Лекция 7
Тема: Ряды Фурье

Тригонометрический ряд Фурье

Определение. Функция $\varphi(t)$ называется **периодической** с периодом $T \neq 0$, если для всех значений t выполняется равенство $\varphi(t+T) = \varphi(t)$.

Определение. Система ненулевых функций
$$\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$$
называется **ортогональной** на промежутке $[a,b]$, если
$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad \forall n \neq m, \; n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение. Система $\{\varphi_n(x)\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ называется **тригонометрической** системой на $[-\pi, \pi]$.

Покажем **ортогональность тригонометрической системы**, т.е.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0 \quad \forall n \neq m,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0 \quad \forall n \neq m,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0 \quad \forall n, m,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi.$$

Доказательство.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \left|\begin{matrix} \textit{т.к.} \sin k\pi = 0, \\ k - \textit{целое число}, \\ n, m - \textit{целые} \end{matrix}\right| = 0, \quad n \neq m.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \left|\begin{matrix} \textit{т.к.} \sin 2n\pi = 0, \\ n - \textit{целое число} \end{matrix}\right| = \pi.$$

Остальные интегралы вычисляются аналогично (упражнение).

Определение. Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

называется **тригонометрическим рядом**.

Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая функция. Установим возможность тригонометрического разложения:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \quad (1)$$

Допустим, что разложение (1) имеет место. Проинтегрируем равенство (1) от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right).$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}dx=x\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi,$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0\pi,$$

отсюда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx. \quad (2)$$

Для нахождения коэффициентов a_m умножим обе части равенства (1) на $\cos mx$ и проинтегрируем полученное равенство от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx}_{=0}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx}_{=\begin{cases}0,\ n\neq m\\ \pi,\ n=m\end{cases}}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx}_{=0\ \forall n,m}).$$

Получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=a_m\pi,$$

отсюда

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx. \quad (3)$$

Аналогично, умножая равенство (1) на $\sin mx$ и интегрируя от $-\pi$ до π, получим

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx. \tag{4}$$

Определение. Коэффициенты a_0, a_n, b_n, вычисленные по формулам (2)–(4), называются **коэффициентами Фурье**, а ряд (1) – **тригонометрическим рядом Фурье**.

Замечание 1. Почленное интегрирование ряда возможно, когда ряд, стоящий в правой части равенства (1) сходится равномерно.

Вопрос: Что такое равномерная сходимость функционального ряда?

Замечание 2. Если не предполагать равномерную сходимость, то можно рассматривать лишь формальный ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

($f(x)$ – порождающая функция).

Теорема Дирихле (достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье). Пусть $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ ограничена и кусочно-монотонна. Тогда ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \; n = 1, 2, \ldots$$

сходится к порождающей функции $f(x)$ во всех точках, где эта функция непрерывна. В точках разрыва x_0 ряд Фурье сходится к значению

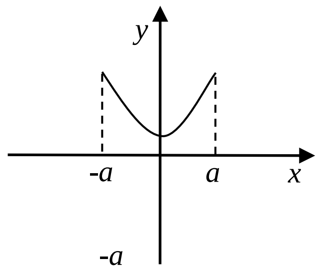
$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

В точках $-\pi$ и π ряд Фурье сходится к значению

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Ряды Фурье четных и нечетных периодических функций

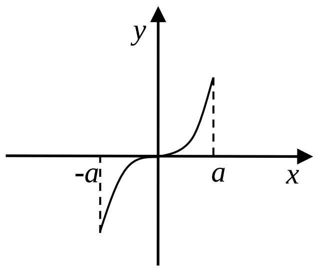
Вспомним известные факты.
а) Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x)=f(x)$.
График четной функции симметричен относительно оси *Oy*.



Заметим, что для четной функции выполняется:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

б) Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$.
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



Заметим, что для нечетной функции выполняется:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

I. Ряд Фурье для четной функции

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{\text{четная}}dx \quad \Rightarrow \quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{четная}}dx \quad \Rightarrow \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{нечетная}}dx=0$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \text{ (разложение в ряд Фурье по косинусам)}$$

II. Ряд Фурье для нечетной функции

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{нечетная}} dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{нечетная}} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{четная}} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ (разложение в ряд Фурье по синусам)

Ряд Фурье для функций с произвольным периодом

Рассмотрим функцию $f(x)$ с периодом $T = 2l$.

Сделаем замену

$$x = \frac{lt}{\pi},\ -\pi \le t \le \pi.$$

При этом функции $f(x)$ с периодом $2l$ соответствует функция

$$F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$$

с периодом 2π.

Для функции $F(t)$ составим ряд Фурье:

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt dt.$$

Перепишем формулы.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{\pi x}{l} \\ dt = \dfrac{\pi}{l}dx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} F\left(\frac{\pi x}{l}\right)\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Аналогично, переписываются формулы для a_n, b_n.

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x)$ с произвольным периодом $T = 2l$ имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{\pi n x}{l} dx, \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{\pi n x}{l} dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

Основные свойства и теоремы сохраняются.