UNIDAD DIDÁCTICA

6 CIRCUITOS EN RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

La unidad 6 tiene como objetivo que comprendas la física de los circuitos lineales en régimen permanente sinusoidal, es decir, cuando están excitados por fuentes de tensión (o corriente) sinusoidal desde hace mucho tiempo. En particular, al finalizar esta unidad, deberás:

- Comprender el concepto de «régimen permanente sinusoidal».
- Entender el concepto de «impedancia» como una generalización del valor de la resistencia extendido a condensadores y bobinas.
- Saber manejar la representación compleja de la tensión, corriente e impedancia.
- Saber aplicar las reglas de asociación de impedancias.
- Resolver circuitos básicos en corriente alterna.
- Entender el concepto de «valor eficaz de la tensión» y «de la corriente».
- Calcular y comprender cómo se comporta la potencia en circuitos de corriente alterna.

1. INTRODUCCIÓN

La unidad 5 nos introdujo el concepto de «régimen» en el que podía funcionar un circuito lineal, y, desde la unidad 4, somos capaces de resolver circuitos en regímenes de corriente continua. Como su título indica, esta unidad nos va a llevar a comprender cómo funcionan los circuitos en corriente alterna y a poder resolverlos, al menos de manera básica. Supongo que el concepto de «corriente alterna», al igual que el de «corriente continua», es algo de lo que ya has oído hablar. Al fin y al cabo la energía eléctrica que se distribuye en la mayor parte del mundo llega a casa en forma de corriente alterna, de 220 *V* y 50 *Hz* en casi toda Europa.

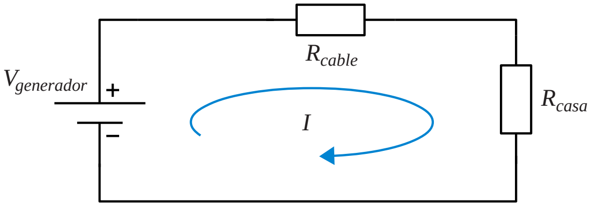
Como veremos formalmente más adelante, la corriente alterna, a diferencia de la corriente continua, es aquella en la que la tensión varía con el tiempo, pero lo hace de una manera particular: de forma sinusoidal. Nos podríamos hacer esta pregunta: ¿por qué es interesante complicarse la vida usando una corriente alterna que varía constantemente cuando podríamos usar una corriente continua que es constante con el tiempo? Esta misma pregunta se la podríamos hacer a Nikola Tesla y a Thomas Edison, que lo estuvieron discutiendo durante algún tiempo hace ya bastantes años.

1.1. FACILIDAD DE TRANSFORMACIÓN DE TENSIÓN. LA DISTRIBUCIÓN ELÉCTRICA

En realidad, la principal ventaja de la corriente alterna es simplemente que es muy sencillo cambiar su voltaje mediante unos dispositivos llamados «transformadores», que estudiaremos en la unidad 8. Así, es fácil tener una tensión de 220 *V* y transformarla en 440 *V* o 110 *V*. Hacer esto con corriente continua requiere de dispositivos muy complejos, en comparación, y que, además, son difíciles de construir cuando manejamos mucha potencia.

Si es fácil pasar de 220 *V* a, por ejemplo, 10000 *V*, y viceversa, ya tenemos un motivo para que la distribución de la electricidad se haga en alterna. Aunque aún no hemos resuelto ningún circuito en corriente alterna, el símil en corriente continua es perfectamente válido. Imagínate que quiero llevar energía eléctrica desde un sitio lejano, donde se produce, a mi casa. En el siguiente esquema hemos representado un modelo muy rudimentario de distribución de electricidad:

- El generador representa el lugar donde se genera la energía.
- La resistencia «cable» representa la resistencia de los cables y las líneas de transmisión mediante los cuales se distribuye la energía eléctrica.
- Por último, la resistencia «casa» representa, quizá, una bombilla o la vitrocerámica de un hogar.



Podemos suponer que en la casa queremos tener una potencia determinada para calentar la leche, quizá 2000 *W*.

Imaginemos ahora que pudiésemos elegir la tensión *V* del generador. Si elegimos una tensión baja, de 10 *V*, por ejemplo, el generador inyectará mucha corriente en la red, ya que:

$$P = V \cdot I \quad \rightarrow \quad I = \frac{2000}{10} = 200\ [A]$$

Por el contrario, si elegimos una tensión muy elevada, de 4000 *V*, por ejemplo, tendremos que la corriente vale:

$$P = V \cdot I \quad \rightarrow \quad I = \frac{2000}{4000} = 0.5\ [A]$$

En el primer caso, la resistencia de los cables de transmisión va a llevarse un montón de potencia, ya que, según la ley de Joule:

$$P_{cable} = R_{cable}\, I^2 = 4000000\, R_{cable}\ [W]$$

Mientras que, en el segundo caso:

$$P_{cable} = R_{cable}\, I^2 = 0.25\, R_{cable}\ [W]$$

En resumen, cuanto mayor sea la tensión a la que se transporta la energía eléctrica, menor será la pérdida en los cables y más eficiente se hará la distribución. Este es uno de los motivos fundamentales por los que la corriente alterna es la forma más habitual de transporte de energía eléctrica.

1.2. OTRAS VENTAJAS DE LA CORRIENTE ALTERNA

Otra ventaja es que, en general, por medios mecánicos es más fácil producir una tensión con forma sinusoidal que hacerla en forma de tensión continua. Por otra parte, el análisis de los circuitos en régimen de alterna nos permite estudiar características muy útiles, como, por ejemplo, su respuesta en frecuencia. Aunque no sea objeto de este manual, el análisis frecuencial es de gran importancia en ingeniería eléctrica y electrónica.

2. CIRCUITOS EN RPS

2.1. EL CONCEPTO DE «RPS»

Aunque ya lo introdujimos en la unidad anterior, vamos a definir qué es un «circuito en corriente alterna» o, más formalmente, un «circuito en régimen permanente sinusoidal» (RPS):

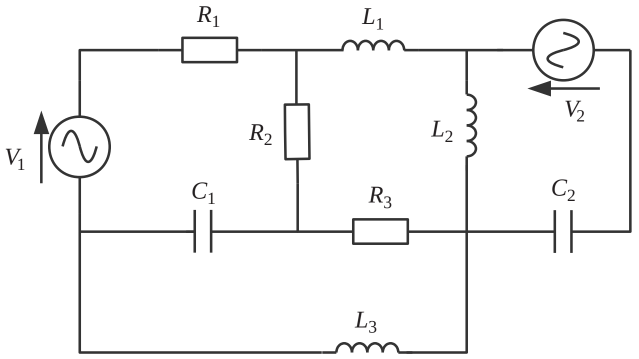
> Un circuito está en **RPS** cuando las fuentes que lo excitan, de tensión y corriente, generan excitaciones sinusoidales y además llevan una gran cantidad de tiempo en ese estado.

Esto significa dos cosas:

- Las fuentes de un circuito RPS no son constantes, sino que generan una tensión de forma sinusoidal. Veremos más detalles sobre qué significa esto un poco más adelante.
- El circuito lleva sometido a esta excitación una gran cantidad de tiempo, el suficiente como para que cualquier régimen transitorio se haya disipado totalmente.

2.2. ESTRUCTURA DE UN CIRCUITO EN RPS

Esta figura representa un circuito lineal de parámetros concentrados en RPS:



Como podemos ver en la figura, un circuito en RPS tiene la misma estructura general que veíamos en corriente continua y cuando lo analizamos en régimen transitorio. Como vamos a ver, la principal diferencia será que las fuentes ya no tienen la forma de una batería, sino que ahora generan tensiones y corrientes que tienen la forma matemática de una función seno o coseno, es decir, son sinusoidales.

Por lo demás, el análisis topológico de los circuitos que hicimos en la unidad 4 sigue siendo el mismo:

- Un nudo es donde convergen tres o más cables.
- Una rama es un conjunto de componentes conectados en serie.
- Una malla es un camino o conjunto cerrado de ramas.
- Una malla simple es una malla que no encierra ninguna rama en su interior.

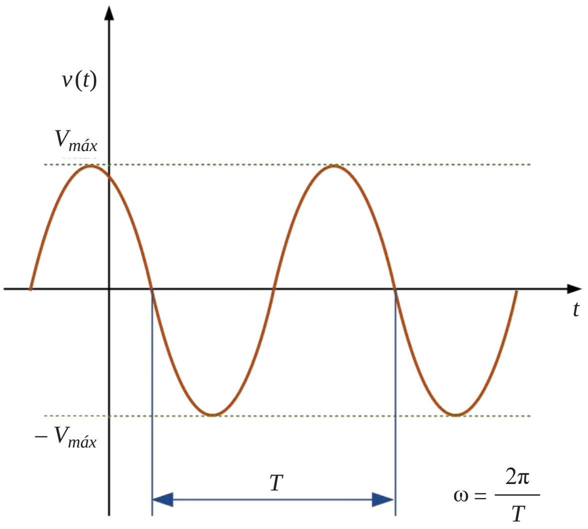
3. COMPONENTES DE UN CIRCUITO EN RPS

3.1. FUENTES EN UN CIRCUITO EN RPS

Como acabamos de ver, en un circuito en corriente alterna, las fuentes del mismo generan tensiones que tienen una forma sinusoidal. Pero ¿qué significa esto? Pues significa que, en lugar de generar una tensión continua, constante en el tiempo, generan una tensión que tiene una forma matemática así:

$$v_s(t) = V_{máx} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{o} \qquad v_s(t) = V_{máx} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Si dibujamos la tensión que genera esta fuente en el tiempo, tendremos algo como esto:



La tensión sinusoidal de la fuente ya no es un valor continuo o constante como en los circuitos de corriente continua. Ahora, la tensión que genera la fuente varía de forma continua con el tiempo y, además, lo hace de forma periódica y cambiando la polaridad o el sentido de la tensión en cada ciclo.

A la tensión sinusoidal también se la suele llamar «señal sinuosidal» y, a veces, sobre todo en otros contextos, un tono.

3.1.1. Parámetros clave de la señal sinusoidal

Fíjate que en la expresión matemática de la tensión en la fuente hay tres parámetros básicos, que también podemos observar en la gráfica:

- **Tensión de pico o amplitud.** Es la máxima tensión que genera la fuente. Solo se llega a ella en los máximos y mínimos de la sinusoide.

La denotamos matemáticamente como:

$$V_{máx}$$

y tiene unidades de voltios.

- **Pulsación o frecuencia angular de la fuente.** Nos indica cómo de rápido cambia la señal con el tiempo. Dicho de forma más precisa, la pulsación angular mide cuántos radianes avanza la función sinusoidal cada segundo.

  La denotamos matemáticamente como:

  $$\omega$$

  y tiene unidades de *rad*/*s*.

- **Desfase inicial de la fuente.** En general, la tensión de la fuente puede tener un valor diferente de 0 en el instante $t = 0$. Esto se modela como una fase inicial en la fuente y se denota matemáticamente con el símbolo:

  $$\varphi_0$$

  y tiene unidades de radianes. En este manual vamos a considerar que en general las fuentes generan una tensión con un desfase inicial de 0 radianes o de 0 grados sexagesimales.

Además de estos tres parámetros básicos, hay otros dos parámetros relacionados con la pulsación angular:

- **El periodo.** Es el tiempo que tarda la señal en repetirse a sí misma. Puesto que la función coseno (y la seno) son periódicas, con periodo 2π, el periodo de la señal de tensión será:

  $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

  y se mide en segundos.

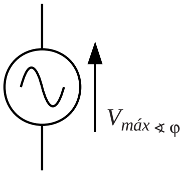
- **La frecuencia.** Es el número de veces que la señal sinusoidal se repite a sí misma por segundo o, lo que es lo mismo, el número de periodos que hay en un segundo. Está relacionada con el periodo y con la pulsación o frecuencia angular así:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

y se mide en ciclos por segundo o hercios, en honor a Hertz, que probó que Maxwell tenía razón y existían las ondas electromagnéticas.

3.1.2. Simbología de las fuentes en circuitos de alterna

Al contrario que con el resto de componentes pasivos de un circuito, las fuentes de un circuito de corriente alterna sí que cambian su dibujo. En este tipo de circuitos las dibujaremos así:



Este dibujo indica que tenemos una fuente sinusoidal de parámetros:

- Amplitud máxima de valor: $V_{máx}$.
- Fase inicial: φ.

La flecha apunta en un sentido, pero, como sabes, la tensión va cambiando de positiva a negativa pasando por 0 según va avanzando el tiempo. De esta forma, la flecha no puede indicarnos el signo de la tensión como lo hacía en circuitos de corriente continua. Entonces, ¿qué significa esta flecha? El sentido de la flecha nos indica cómo tendríamos que medir para que la señal tenga la fase inicial indicada. Si la fase de la tensión es 0, entonces, la flecha indica en qué sentido la señal es positiva en $t = 0$.

Importante. En el dibujo anterior no aparece en ningún momento la pulsación, o frecuencia angular, de la fuente de tensión. Cuando se analizan circuitos en RPS, se supone que **todas** las fuentes del circuito (si hay más de una) funcionan al mismo valor de ω. Como veremos más adelante, es posible analizar circuitos con fuentes con diferentes pulsaciones, aunque no es lo habitual.

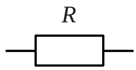
3.1.3. ¿Por qué usamos señales sinusoidales?

No sé si te habrás planteado la siguiente pregunta, pero creo que sería muy interesante que lo hicieras: **¿por qué los generadores en un circuito en RPS son sinusoidales y usan el coseno como expresión base?** Usar la función seno o la función coseno es irrelevante. En el fondo ambas funciones son la misma, pero con un desfase inicial de 90º. En realidad, la parte más interesante de la pregunta es la de por qué usamos señales sinusoidales en lugar de, por ejemplo, señales triangulares o rectangulares. La respuesta no es sencilla y no la vamos a demostrar aquí, pero sí que, al menos, la enunciaremos:

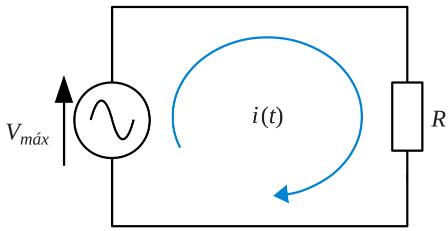
> En un sistema lineal, como los circuitos lineales, las señales sinusoidales son autovectores o autofunciones.

Esto quiere decir que si excitamos un circuito lineal, como veremos, con una señal sinusoidal, la respuesta del circuito será otra señal sinusoidal en la que puede que cambie su amplitud y su fase, pero que seguirá siendo sinusoidal de la misma frecuencia. Sin embargo, si excitamos un circuito lineal con una señal triangular, el resultado será indeterminado y, en general, será una señal no triangular.

3.2. RESISTENCIAS EN RPS



Una resistencia en RPS se comporta igual que en continua. Al fin y al cabo la expresión que relaciona la tensión y la corriente en ella es la ley de Ohm, que es una simple regla proporcional, y ya vimos que se comportaban así en régimen transitorio, ¿verdad? Así es, y de esta forma podemos calcular la corriente en una resistencia, dada una tensión alterna. A continuación vamos a resolver el siguiente circuito elemental en RPS:



En este caso, tenemos una fuente de tensión alterna con desfase inicial 0, cuya expresión será, por tanto:

$$v(t) = V_{máx} \cos(\omega t)$$

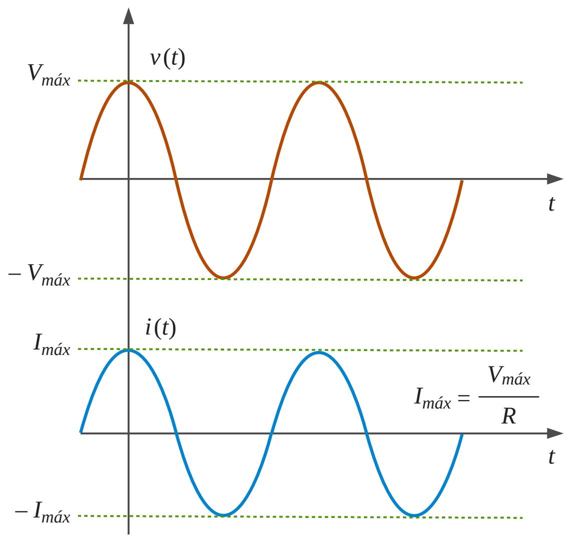
Entonces, la corriente que circula por la resistencia será:

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad \rightarrow \quad i(t) = v\,\frac{(t)}{R}$$

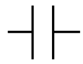
Por lo tanto:

$$i(t) = \frac{V_{máx}}{R} \cos(\omega t)$$

Es decir, la tensión y la corriente en una resistencia siguen una regla proporcional muy sencilla, que ya conocíamos: la ley de Ohm. La tensión y la corriente en una resistencia tienen la misma forma en el tiempo, salvo por la amplitud máxima. Si dibujamos ambas señales, tendremos lo siguiente:



3.2.1. Condensadores en RPS



Si ya vimos cómo en los transitorios los condensadores tenían un comportamiento diferente al del régimen permanente en continua, es de esperar que también tengan un comportamiento particular cuando los analizamos en RPS. Y así es. Como ya sabemos, en un condensador, la carga acumulada depende de la tensión en sus bornes:

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

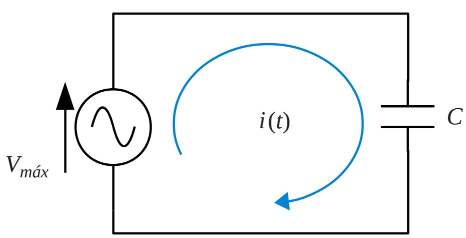
Si derivamos a ambos lados con respecto al tiempo, tendremos:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Como definimos en la unidad 4, la derivada de la carga por la unidad de tiempo es la corriente. Con esta definición, como ya sabíamos, la relación que hay entre la tensión y la corriente (*I*-*V*) en un condensador tiene la siguiente forma:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

En nuestro análisis RPS, la tensión con la que excitamos el condensador es una fuente sinusoidal, y, por lo tanto, podemos deducir dos cosas: que la derivada de esta tensión no será 0 y que va a circular una corriente a través del condensador. Vayamos paso a paso y resolvamos este circuito elemental:



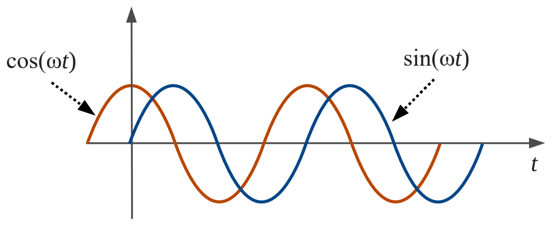
Como el desfase inicial de la fuente no está indicado, podemos asumir que vale 0º. Por lo tanto, la expresión de la tensión que excita el circuito es:

$$v(t) = V_{máx} \cos(\omega t)$$

Si calculamos la corriente según la relación *I-V* del condensador, tendremos:

$$i(t) = C \frac{d(V_{máx} \cos(\omega t))}{dt} = -C\, V_{máx}\, \omega \cdot \sin((\omega t)$$

Como dijimos anteriormente, en realidad, el seno y el coseno son la misma función, solo que una desfasada 90º con respecto a la otra. En esta gráfica hemos dibujado un seno y un coseno de la misma frecuencia y amplitud:



Simplemente, observando la figura, podemos deducir que:

$$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$$

O también:

$$\cos(\omega t - \pi/2) = -\sin(\omega t)$$

Usando esta última expresión, podemos reescribir la corriente en el condensador:

$$i(t) = \omega\, C\, V_{máx} \cos(\omega t + \pi/2)$$

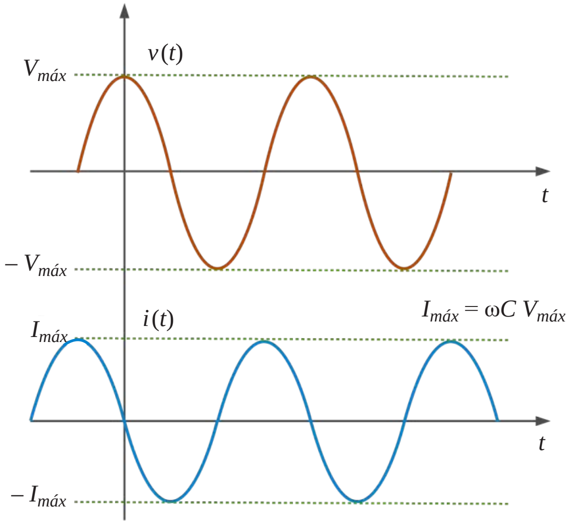
Es decir, la tensión y la corriente en un condensador en régimen permanente sinusodial siguen las siguientes reglas:

- La corriente tiene una amplitud que vale:

$$I_{máx} = \omega C \, V_{máx}$$

- La corriente está desfasada + 90º con respecto a la tensión, es decir, la corriente va 90º adelantada a la tensión.
- Lo anterior se puede decir de otra forma: la tensión está desfasada – 90º con respecto a la corriente. Es decir, la tensión va con un retraso de 90º con respecto a la corriente.

Si dibujamos ambas señales, tendremos lo siguiente:



Resumen

En un condensador en RPS la corriente y la tensión son ambas sinusoidales. La corriente tiene una amplitud máxima proporcional a la tensión máxima, a la pulsación y a la capacidad, y la corriente va adelantada 90º a la tensión y tiene esta expresión:

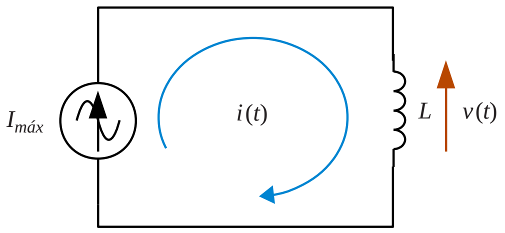
$$i(t) = \omega C \, V_{máx} \cos(\omega t + \pi/2)$$

3.2.2. Bobinas en RPS

Si los condensadores se comportan de manera particular en RPS, las bobinas, que son sus componentes duales, también tendrán un comportamiento equivalente en alterna. Antes de nada, vamos a recordar cuál es la relación que hay entre la corriente y la tensión en una bobina:

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

Es decir, en una bobina, la tensión que aparece en sus bornes es proporcional a la derivada de la corriente que la atraviesa y a la inductancia *L*. Por simplificar los cálculos, vamos a resolver el mismo circuito que antes, pero, en lugar de usar una fuente de tensión, usaremos una fuente de corriente. Las vimos hace dos unidades y las hemos usado poco, pero resultan muy útiles para hacer los cálculos más sencillos en este ejemplo:



En este caso, lo que tenemos es una fuente que genera una corriente, que es:

$$i(t) = I_{máx}\cos(\omega t)$$

Puesto que conocemos la forma que tiene la corriente por la bobina, podemos calcular cuál es la tensión que aparece en la bobina. Solo tenemos que aplicar la relación *I-V*, que ya conocemos, y:

$$v(t) = L\,\frac{d(I_{máx}\cos(\omega t))}{dt} = -\,I_{máx}\,L\omega \cdot \sin(\omega t)$$

Siguiendo la misma regla del seno/coseno que usamos en el caso del condensador, que es esta:

$$\cos(\omega t - \pi/2) = -\sin(\omega t)$$

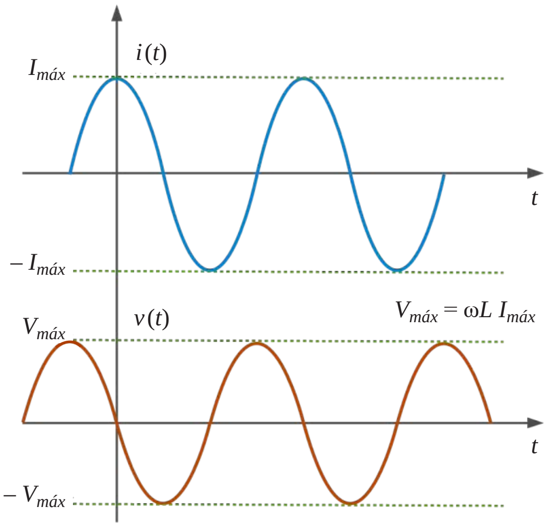
podemos reescribir la tensión en la bobina como:

$$v(t) = \omega L\, I_{máx} \cos(\omega t + \pi/2)$$

Es decir, la tensión y la corriente en una bobina en RPS siguen las siguientes reglas:

- La tensión tiene una amplitud que vale $V_{máx} = \omega L\, I_{máx}$.
- La tensión está desfasada + 90º con respecto a la corriente, es decir, la tensión va 90º adelantada a la corriente.
- Lo anterior se puede decir de otra forma: la corriente está desfasada – 90º con respecto a la tensión. Es decir, la corriente va con un retraso de 90º con respecto a la tensión.

Si dibujamos ambas señales, tendremos lo siguiente:



Resumen

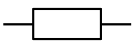
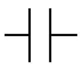
En una bobina en RPS la corriente y la tensión son ambas sinusoidales. La tensión tiene una amplitud máxima proporcional a la corriente máxima, a la pulsación y a la inductancia, y la tensión va adelantada 90º a la corriente y tiene esta expresión:

$$v(t) = \omega L\, I_{máx} \cos(\omega t + \pi/2)$$

Al igual que cuando estudiamos el régimen transitorio, la bobina en RPS se comporta de forma simétrica al condensador: cuando se sustituye tensión por corriente y capacidad por inductancia, se llega a las mismas ecuaciones.

3.3. CUADRO-RESUMEN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS COMPONENTES PASIVOS EN RPS

Este cuadro resume el comportamiento de los tres componentes pasivos que acabamos de explicar cuando los analizamos en RPS:

Componente	Parámetro característico	Relación I/V	Relación de amplitudes	Desfase I/V
Resistencia R 	Resistencia (ohmios)	$v(t) = R\, i(t)$	$V_{máx} = R\, I_{máx}$	En fase
Condensador C 	Capacidad (faradios)	$i(t) = C \dfrac{dv(t)}{dt}$	$I_{máx} = \omega C\, V_{máx}$	Corriente + 90º
Bobina L 	Inductancia (henrios)	$v(t) = L \dfrac{di(t)}{dt}$	$V_{máx} = \omega L\, I_{máx}$	Tensión + 90º

4. INTERLUDIO: BREVE RECORDATORIO DE NÚMEROS COMPLEJOS

Como veremos en el siguiente apartado, los números complejos van a ser una herramienta muy poderosa para resolver circuitos en RPS. Por ello, y, antes de nada, vamos a revisar muy brevemente los conceptos básicos.

4.1. EL CONCEPTO DE «NÚMERO COMPLEJO»

Los matemáticos inventaron los números complejos porque necesitaban, entre otras cosas, poder resolver ecuaciones que parecían muy sencillas, pero que, en realidad, no lo eran, como esta:

$$z^2 + 1 = 0$$

Si despejamos la incógnita, nos queda que:

$$z = \sqrt{-1}$$

Esta ecuación no tiene solución en la recta de los números reales. No hay ningún número real que elevado al cuadrado dé – 1.

Para poder resolver esta ecuación, nos inventamos un número, la unidad imaginaria, que se define así:

$$i = \sqrt{-1}$$

Aunque en matemáticas a esta unidad se la llama *i*, nosotros, por evitar problemas con las corrientes, la llamaremos *j* y, por tanto, la definiremos así:

$$j = \sqrt{-1}$$

Y, de esta forma, la solución a la ecuación que planteábamos al comienzo, simplemente, es:

$$z = \pm j$$

4.2. PARTES DE UN NÚMERO COMPLEJO: EL PLANO COMPLEJO

A diferencia de un número real, que solo tiene una parte, la parte real, un número complejo, en general, tiene dos partes: la parte real y la parte imaginaria. Si tenemos un número complejo *z*, podemos escribirlo así:

$$z = x + j\,y$$

En este caso, tenemos que la parte real del número complejo es:

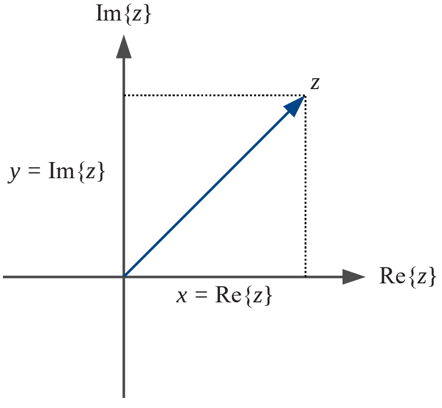
$$x = \mathrm{Re}\{z\} = \Re\{z\}$$

Y la parte imaginaria del número complejo es:

$$y = \mathrm{Im}\{z\} = \Im\{z\}$$

Cuando la parte real de un número complejo es 0, decimos que el número es imaginario puro, pues solo tiene parte imaginaria. Por otra parte, cuando la parte imaginaria de un número complejo es 0, en realidad es equivalente a un número real.

Los número reales se pueden representar gráficamente como una recta: la recta real. Como un número complejo está representado por dos componentes, la real y la imaginaria, podemos dibujar los números complejos como puntos en un plano: el plano complejo. El plano complejo tiene dos rectas o ejes: la recta real, que ya conocemos, y, por convenio, perpendicular a esta, la recta imaginaria. Así:



En la figura hay dibujado un número complejo z con sus partes real x e imaginaria y en los ejes de las rectas real e imaginaria.

Aunque no sea crítico para nuestro análisis de circuitos, hay una cosa interesante que ocurre con los números complejos: los números reales son ordenables, esto es, podemos decir si un número es mayor que otro, y, por tanto, tienen un orden en la recta de los reales. Por el contrario, los números complejos son un conjunto no ordenado: al tener dos partes, no podemos establecer un orden entre ellos.

4.3. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS: MÓDULO Y ARGUMENTO

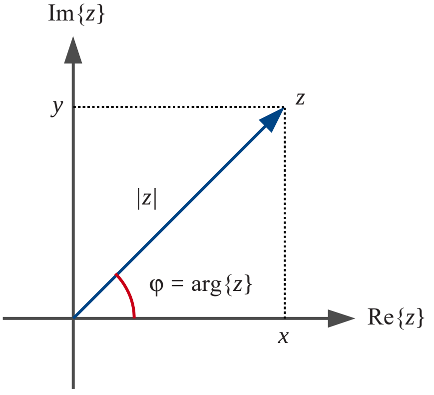
4.3.1. Forma binómica

Esta es la forma en la que hemos presentado los números complejos: $z = x + j\,y$.

A esta forma se la denomina «forma binómica» o «forma rectangular» de un número complejo. Es una forma muy natural de representar los complejos y nos permite calcular directamente la parte real e imaginaria sin tener que hacer ninguna operación.

4.3.2. Módulo-argumento

Ahora bien, no es la única forma que tenemos de representar los complejos. Si volvemos a la figura del plano complejo, podemos deducir otra manera de escribir estos números que nos va a resultar muy útil:



En la figura hemos definido dos valores que representan el número complejo, haciendo un símil con un vector de dos dimensiones:

- **El módulo del número complejo.** Es la longitud del segmento que va desde el origen de coordenadas hasta el número complejo. Podemos calcular su valor simplemente haciendo uso del teorema de Pitágoras:

$$|z| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

- **El argumento del número complejo.** Es el ángulo que forma el número complejo con el eje x. Muchas veces, al argumento lo llamaremos también «fase». Podemos calcular su valor haciendo uso de la arcotangente. Si tenemos un número del primer cuadrante, su argumento es:

$$\varphi = \arg\{z\} = \text{artcan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Esto, automáticamente, nos acaba de dar otra forma de representar un número complejo, haciendo uso del módulo y del argumento del número: $z = |z|_{\measuredangle\varphi}$. A esta representación se la llama «módulo-argumental» o también «forma polar de un complejo».

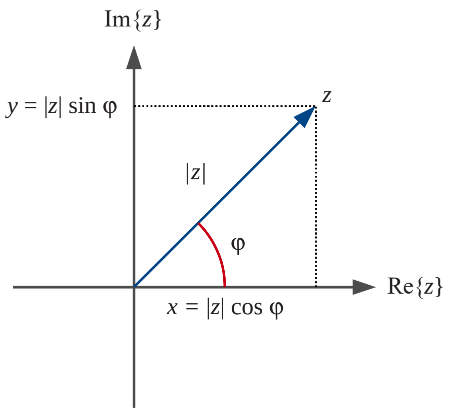
4.3.3. Otras formas de representación

Existen otras formas matemáticas de representar un número complejo, como la trigonométrica o la exponencial, pero al final todas ellas hacen uso de los cuatro conceptos básicos que acabamos de ver:

- Parte real y parte imaginaria.
- Módulo y argumento.

4.3.4. Cambio de forma módulo-argumental a binómica

Si nos fijamos de nuevo en el diagrama en el que dibujamos un número complejo z y sus componentes, podemos deducir las relaciones que hay entre los parámetros de las formas de representación:



Si tenemos un número complejo en representación en módulo-argumento $z = |z|_{\measuredangle\varphi}$, para pasar la representación en forma binómica, solo tenemos que hacer:

$$x = |z| \cos \varphi \qquad y = |z| \sin \varphi$$

Por tanto:

$$z = |z| \cos \varphi + j|z| \sin \varphi$$

Por otra parte, si queremos extraer la parte real o imaginaria de un número complejo en forma módulo-argumento, solo tenemos que usar esas expresiones:

$$\mathrm{Re}\{z\} = |z| \cos \varphi \qquad \mathrm{Im}\{z\} = |z| \sin \varphi$$

4.3.5. Cambio de forma binómica a módulo-argumental

Si tenemos un número complejo en forma binómica $z = x + j\, y$, calcular el módulo de un número complejo a partir de la forma binómica es sencillo.

Ya lo hemos visto antes y solo requiere usar el teorema de Pitágoras:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para calcular el argumento tenemos que usar la función arcotangente y, además, tener en cuenta en qué cuadrante está el número. Si expresamos el argumento en radianes, tendremos:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan (y/x) & x > 0 \\ \arctan (y/x) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan (y/x) - \pi & y < 0, x < 0 \\ \pi/2 & y > 0, x = 0 \\ -\pi/2 & y < 0, x = 0 \end{cases}$$

4.4. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

4.4.1. Suma y resta

Se define la operación suma de dos números complejos como:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$$

Dicho de otra forma: cuando sumamos dos complejos, sumamos por un lado sus partes reales y por el otro sus partes complejas.

La operación resta es igual, solo que cambiando de signo el segundo operando:

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2)$$

¿Cómo se suman dos complejos si los tenemos en la forma módulo-argumento? En general, directamente no se puede, salvo que tengan el mismo argumento. En primer lugar, hay que transformarlos a su forma binómica.

4.4.2. Multiplicación

De la misma manera que definimos la suma, podemos definir la multiplicación de los números complejos así:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + j\, y_1) \cdot (x_2 + j\, y_2)$$

Recordemos que:

$$j \cdot j = j^2 = -1$$

De esta forma, podemos operar multiplicando término a término:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + j\,y_1) \cdot (x_2 + j\,y_2) = x_1\,x_2 - y_1\,y_2 + j(x_1\,y_2 + y_1\,x_2)$$

Ahora bien, si tenemos los números complejos en forma módulo-argumento, la multiplicación se vuelve algo muy sencillo:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|_{\measuredangle \varphi_1 + \varphi_2}$$

Dicho de otra forma: los módulos se multiplican y los argumentos o fases se suman.

4.4.3. División

Si la multiplicación en forma módulo argumental era sencilla, la división sigue la misma regla:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|_{\measuredangle \varphi_1 + \varphi_2}$$

Dicho de otra forma: los módulos se dividen y los argumentos o fases se restan.

También podríamos haber definido la división en la forma binómica, pero, como la multiplicación, requiere de más pasos.

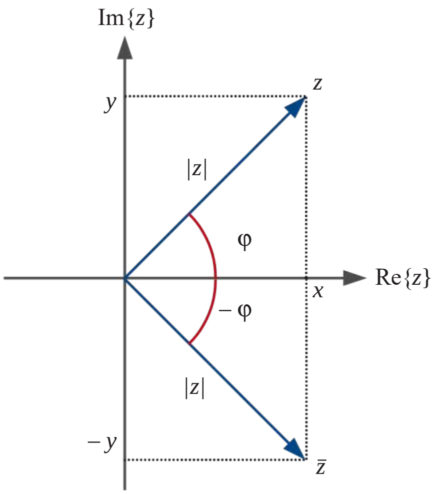
4.4.4. El conjugado de un número complejo

El conjugado de un número complejo se denota con una barra encima del número o, a veces también, con un asterisco y se define en la forma binómica así:

$$z = x + j\,y \qquad \rightarrow \qquad \overline{z} = z^{*} = x - j\,y$$

Es decir, el conjugado de un número complejo es el mismo número con la parte imaginaria cambiada de signo.

Gráficamente, un número complejo y su conjugado se representan así:



Simplemente observando el gráfico es posible deducir que, si tenemos un complejo en la forma módulo-argumento, podemos calcular su conjugado haciendo la siguiente operación:

$$z = |z|_{\measuredangle\varphi} \qquad \rightarrow \qquad \bar{z} = z^* = |z|_{\measuredangle -\varphi}$$

Esta expresión nos dice lo siguiente: el conjugado de un número complejo z es otro número complejo del mismo módulo y con la fase o el argumento cambiado de signo.

Una aplicación útil del conjugado es que nos permite calcular el módulo de un número complejo haciendo uso de su conjugado. Así:

$$|z|^2 = z \cdot z^* \qquad \rightarrow \qquad |z| = +\sqrt{z \cdot z^*}$$

Y, por último, si tenemos dos números complejos y queremos calcular la diferencia de argumentos que hay entre ellos, podemos usar el conjugado de uno de ellos y extraer el argumento del producto de ambos:

$$\Delta\varphi = \arg\{z_1 \cdot z_2^*\}$$

Por cierto, fíjate que el conjugado de un número real es él mismo.

4.4.5. Inverso y opuesto

El inverso de un número complejo se puede calcular así:

$$z = |z|_{\measuredangle\varphi} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{|z|}\right)_{\measuredangle -\varphi}$$

El opuesto de un número complejo simplemente es:

$$z = |z|_{\measuredangle\varphi} = (x + j\,y) \quad \rightarrow \quad -z = |z|_{\measuredangle\varphi+\pi} = (-x - j\,y)$$

5. TENSIONES Y CORRIENTES EN RPS COMO NÚMEROS COMPLEJOS

Antes de seguir con el comportamiento físico de los circuitos en RPS, vamos a detenernos a estudiar un «artefacto» matemático que nos va a resultar muy útil de aquí en adelante: representar las tensiones y corrientes como números complejos cuando estamos en circuitos en corriente alterna.

5.1. PARÁMETROS FUNDAMENTALES DE LAS SEÑALES SINUSOIDALES (DE NUEVO)

Recapitulemos. ¿Cuáles son los parámetros que definían una tensión o corriente en RPS? Son los tres parámetros que definen una función sinusoidal:

- Frecuencia angular o pulsación: ω.
- Amplitud máxima o valor de pico (o simplemente amplitud): $V_{máx}$ o $I_{máx}$.
- Fase inicial o fase en el origen: φ_0.

Simplemente hay que recordar cómo son las expresiones en el tiempo de las señales sinusoidales:

$$v(t) = V_{máx} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{e} \qquad i(t) = I_{máx} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

O, también, usando senos en lugar de cosenos:

$$v(t) = V_{máx} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{e} \qquad i(t) = I_{máx} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Además, también hemos dicho que, por simplicidad, vamos a considerar que en nuestro análisis todas las fuentes de un circuito van a tener la misma frecuencia. Por lo tanto, y de forma práctica, en los análisis en RPS que hagamos podemos afirmar que:

> En RPS, una tensión o corriente están totalmente determinados por dos valores: su amplitud máxima y su fase en el origen.

5.2. FUNCIONES SINUSOIDALES Y NÚMEROS COMPLEJOS

Vamos a centrarnos por un momento en una tensión alterna de la forma matemática:

$$v(t) = V_{máx} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Asumiendo que todas las fuentes de nuestro circuito son de la misma pulsación angular, acabamos de ver que esta señal está totalmente caracterizada por dos valores: amplitud máxima y fase en el origen.

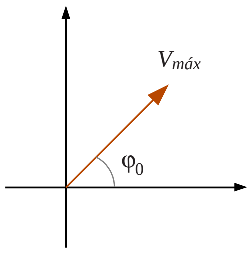
Si lo pensamos bien, estos dos parámetros son los mismos que determinan completamente un número complejo: módulo y argumento. Es decir, podemos expresar de forma precisa nuestra señal $v(t)$ como un número complejo de módulo $V_{máx}$ y de argumento φ_0. Enseguida verás por qué, además de precisa, es una forma conveniente.

Un número complejo se puede dibujar en el plano complejo así:

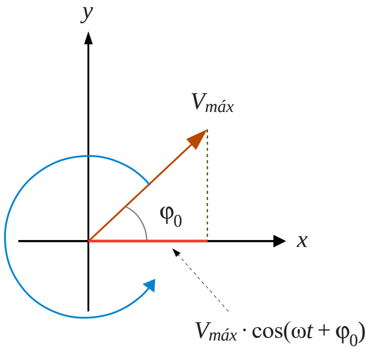
$$v(t) = V_{máx} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Downarrow$$

$$V = V_{máx} \measuredangle \varphi_0 \quad \Rightarrow$$



Además, si nos imaginamos ahora que el vector que representa el número complejo gira con una velocidad angular ω, su proyección sobre el eje *x* representa, directamente, la tensión $v(t)$. Fíjate en la siguiente figura:



Para simplificar la notación, en lugar de usar las expresiones en el tiempo de las funciones sinusoidales, usaremos números complejos para representar las tensiones y las corrientes. Así:

$$v(t) = V_{máx} \cos(\omega t + \varphi_0) \;\rightarrow\; V = V_{máx \measuredangle \varphi_0} \qquad i(t) = I_{máx} \cos(\omega t + \varphi_0) \;\rightarrow\; I = I_{máx \measuredangle \varphi_0}$$

En algunos textos podrás encontrar que, cuando un número complejo está representando una tensión o corriente en RPS, al número se le pone una raya debajo (o incluso encima). Así:

$$\underline{V} = \overline{V} = V_{máx \measuredangle \varphi_0} \qquad \underline{I} = \overline{I} = I_{máx \measuredangle \varphi_0}$$

5.2.1. Cambio de formato

En algunos problemas nos pedirán que expresemos la función en el tiempo después de haber hecho los cálculos usando números complejos. Pasar de formato complejo a una expresión temporal simplemente requiere identificar los tres parámetros que definen una función sinusoidal:

- **Amplitud máxima.** Es el módulo del número complejo.
- **Fase en el origen.** Es el argumento del número complejo.
- **Pulsación angular.** El número complejo no tiene una pulsación angular, pero en el problema nos la habrán indicado como dato.

Entonces, si tenemos el número complejo I o V, que representa la tensión o la corriente, podemos escribir:

$$i(t) = |I| \cos(\omega t + \varphi_i) \qquad \text{o} \qquad v(t) = |V| \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Si los números I y V están expresados en forma módulo-argumento, no tenemos mucha dificultad, pues ya sabemos su módulo y su fase directamente. En cambio, si los números están en forma binómica, habrá que pasarlos a notación módulo-argumento, en primer lugar, que es lo mismo que calcular su módulo y su fase previamente.

Importante. Si tenemos las fases expresadas en grados, como será bastante habitual cuando trabajemos con complejos, antes de pasar a la notación en el tiempo es necesario convertir los valores de las fases a radianes:

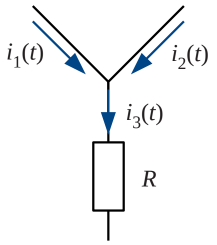
$$\varphi_{rad} = \frac{\pi}{180} \varphi^{o}$$

5.3. OPERACIONES CON FUNCIONES SINUSOIDALES

Está claro que la notación compleja es muy útil, ya que nos ahorra escribir constantemente las expresiones temporales de tensión y corriente. En realidad, la notación compleja es mucho más importante por otro motivo: nos va a ahorrar mucho tiempo y esfuerzo al hacer cálculos y operaciones. Voy a ponerte dos ejemplos muy sencillos en los que verás cómo la notación en complejos nos resulta muy fácil.

5.3.1. Suma de dos corrientes

En primer lugar, vamos a imaginarnos que tenemos dos corrientes que confluyen en un nudo, como en la siguiente figura:



$$i_1(t) = 3 \cdot \cos(\omega t + \pi/4)$$
$$i_2(t) = 5 \cdot \cos(\omega t + 3\pi/4)$$

¿Cuánto vale la corriente $i_3(t)$ que circula por la resistencia R? Aplicando la ley de Kirchhoff para los nudos sabemos que simplemente es la suma de ambas:

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) = 3 \cdot \cos(\omega t + \pi/4) + 5 \cdot \cos(\omega t + 3\pi/4)$$

Para realizar esta suma, tenemos que descomponer ambos cosenos en el coseno de la suma de dos ángulos, agrupar, sumar y volver a reagrupar. Nos llevaría un buen rato de operaciones con funciones trigonométricas.

Ahora bien, tenemos una buena alternativa: usar la notación de complejos y hacer la suma directamente como dos números complejos. Simplemente haremos:

$$I_3 = 3_{\sphericalangle\pi/4} + 5_{\sphericalangle 3\pi/4}$$

Para hacer esta suma, o usamos una calculadora que sume complejos o pasamos ambos números complejos a su forma rectangular (binómica) y sumamos parte real e imaginaria:

$$I_1 = 3(\cos(\pi/4) + j \cdot \sin(\pi/4)) = \frac{3}{\sqrt{2}} + j\,\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$I_2 = 5(\cos(3\pi/4) + j \cdot \sin(3\pi/4)) = \frac{-5}{\sqrt{2}} + j\,\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{-2}{\sqrt{2}} + j\,\frac{8}{\sqrt{2}}$$

Si pasamos ese número a forma polar (voy a usar grados por simplificar), tendríamos:

$$I_3 \simeq 5.83_{\sphericalangle 104.03^{o}}$$

Es decir, la corriente I_3 tiene una amplitud máxima de 5.83 A y un desfase en el origen de 104.03º. Podemos escribir la expresión de la corriente suma en el tiempo así:

$$i_3(t) \simeq 5.83 \cos(\omega t + 104.03\,\frac{\pi}{180})[A]$$

5.3.2. Desfase y multiplicación

Ahora imagínate que tenemos una tensión $V = 5_{\sphericalangle 30º}$ que queremos desfasar 90º y dividir su amplitud entre 2. Usar la notación de números complejos nos permite simplemente multiplicar, ya que los módulos se multiplican y las fases se suman. Así:

$$V \cdot 0.5_{\sphericalangle 90º} = 5 \cdot 0.5_{\sphericalangle 30º+90º} = 2.5_{\sphericalangle 120º}$$

6. LEY DE OHM GENERALIZADA: LA IMPEDANCIA ELÉCTRICA

Por fin hemos llegado al asunto central del análisis en RPS: vamos a generalizar la ley de Ohm. En primer lugar, vamos a recordar qué nos dice la ley de Ohm tal y como la conocemos: en una resistencia de valor *R*, la tensión y la corriente tienen una relación proporcional. Así:

$$V = R \cdot I$$

La pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿podemos deducir una ley similar para los condensadores y las bobinas cuando funcionan en RPS? Afortunadamente sí.

6.1. IMPEDANCIA DE UN CONDENSADOR

Hace un par de apartados dedujimos cuál era la relación entre la tensión y la corriente en un condensador cuando funcionaba en corriente alterna. Era esta:

$$i(t) = \omega C \, V_{máx} \cos(\omega t + \pi/2)$$

Esta expresión nos dice lo siguiente: la corriente que pasa a través de un condensador en RPS es la tensión desfasada 90º y multiplicada por la capacidad y la pulsación angular.

¿Qué te parece si escribimos la tensión y la corriente en forma de número complejo? Si nuestra tensión es de valor *V*, entonces, nuestra corriente será:

$$I = \omega C \, V_{\sphericalangle 90º}$$

Esto mismo lo podemos reescribir como:

$$I = (\omega C)_{\sphericalangle 90^{\circ}} V \rightarrow V = \frac{1}{(\omega C)_{\sphericalangle 90^{\circ}}} \cdot I$$

Casi sin darnos cuenta, acabamos de establecer una relación de proporcionalidad entre la tensión y la corriente. Eso sí, de proporcionalidad compleja. En electricidad, al factor de proporcionalidad se le llama «impedancia del condensador» y se le denomina «*Z*». Así:

$$Z = \frac{1}{(\omega C)_{\sphericalangle 90^{\circ}}} = \frac{1}{j\,\omega C}$$

Y, por tanto, la relación entre la tensión y la corriente del condensador es:

$$V = Z \cdot I$$

Y hemos dado con ello: acabamos de generalizar la ley de Ohm para el caso de un condensador. Es decir, en un condensador sometido a un régimen de corriente alterna, la relación que hay entre la tensión y la corriente sigue una ley equivalente a la de Ohm, pero, en este caso, en lugar de tener un valor *R*, como en el de la resistencia, tiene un valor *Z* que es complejo. Por cierto, las unidades de *Z* siguen siendo ohmios.

6.2. IMPEDANCIA DE UNA BOBINA

Al igual que con un condensador, en una bobina tenemos una relación entre la tensión y la corriente, que es:

$$v(t) = \omega L\, I_{máx} \cos(\omega t + \pi/2)$$

Lo que esta expresión nos dice es que la tensión que hay en los bornes de una bobina en RPS es la corriente desfasada 90º y multiplicada por la inductancia y la pulsación angular.

¿Qué te parece si escribimos la tensión y la corriente en forma de número complejo? Si nuestra corriente es de valor *I*, entonces nuestra tensión será:

$$V = \omega L \cdot I_{\sphericalangle 90^{\circ}}$$

Esto mismo lo podemos reescribir como:

$$V = (\omega L)_{\sphericalangle 90^{\circ}} \cdot I$$

De nuevo acabamos de establecer una relación de proporcionalidad entre la tensión y la corriente. Eso sí, de proporcionalidad compleja. Como ya te imaginarás, en electricidad, al factor de proporcionalidad se le llama «impedancia de la bobina» y se le denomina «*Z*». Así:

$$Z = (\omega L)_{\sphericalangle 90^{\circ}} = j\,\omega L$$

Y, por tanto, la relación entre la tensión y la corriente en una bobina es:

$$V = Z \cdot I$$

Y, con esta expresión, acabamos de generalizar la ley de Ohm para el caso de una bobina. Es decir, en una bobina sometida a un régimen de corriente alterna, la relación que hay entre la tensión y la corriente sigue una ley equivalente a la de Ohm, pero, en este caso, en lugar de tener un valor *R*, como en el de la resistencia, tiene un valor *Z* que es complejo. Por cierto, las unidades de *Z* siguen siendo ohmios.

6.3. IMPEDANCIA DE UNA RESISTENCIA

¿Y cuál es la impedancia de una resistencia? La impedancia de una resistencia es simplemente el valor de la propia resistencia.

A diferencia de los condensadores y de las bobinas, la impedancia de la resistencia es real, no tiene parte imaginaria; por tanto:

$$Z = R$$

Y la relación entre tensión y corriente en una resistencia es simplemente la ley de Ohm:

$$V = Z \cdot I = R \cdot I$$

6.4. ¿QUÉ ES LA IMPEDANCIA?

Acabamos de ver que cuando trabajamos en RPS, si escribimos I y V en notación compleja, tanto la bobina como el condensador y la resistencia presentan una relación entre la tensión y la corriente que se puede expresar matemáticamente como:

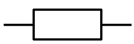
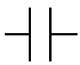
$$V = Z\,I$$

Donde el valor de Z es la impedancia eléctrica. La expresión se llama «ley de Ohm generalizada».

> Definimos la **impedancia eléctrica** como una constante, en general de valor complejo, que relaciona la tensión y la corriente en los componentes pasivos en un circuito eléctrico en RPS.

6.5. CUADRO-RESUMEN DE IMPEDANCIAS

El siguiente cuadro muestra un resumen de las impedancias de los diferentes elementos que usamos en nuestros circuitos:

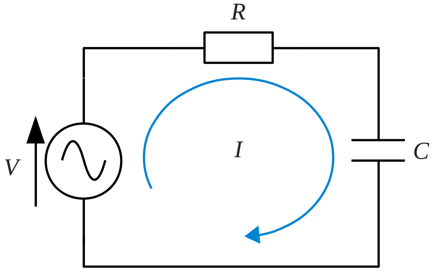
Componente	Símbolo	Impedancia	Tipo
Resistencia		$Z = R$	Real
Condensador		$Z = \dfrac{1}{j\,\omega C} = \dfrac{-j}{\omega C}$	Compleja (imaginaria pura)
Bobina		$Z = j\,\omega L$	Compleja (imaginaria pura)

7. ASOCIACIÓN DE IMPEDANCIAS

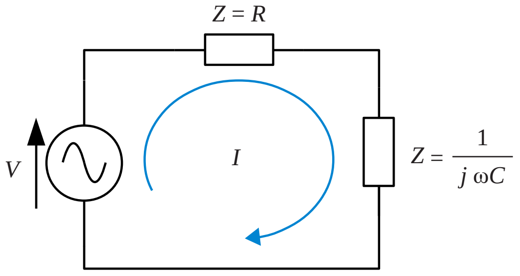
Vamos a deducir qué ocurre cuando, en lugar de tener un componente aislado, tenemos una asociación de más de un elemento sometido a un régimen de corriente alterna.

7.1. CASO 1: RESISTENCIA Y CONDENSADOR EN SERIE

Imagínate que tenemos el siguiente circuito sometido a un régimen RPS. En él tenemos una resistencia *R* y un condensador *C* puestos en serie con una fuente de tensión. ¿Cuál es la relación que hay entre la tensión *V* y la corriente *I* que atraviesa el circuito?



Podemos calcular las impedancias de ambos componentes y sustituirlas en el circuito. Así:



Fíjate que he sustituido el condensador por un componente que se parece mucho a una resistencia, pero no lo es. Simplemente representa una impedancia, es decir, un componente que cumple la ley de Ohm generalizada, que te recuerdo que es:

$$V = Z\,I$$

Volviendo al circuito, podemos calcular la corriente *I* aplicando la ley de Kirchhoff para las mallas, ya que por toda la malla circulará la misma corriente:

$$V_{máx} = R \cdot I + \frac{1}{j\,\omega C}\,I$$

Sumario

Si agrupamos términos, obtendremos:

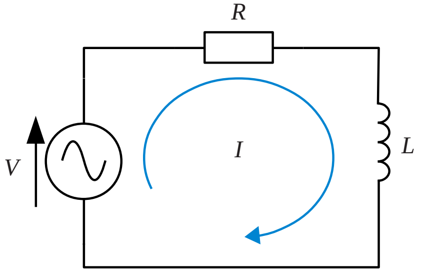
$$V = \left(R + \frac{1}{j\,\omega C} \right) \cdot I$$

Es decir, hemos encontrado una impedancia equivalente a la asociación en serie de una resistencia y un condensador. Así:

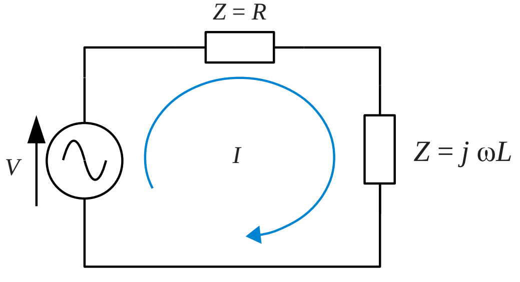
$$Z_{eq} = Z_R + Z_C = \left(R + \frac{1}{j\,\omega C} \right)$$

7.2. CASO 2: RESISTENCIA Y BOBINA EN SERIE

Tenemos el siguiente circuito sometido a un régimen RPS. En él tenemos una resistencia R y una bobina puestos en serie con una fuente de tensión. ¿Cuál es la relación que hay entre la tensión V y la corriente I que atraviesa el circuito?:



Podemos calcular las impedancias de ambos componentes y sustituirlas en el circuito. Algo así:



De nuevo he sustituido la bobina por un componente que se parece mucho a una resistencia, pero no lo es. Simplemente representa una impedancia, es decir, un componente que cumple la ley de Ohm generalizada, que te recuerdo que es:

$$V = Z\,I$$

Volviendo al circuito, podemos calcular la corriente *I* aplicando la ley de Kirchhoff para las mallas, ya que por toda la malla circulará la misma corriente:

$$V_{máx} = R \cdot I + j\,\omega L \cdot I$$

Agrupando los términos:

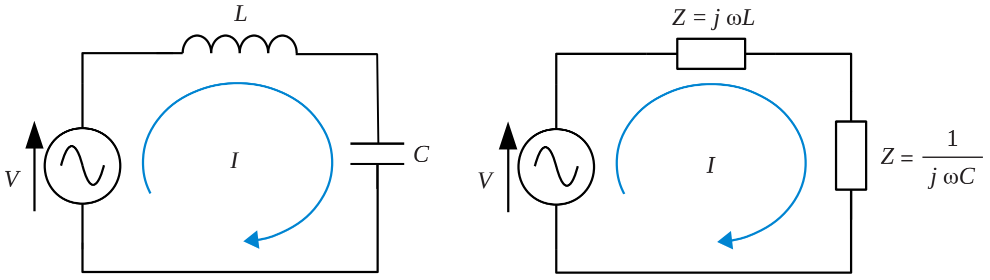
$$V = (R + j\,\omega L) \cdot I$$

Seguro que no te sorprende el resultado de la impedancia equivalente de una resistencia y una bobina en serie:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L = (R + j\,\omega L)$$

7.3. CASO 3: CONDENSADOR Y BOBINA EN SERIE

¿Y qué pasa si tenemos una bobina y un condensador puestos en serie con una fuente de tensión en RPS? Veamos:



En este caso, hemos vuelto a hacer la sustitución de los componentes por sus impedancias y, resolviendo el circuito, nos encontramos que la relación entre tensión y corriente vale:

$$V = Z_L \cdot I + Z_C \cdot I = (Z_L + Z_C) \cdot I$$

O lo que es lo mismo:

$$Z_{eq} = \left(j\,\omega L + \frac{1}{j\,\omega C} \right) = \left(j\,\omega L - \frac{j}{\omega C} \right)$$

7.4. CASO GENERAL

Hemos visto algunos casos particulares de asociaciones de impedancias. Si seguimos el mismo razonamiento que hicimos en corriente continua, las impedancias siguen las mismas reglas generales de asociación que vimos para las resistencias:

- Dos impedancias en serie se suman:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

- *N* impedancias en serie se suman:

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

- Con dos impedancias en paralelo, aplicamos la regla del producto partido por la suma:

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- Con *N* impedancias en paralelo, la impedancia equivalente es el inverso de la suma de los inversos de las impedancias:

$$Z_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z_i}}$$

8. TÉRMINOS DE LA IMPEDANCIA

Vamos a considerar una impedancia *Z* que hemos podido obtener como la asociación de otras impedancias o como el resultado de analizar un circuito; en realidad, no importa cómo. Esta impedancia *Z* en forma binómica se puede escribir como:

$$Z = R + jX$$

Es decir, tiene una componente real *R* y una componente imaginaria *X*. ¿Qué significa cada una de estas partes de la impedancia? ¿Tienen un significado físico?

8.1. PARTE REAL DE LA IMPEDANCIA

La parte real de la impedancia, *R*, se llama «resistencia» y, como su propio nombre indica, es la parte resistiva de la impedancia. La parte *R* solo puede ser generada por las resistencias que tenga el circuito y nunca puede ser negativa.

$$R \geq 0$$

Se mide en ohmios.

8.2. PARTE IMAGINARIA DE LA IMPEDANCIA

A la parte imaginaria de la impedancia, *X*, se la llama «reactancia». Esta parte está generada por las bobinas y los condensadores. En función del circuito y de los valores de las distintas *L* y *C* que haya, el valor de *X* puede ser positivo, negativo o 0.

Que la reactancia de una impedancia sea positiva significa que la reactancia es «inductiva», es decir, dominan las bobinas (o inductancias) del circuito.

Por otra parte, si la reactancia es negativa, significa que es una reactancia capacitiva, es decir, dominan los condensadores del circuito.

Al igual que la resistencia y la impedancia, se mide en ohmios.

8.3. ADMITANCIAS

Cuando estudiamos las resistencias y la ley de Ohm, establecimos que:

$$V = R \cdot I$$

Es decir, la tensión es la corriente multiplicada por la resistencia. En su momento también vimos otra forma de expresar lo mismo, que fue:

$$I = G \cdot V$$

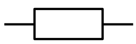
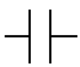
Al valor G lo llamamos «conductancia» y se calcula simplemente como la inversa de la resistencia. Así:

$$G = \frac{1}{R}$$

De manera equivalente, en circuitos en RPS, podemos definir el concepto de «admitancia» como el inverso de la impedancia. Así:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Como imaginarás, podemos calcular la admitancia de cada tipo de componente de un circuito. Así, el siguiente cuadro muestra estos valores de forma resumida:

Componente	Símbolo	Admitancia
Resistencia		$Y = G = \frac{1}{R}$
Condensador		$Y = j\,\omega C$
Bobina		$Y = \frac{1}{j\,\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$

Al igual que en el caso de la impedancia, la admitancia tiene una parte real y una parte imaginaria, y se suele escribir así:

$$Y = G + jB$$

Al valor real *G* se le llama «conductancia» y al valor imaginario *B* se le llama «susceptancia». La impedancia y la admitancia se relacionan por su inverso y, por tanto, se cumple que:

$$Y = \frac{1}{Z} \qquad |Y| = \frac{1}{|Z|} \qquad \sphericalangle Y = -\sphericalangle Z$$

9. RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS EN RPS

9.1. EQUIVALENTE MATEMÁTICO DEL ANÁLISIS RPS AL ANÁLISIS EN CONTINUA

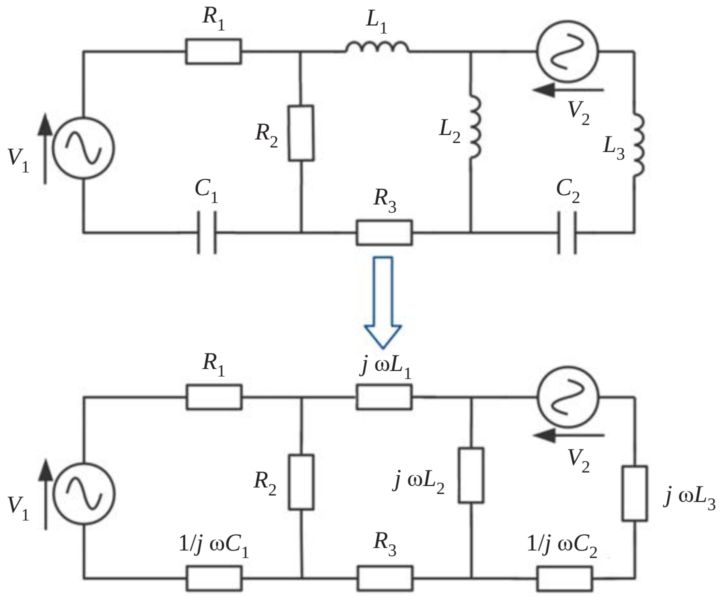
Hemos recorrido ya un largo camino desde que comenzamos la unidad y en todos los pasos que hemos ido dando hemos estado buscando siempre lo mismo: una manera de expresar la tensión y la corriente de tal forma que las bobinas, los condensadores y las resistencias se comporten siguiendo una regla proporcional. Para ello, hemos encontrado la notación compleja y hemos deducido la ley de Ohm generalizada.

El camino ha merecido la pena, pues hemos conseguido reducir el análisis de circuitos en RPS al análisis de circuitos en continua.

Hemos conseguido unas expresiones matemáticas para todos los componentes pasivos que se comportan según la ley de Ohm, como si fueran resistencias.

La diferencia, eso sí, es que ahora trabajamos con números complejos, ya que las impedancias de las bobinas y los condensadores son complejas.

Lo importante, antes de ponernos a resolver ningún circuito, es convertir todas las bobinas y todos los condensadores a sus valores de impedancia equivalente según la pulsación angular del circuito. Así:



Como veremos en los siguientes apartados, una vez que tengamos el circuito ya expresado en términos de impedancias, podremos usar las mismas técnicas de resolución de circuitos que empleamos en el análisis en corriente continua.

9.2. LEYES DE KIRCHHOFF

Como imaginarás, en RPS se siguen cumpliendo las leyes de Kirchhoff:

Ley de los nudos. En un nudo, la suma de corrientes complejas es igual a 0.

$$\Sigma I_i = 0$$

Ley de las mallas. En una malla, la suma de tensiones complejas es igual a 0.

$$\Sigma V_i = 0$$

Si una corriente entra en el nudo, le daremos el signo opuesto que a una corriente que sale del mismo nudo.

Si una tensión está dibujada en un sentido contrario a otra siguiendo el orden de la malla, le daremos signos opuestos.

9.3. MÉTODO DE LAS MALLAS GENERALIZADO

De la misma manera que en corriente continua, el método de las mallas generalizado sirve para la resolución de circuitos de múltiples mallas donde no hay fuentes de corriente. De forma resumida, el procedimiento es:

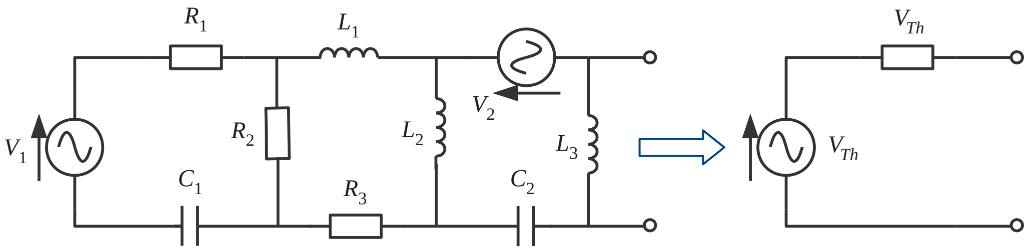
- **Paso 1.** Identificamos las mallas elementales y les asignamos una corriente ficticia de malla.
- **Paso 2.** Planteamos el sistema de ecuaciones en forma matricial:
  - En la diagonal principal: la suma de las impedancias de la malla i-ésima.
  - En los términos fuera de la diagonal principal: las impedancias que comparten la malla i-ésima con la j-ésima, con signo positivo, si las corrientes comparten sentido, y con signo negativo, si las corrientes de malla van en sentido contrario.
  - En el vector de tensiones: la suma de las fuentes de cada una de las mallas. Sumaremos con signo positivo las fuentes que van a favor del sentido de la malla y con signo negativo las que van en contra del sentido de la malla.
- **Paso 3.** Resolución del sistema de ecuaciones para obtener las corrientes ficticias de malla.
- **Paso 4.** Cálculos específicos que nos pida el problema a partir de las corrientes ficticias de malla.

9.4. EQUIVALENTE DE THÉVENIN

De la misma manera que en corriente continua, el teorema de Thévenin sigue siendo válido y en su versión RPS lo podemos enunciar así:

> Todo circuito lineal en RPS, cuando se conecta al exterior a través de dos terminales (o puerto), tiene un equivalente circuital compuesto por una fuente de tensión y una impedancia en serie.

Es decir, en lugar de tener una resistencia de Thévenin, tendremos una impedancia equivalente de Thévenin:



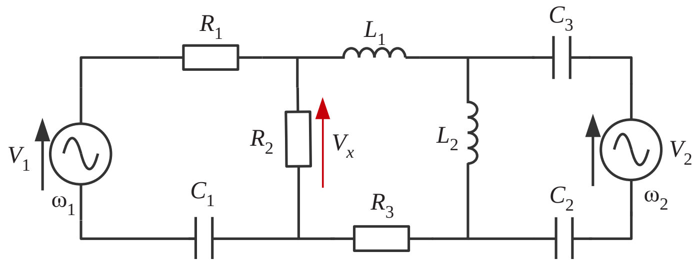
En RPS, el método de cálculo del equivalente de Thévenin sigue exactamente los mismos pasos que en continua, solo que, antes de empezar a calcular, convertimos las bobinas y los condensadores en impedancias:

- Cálculo de la impedancia equivalente:
  - Cortocircuitamos todas las fuentes de tensión (y dejamos en abierto las de corriente, si las hay).
  - Calculamos la impedancia equivalente entre los bornes de salida asociando las impedancias. Ese será el valor de Z_{Th}.
- Cálculo de la tensión equivalente:
  - Resolvemos el circuito para calcular la tensión que hay en los bornes de conexión exterior del circuito. Ese será el valor de V_{Th}.

9.5. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: CIRCUITOS CON FUENTES DE DIFERENTES PULSACIONES

Aunque no es habitual, es posible que nos encontremos un circuito que tiene fuentes de alterna con dos pulsaciones o frecuencias angulares diferentes.

Para resolver estos circuitos haremos uso del principio de superposición: como nuestros circuitos son sistemas lineales, sabemos que la respuesta del sistema ante la suma de dos excitaciones distintas es la suma de las respuestas a cada una de las excitaciones por separado.



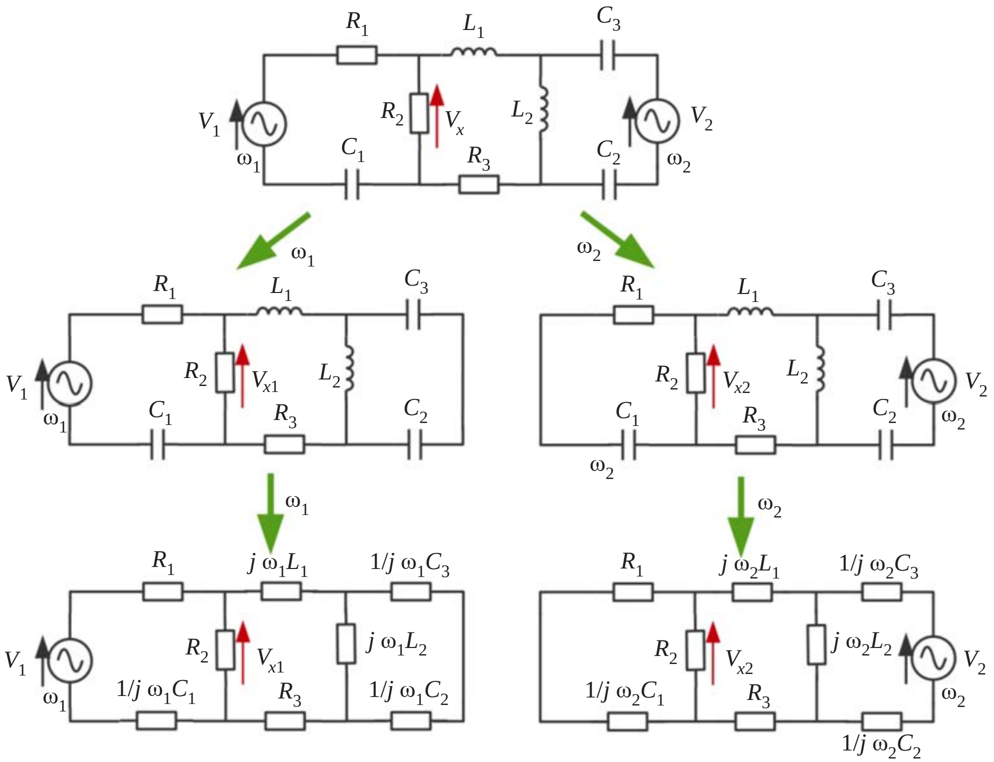
En la figura anterior tenemos un ejemplo de un circuito en el que hay dos fuentes de tensión, cada una de ellas con una pulsación angular diferente. Para resolver este circuito hay que seguir los siguientes pasos:

- Identificamos las fuentes que tienen diferentes pulsaciones.
- Resolvemos el circuito en la primera pulsación cortocircuitando las fuentes de las otras pulsaciones.
  - Calculamos las impedancias.
  - Calculamos las tensiones y las corrientes que necesitemos resolver.
- Resolvemos de nuevo el circuito en la segunda pulsación cortocircuitando las fuentes de las otras pulsaciones:
  - Calculamos las impedancias.
  - Calculamos las tensiones y las corrientes que necesitemos resolver.

Una vez que tenemos las tensiones y las corrientes complejas en cada una de las pulsaciones las pasamos a su expresión temporal y podemos sumarlas.

> **Importante.** Solo podemos sumar las expresiones en el tiempo, no las expresiones complejas, en dos pulsaciones diferentes.

En el circuito del ejemplo hay dos fuentes sinusoidales, cada una de ellas con una pulsación diferente. Por lo tanto, para resolver el circuito completo, tendremos que separar el problema en dos:



Una vez que hemos separado los circuitos y hemos expresado cada uno de ellos en términos de impedancias, podemos calcular los valores complejos de V_{x1} y V_{x2}. Para calcular la tensión V_x que nos pide el problema solo hay que expresar en el tiempo ambas tensiones:

$$v_x(t) = |V_{x1}| \cos(\omega_1\, t + \varphi_1) + |V_{x2}| \cos(\omega_2\, t + \varphi_2)$$

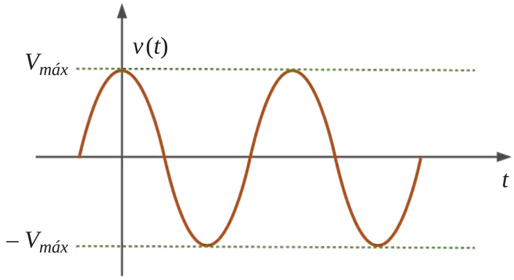
10. VALOR EFICAZ DE UNA TENSIÓN Y UNA CORRIENTE

10.1. EL VALOR MÁXIMO

Hasta ahora siempre que nos hemos referido a una tensión o a una corriente en RPS hemos hablado de su valor máximo o valor de pico y hemos escrito, en el tiempo, estas expresiones así:

$$v(t) = V_{máx} \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad i(t) = I_{máx} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Si dibujamos una de las sinusoides en el tiempo, tenemos lo siguiente:

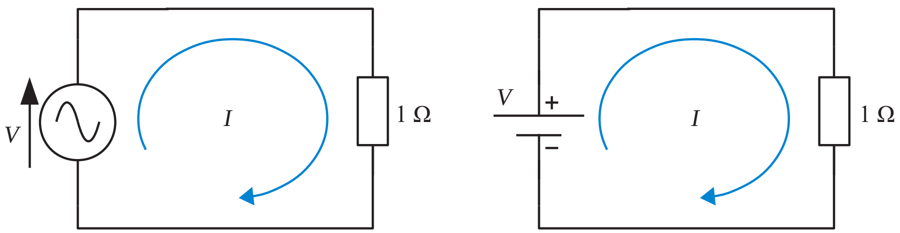


Como ya sabemos, el valor $V_{máx}$ nos indica la excursión máxima o la amplitud o el valor máximo que toma la tensión en cada ciclo de la sinusoide.

El problema que tiene el valor máximo es que, salvo porque nos da la medida directa de la amplitud de la señal, no nos permite calcular de forma directa lo potente que es una tensión o una corriente.

10.2. MEDIDA DE LA POTENCIA DE LA SEÑAL DE TENSIÓN

Vamos a medir cuánta potencia entrega una fuente sinusoidal y una fuente de continua a una resistencia de 1 Ω. Fíjate en estos dos circuitos en RPS y en continua:

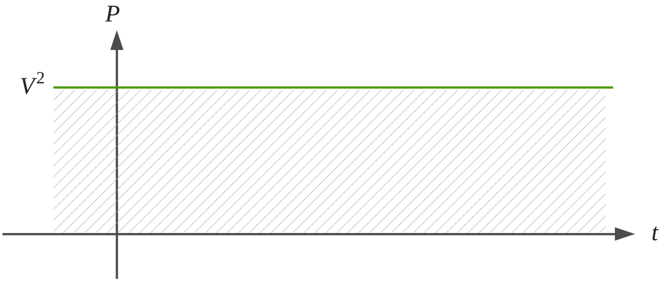


En ambos circuitos tenemos una fuente de V voltios y una resistencia de 1 Ω.

La potencia en el circuito de continua es muy fácil de calcular:

$$I = \frac{V}{1} \quad \rightarrow \quad P = V^2$$

Es decir, la potencia que la resistencia disipa es un valor constante y de valor V^2, así que, en continua, el valor de tensión V de la fuente nos da directamente una medida de la potencia que tiene la fuente y, por tanto, nos dice cuántos vatios se disipan en la resistencia y cuánto se va a calentar esta según pase el tiempo. En esta gráfica tenemos la potencia en función del tiempo. El área rallada bajo la potencia es la energía disipada en la resistencia:



Sin embargo, la potencia en el circuito de alterna es algo más complicado de calcular. En primer lugar, vamos a escribir la expresión de la potencia en el tiempo, asumiendo que la fase de la fuente es 0:

$$p(t) = v(t)\, i(t) \quad \rightarrow \quad p(t) = v(t)\,\frac{v(t)}{1} = v^2(t) = V^2 \cos^2(\omega t)$$

Es decir, la potencia que disipa la resistencia no es constante en el tiempo, sino que varía y tiene esta expresión:

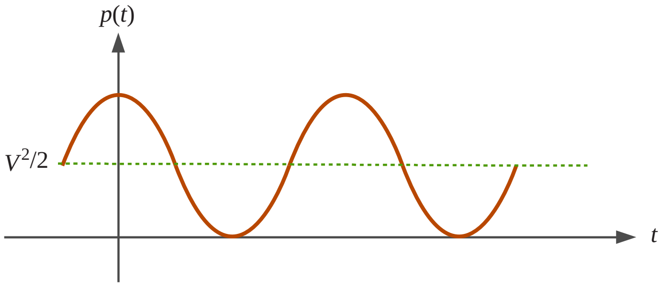
$$p(t) = V^2 \cos^2(\omega t)$$

Podemos dibujar esa expresión matemática en el tiempo si recordamos que:

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

Por tanto:

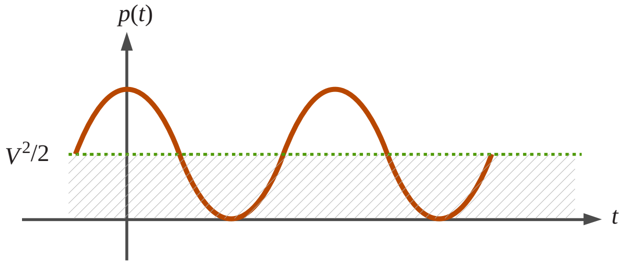
$$p(t) = V^2 \cos^2(\omega t) = \frac{V^2 + V^2 \cos(2\omega t)}{2}$$



10.3. VALOR EFICAZ

Puesto que la potencia instantánea en RPS no nos da una idea de cuánto se va a calentar la resistencia, vamos a definir un valor más útil: el valor eficaz.

Si nos fijamos en la gráfica anterior, simplemente de manera visual nos damos cuenta de que la potencia en la resistencia oscila alrededor de un valor medio y que, en una parte del ciclo, se disipa más potencia y, en otra, menos, pero siempre la misma cantidad media, como en este dibujo:



De manera informal podríamos decir que es como si la fuente de V voltios en RPS entregase a la resistencia una potencia equivalente a una fuente de continua de valor:

$$V_{equiv} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

> A este valor se le llama **valor eficaz**. El valor eficaz de una tensión $v(t)$ mide el valor equivalente de tensión que tendría una fuente de continua que entregase la misma potencia que la tensión $v(t)$ a una resistencia.

Matemáticamente, se define el valor eficaz de una tensión como:

$$V_{ef} = \sqrt{\lim_{T\to\infty}\left(\frac{\int_{-T/2}^{T/2} v^2(t)\,dt}{T}\right)}$$

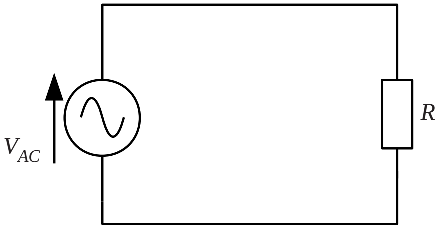
Cuando las señales son sinusoidales, como hemos demostrado en el apartado anterior, el valor eficaz de la tensión y la corriente es:

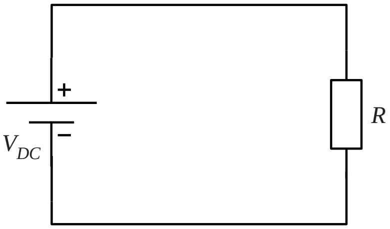
$$V_{ef} = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}} \qquad\qquad I_{ef} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$$

En gran parte de la bibliografía técnica, sobre todo de ingeniería, te encontrarás que al valor eficaz se le llama «valor RMS» (*root mean squared*) o «valor cuadrático medio».

10.4. SIGNIFICADO DEL VALOR EFICAZ (DE NUEVO)

Aunque ya hemos definido el concepto de «valor eficaz» y hemos visto su significado físico en el apartado anterior, me gustaría que viéramos un ejemplo para dejarlo más claro. Fíjate en los dos circuitos siguientes:





La pregunta que quiero responder es la que sigue a continuación: a largo plazo, ¿cuánta potencia se disipa en la resistencia R? O lo que es lo mismo, ¿cuál es la potencia media disipada en la resistencia R? O incluso dicho de otra manera: ¿cuánta es la potencia que hace que la resistencia R se caliente? En el circuito en corriente continua de la derecha no tenemos mucho más que calcular la potencia directamente, que sabemos que es:

$$P_{DC} = \frac{V_{DC}^2}{R}$$

En el circuito de corriente alterna, acabamos de deducir, en el apartado anterior, que la potencia media que se disipa en la fuente es:

$$P_{AC} = \frac{\left(\frac{V_{AC}}{\sqrt{2}}\right)^2}{R} = \frac{V_{ef}^2}{R}$$

Es decir, el valor eficaz de una tensión (o una corriente) es aquel que tendría una tensión (o corriente) continua que disipase la misma potencia en una resistencia. Cuando la tensión (o corriente) tiene forma sinusoidal, entonces la relación entre el valor eficaz y el valor máximo es la que hemos deducido antes:

$$V_{ef} = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}} \qquad I_{ef} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$$

10.5. USO DEL VALOR EFICAZ

En circuitos en RPS las tensiones y corrientes se dan en valor eficaz, salvo que se indique que son valores máximos. En todo el texto de la unidad hemos indicado, hasta este momento, los valores máximos de tensión y corriente, pero quiero que tengas en cuenta que en cualquier problema siempre hablaremos de tensión (y corriente) eficaz, salvo que se indique con un subíndice o de forma explícita que se trata de valores máximos o de pico.

Por ejemplo, la tensión de alterna que llega a casa en España es de 220 *V*, y, como no hemos indicado nada más, podemos estar seguros de que se trata de 220 *V* eficaces. Es decir, el valor de pico o amplitud de la tensión de la red eléctrica española es:

$$V_{máx} = \sqrt{2}\, V_{ef} = \sqrt{2} \cdot 220 \simeq 311.1\ [V]$$

11. POTENCIA EN RPS

Una vez que tenemos las herramientas necesarias para analizar circuitos en RPS y somos capaces de resolver los valores de tensión, nos toca estudiar qué ocurre con la potencia en estos circuitos.

En las dos unidades anteriores establecimos que en un circuito lineal:

- Las fuentes generaban potencia y, en algunos casos, la consumían.
- Las resistencias disipaban o consumían potencia.
- Las bobinas y los condensadores solo podían almacenar y devolver energía, pero no podían consumirla.

Dicho esto, parece que exista una contradicción: hemos generalizado la ley de Ohm, y, ahora, al menos en principio, las bobinas y los condensadores se comportan como las resistencias y siguen la ley:

$$V = Z\,I$$

Es cierto, todas las impedancias siguen la misma ley, pero no podemos olvidarnos de que las resistencias son la parte real de la impedancia, mientras que las bobinas y los condensadores generan la parte imaginaria. Esto tiene un significado físico que desgranaremos en los siguientes apartados.

11.1. POTENCIA EN UNA IMPEDANCIA

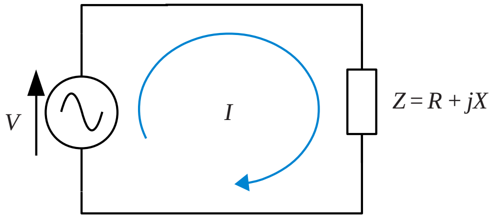
Si tenemos un componente aislado, sabemos que:

- Si calculamos la potencia media en un condensador o una bobina, el valor es 0. No pueden consumir potencia, solo almacenarla o liberarla.
- Si calculamos la potencia media en una resistencia, el valor de la potencia disipada tiene esta forma, dados V e I eficaces:

$$P_R = R\,I^2 = \frac{V^2}{R}$$

¿Y qué ocurre cuando lo que tenemos es una impedancia en general, compuesta por varias bobinas, condensadores y resistencias? Vamos a verlo.

Fíjate en el circuito de la derecha.



Este circuito representa una impedancia cualquiera con parte real, resistiva, y parte imaginaria, reactiva, y representa el conjunto de resistencias, condensadores y bobinas que tiene nuestro circuito. Sabemos calcular fácilmente el valor de la corriente que circula por el circuito:

$$I = \frac{V}{Z} = \left(\frac{V}{|Z|}\right)_{\measuredangle -\varphi}$$

Donde φ es el argumento de la impedancia Z. Vamos ahora a calcular las expresiones en el tiempo de ambas señales, suponiendo que V es un valor eficaz:

$$v(t) = \sqrt{2}\, V \cos(\omega t) \qquad \text{e} \qquad i(t) = \sqrt{2}\, \frac{V}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi)$$

Y la potencia instantánea que la fuente está entregando a la impedancia, simplemente, es:

$$p(t) = v(t)\, i(t) = 2\, \frac{V^2}{|Z|} (\cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi))$$

Aplicando la regla del coseno de la resta de dos ángulos:

$$p(t) = 2\, \frac{V^2}{|Z|} (\cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)) = 2 \frac{V^2}{|Z|} \cos(\omega t)\, (\cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi))$$

Y agrupando un poco:

$$p(t) = 2\, \frac{V^2}{|Z|} (\cos^2(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\varphi))$$

Si nos fijamos bien en la ecuación anterior, veremos que la potencia en la impedancia tiene dos términos que se suman:

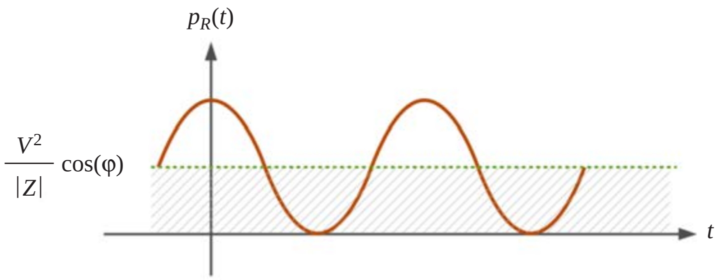
$$p_R(t) = 2\, \frac{V^2}{|Z|} (\cos^2(\omega t) \cos(\varphi)) \qquad \text{y} \qquad p_x(t) = 2\, \frac{V^2}{|Z|} (\cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\varphi))$$

El primero de los dos términos se llama «potencia activa» y el segundo de ellos se llama «potencia reactiva».

11.1.1. Potencia activa en la impedancia

En primer lugar, vamos a tomar el primer término de la potencia y vamos a dibujar en el tiempo la forma que tiene, aunque antes vamos a desarrollar el coseno al cuadrado:

$$p_R(t) = 2\,\frac{V^2}{|Z|}\left(\cos^2(\omega t)\cos(\varphi)\right) = \frac{V^2}{|Z|}\cos(\varphi)\,(1 + \cos(2\,\omega t))$$



Ya conocemos esta gráfica. Es la misma que nos encontramos cuando hicimos el análisis del valor eficaz. La parte de la potencia real nos está indicando una potencia realmente consumida en la impedancia. El valor medio de la potencia es:

$$\langle p_R \rangle = \frac{V^2}{|Z|}\cos(\varphi)$$

Y la energía que se disipa en la impedancia es el área sombreada en la gráfica.

Es muy importante darse cuenta de que la potencia media, es decir, la potencia que de verdad se disipa en la impedancia depende del término:

$$\cos(\varphi)$$

- Si la impedancia es resistiva pura, entonces solo tiene parte real:

  $$\cos(\varphi) = \cos(0^{\circ}) = 1$$

  y la potencia disipada es máxima.

- Si la impedancia es reactiva pura, entonces solo tiene parte imaginaria:

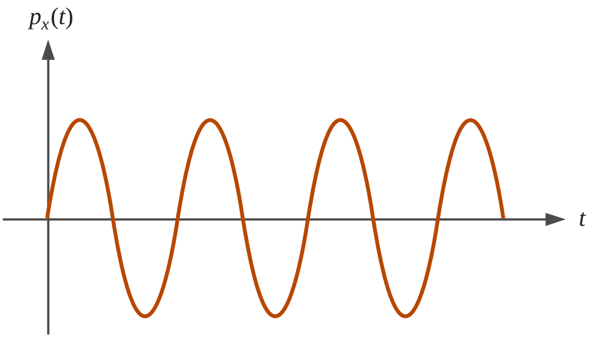
$$\cos(\varphi) = \cos(90^{o}) = 0$$

y no se disipa potencia en la impedancia.

11.1.2. Potencia reactiva en la impedancia

Ahora vamos a tomar el segundo término de la potencia y vamos a dibujar en el tiempo la forma que tiene, aunque antes vamos a agrupar el producto seno por coseno:

$$p_x(t) = 2\,\frac{V^2}{|Z|}\,(\cos(\omega t)\,\sin(\omega t)\,\sin(\varphi)) = \frac{V^2}{|Z|}\,(\sin(2\,\omega t)\,\sin(\varphi))$$



Fíjate que en este caso no hay valor medio de la potencia. A veces la potencia fluye desde la fuente a la impedancia (parte positiva del ciclo) y otras veces la fuente disipa la potencia que le devuelve la impedancia (parte negativa del ciclo).

Dicho de otro modo: la potencia reactiva es una cantidad de potencia que se intercambia con la fuente constantemente, pero que no se consume en la impedancia.

Es muy importante darse cuenta de que el valor máximo de la potencia reactiva depende del término:

$$\sin(\varphi)$$

- Si la impedancia es resistiva pura, entonces solo tiene parte real:

$$\sin(\varphi) = \sin(0^o) = 0$$

y la potencia reactiva es 0, solo existe potencia real y no se intercambia potencia con la fuente.

- Si la impedancia es reactiva pura, entonces solo tiene parte imaginaria:

$$\sin(\varphi) = \sin(90^o) = 1$$

y la potencia reactiva es máxima, no se disipa potencia real en la impedancia y toda la potencia se intercambia constantemente entre la fuente y la impedancia, y viceversa.

11.1.3. Relación con el desfase entre ambas señales

Si recapitulamos un poco lo que acabamos de ver, está claro que la clave que determina cuánta potencia es realmente potencia activa (potencia consumida) y cuánta es potencia reactiva (potencia intercambiada) es la diferencia de fase que hay entre la señal de tensión y la señal de corriente.

A lo largo de todos los cálculos anteriores hemos asumido siempre que la fase de la tensión era de 0º. Aunque no lo demostraremos aquí, se puede probar que, aunque la fase de la tensión no sea 0º, lo que determina el reparto entre potencia activa y reactiva es solamente el desfase entre ambas señales.

Si llamamos a ese desfase $\Delta\varphi$, entonces, el término de potencia activa, en valor instantáneo y medio, será:

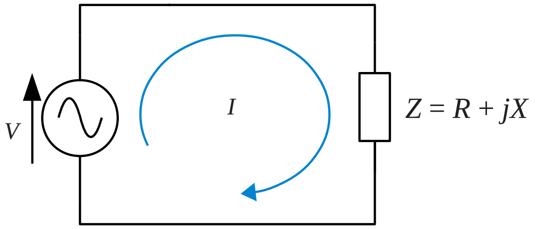
$$p_R(t) = \frac{V^2}{|Z|}\cos(\Delta\varphi)\,(1 + \cos(2\,\omega t)) \qquad \langle p_R \rangle = \frac{V^2}{|Z|}\cos(\Delta\varphi)$$

Y el término de potencia reactiva será:

$$p_x(t) = \frac{V^2}{|Z|}(\sin(2\,\omega t)\,\sin(\Delta\varphi))$$

11.2. POTENCIA APARENTE

Ahora que hemos visto matemáticamente, y haciendo uso de las funciones de tensión y corriente en el tiempo, cómo es la potencia en una impedancia con parte real e imaginaria, vamos a volver a usar nuestra notación compleja y definir una ley de Joule generalizada. Volvamos al circuito que teníamos al inicio:



Una vez que resolvemos este circuito, obtenemos los valores complejos de V e I. Con estos valores vamos a definir una cantidad muy útil, que llamaremos «potencia aparente», y la denotaremos con la letra S mayúscula:

$$S = V \cdot I^*$$

La potencia aparente S es un número complejo con estas propiedades:

- Tiene un módulo proporcional al módulo de V y de I.
- Tiene un argumento que es justo la diferencia de fases entre V e I.

La clave de haber conjugado el término de corriente hace que el número S tenga justo el desfase entre ambas señales. Ya vimos en el apartado anterior la importancia que tenía el valor del desfase entre tensión y corriente en los términos de potencia activa y reactiva.

Si, como en el ejemplo anterior, medimos la potencia sobre una impedancia de valor $Z = |Z|_{\measuredangle\varphi}$, el valor de S será:

$$S = V \cdot I^* = \left(\frac{|V|^2}{|Z|}\right)_{\measuredangle\varphi}$$

11.3. TÉRMINOS DE LA POTENCIA APARENTE

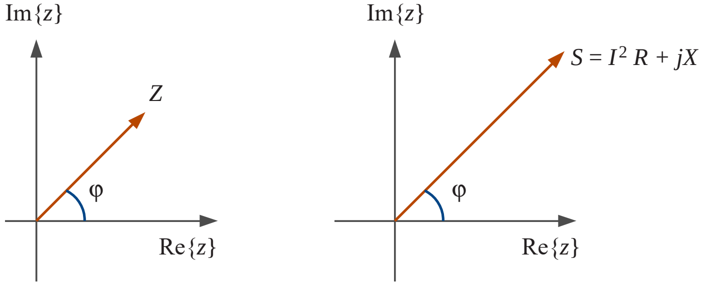
La potencia aparente, como acabamos de ver, es un número complejo que tiene dos componentes:

$$S = P + jQ$$

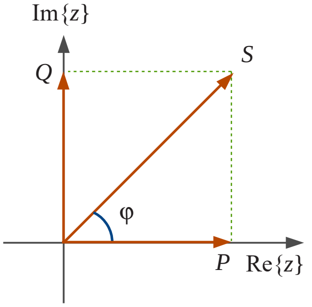
Asumiendo que V e I son valores eficaces, entonces, estos términos, medidos en una impedancia, son:

$$P = |V||I| \cos \varphi = \frac{|V|^2}{|Z|} \cos \varphi \qquad Q = |V||I| \sin \varphi = \frac{|V|^2}{|Z|} \sin \varphi$$

Estos dos términos son los mismos que calculamos en el tiempo y que definimos como potencia real y potencia reactiva. Si dibujamos los números complejos que son la impedancia y la potencia aparente en el circuito, tenemos que:



Si nos detenemos más en la potencia, podemos dibujar la parte real e imaginaria:



Donde hemos llamado:

- *S*: potencia aparente. Es el módulo del producto de *V* por *I*.
- *P*: potencia consumida. Es parte real de la potencia total.
- *Q*: potencia reactiva. Es la parte imaginaria de la potencia total.

¿Por qué es importante este análisis de potencia? En realidad, podríamos imaginarnos que la impedancia *Z* fuera la instalación eléctrica de una vivienda. En una vivienda hay conectadas a la red eléctrica muchos tipos de dispositivos: bombillas, motores (lavadoras, neveras, etc.), fuentes de alimentación de PC, etc. Cada uno de estos dispositivos tiene su propia impedancia, y, al final, el equivalente de todas ellas es $Z = R + jX$.

Vista desde fuera de la vivienda, la instalación tiene unas necesidades de potencia que acabamos de calcular, y, en particular, hay tres valores que son los críticos, y que explicamos a continuación:

11.3.1. Potencia activa

También llamada «potencia consumida», la potencia activa es la que de verdad es necesaria, la que se consume. Esta potencia, en general, se está convirtiendo en algún trabajo útil (lavar la ropa) o a veces menos útil (como mostrar una imagen en la televisión), pero igualmente reconfortante.

La potencia activa se mide en vatios:

$$[P] = [W]$$

11.3.2. Potencia reactiva

Esta potencia no se está consumiendo, simplemente se está intercambiando. Acuérdate de que las bobinas y los condensadores no pueden consumir potencia, solo pueden almacenarla y liberarla, y de hecho están constantemente haciéndolo.

En la industria se usa una unidad llamada «volt-amperes reactivos» (*VAR*), que, en el fondo, tiene unidades también de vatios.

$$[Q] = [VAR]$$

11.3.3. Potencia aparente

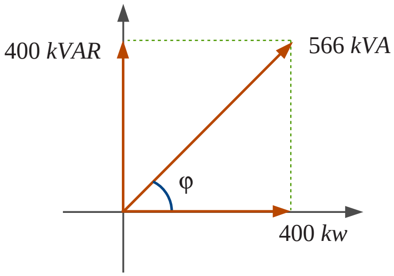
Es la potencia que, aparentemente, hay que entregar a la vivienda. Y es que, aunque la potencia reactiva no se consuma, hay que entregarla junto con la potencia real, aunque un tiempo después se nos vaya a devolver a la red. En el ámbito de la electricidad, a la potencia aparente se la mide en volt-amperes (VA), que, de nuevo, en el fondo, son vatios.

$$[S] = [VA]$$

11.3.4. Importancia de la potencia aparente y el factor de potencia

En una vivienda, el problema de la potencia reactiva no suele ser muy importante, ya que las potencias que se manejan son bajas y, por lo tanto, la potencia aparente entregada a una casa también es baja.

Por otro lado, tenemos instalaciones donde la potencia aparente puede ser un gran problema: imagínate una fábrica que cuente con muchos motores eléctricos o un colegio con muchas bombillas fluorescentes. Ambos tienen una gran componente inductiva y demandan una gran cantidad de potencia total. Pensemos, por ejemplo, en la instalación eléctrica de un edificio que tuviera una impedancia que resultase en una potencia aparente como esta:



En esta instalación, para consumir 400 *kw*, se están entregando potencias aparentes de 566 *kVA*, es decir, hay que dimensionar cables, generadores, medidores, etc., para entregar más del 40 % extra de potencia, aunque en realidad no se vaya a consumir. Esto supone un sobrecoste muy elevado para la instalación, pero sobre todo para la empresa que va a proporcionar la energía, que ha de ser capaz de hacer un sobreesfuerzo para entregar potencia que, después, le será devuelta.

Para analizar «la calidad» de una instalación eléctrica se define el factor de potencia ($F. P.$), que no es más que el coseno del ángulo que forman la potencia aparente y la potencia real, o la impedancia equivalente del circuito:

$$F.\ P. = \cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

Enunciado 1

En un circuito excitado con una pulsación angular de 100 *rad/s*, ¿cuál es la expresión temporal de las siguientes señales complejas?:

a) $I_1 = 3_{\measuredangle 45^o}$.

b) $V_1 = 2.45_{\measuredangle \pi/3}$.

c) $I_2 = \sqrt{2}_{\measuredangle 121^o}$.

d) $V_2 = 10_{\measuredangle -90^o}$.

Enunciado 2

¿Cuál es la expresión compleja de estas señales en valor eficaz y en grados?

a) $v_1(t) = 3 \cos(300t - \pi/2)$.

b) $i_1(t) = 7\sqrt{2} \cos(300t + \pi/4)$.

c) $i_2(t) = 10 \cos(300t + 0.7)$.

Enunciado 3

Si un circuito tiene una fuente con un periodo de 25 *ms*, ¿cuánto vale la pulsación angular de la fuente? ¿Y la frecuencia?

Enunciado 4

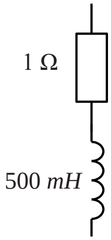
Tenemos una impedancia, resultado de la asociación de varios condensadores, bobinas y resistencias, cuyo valor es:

$$Z = 131.1 - 380\,j$$

Dibuja el circuito equivalente a 100 *rad/s*.

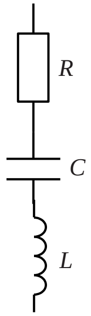
Enunciado 5

¿Cuánto vale la impedancia equivalente de esta asociación a una pulsación de 20 *rad/s*?:



Enunciado 6

¿A qué frecuencia la impedancia equivalente de esta asociación es solo resistiva?:

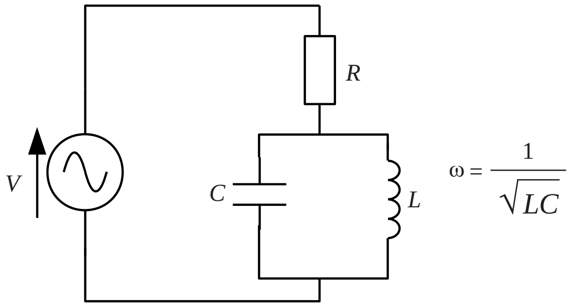


Enunciado 7

Una instalación eléctrica consume una potencia de 3.5 *kW*. A esta misma instalación se le entrega una potencia de 4.5 *kVA*. ¿Cuánto vale el factor de potencia?

Enunciado 8

Calcula la corriente que circula por la resistencia de este circuito:



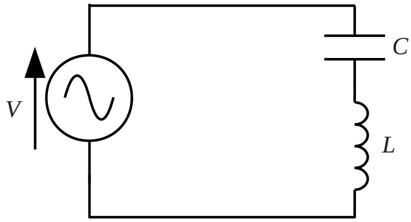
Enunciado 9

¿Cuánto vale la suma de estas dos tensiones?:

$$v_1 = 3\cos(100t - \pi/2) \qquad v_2 = 7\cos(100\,t)$$

Enunciado 10

¿Cuánto vale la potencia disipada por la impedancia equivalente de este circuito?:



Solución 1

Asumiendo valores eficaces:

a) $i_1(t) = 3\sqrt{2}\cos(100t + \pi/4)$.

b) $v_1(t) = 2.54\sqrt{2}\cos(100t + \pi/3)$.

c) $i_2(t) = 2\cos\left(100t + 121\dfrac{\pi}{180}\right)$.

d) $v_2(t) = 10\sqrt{2}\cos(100t - \pi/2)$.

Solución 2

a) $V_1 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)_{\sphericalangle -90^{\circ}}$.

b) $I_1 = 7_{\sphericalangle 45^{\circ}}$.

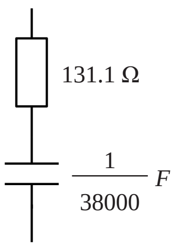
c) $I_2 \simeq \left(\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)_{\sphericalangle 40.11^{\circ}}$.

Solución 3

$f = \dfrac{1}{T} = 40\ [Hz]$.

$\omega = 2\,\pi f = 80\pi\ [rad/s]$.

Solución 4



Solución 5

$Z = (1 + 10j)\ \Omega.$

Solución 6

$$\mathrm{Im}\{Z\} = 0 = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\ [Hz].$$

Solución 7

$$F.\,P. = \cos\varphi = \frac{3500}{4500} \simeq 0.778.$$

Solución 8

$I = 0\ [A].$

Solución 9

$$v_3(t) = \sqrt{58}\cos\left(100t - 23.2\,\frac{\pi}{180}\right).$$

Solución 10

$P = 0\ [W]$. Es puramente reactivo y no disipa potencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básica

Magro Andrade, R.; Abad Toribio, L.; Serrano Pérez, M.; Velasco Fernández, A. I.; Sánchez Sánchez, S. y Tejedor de las Muelas, J. *Fundamentos de electricidad y magnetismo*. Madrid: García Maroto, 2009. 318 pp.

Avanzada

López Ferreras, F.; Maldonado Bascón, S. y Rosa Zurera, M. *Análisis de circuitos lineales*, 3.ª ed. Madrid: Ra-Ma, 2010. 763 pp.