© 2007-2020 BYVoid (Diary)

目录

- [有向图强连通分量]
- [Tarjan算法]

keyboard_arrow_up
网志 分类 标签 系列 归档 关于
language 正体版

目录

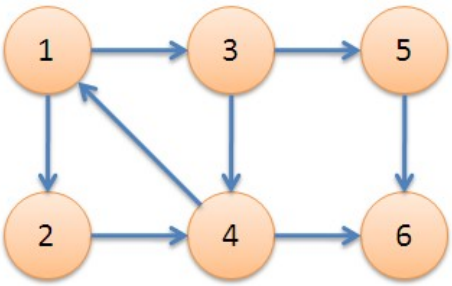
- [有向图强连通分量]
- [Tarjan算法]

有向图强连通分量的Tarjan算法
2009-04-15 07:56 *folder* [计算机科学] *language* 正体版

[有向图强连通分量]

在有向图G中，如果两个顶点间至少存在一条路径，称两个顶点**强连通**(strongly connected)。如果有向图G的每两个顶点都强连通，称G是一个**强连通图**。非强连通图有向图的极大强连通子图，称为**强连通分量**(strongly connected components)。

下图中，子图{1,2,3,4}为一个强连通分量，因为顶点1,2,3,4两两可达。{5},{6}也分别是两个强连通分量。



直接根据定义，用双向遍历取交集的方法求强连通分量，时间复杂度为O(N^2+M)。更好的方法是Kosaraju算法或Tarjan算法，两者的时间复杂度都是O(N+M)。本文介绍的是Tarjan算法。

[Tarjan算法]

Tarjan算法是基于对图深度优先搜索的算法，每个强连通分量为搜索树中的一棵子树。搜索时，把当前搜索树中未处理的节点加入一个堆栈，回溯时可以判断栈顶到栈中的节点是否为一个强连通分量。

定义DFN(u)为节点u搜索的次序编号(时间戳)，Low(u)为u或u的子树能够追溯到的最早的栈中节点的次序号。由定义可以得出，

```
Low(u)=Min
{
    DFN(u),
    Low(v),(u,v)为树枝边，u为v的父节点
    DFN(v),(u,v)为指向栈中节点的后向边(非横叉边)
}
```

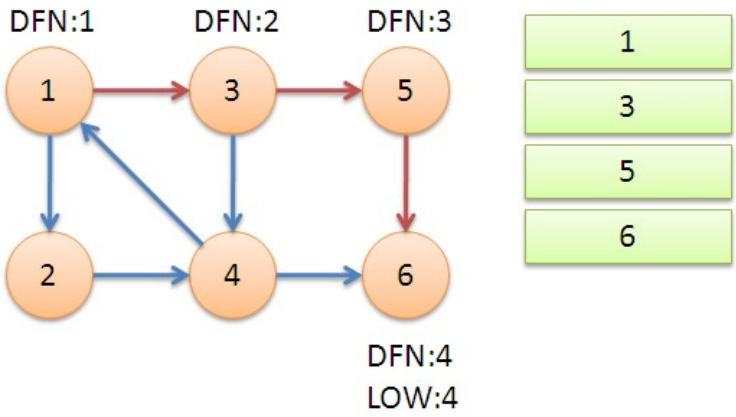
当DFN(u)=Low(u)时，以u为根的搜索子树上所有节点是一个强连通分量。

算法伪代码如下

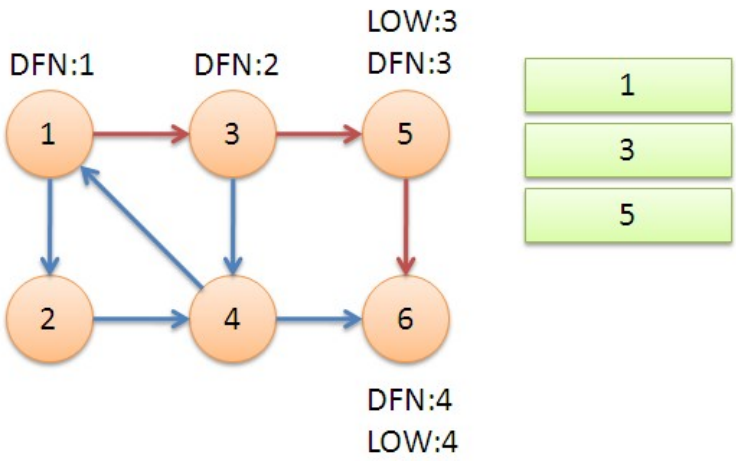
```
tarjan(u)
{
        DFN[u]=Low[u]=++Index                       // 为节点u设定次序编号和Low初值
        Stack.push(u)                               // 将节点u压入栈中
        for each (u, v) in E                        // 枚举每一条边
                if (v is not visted)                // 如果节点v未被访问过
                        tarjan(v)                   // 继续向下找
                        Low[u] = min(Low[u], Low[v])
                else if (v in S)                    // 如果节点v还在栈内
                        Low[u] = min(Low[u], DFN[v])
        if (DFN[u] == Low[u])                       // 如果节点u是强连通分量的根
                repeat
                        v = S.pop                   // 将v退栈，为该强连通分量中一个顶点
                        print v
                until (u== v)
}
```

接下来是对算法流程的演示。

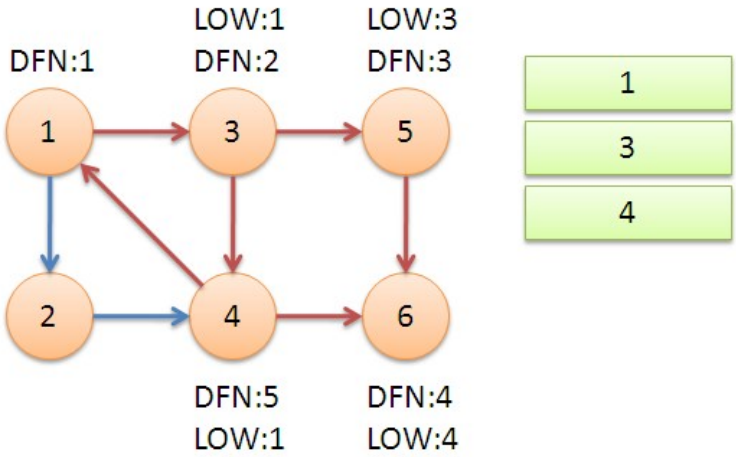
从节点1开始DFS，把遍历到的节点加入栈中。搜索到节点u=6时，DFN[6]=LOW[6]，找到了一个强连通分量。退栈到u=v为止，{6}为一个强连通分量。



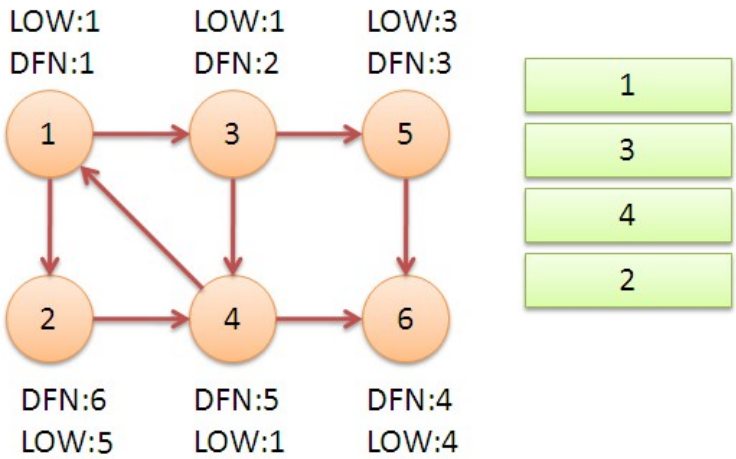
返回节点5，发现DFN[5]=LOW[5]，退栈后{5}为一个强连通分量。



返回节点3，继续搜索到节点4，把4加入堆栈。发现节点4向节点1有后向边，节点1还在栈中，所以LOW[4]=1。节点6已经出栈，(4,6)是横叉边，返回3，(3,4)为树枝边，所以LOW[3]=LOW[4]=1。



继续回到节点1，最后访问节点2。访问边(2,4)，4还在栈中，所以LOW[2]=DFN[4]=5。返回1后，发现DFN[1]=LOW[1]，把栈中节点全部取出，组成一个连通分量{1,3,4,2}。



至此，算法结束。经过该算法，求出了图中全部的三个强连通分量{1,3,4,2},{5},{6}。

可以发现，运行Tarjan算法的过程中，每个顶点都被访问了一次，且只进出了一次堆栈，每条边也只被访问了一次，所以该算法的时间复杂度为O(N+M)。

求有向图的强连通分量还有一个强有力的算法，为Kosaraju算法。Kosaraju是基于对有向图及其逆图两次DFS的方法，其时间复杂度也是O(N+M)。与Trajan算法相比，Kosaraju算法可能会稍微更直观一些。但是Tarjan只用对原图进行一次DFS，不用建立逆图，更简洁。在实际的测试中，Tarjan算法的运行效率也比Kosaraju算法高30%左右。此外，该Tarjan算法与求无向图的双连通分量(割点、桥)的Tarjan算法也有着很深的联系。学习该Tarjan算法，也有助于深入理解求双连通分量的Tarjan算法，两者可以类比、组合理解。

求有向图的强连通分量的Tarjan算法是以其发明者Robert Tarjan命名的。Robert Tarjan还发明了求双连通分量的Tarjan算法，以及求最近公共祖先的离线Tarjan算法，在此对Tarjan表示崇高的敬意。

附：tarjan算法的C++程序

```
void tarjan(int i)
{
	int j;
	DFN[i]=LOW[i]=++Dindex;
	instack[i]=true;
	Stap[++Stop]=i;
	for (edge *e=V[i];e;e=e->next)
	{
		j=e->t;
		if (!DFN[j])
		{
			tarjan(j);
			if (LOW[j]<LOW[i])
				LOW[i]=LOW[j];
		}
		else if (instack[j] && DFN[j]<LOW[i])
			LOW[i]=DFN[j];
	}
	if (DFN[i]==LOW[i])
	{
		Bcnt++;
		do
		{
			j=Stap[Stop--];
			instack[j]=false;
			Belong[j]=Bcnt;
		}
		while (j!=i);
	}
}
void solve()
{
	int i;
	Stop=Bcnt=Dindex=0;
	memset(DFN,0,sizeof(DFN));
	for (i=1;i<=N;i++)
		if (!DFN[i])
			tarjan(i);
}
```

[参考资料]

- Wikipedia
- Amber的图论总结

BYVoid 原创作品，转载请注明。

上次修改时间 2017-05-26

相关日志

- 图的割点、桥与双连通分支
- 有向树与树的括号序列最小表示法
- NOI 1997 解题报告
- POI 2001 Wandering flea trainers 跳舞蝇的教练
- POI 1998 追赶 Chase
- USACO MAR07 Silver Cow Traffic 奶牛交通
- USACO NOV07 Silver Cow Hurdles 奶牛跨栏
- USACO DEC07 Silver Building Roads 建造路径
- USACO JAN08 Silver Telephone Lines 架设电话线
- USACO JAN08 Silver Cow Contest 奶牛的比赛

下一篇
HAOI 2008 硬币购物 上一篇
次短路径与次小生成树问题的简单解法
label 图论 强连通分量 Tarjan 堆栈
© 2007-2020 BYVoid (Diary)