рода, применить утверждение о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования и условия Коши-Римана).

**Интегральная формула Коши:**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0}=\begin{cases} f(z_0), & z_0\in D, \\ 0, & z_0\notin D\cup\Gamma, \end{cases}$$

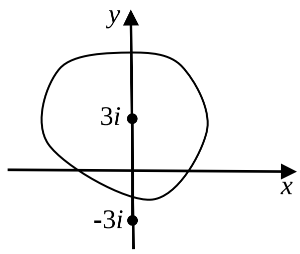
где $\Gamma$ – граница области $D$, $f(z)$ – аналитическая и непрерывная.

**Пример**. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$, если

а) точка $3i$ лежит внутри замкнутой кривой $C$, а точка $-3i$ вне $C$;
б) точка $-3i$ лежит внутри замкнутой кривой $C$, а точка $3i$ вне $C$;
в) точки $3i$ и $-3i$ лежат внутри замкнутой кривой $C$.

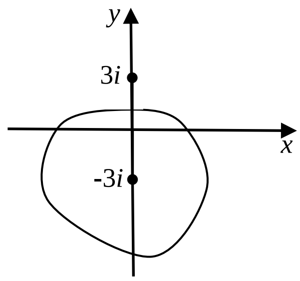
**Решение**.

а) $$\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_C \frac{dz}{(z-3i)(z+3i)} = \int\limits_C \frac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{z+3i}\right)\Bigg|_{z=3i} = \frac{2\pi i}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$



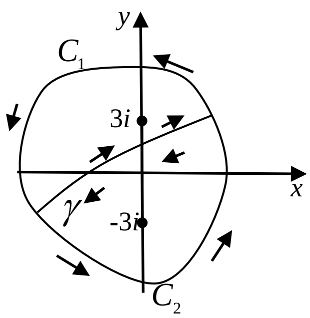

Здесь в качестве $f(z)$ рассмотрена функция $\dfrac{1}{z+3i}$, так как именно она аналитична и непрерывна внутри $C$ (непрерывность функции нарушается в точке $z=-3i$, которой нет внутри $C$).

б)




$$\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_C \frac{dz}{(z-3i)(z+3i)} = \int\limits_C \frac{\frac{1}{z-3i}}{z+3i}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{z-3i}\right)\Bigg|_{z=-3i} = \frac{2\pi i}{-6i} = -\frac{\pi}{3}.$$

в)




Разобьем область внутри $C$ кривой $\gamma$ на две части так, чтобы каждая часть содержала только одну из точек $3i$ или $-3i$.

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{C_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int\limits_{C_2} \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{C_1\cup\gamma} \frac{dz}{z^2+9} + \int\limits_{C_2\cup\gamma'} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$$

Здесь $\gamma'$ – это кривая $\gamma$ с противоположным направлением и $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = -\int\limits_{\gamma'} \frac{dz}{z^2+9}$.

## Понятие неопределенного интеграла для функций комплексной переменной

Рассмотрим $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt$.

Путь интегрирования здесь любая кривая, соединяющая точки $z_0$ и $z$. ($f(t)$ – аналитическая функция, применима теорема Коши – упражнение: доказать)

Можно показать, что $F'(z)=f(z)$ (аналогично, как это было сделано для интеграла с переменным верхним пределом – см. 1-й семестр).

*Определение*. Функция $F(z)$, производная которой равна $f(z)$, называется **первообразной** к $f(z)$.

*Определение*. Совокупность первообразных $F(z)+c$, где $c=const$, называется **неопределенным интегралом**.

Также как и для действительных функций здесь выполняется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt=\Phi(z)-\Phi(z_0),\text{ где }\Phi\text{ – первообразная.}$$

Для нахождения первообразных к функции комплексной переменной применяются обычные правила интегрирования.

**Пример**. $\int\limits_{i}^{1+i} zdz=\left.\dfrac{z^2}{2}\right|_{i}^{1+i}=\dfrac{1+2i-1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+i$.