ЛЕКЦИЯ 4

1.4. Формальные теории (ФТ). Определения «выводимости» формул, «вывода» и «теоремы»

Формальные теории вначале разрабатывались для формализации логики и теории доказательства, т.е. для исследования «оснований математики» - ее фундамента. В настоящее время они используются и в прикладных задачах при создании «специальных исчислений». Формальные теории используют формальные языки и в их состав входят четыре компонента (алфавит, формулы, аксиомы, правила вывода).

Определение 1. *Формальная теория* Г – это:

1. Множество символов алфавита A (как конечное, так и бесконечное);
2. F – множество слов, составленных из символов алфавита A. Эти слова иначе называются формулами. Множество F может быть бесконечным.

   Замечание1: Множества F и A обозначают *язык* (*сигнатуру*).
3. Множество B (подмножество множества F) образует *аксиомы* (*систему аксиом*), т.е. $B \subset F$.
4. R – множество отношений, т.е. $R \subset F^{n+1}$. Отношения из множества R называют «*правилами вывода»*.

   Замечание 2: Множество F строится «по индукции» (по структуре формул).

   Замечание 3: Множество B может быть как конечным, так и бесконечным. Если оно бесконечно, то оно строится с помощью конечного множества схем аксиом и правил порождения конкретных аксиом.

   Замечание 4: Множество правил вывода R, как правило, конечно.

   Замечание 5: Обычно аксиомы делятся на две группы:

а) *логические аксиомы* – общие для широкого класса ФТ, их называют «*чистой системой аксиом*» (*чистая логика*).

б) *нелогические* (*собственные*) *аксиомы* для конкретной *прикладной* ФТ.

Определение 2. Формула *G* называется *выводимой формулой* из формул $F_1, F_2,......., F_n$ по *правилу вывода R*, если существует такое правило вывода *R*, что $(F_1, F_2,......., F_n, G) \in R$. Символическое обозначение *выводимости* формулы *G* следующее:

$$\frac{F_1, F_2,......., F_n}{G} R,$$

где *G* – *выводимая формула* (*заключение*), $F_1, F_2,......., F_n$ – *посылки*.

Определение 3. *Выводом* формулы *G* из формул $F_1, F_2,......., F_n$ формальной теории Г называется последовательность формул $E_1, E_2,......., E_k$, где $E_k = G$, а любая E_i (*i*<k) может быть:

1) $E_i = F_j$, где j=1, 2,….., *n*.
2) E_i – какая-либо из аксиом.
3) E_i – выводима непосредственно из $E_{j1}, E_{j2},......., E_{jn}$, где jn<i

Символическое обозначение *вывода*: $F_1, F_2,......., F_n$ |— *G*,

где формулы $F_1, F_2,......., F_n$ называются *гипотезами* вывода.

Определение 4. Вывод, не использующий гипотез, называется *теоремой* и обозначается в виде |— *G*.

Утверждение. Если вывод Г|— *G* является *правильно построенным* (*верным*), тогда и вывод Г, Δ |— *G* является *правильно построенным*, где Г, Δ – любые множества формул, т.е. добавление «*лишних*» гипотез сохраняет выводимость формулы.

Замечание: Существуют теоремы ФТ и другие теоремы о ФТ, которые называются «*метатеоремами*», которые могут быть устанавливать важные выводы о самой ФТ.

Интерпретация ФТ

Определение 5. *Интерпретацией* ФТ в область интерпретации М (алгебраическая система) будем называть отображение I: F→M, которое каждой формуле формальной теории Г однозначно сопоставляет некоторое содержательное высказывание относительно объектов множества М. Если это *высказывание истинно*, то говорят, что «*данная формула выполнима в данной интерпретации*».

Определение 6. Интерпретация *I* называется «*моделью*» множества формул Г, если все формулы этого множества *выполнимы* в интерпретации *I*. Если все ее теоремы выполнимы в интерпретации I.

Определение 7. Интерпретация *I* называется «*моделью*» формальной теории Г, если *все теоремы этой теории выполняются* в интерпретации *I*, т.е. все *выводимые формулы в теоремах истинны* в данной интерпретации.

Определение 8. Формула *G* называется *общезначимой* (*тавтологией*), если она *истинна в любой интерпретации* и называется *противоречивой* (*противоречием*), если она *ложна в любой интерпретации*.

Определение 9. Формула *G* называется *логическим следствием* множества формул Г, если формула *G* выполняется в любой *модели* Г.

Определение 10. Формальная теория Г называется «*семантически непротиворечивой*», если ни одна *выводимая* формула *G* в ее теоремах *не является противоречием*.

Определение 11. Формальная теория Г называется «*формально непротиворечивой*», если в ней не являются выводимыми одновременно формулы G и $\overline{G}$.

МЕТАТЕОРЕМА I. *Модель* для ФТ Г существует тогда и только тогда, когда ФТ Г семантически не противоречива.

МЕТАТЕОРЕМА 2. ФТ Г *формально не противоречива* тогда и только тогда, когда она *семантически не противоречива*

Определение 12. ФТ Г называется *полной* (или *адекватной*), если каждому *истинному высказыванию* относительно М соответствует *выводимая* формула в некоторой теореме в ФТ Г.

Определение 13. Если для множества М (алгебраической системы) существует формальная, полная и непротиворечивая теория Г, то М называется *аксиоматизируемым* множеством (*формализуемым* множеством).

Определение 14. Система аксиом (*аксиоматизация*) формально не противоречивой теории Г называется *независимой*, если *никакая из аксиом не выводима* из остальных аксиом Г по правилам вывода этой теории Г.

Определение 14. ФТ Г называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который для любой формулы этой теории способен определить: *является ли эта формула выводимой в некоторой теореме* этой теории.

Определение 15. Теория будет называться *полуразрешимой*, если существует алгоритм, который для любой формулы G теории Г выдает ответ «Да», если формула G является *выводимой в какой-либо теореме* и, может быть, *не выдает никакого ответа*, если формула G *не является выводимой в какой-либо теореме* (т.е. алгоритм может *зацикливаться*).