Глава II. Основы математического программирования (выпуклого программирования)
Будут рассмотрены условия существования локальных экстремумов дифференцируемых функций на допустимых множествах весьма общего вида, а так же условия существования глобальных экстремумов (минимумов) в задачах выпуклого программирования.

§ 2.1. Основная задача математического программирования.

Рассмотрим множество $X = \{x\colon f_i(x) \geq 0, i = \overline{1,m}\}$ ①
где ①$f_i(x), i = \overline{1,m}$
— заданные скалярные функции. Пусть скалярная функция φ(x) определена на множестве X.
Определение 1: Основная задача математического программирования определяется как задача минимизации функции φ(x) на множестве X.
φ(x) $\to min$, x∈X или {φ(x): x∈X} или

$$\min_{x\in X} \varphi(x)$$

, то есть ставится ② задача:

1. либо найти оптимальную точку x*∈X: ③
$$\varphi(x^*) = \min_{x\in X} \varphi(x);$$
2. либо если не существует такая x*, то найти ④
$$\varphi^* = \inf_{x\in X} \varphi(x);$$
3. либо убедиться, что φ(x) неограничен снизу на множестве X;
4. либо убедиться в том, что X=∅.

Определение 2: Задача ② называется задачей выпуклого программирования, если множество X выпукло и выпукла функция φ(x).
Замечание: Из 1-го свойства (теоремы 1 **§ 1.3.1.**) и определения 5 (**§ 1.1.**) о выпуклости множества вытекает, что для выпуклости множества X согласно ① достаточно, чтобы функции *fi(x)* были вогнутыми ($i = \overline{1,m}$)
Определение 3: Задача выпуклого программирования ② называется «основной задачей программирования», все функции *fi(x)* вогнуты, а φ(x) выпукла.
Замечание (определение): В задаче ② множество X называется «допустимым», точки этого множества — «допустимыми», а неравенства *fi(x)* — «ограничениями», точку

$$x^* = Argmin\{\varphi(x)\colon x \in X\}$$

называют «решением» или «оптимальной точкой» (иногда «точкой глобального минимума»), точка x, удовлетворяя необходимым условиям локального минимума φ(x) на X называют «стационарной».
Определение 4: Направление -s≠0 в том числе x∈X называется возможным, если существует такое число $\bar{\beta} > 0$, что для любого $\beta \in [0, \bar{\beta}]$ $(x - \beta s) \in X$
Примеры:

a) X={x: x≥0}, то в точке ч=0 для любого вектора -s≥0, s≠0 задает «возможное» направление;
b) ели x — внутренняя точка множества X, то для любого направления (-s) в этой точке является «возможным».

Определение 5: Ограничение *fi(x)*≥0 называется «активным» в фиксированной точке x∈X если *fi(x)*=0. Совокупность индексов активных ограничений в точке x∈X:$I(x) = \{i\colon f_i(x) = 0\}$
Теорема 1: Если s, где ||s||≠0, удовлетворяет ⑤ $(f_i(x), s) + \sigma \leq 0$
и i∈I(x) при некотором σ>0, то направление (-s) является возможным в точке x∈X.
Доказательство:

1. Если предположить I(x)=∅, тогда x — внутренняя точка и для любого направление (-s) является возможным. Поэтому, естественно предположить, что I(x)≠∅.
2. Если i∉I(x), то *fi(x)*>0 и малое приращение из очки x, то для любого направления, в части по направлению (-s), не нарушающий ③
3. Пусть i∈I(x). Предположим , что направление (-s) не является «возможным», например: $f_i(x - \beta s) < 0$

для любого сколь угодно малого β>0. Так как *fi(x)*=0, то для любого β>0

$$\frac{1}{\beta}[f_i(\mathrm{x}) - f_i(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s})] > 0$$

, а значит согласно теореме 3 (свойство 3 **§ 1.3.1.**):

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{f_i(\mathrm{x}) - f_i(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s})}{\beta} = (f_i{}'(\mathrm{x}), s) \geq 0$$

что противоречит условию ⑤ при σ>0.

Теорема 2: Если направление (-s) в точке x∈X является возможным, то существует такое σ≥0, что пара s,σ удовлетворяет условию ⑤.

Доказательство:

Предположим, что существует хотя бы один номер i∈I(x), для которого $(f_i'(\mathrm{x}), s) > 0$

Так как

При достаточно малых β>0, то есть (x - β s)∈X, что противоречит предположению о том, что (-s) — возможное направление, для которого $(f_i'(\mathrm{x}), s) > 0$. Так как $-f_i(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s})$=

$$= f_i(\mathrm{x}) - f_i(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s}) = \beta(f_i'(\mathrm{x}), s) + \sigma(\beta), \text{то } f_i(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s}) < 0$$

Теорема 3: Если множество X задается системой линейных неравенств

$$X = \{\mathrm{x}: f_i(\mathrm{x}) = (A_i, \mathrm{x}) - B_i \geq 0, i = \overline{1, m}\},$$

то условия $(A_i, s) \leq 0$ и $i \in I(\mathrm{x})$, являются необходимыми и достаточными для того, чтобы направление (-s) было возможным в точке x∈X.

Доказательство:

Нужно выяснить: при каких условиях точка y= x - β s ∈X хотя бы достигает малых β>0: $(A_i, y) - B_i = (A_i, \mathrm{x}) - B_i - \beta(A_i, s)$?

1. если i∉I(x), то $(A_i, \mathrm{x}) - B_i > 0$

и при достижении малых β>0 будет $(A_i, y) - B_i \geq 0$

2. если $i \in I(\mathrm{x})$, то $(A_i, y) - B_i = -\beta(A_i, s)$ и для выполнения неравенства $(A_i, y) - B_i \geq 0$ при β>0 необходимо с достаточно, чтобы было $(A_i, s) \leq 0$

§ 2.2. Экстремальные свойства.

Замечание: остаются предположения о непрерывной дифференцируемости функций $\varphi(\mathrm{x})$ и $f_i(\mathrm{x}), i = \overline{1, m}$

$$\begin{cases} (f_i'(\mathrm{x}), s) + \sigma \leq 0 \\ -(\varphi'(\mathrm{x}), s) + \sigma \leq 0 \\ i \in I(\mathrm{x}) \end{cases}$$

Далее будет часто использоваться система ①

Теорема 1: Для того, чтобы точка x∈X являлась точкой локального минимума функции φ(x) на множестве X, необходимо, чтобы в каждой паре s и σ, удовлетворяющей системе ①, было σ ≤ 0. ②

Доказательство:

Пусть x — точка локального минимума. Предположим, что существует пара s,σ удовлетворяющая системе ①, σ>0. Согласно Теореме 1 **§2.1.** направление (-s) является возможным в точке x в виду непрерывности φ'(x) и предположения, что $(\varphi'(\mathrm{x}), s) \geq \sigma > 0$, для достаточно малых β>0 будет

$(\varphi'(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s}), s) > 0$ и $(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s}) \in \mathrm{X}$

Но по теореме «о среднем»

$$\varphi(\mathrm{x}) - \varphi(\mathrm{x} - \beta\mathrm{s}) = \beta(\varphi'(\mathrm{x} - \theta\beta\mathrm{s}), s) > 0 \text{ и } 0 \leq \theta \leq 1$$

Таким образом, в локальной окрестности точки локального минимума x нашлась точка y= x - β s такая, что φ(y)<φ(x) — противоречие. Значит σ ≤ 0! x — стационарная точка основной задачи математического программирования.

Следствие: Если x∈X — точка локального минимума φ(x) на X является внутренней точки допустимого множества X, то φ'(x)=0.

Доказательство (от противного):
Пусть φ'(x)=0, но x — внутренняя точка, тогда I(x)=∅ и следовательно в системе ① верно лишь второе неравенство $-(\varphi'(\mathrm{x}), s) + \sigma \leq 0$
Пара s=φ'(x) и σ=(s,s)>0 удовлетворяет: $-(\varphi'(\mathrm{x}), s) + \sigma \leq 0$
но при этом нарушается условие σ ≤ 0 теоремы 1. То есть получили противоречие. Значит φ'(x)=0.
Теорема 2: Если в точке x∈X локального минимума функции φ(x) на X, система векторов *f'i(x)*, i∉I(x), линейно независима, то найдутся такие числа $u_i \geq 0, i \in I(\mathrm{x})$, что

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i \in I(\mathrm{x})} u_i f_i'(\mathrm{x}) \ (3)$$

Доказательство:
Согласно теореме 1 выпуклой системой ①, условие ②: $-(0; s) + 1 * \sigma \leq 0$ ④
Применим к системе ①, ④ теорему Фаркаша: то есть найдутся такие $v_i \geq 0, i \in I(\mathrm{x})$, и $v_0 \geq 0$, что

$$0 = \sum_{i \in I(\mathrm{x})} v_i f_i'(\mathrm{x}) - v_0 \varphi'(\mathrm{x}) \text{ ⑤}$$

$$1 = \sum_{i \in I(\mathrm{x})} v_i + v_0 \ (6)$$

- U_0=0 не может быть, так как в этом случае из ⑤ следует минимальная зависимость векторов *f'i(x)*
- значит U_0>0 следовательно

$$u_i = \frac{v_i}{v_0}, i \in I(\mathrm{x})$$

и отсюда следует ③

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i \in I(\mathrm{x})} u_i f_i'(\mathrm{x})$$

Замечание: К условию ③ можно добавить условие

$$\sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathrm{x}) = 0$$

Применив U_0=0 для i∉I(x), так как при i∈I(x) *fi(x)*=0. Тогда ③ :

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i'(\mathrm{x})$$

или

$$-\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i(-f_i'(\mathrm{x})), u_i \geq 0$$

антиградиент = линейной комбинации внешних к ограничениям в точке x (с положительными коэффициентами), то есть антиградиент принадлежит конусу, натянутому на внешние нормали к ограничениям в точке x.

§ 2.3. Экстремальные свойства на выпуклых множествах.

§ 2.3.1. Условия регулярности.

Условия регулярности: в случае выпуклости множества $X = \{\mathrm{x}: f_i(\mathrm{x}) \geq 0, i = \overline{1, m}\}$ условия линейной независимости векторов *f'i(x)*, соответствующих активным ограничениям, в предыдущей теореме 2 можно заменить условием регулярности в различных вариантах:

Первое условие: Если для каждого $1 \le i \le m$ существует такая точка $x_i \in X$, что $f_i(x_i) > 0$;① то говорят, что множество X удовлетворяет «условию регулярности» (УР).
Второе условие, УР Слейтера: Существует такая точка $x \in X$, что для любой $i = \overline{1, m}$ будет $f_i(x) > 0$.②

Доказательство: эквивалентности ①⇔②

a) Из ① очевидно следует ②.
b) Пусть выполняется первое УР. Выбираем

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \ge 0$$

Тогда ② следует из неравенства Иенсена (теорема 2 **§ 1.3.1.**) для вогнутых функций $f_i(x)$.
Теорема 1: Если функции $f_i(x)$ вогнуты, множество $X = \{x: f_i(x) \ge 0, i = \overline{1, m}\}$ регулярно по Слейтеру, а точка $x \in X$ является точкой локального минимума (стационарной точкой) функции φ(x) на X, то найдутся такие числа $U_i \ge 0$, $i \in I(x)$, что

$$\varphi'(x) = \sum_{i \in I(x)} u_i f_i'(x)$$

Доказательство:
Повторяя доказательство теоремы 2 **§ 2.2.** , получим $v_i \ge 0, i \in I(x), v_0 \ge 0$

$$0 = \sum_{i \in I(x)} v_i f_i'(x) - v_0 \varphi'(x) \ (3)$$

$$1 = \sum_{i \in I(x)} v_i + v_0 \ ④$$

Осталось доказать, что $U_0 > 0$, то есть от противного предположим, что $U_0 = 0$. Из ④ следует, что хотя бы одно $U_e > 0$, $e \in I(x)$. Из регулярности X следует существование такой точки $z \in X$, что $f_i(z) > 0$, i=1,m. Тогда направление -s=z-x будет возможным. Так как $f_e(x)$ — вогнутая функция, то из теоремы 6 **§ 1.3.1.** $-(f_e'(x), s) \ge f_e(z) - f_e(x) > 0$
Умножив ③ скалярно на вектор (-s):

$$0 = \sum_{i \in I(x)} v_i (f_i'(x), s) \ ⑤$$

Поскольку (-s) — возможное направление в точке x, то из теоремы 1 **§ 2.1.** следует, что $(f_i'(x), s) \le 0, i \in I(x)$.
В ⑤ все, кроме e-го, слагаемые ≤0, а e-ое будет $v_e(f_e'(x), s) < 0$, что противоречит равенству нулю всей суммы.
Теорема 2: Если функции $f_i(x)$ вогнуты, замкнутое множество $X = \{x f_i n\} \ge 0, i = \overline{1, m}$ регулярно по Слейтеру, а точка $x \in X$ является точкой локального минимума функции φ(x) на множестве X, то x=p[x-φ'(x)], где p[v] означает проекцию точки v на множество X.
Доказельсво:
Пусть y — любая точка X. Направление -s=y-x является возможным в точке x. Из теоремы 1 получаем, что

$$(|x - \varphi'(x)| - x, y - x) = (\varphi'(x), s) = \sum_{i \in I(x)} u_i (f_i'(x), s) \le 0$$

По теореме 3 **§ 1.1.** отсюда следует, что x является проекцией точки x-φ'(x) на множество X.

§ 2.3.2. Случай линейных ограничений.
(верна теорема 2 без требования регулярности X)

Теорема 3: Если функции $f_i(x), i = \overline{1, m}$, а точка $x \in X = \{x: f_i(x) = (A_i, x) - B_i \ge 0, i = \overline{1, m}\}$ является точкой локального минимума φ(x) на множестве X, то существует (найдутся) такие $U_i \ge 0$, $i \in I(x)$, что

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i\in \mathrm{I(x)}} u_i A_i \ (*)$$

Доказательство:
Пусть ε>0 — малое положительное число, что любых точек принадлежащих окрестности

$$U_\varepsilon(\mathrm{x}) = \{Y \in X: \|y - \mathrm{x}\| \le \varepsilon\}$$

точки x, будет φ(y)≥φ(x). Рассмотрим любую точку z≠x множества X — выпуклую, тогда $\mathrm{x} - \beta(\mathrm{x}-\mathrm{z}) \in U_\varepsilon(\mathrm{x})$ для любой $\beta \in \left(0, \bar\beta\right]$ при $\bar\beta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{\|z-\mathrm{x}\|}\}$

Поэтому

$$\lim_{\beta\to 0+} \frac{\varphi(\mathrm{x}) - \varphi(\mathrm{x} - \beta(\mathrm{x}-\mathrm{z}))}{\beta} = (\varphi'(\mathrm{x}), \mathrm{x}-\mathrm{z}) \le 0$$

Если положить s=x-z, то направления (-s) будет возможным в точке x и последнее неравенство будет следующим: $(\varphi'(\mathrm{x}), \mathrm{s}) \le 0$ ⑥

Поскольку(-s) — любое возможное направление в точке x, то из <u>теоремы 3</u> **§ 2.1.** следует, что неравенство ⑥ должно выполняться для любых s , удовлетворяющих неравенствам

$$(A_i, s) \le 0, i \in \mathrm{I(x)} \quad ⑦$$

Применяя к условиям ⑥, ⑦ теорему Фаркаша получим *.

<u>Замечание:</u> Поскольку при выводе ⑥ использовали лишь свойство выпуклости X, то для стационарности точки x в задаче выпуклого программирования можно сформулировать <u>условие</u>:

Для того, чтобы точка x выпуклого множества X являлась точкой локального минимума функции φ(x) на X, необходимо, чтобы в этой точке производные по всем возможным направлениям были положительными:$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x})}{\partial(-s)} \le 0$

§ 2.4. Достаточные условия оптимальности.

<u>Теорема 1:</u> Для того, чтобы точка x∈X была точкой глобального минимума основной задачи выпуклого программирования φ(x) $\to min$, x∈X и *fi(x)* — вогнуты $X = \{\mathrm{x}: f_i(\mathrm{x}) \ge 0, i = \overline{1,m}\}$, достаточно существование таких чисел U_i≥0, i∈I(x), что

Доказательство:

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i\in \mathrm{I(x)}} u_i f_i'(\mathrm{x}).$$

Так как X — выпукло, то -s=y-x является возможным направлением в точке x про любой x∈X. Из <u>теоремы 2</u> **§ 2.1.** следует, что $(f_i'(\mathrm{x}), \mathrm{s}) \le 0, i \in \mathrm{I(x)}$

и поскольку φ(x) — выпукла, то пользуясь условием * <u>теоремы 6</u> **§ 1.3.1.** :

$$(\varphi'(\mathrm{x}), y - \mathrm{x}) \le \left(\varphi(y) - \varphi(\mathrm{x})\right),$$

получаем неравенство

$\varphi(\mathrm{x}) - \varphi(\mathrm{y}) \le (\varphi'(\mathrm{x}), \mathrm{x} - y) = (\varphi'(\mathrm{x}), s) = \left(\sum_{i\in\mathrm{I(x)}} u_i f_i'(\mathrm{x}), s\right) = \sum_{i\in\mathrm{I(x)}} u_i (f_i'(\mathrm{x}), s) \le 0,$

справедливое для любого y∈X

<u>Теорема 2 Кунна-Таккера (дифференцируемый случай)</u>: критерий оптимальности (объединение теоремы 1**§ 2.3.1.** и теоремы 1 **§ 2.4.**):

Если функции *fi(x)* вогнуты, функция φ(x) выпукла, множество $\mathrm{X} = \{\mathrm{x}: f_i(\mathrm{x}) \ge 0, i = \overline{1,m}\}$ регулярно по Слейтеру, то для оптимальности точки x∈X необходимо и достаточно существование таких чисел $u_i \ge 0, i = \overline{1,m}$, что

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i'(\mathrm{x}), \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathrm{x}) = 0$$

Доказательство:
Достаточно использовать теорему 7 **§ 1.3.1.**, точка локального минимума выпуклой функции

являются «оптимальной».
Случай линейных ограничений (теорема 3 **§ 2.3.2.** и теорема 1 **§ 2.4.** объединяются в критерий оптимальности)
Теорема 3: Для того, чтобы точка x была точкой глобального минимума выпуклой функции φ(x) на $X = \{x: (A_i, x) - b_i \geq 0, i = \overline{1,m}\}$
необходимо и достаточно существование таких чисел
что

$$\varphi'(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i A_i\,, \sum_{i=1}^{m} u_i((A_i, x) - b_i) = 0$$

Теорема 4: Для того, чтобы точка x∈X была точкой глобального минимума основной задачи выпуклого программирования достаточно, чтобы для всех s, удовлетворяющих системе
$(f_i'(x), s) \leq 0, i \in I(x), \quad (*)$
выполнялись условия $(\varphi'(x), s) \leq 0 \quad (**)$
Доказательство:
Применяя к условиям * и** теорему Фаркаша, приходим к условиям теоремы 1 **§ 2.4.**

§ 2.5. Функция Лагранжа. Условия оптимальности.

§ 2.5.1. Седловая точка.

Рассмотрим n-мерный вектор x∈ Γ — выпуклое множество, и m-мерный неотрицательный вектор y≥0. Пусть функция L(x,y) — выпукла по вектору x на множестве Γ и вогнута по y на неотрицательном ортанте.
Определение 1: Пара x*,y* называется «седловой точкой» функции L(x,y) на множестве всех x∈ Γ и y≥0, если x*∈ Γ , y*≥0 и $L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad (*)$
для любого x∈ ℘ и y≥0. Соотношение * можно записать также следующим образом:

$$L(x^*, y^*) = \min_{x\in\Gamma} \max_{y\geq 0} L(x, y) = \max_{y\geq 0} \min_{x\in\Gamma} L(x, y) \qquad (**)$$

§ 2.5.1. Условия существования седловой точки.

Достаточно рассмотреть случаи:
a) Γ={x:x≥0}
b) Γ=En

Пусть L(x,y) выпукло по x и вогнута по y для любого y≥0 и постоянно дифференцируема по x и y.
Теорема: Для того, чтобы пара x*, y* (x*≥0, y*≥0) была седловой точкой функции L(x,y) в области x≥0, y≥0, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} \geq 0 \quad ①\,, \quad \left(x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}\right) = 0 \quad ②\,, \quad x^* \geq 0 \quad ③$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y} \geq 0 \quad ④\,, \quad \left(y^*, \frac{\partial L^*}{\partial y}\right) = 0 \quad ⑤\,, \quad y^* \geq 0 \quad ⑥$$

где

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial(x,y)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x = x^* \\ y = y^*}}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial(x,y)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x = x^* \\ y = y^*}}$$

Доказательство:
Необходимость. Пусть выполняется * ли ** при Γ={x:x≥0}. Условия ① - ⑥ справедливы в координатной форме. Отметим, что условия ②, ⑤ эквивалентны в координатной форме
$x_i^* \frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0$ и $y_j^* \frac{\partial L^*}{\partial y_j} = 0, j = \overline{1,m}$ в силу ①, ③ и ④, ⑥. Из условий * - ** следует, что $L(x_i, y_i^*) = L(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*, y^*) \geq L(x^*, y_i^*)$ для любого $x \geq 0$
то есть точка x_i^* является точкой минимума выпуклой функции одной переменной L(x_i,y^*) на полупрямой x_i≥0. То есть условия ①[illegible]③ и являются необходимыми условиями минимума в частности нахождения минимума при x_i≥0 для функции одной переменной. Тогда либо $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} =$

0 при $x_i \ge 0$, либо $x_i^*=0$ и $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} \ge 0$
Аналогично для вогнутости L(x,y).
Достаточность. Пусть выполняются условия ①–⑥. Поскольку L(x,y) выпукла по x при x≥0, то, пользуясь неравенством теоремы 6 **§ 1.3.1.** : $(\varphi'(x), y - x) \le (\varphi(y) - \varphi(x))$
выпуклая функция, а именно $L(x, y^*) \ge L(x^*, y^*) + (x - x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x})$
Отсюда и из ①–③ получаем $L(x^*, y^*) \le L(x, y^*), x \ge 0$. Аналогично доказывается левое неравенство в *.
Если Г=En, то аналогичными рассуждениями можно убедиться, что седловая точка определяется условием: $\frac{\partial L^*}{\partial x} = 0$и соотношениями ④-⑥

§ 2.5.3. Функция Лагранжа.

Пусть F(x) — m-мерный вектор $F^T(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$
Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$\min\{\varphi(x) : x \in X\}, X = \{x \in \Gamma, F(x) \ge 0\}, \quad ①$$

здесь Г — выпуклое и замкнутое множество, φ(x) — выпуклая функция, а все $f_i(x)$ — вогнутые.
<u>Замечание:</u> При Г=En задача ① является основной задачей выпуклого программирования.
<u>Определение 1:</u> Функцию L(x,y)=φ(x)-(y,F(x)), определенную при любых x ∈En и y≥0, называют функцией Лагранжа для задачи выпуклого программирования.
<u>Замечание:</u>

a) В классическом анализе об условном экстремуме (задачи, в которых допустимое множество задается системой уравнений) важную роль играет метод «множителей Лагранжа»: решение ищется среди стационарных точек функции L(x,y) — точек, удовлетворяющих системе уравнений $\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$
b) В задачах выпуклого программирования (в частности, линейного программирования) функции Лагранжа также отводится важное место: при весьма общих предположениях задача выпуклого программирования сводится к отыскиванию седловых точек функции Лагранжа.

<u>Теорема «достаточные условия оптимальности»:</u> Если пара x*, y* является седловой точкой функции Лагранжа (Определение1) на множестве x ∈ Г и y≥0, то x* - оптимальная точка задачи выпуклого программирования.
Доказательство:
Из Определения 1 и Определения 1 «о седловой точки» **§ 2.5.1.** получаем неравенства:$\varphi(x^*) - (y, F(x^*)) \le \varphi(x^*) - (y^*, F(x^*)) \le \varphi(x) - (y^*, F(x)), \quad ②$
справедливые для любого x ∈ Г и y≥0. Из левого неравенства следует:

$$(y, F(x^*)) \ge (y^*, F(x^*)) \quad ③$$

а поскольку y*≥0 и это неравенство верно для любого y≥0, тогда F(x)≥0. В частности, ③ имеет место и для y=0, поэтому (y*, F(x*)≤0, а следовательно (так как y*≥0 и F(x*)≥0),
$(y^*, F(x^*)) = 0$ ④.
Если x∈X, то из ① следует, что F(x)≥0, и поэтому для для x∈X, будет (y*, F(x)≥0) ⑤
Так как неравенство ② выполняется для любого x ∈ Г и, в частности для x∈X, то из правого неравенства ② из ④ , ⑤ получаем для любого x∈X неравенства:

$$\varphi(x^*) \le \varphi(x) - (y^*, F(x)) \le \varphi(x)$$

Но x*∈X (так как x* ∈ Г и F(x*)≥0) и, следовательно, x* - оптимальная точка.
<u>Замечание:</u> При доказательстве теоремы не использовались ни свойства выпуклости функции φ(x) и множества Г, ни вогнутость F(x), ни какие-либо свойства гладкости. Таким образом, наличие седловых точек x*, y* функции Лагранжа определяют оптимальность x* для общей задачи математического программирования. Обратное условие верно лишь для

задачи выпуклого программирования. Вдобавок при условии регулярности допустимого множества. Это и есть известная точка Кунна-Таккера. Ниже точка Кунна-Таккера будет доказана в предположении непрерывной дифференцируемости функций φ(x) и f_i(x) как очевидное следствие теорем:

1. Кунна-Таккера (дифференцируемый случай) Теорема 2 **§ 2.4.**
2. Теорема существования седловой точки (**§ 2.5.2.**)

Повторим постановку задачи выпуклого программирования. Пусть допустимое множество задачи выпуклого программирования имеет вид: $X = \{\mathrm{x}: f_i(\mathrm{x}) \geq 0, i = \overline{1,m}, \mathrm{x} \geq 0\}$
и предполагаем, что выпуклая функция φ(x) и вогнутые функции *fi*(x) — непрерывно дифференцируемы.

<u>Теорема Кунна-Таккера:</u> Если в задачи выпуклого программирования

$$\min\{\varphi(\mathrm{x}): \mathrm{x} \in \mathrm{X}\},\ X = \{\mathrm{x}: f_i(\mathrm{x}) \geq 0, i = \overline{1,m}, \mathrm{x} \geq 0\}$$

множество X обладает свойством регулярности (первое условие) ④ из **§ 2.3.1.** (а именно для любой i=1,m существует такая точка x*i*∈X, что *fi*(x*i*)>0), то необходимым и достаточным условием оптимальности точки x*∈X является существование такой y*≥0, чтобы пара x*, y* являлась седловой точкой функции Лагранжа $L(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi(\mathrm{x}) - \big(y, F(\mathrm{x})\big)$ на множестве x≥0, y≥0.

<u>Доказательство:</u>

Достаточность: Следует из теоремы «достаточных условий» при Г={x:x≥0}.

Необходимость: Необходимо доказать эквивалентность условий

$$\varphi'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* f_i'(\mathrm{x}^*) + \sum_{j=1}^{n} v_j^* e_j \qquad ①$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* f_i(\mathrm{x}^*) = 0 \qquad ②$$

$$y_i^* \geq 0, \qquad i = \overline{1,m} \qquad ③$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^* \mathrm{x}_j^* = 0 \qquad ④$$

$$v_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad ⑤$$

которые эквивалентны условиям теоремы Кунна-Таккера (дифференцируемый случай), и условий теоремы «условия существования седловой точки» (**§ 2.5.2.**) для функции L(x,y):

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{x}} \geq 0 \quad ⑥\ , \quad \left(\mathrm{x}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{x}}\right) = 0 \quad (7), \qquad \mathrm{x}^* \geq 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{y}} \geq 0 \quad (9)\ , \quad \left(\mathrm{y}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{y}}\right) = 0 \quad (10), \qquad \mathrm{y}^* \geq 0 \quad (11)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{x}} = \varphi'(\mathrm{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} y_i^* f_i'(\mathrm{x}^*) \stackrel{\text{def}}{=} V$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{y}} = -\boldsymbol{F}(\mathrm{x}^*).$$

Тогда эквивалентность очевидна.

<u>Замечание:</u> Для основной задачи выпуклого программирования теорема Кунна-Таккера формулируется так: Если в основной задачи выпуклого программирования множество $X = \{\mathrm{x}: f_i(\mathrm{x}) \geq 0, i = \overline{1,m}\}$ обладает <u>свойством регулярности 1</u>, то необходимым и достаточным условием оптимальности точки x*∈X является существование такого y*≥0, чтобы пара x*, y* являлась седловой точкой функции Лагранжа на множестве x∈En и y≥0.

Это следует из теоремы 2 **§ 2.4.** и б) **§ 2.5.2.**

Случай линейных ограничений для теоремы Кунна-Таккера

Если функция φ(x) выпукла, а допустимое множество линейных ограничений $X = \{\mathrm{x} : (A_i, \mathrm{x}) - B_i \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ \mathrm{x} \geq 0\}$, то для оптимальность точки x*∈X необходимо и достаточно существование такого y*≥0, чтобы пара x*, y* являлась седловой точкой функции Лагранжа на множестве x≥0, y≥0.

Замечание: Теорема Кунна-Таккера лежит в основе теории двойственности математического программирования, она используется в численных методах математического программирования, то есть она позволяет исходную задачу заменить задачей отыскания седловой точки функции Лагранжа, то есть задачей вида:

$$\min_{\mathrm{x} \in \Gamma} \max_{y \geq 0} L(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$