§ 2.4. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА (автор Алан Тьюринг) – 3-й способ определения вычислимых функций

<u>Суть способа</u>: лента с “0” и “1” поступает на вход «черного ящика» – ЭВМ. Черный ящик – ЭВМ – используется для входной ленты как пространство памяти ячеек для вычисления в виде инструкций для перехода из одного состояния в другое (модель конечного автомата).

Т.е., **«машина Тьюринга» – функция перехода под действием входных данных из одного состояния в другое.**

Один шаг действия может быть 3-х типов:

а) предыдущий символ ячейки ленты стирается, а пишется символ (может быть старый); б) лента сдвигается вправо (П) или влево (Л); в) указывается следующая инструкция (ее номер).

<u>Определение 1:</u> Машина Тьюринга – это функция M такая, что для некоторого натурального числа n область определения этой функции есть подмножество множества $\{0,1,2,...,n\}x\{0,1\}$, а область значений есть подмножество множества $\{0,1\}x\{Л,П\}x\{0,1,2,...,n\}$.

Например, пусть $M(3,1) = <0, Л, 2>$. То есть, когда машина дойдет до инструкции q_3, а на обозреваемой ячейке написан символ 1, она его стирает, и оставляет 0. Ленту передвигает влево и переходит к инструкции q_2. Если инструкция $M(3,1)$ не определена, то, дойдя до инструкции q_3, а на ячейке написан 1, то машина останавливается.

Входные данные и выходные данные – это строчки из 1, разделенные 0.

Пусть $<n>$ - строчка из 1 длины $(n+1)$. Тогда

$<n_1>0<n_2>0....0<n_k> -$ строка, состоящая из k строчек из 1, разделенными 0.

<u>Определение 2:</u> Пусть $D_f \subseteq N^k -$ область определения $k-$местной функции $f: D_f \to N$. Функция $f: D_f \to N$ называется «вычислимой», если существует машина Тьюринга M такая, что как только M начинает с инструкции q_0, обозревая самый левый символ строки $<n_1>0<n_2>0....0<n_k>$ (вся остальная часть ленты пуста) тогда:

а) если значение функции $f(n_1, n_2, ..., n_k)$ определено, то M в конце концов остановится, обозревая самый левый символ строки $<f(n_1, n_2, ..., n_k)>$, при этом часть, находящаяся справа от этой строки, пустая;

б) если значение $f(n_1, n_2, ..., n_k)$ не определено, то M никогда не останавливается.

ЗАМЕАНИЕ 1: Существует бесконечное число машин Тьюринга, для каждой из которых соответствует своя вычислимая функция.

ЗАМЕАНИЕ 2: Для любой вычислимой функции имеется бесконечное число машин Тьюринга.

ПРИМЕР: построим машину Тьюринга для «$n_1 + n_2$». Зададим функцию M:

$M(0,1) = <1, П, 0>$; $M(0,0) = <1, П, 1>$; $M(1,1) = <1, П, 1>$; $M(1,0) = <0, Л, 2>$; $M(2,1) = <0, Л, 3>$; $M(3,1) = <0, Л, 4>$; $M(4,1) = <1, П, 4>$; $M(4,0) = <0, П, 5>$.

Например, $n_1 + n_2 = 1 + 1$; обозреваемый символ выделен жирным шрифтом и подчеркнут.

Номер инструкции	Текущая строка символов	Комментарий
0 0	0***1***10110 01***1***0110	Прохождение через первое слагаемое
0	011***0***110	Заполнение промежутка
1 1	0111***1***10 01111***1***0	Прохождение через второе слагаемое
1	011111***0***	Конец второго слагаемого
2	01111***1***0	Стирание 1
3	0111***1***00	Стирание второй 1
4 4 4	011***1***000 01***1***1000 0***1***11000	Движение назад
4 5	***0***111000 0***1***11000	Остановка

§ 2.5. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ АЛГОРИТМА. ТЕЗИС ЧЕРЧА

а) **Гедель-Эбран-Клини**: общерекурсивные функции, определенные с помощью исчисления «рекурсивных уравнений». Книга: **Мендельсон. Введение в матем. Логику.- М.: Наука, 1976.-320 с.**
б) **Пост:** Функции, определенные каноническими дедуктивными системами. Книга: **Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций.-М.: Мир, 1983.-256 с.**
в) **Марков:** Функции, задаваемыми «нормальными алгоритмами» над конечным алфавитом. Книга: **Мендельсон. Введение в матем. Логику.- М.: Наука, 1976.-320 с.**
г) **Шепердсон-Стерджис**: МНР-вычислимые функции (Катленд……..)

ТЕЗИС ЧЕРЧА: Интуитивно и неформально определенный класс эффективно вычислимых функций совпадает с классом $\lambda-$определимых функций.
Вера в тезис подкрепляется аргументами:
1) многие независимые варианты уточнения интуитивного понятия вычислимости привели к одному и тому же классу;
2) обширное семейство эффективно вычислимых функций принадлежат этому классу;
3) никто еще не нашел функцию, которую можно было признать вычислимой в неформальном смысле, но которую нельзя было бы построить, используя один из формальных методов.

§ 2.6. АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОБЛЕМЫ (АНП)

Определение 1: Предикат $M(x)$ называется «разрешимым», если его характеристическая функция, задаваемая формулой : $C_M(x)=1$, если $M(x)$ – истинно; $C_M(x)=0$, если $M(x)$ – ложно, вычислима.

Определение 2: Предикат $M(x)$ называется «неразрешимым», если он не является *разрешимым*.

Алгоритмически Неразрешимые Проблемы:

1. **Теорема Черча «о неразрешимости логики предикатов»:** Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.
2. **Проблема остановки программы неразрешима:** Не существует общего алгоритма проверки программ на наличие в них бесконечных циклов, т.е. на языке $\Lambda -$исчисления: «Не существует общего алгоритма узнать, имеет ли данное $\lambda -$выражение **«нормальную форму»** или нет».
3. Не существует алгоритма установить, что две программы вычисляют одну и ту же одноместную функцию, т.е. **универсальное тестирование не возможно.**
4. **Диофантово полиномиальное уравнение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ имеет или не имеет целочисленного решения?** Не существует общего алгоритма, который может установить конкретный ответ (Матиясевич доказал эту теорему).