UNIDAD DIDÁCTICA

1 FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL. LÍMITES Y CONTINUIDAD

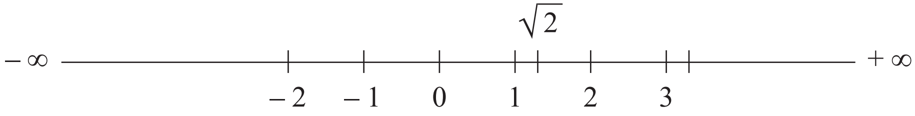
OBJETIVOS DE LA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Saber los conceptos básicos de la topología de la recta real.
- Conocer las funciones elementales y usarlas para modelizar problemas de la realidad.
- Conocer el concepto de límite y saber hallar límites.
- Aplicar los límites para conocer tendencias, el pasado y el futuro de problemas prácticos.
- Conocer el concepto de continuidad.
- Aplicar el concepto de continuidad en la modelización y resolución de problemas reales.
- Utilizar el teorema de Bolzano (método de bipartición) a la resolución de ecuaciones.

1. TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

Se llama **recta real** a la representación sobre una recta del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales:



El **valor absoluto** de un número real es dicho número cuando es positivo y su opuesto cuando es negativo:

$$|a| = f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Y también:

$$|a| = \max\{-a, a\} = \sqrt{a^2}$$

Geométricamente, la distancia en la recta real de dos números reales es el valor absoluto de su diferencia: $d(a, b) = |b - a|$.

1.1. INTERVALOS

Los **intervalos** son los conjuntos básicos de la recta real, pudiendo ser abiertos o cerrados (según entren o no sus extremos) y acotados o infinitos. En la siguiente tabla aparecen los distintos intervalos:

Cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	
Abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	

.../...

…/…

Semiabierto o semicerrado	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	
Semiabierto o semicerrado	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	
Infinito cerrado	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	
Infinito abierto	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	
Infinito cerrado	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	
Infinito abierto	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	
Recta real	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	

Cualquier otro conjunto de la recta real se puede representar mediante uniones, intersecciones y/o diferencias de intervalos.

1.2. ENTORNOS

Se llama **entorno abierto** de centro $a \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ al intervalo abierto formado por todos los números reales cuya distancia al número a es menor que r. Se puede expresar como:

$$(a - r, a + r) = \{x : a - r < x < a + r\} = \{x : -r < x - a < r\} = \{x : |x - a| < r\}$$

Se llama **entorno cerrado** de centro $a \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ al intervalo cerrado formado por todos los números reales cuya distancia al número a es menor o igual que r. Se puede expresar como:

$$[a - r, a + r] = \{x : a - r \leq x \leq a + r\} = \{x : -r \leq x - a \leq r\} = \{x : |x - a| \leq r\}$$

1.3. CONJUNTOS ACOTADOS

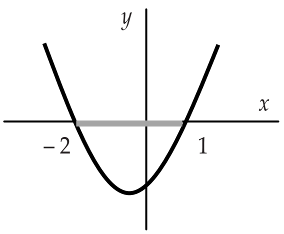
- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está **acotado superiormente** si existe un número real M, llamado **cota superior**, tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. La menor de las cotas superiores se llama **supremo**, y si pertenece al conjunto A se llama **máximo**.
- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está **acotado inferiormente** si existe un número real m, llamado **cota inferior**, tal que $a \geq m$ para todo $a \in A$. La mayor de las cotas inferiores se llama **ínfimo**, y si pertenece al conjunto A se llama **mínimo**.
- Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está **acotado** cuando lo está superior e inferiormente, es decir, cuando existen números reales M y m tales que $m \leq a \leq M$ para todo $a \in A$.

EJEMPLO 1

Estudiar la acotación de los conjuntos:

$$A = (-\infty, 3], \quad B = \{x : x^2 + x < 2\} \quad \text{y} \quad C = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución



El conjunto A está formado por todos los números reales que son menores o iguales que 3, luego no está acotado inferiormente y sí lo está superiormente. El supremo es 3, que también es máximo por pertenecer al conjunto.

El número real x pertenece al conjunto B si $x^2 + x < 2$, es decir, si $x^2 + x - 2 < 0$. Esta inecuación se puede resolver teniendo en cuenta que $y = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ es una parábola convexa (con curvatura hacia arriba) que corta al eje de abscisas en $x = -2$ y $x = 1$ y que, por tanto, es negativa (está por debajo del eje de abscisas) entre esos valores. Entonces, $B = (-2, 1)$, que está acotado (superior e inferiormente), siendo -2 el ínfimo y 1 el supremo. Puesto que ninguno de ellos pertenece al conjunto, no existen el mínimo y el máximo.

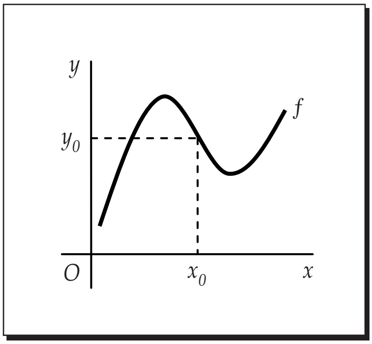
El conjunto $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$ es un conjunto de números reales positivos, cada vez más pequeños, y que se acercan a 0 sin llegar a tomar el valor 0. Por tanto, C está acotado con supremo 1 e ínfimo 0. Puesto que 1 pertenece al conjunto y 0 no, el máximo es 1 y no existe mínimo.

2. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

2.1. DEFINICIONES

Una **función real de variable real** es cualquier aplicación $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $x \in D$ uno y solo un valor $f(x) \in \mathbb{R}$. La función se suele representar por $y = f(x)$, donde x se llama **variable independiente** e y se llama **variable dependiente**.

El conjunto $D \subset \mathbb{R}$ de todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que la función está definida se llama **dominio** de f y se representa por $D(f)$. El conjunto de todos los valores que toma la función se llama **imagen** de f y se representa por $I(f) = \{f(x) : x \in D\}$. La **gráfica** de la función f es la representación cartesiana de todos los pares (x, y) con $y = f(x)$.



Una función f se llama **función periódica** si existe un número $T > 0$, llamado **periodo**, tal que $f(x + T) = f(x)$.

Se dice que f es una **función par** si para todo $x \in D$ se cumple que $f(-x) = f(x)$, y se dice que es una **función impar** cuando cumple que $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de abscisas y la de una función impar es simétrica respecto del origen.

2.1.1. Crecimiento y decrecimiento

Se dice que la función f es:

- **Creciente** en el intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Decreciente** en el intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Constante** en el intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$ se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$.

2.1.2. Acotación y extremos

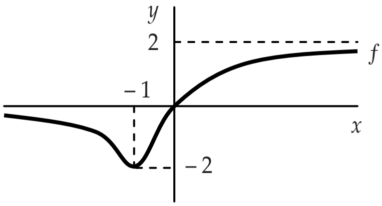
Se dice que una función $f : D \to \mathbb{R}$ está:

- **Acotada superiormente** si existe un número real M, llamado **cota superior**, tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in D$. La menor de las cotas superiores se llama **supremo** y si se alcanza en algún punto del dominio se llama **máximo**.
- **Acotada inferiormente** si existe un número real m, llamado **cota inferior**, tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in D$. La mayor de las cotas inferiores se llama **ínfimo** y si se alcanza en algún punto del dominio se llama **mínimo**.

Cuando la función está acotada superior e inferiormente se dice, simplemente, que está **acotada**.

EJEMPLO 2

La función f, cuya gráfica aparece en la figura, es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$. Está acotada con ínfimo y mínimo -2, que lo alcanza en $x = -1$, y con supremo 2, que no lo alcanza (luego no tiene máximo).



2.2. OPERACIONES CON FUNCIONES

2.2.1. Operaciones algebraicas

Dadas dos funciones f y g se pueden considerar las siguientes operaciones algebraicas entre ellas:

- **Suma o diferencia:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, con dominio $D(f \pm g) = D(f) \cap \cap D(g)$.
- **Producto por un número real:** $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, con dominio $D(\alpha f) = D(f)$.
- **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$, con dominio $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.
- **Cociente:** $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, con dominio $D(f/g) = D(f) \cap D(g) - \{x : g(x) = 0\}$.

2.2.2. Composición de funciones

Dadas dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$, se define la **composición** $g \circ f$, que se lee «f compuesto con g», como la función $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Para que x pertenezca al dominio de $g \circ f$ es necesario que pertenezca al dominio de f y que $f(x)$ pertenezca al dominio de g.

$$D(g \circ f) = \{x : x \in D(f) \text{ y } f(x) \in D(g)\}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

En general:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

2.2.3. Función inversa

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función con imagen $I = f(D)$, se llama **función inversa** a $f^{-1} : I \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = y$ siempre que $f(y) = x$. Para que la función inversa esté bien definida es necesario que f no tome el mismo valor en dos valores distintos de la variable independiente, es decir, es necesario que sea inyectiva. Se verifican las siguientes propiedades:

$$(f \circ f^{-1})\,(x) = (f^{-1} \circ f)\,(x) = x \qquad\qquad (f^{-1})^{-1} = f$$

La gráfica de una función y la de su función inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Para hallar la función inversa de $y = f(x)$ basta seguir el siguiente algoritmo:

- Partiendo de $y = f(x)$, se despeja x en función de y: $x = f^{-1}(y)$.
- En la expresión obtenida, se intercambian x e y: $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 3

Dadas las funciones $f(x) = 2 - \sqrt[3]{1 - x}$ y $g(x) = (2 - x)^3$, hallar las expresiones de $g \circ f$ y f^{-1}.

.../...

.../...

Solución

$$(g \circ f)\,(x) = g(f(x)) = (2 - f(x))^3 = [2 - (2 - \sqrt[3]{1-x})]^3 = (\sqrt[3]{1-x})^3 = 1 - x$$

$$y = 2 - \sqrt[3]{1-x} \xrightarrow[\text{Se despeja } x]{} x = 1 - (2-y)^3 \xrightarrow[\text{Se intercambian } x \text{ e } y]{} y = f^{-1}(x) = 1 - (2-x)^3$$

2.3. FUNCIONES ELEMENTALES

Son funciones elementales las siguientes:

- **Funciones polinómicas:** $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_{0.}$

  El dominio es $\mathbb{R}$. Si $n \geq 1$ no están acotadas, aunque lo pueden estar superior o inferiormente.

- **Funciones racionales:** $f(x) = P(x)/Q(x)$.

  Su dominio es toda la recta real excepto aquellos valores de x que anulan el denominador.

- **Funciones exponenciales:** $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

  El dominio es toda la recta real y la imagen el intervalo $(0, +\infty)$. Son siempre crecientes cuando $a > 1$ y siempre decrecientes cuando $0 < a < 1$.

- **Funciones logarítmicas:** $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

  Son las funciones inversas de las exponenciales. El dominio es el intervalo $(0, +\infty)$ y la imagen $\mathbb{R}$. Son siempre crecientes cuando $a > 1$ y siempre decrecientes cuando $0 < a < 1$.

- **Funciones trigonométricas:** $y = \text{sen } x$, e $y = \cos x$.

  El dominio de las funciones seno y coseno es toda la recta real y la imagen el intervalo $[-1, 1]$. A partir de estas funciones se definen, mediante operaciones algebraicas, el resto:

$$y = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} \quad y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad y = \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

- **Funciones trigonométricas inversas.**

  Puesto que sen$(x + 2k\pi)$ = sen x, la función seno no es inyectiva y, por tanto, no admite función inversa. Sin embargo, limitando su dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, la función seno es inyectiva y tiene inversa, que es la función y = arcsen x, cuyo dominio es el intervalo $[-1, 1]$ e imagen el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Análogamente se definen las funciones inversas del resto de funciones trigonométricas.

EJEMPLO 4

Hallar el dominio de las funciones:

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1} \qquad\qquad g(x) = \text{arcsen}\,(x^2 - 1)$$

Solución

El logaritmo solo está definido para valores positivos. Imponiendo dicha condición:

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)\,(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ o } x > 1$$

ya que la parábola $y = (x + 1)\,(x - 1)$ es positiva fuera del intervalo determinado por sus puntos de corte con el eje de abscisas. Por tanto, $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Para hallar el dominio de g se impone la condición de que el arco seno solo está definido para valores comprendidos entre – 1 y 1:

$$-1 \le x^2 - 1 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x^2 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le |x| \le \sqrt{2}$$

Por tanto, el dominio de g es $D(g) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

EJEMPLO 5

El precio de cada bloque de cierta materia es proporcional al cuadrado de su peso. Se dispone de un bloque de 20 kg que cuesta 800 euros. Si el bloque se rompe en dos trozos,

.../...

.../...

expresar su valor en función del tamaño de uno de ellos. ¿Cuál es el dominio de la función obtenida? Representarla gráficamente y probar que cualquier ruptura produce depreciación. ¿Cuál es la partición que produce máxima depreciación?

Solución

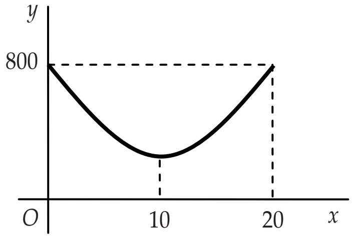
El precio de un bloque de x kg es $P(x) = kx^2$, siendo:

$$P(20) = k \cdot 20^2 = 400k = 800 \Rightarrow k = 2$$

Por tanto, el precio de un bloque de x kg es $P(x) = 2x^2$ euros. Si el bloque de 20 kg se rompe en dos trozos, de tamaños x y $20 - x$, su precio es:

$$f(x) = P(x) + P(20 - x) = 2x^2 + 2(20 - x)^2 = 4(x^2 - 20x + 200)$$

Puesto que x es el peso de un trozo originado de un bloque de 20 kg, el dominio de f es $D = [0, 20]$. La representación gráfica de f es una parábola con la curvatura hacia arriba, con $f(0) = f(20) = 800$ y, por simetría, con vértice en $x = 10$, como se observa en la figura.



$f(x) < f(0)$, para todo $x \in (0, 20) \Rightarrow$ cualquier ruptura deprecia.

La máxima depreciación ocurre en $x = 10$, es decir, cuando el bloque se parte en dos trozos iguales.

3. LÍMITES DE FUNCIONES

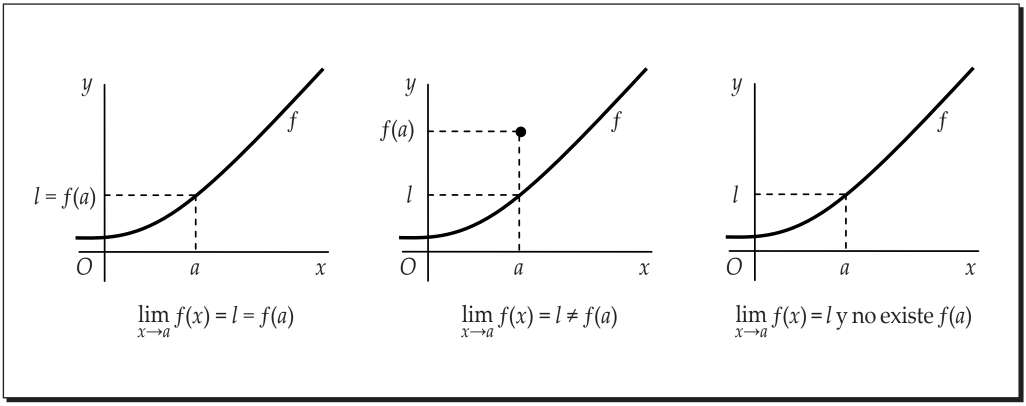
3.1. DEFINICIONES

3.1.1. Límite de una función en un punto

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$ (aunque no, necesariamente, en el punto). Intuitivamente, se dice que f tiene **límite** l en el punto a si $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a a, y se indica:

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = l$$

Como se ilustra en la figura, la existencia de límite y su valor son independientes de que la función esté definida en el punto y de su valor en dicho punto.



Formalmente, se dice que f tiene **límite** l en el punto a si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

3.1.2. Límites laterales

A veces, como ocurre con las funciones definidas a trozos, al hallar el límite de una función en un punto hay que considerar por separado los casos en que x tiende a a por la izquierda (con valores menores que a) y por la derecha (con valores mayores que a).

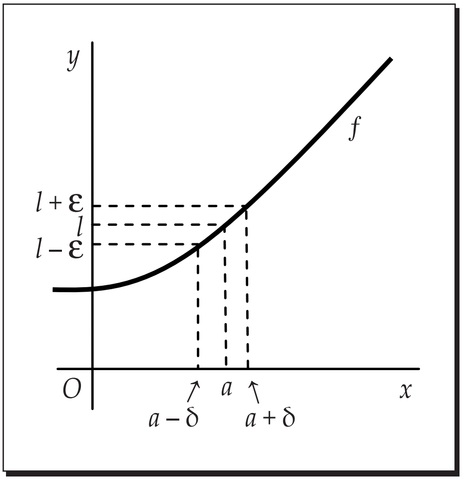
Los **límites laterales** se representan así:

- Por la izquierda:

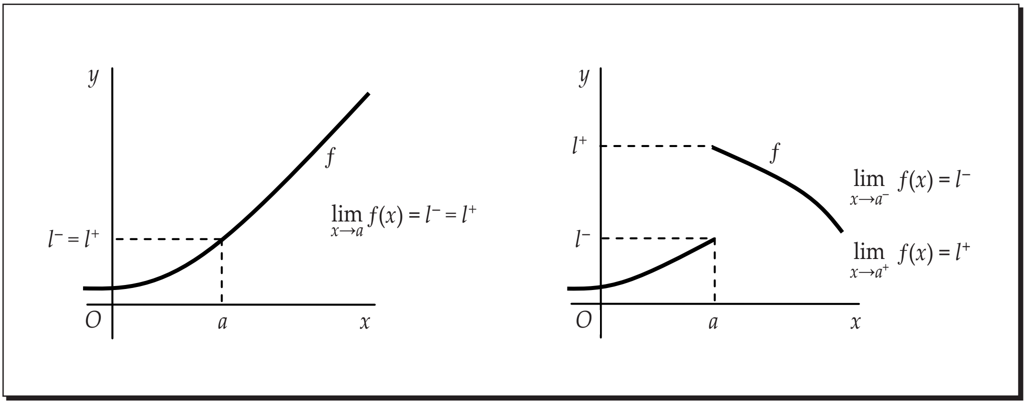
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

- Por la derecha:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$



Obviamente, existe el límite de una función en un punto si y solo si existen los límites laterales y coinciden.



3.1.3. Límites infinitos

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$ (aunque no, necesariamente, en el punto). Se dice que f tiene **límite** $+\infty$ en el punto a si $f(x)$ se hace mayor que cualquier número positivo cuando x tiende a a.

Formalmente:

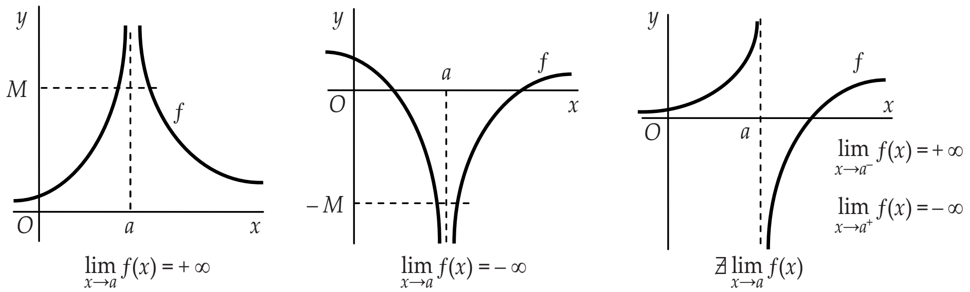
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{Para todo } M > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } f(x) > M \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta$$

Se dice que f tiene **límite** $-\infty$ en el punto a si $f(x)$ se hace menor que cualquier número negativo cuando x tiende a a.

Formalmente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{Para todo } M > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } f(x) < -M \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta$$

Análogamente se definen los límites laterales infinitos. Los límites infinitos se presentan con frecuencia en puntos donde la función no está definida.



EJEMPLO 6

Calcular los límites de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $x = 0$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $x = 1$

Solución

a) Cuando x tiende a 0, x^2 tiende a 0 con valores positivos y su inversa tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

b) En este caso, cuando x tiende a 1 por la izquierda, $x - 1$ tiende a 0 con valores negativos y su inverso a $-\infty$, y cuando x tiende a 1 por la derecha, $x - 1$ tiende a 0 con valores positivos y su inverso a $+\infty$. En consecuencia:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

3.1.4. Límites en el infinito

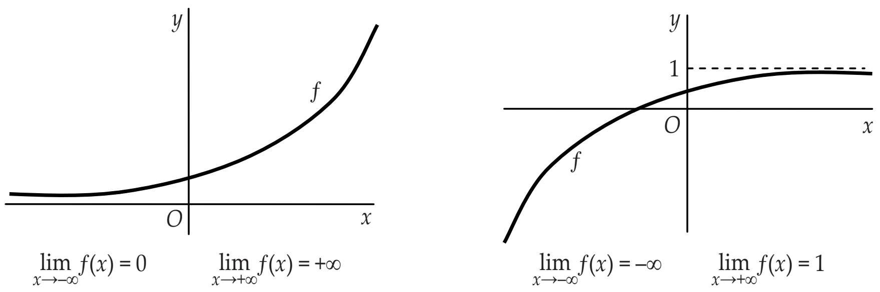
Si $y = f(x)$ es una función definida en un entorno de $+\infty$ [es decir, en un intervalo de la forma $(R, +\infty)$], se define su **límite en** $+\infty$, según el caso, como:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff$ Para todo $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x > k$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff$ Para todo $M > 0$ existe $k > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $x > k$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff$ Para todo $M > 0$ existe $k > 0$ tal que $f(x) < -M$ cuando $x > k$

De forma análoga se define el **límite en** $-\infty$.



EJEMPLO 7

Calcular los siguientes límites:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ en $+\infty$ b) $g(x) = x^2 + 1$ en $-\infty$

Solución

Cuando x se hace muy grande, $2x$ es aproximadamente el doble de $x + 1$, y cuando x se hace muy grande con valores negativos, $x^2 + 1$ se hace más grande con valores positivos. Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

3.1.5. Propiedades algebraicas de los límites

El límite de las operaciones algebraicas entre funciones se puede reducir a las mismas operaciones con los límites de las funciones que intervienen:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=F\\[2ex] \lim\limits_{x\to a} g(x)=G\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=F\pm G & \lim\limits_{x\to a} kf(x)=kF & \\[2ex] \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=FG & \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{F}{G} & \lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=F^G\end{array}\right.$$

siempre que no se presente alguna de las siguientes indeterminaciones:

$$\infty-\infty \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

No son indeterminaciones, siendo su valor el indicado, las siguientes:

$$\begin{array}{lllll} l+\infty=\infty & l\cdot\infty=\infty,\ \text{si } l\neq 0 & \infty\cdot\infty=\infty & 0^{\infty}=0 & l^{\infty}=0,\ \text{si } 0\leq l<1\\[2ex] \infty+\infty=\infty & \dfrac{l}{0}=\pm\infty,\ \text{si } l\neq 0 & \dfrac{\infty}{l}=\pm\infty & \dfrac{l}{\infty}=0 & l^{\infty}=\infty,\ \text{si } l>1\end{array}$$

3.2. CÁLCULO DE LÍMITES

3.2.1. Cálculo elemental de límites

Por **cálculo elemental de límites** se entiende el cálculo que ya se ha trabajado en bachillerato y que se resume en los límites de las funciones elementales (que se exponen a continuación) y las reglas básicas para resolver indeterminaciones (algunas de las cuales se trabajan en el ejemplo que sigue).

- Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a) \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = \pm\infty$$

donde $a_n x^n$ es el sumando de mayor grado, que se llama **término director**.

- Los límites de las funciones racionales son:

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}\text{, si } Q(a)\neq 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}0, & \text{si } n<m\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & \text{si } n=m\\ \pm\infty, & \text{si } n>m\end{cases}$$

- Los límites de las funciones exponenciales son:

$$\lim_{x\to c}a^x=a^c \qquad \lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, & \text{si } a>1\\ 0, & \text{si } 0<a<1\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+}a^x=\begin{cases}1, \text{ si } a>1\\ 1, \text{ si } 0<a<1\end{cases}$$

- Los límites de las funciones logarítmicas son:

$$\lim_{x\to c}\log_a x=\log_a c\text{, si } c>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty, \text{ si } a>1\\ -\infty, \text{ si } 0<a<1\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+}\log_a x=\begin{cases}-\infty, \text{ si } a>1\\ +\infty, \text{ si } 0<a<1\end{cases}$$

- Los límites de las funciones trigonométricas seno y coseno:

$$\lim_{x\to a}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a \qquad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

No existen los límites en el infinito, pues ambas funciones oscilan indefinidamente entre – 1 y 1.

- Los límites de la forma 1^∞ se calculan teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e\text{ si } \alpha(x)\xrightarrow[x\to a]{}\pm\infty$$

También se puede aplicar la siguiente regla:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=(1^{\pm\infty})=e^{\alpha} \qquad \text{donde} \qquad \alpha=\lim_{x\to a}g(x)\,[f(x)-1]$$

Observación

Las expresiones que se escriben después de un límite, entre paréntesis, son una notación, que, en general, no indican operaciones aritméticas, sino la forma de una posible indeterminación.

EJEMPLO 8

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(2x^2+7x+5)^2} \qquad \lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x+1}}{1-x^2} \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Solución

En todos ellos se presenta indeterminación que se resuelve mediante métodos con los que el alumno debe estar familiarizado desde los estudios de bachillerato. Así, en el primero de ellos se simplifica, en el segundo se multiplica por el conjugado y en el tercero se utiliza el término director.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(2x^2+7x+5)^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)^2\,(2x+5)^2} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \left[\frac{-2}{9(2x+5)} + \frac{-2}{3(2x+5)^2} + \frac{1}{9(x+1)} \right] =$$

$$= \begin{cases} -\infty, \text{ si } x \to -1^- \\ +\infty, \text{ si } x \to -1^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x\to 3} \frac{(2-\sqrt{x+1})\,(2+\sqrt{x+1})}{(x-3)\,(2+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{4-(x+1)}{(x-3)\,(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{2+\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4-3x+1}}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4}}{-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3}x^2}{-x^2} = -\sqrt{3}$$

.../...

.../...

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = (1^{\infty}) = e^{\alpha} \\ \alpha = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-1\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)\,(x+1)} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{1/2}$$

EJEMPLO 9

Calcular los límites cuando x tiende a 0 de las funciones $f(x) = e^{1/x}$ y $g(x) = e^{-1/x^2}$.

Solución

Cuando x tiende a 0 con valores negativos, $1/x$ tiende a $-\infty$, y la exponencial de base mayor que 1 tiende a 0 cuando su exponente tiende a $-\infty$. Sin embargo, cuando x tiende a 0 con valores positivos, $1/x$ tiende a $+\infty$, y la exponencial de base mayor que 1 tiende a $+\infty$ cuando su exponente tiende a $+\infty$. El otro límite, al estar x elevado a cuadrado, no depende de su signo.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = \left(e^{1/0^-} = e^{-\infty}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = \left(e^{1/0^+} = e^{+\infty}\right) = +\infty \end{array}\right. \qquad \lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \left(e^{-1/0^+} = e^{-\infty}\right) = 0$$

Observación

Como se recordará de bachillerato, el número e es el límite de la suma infinita:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Su valor aproximado es 2,718281…, siendo bautizado por Euler como número e. Es muy importante en matemáticas la función exponencial con base en dicho número, que se representa indistintamente por cualquiera de las expresiones $e^x = \exp(x)$, siendo esta última muy utilizada en informática.

Leonhard Euler. Nació en Basilea en 1707, hijo de un pastor protestante aficionado a las matemáticas. A los 14 años ingresó en la Universidad de Basilea donde se doctoró e inició su actividad investigadora. En 1727 se incorporó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde permaneció hasta 1741, año en que ingresó en la Academia de Berlín, para volver en 1766 a San Petersburgo.

Euler es uno de los más grandes matemáticos de toda la historia y, sin duda, el más prolífico. La edición de sus obras completas comenzó en 1911 y cuando concluya tendrá más de 60 volúmenes. A Euler se debe la fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$, que incluye las cinco constantes más importantes de la matemática. Murió en San Petersburgo en 1783.

3.2.2. Dos reglas para el cálculo de límites

En el cálculo de límites son muy útiles las dos reglas que se exponen a continuación. La primera de ellas es evidente y la segunda se puede deducir fácilmente a partir de la primera.

- **Regla del sándwich.** El límite de una función comprendida entre otras dos que tienen el mismo límite coincide con este:

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ en un entorno de } a \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = l$$

- El producto de una función acotada por otra con límite 0 también tiene límite 0:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ acotada en un entorno de } a \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

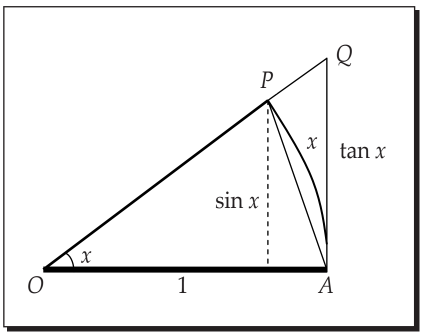
3.2.3. Un límite muy importante

Como se observa en la figura:

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$



Puesto que tanto cos x como 1 tienden a 1 cuando x tiende a 0, de la regla del sándwich se deriva el siguiente importante límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y, en general:} \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Aplicando fórmulas trigonométricas, es muy fácil deducir los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

y los análogos que se obtienen al sustituir (como en el seno) x por cualquier función con límite 0.

3.3. INFINITÉSIMOS E INFINITOS

3.3.1. Infinitésimos

Se dice que una función $f(x)$ es un **infinitésimo** en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Dos infinitésimos en un mismo punto son comparables cuando existe el límite de su cociente, y entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow f \text{ es un } \textbf{infinitésimo de orden mayor} \text{ que } g \\ l \neq 0 & \Rightarrow f \text{ y } g \text{ son dos } \textbf{infinitésimos del mismo orden} \\ \pm\infty & \Rightarrow f \text{ es un } \textbf{infinitésimo de orden menor} \text{ que } g \end{cases}$$

3.3.2. Infinitésimos equivalentes

Dos infinitésimos comparables cuyo cociente tiende a 1 se llaman **infinitésimos equivalentes**:

$$f \text{ y } g \text{ son } \textbf{infinitésimos equivalentes} \text{ en } x = a \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

La equivalencia entre dos infinitésimos se indica $f \sim g$. Son infinitésimos equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} \alpha(x) \sim \alpha(x) \sim \operatorname{arcsen} \alpha(x) & 1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}\, \alpha(x)^2 \\ \tan \alpha(x) \sim \alpha(x) \sim \arctan \alpha(x) & \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \end{array} \right\} \quad \text{Cuando } \alpha(x) \to 0$$

De la última equivalencia se deduce también que $\ln \alpha(x) \sim \alpha(x) - 1$, cuando $\alpha(x) \to 1$.

En el cálculo de límites de funciones que se expresan en forma de productos y cocientes, se pueden sustituir factores infinitésimos por otros equivalentes.

EJEMPLO 10

Calcular, usando infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Solución

En ambos casos, se identifica la indeterminación y se aplican infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\,(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \dfrac{1}{2} x^2}{x^3 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{\ln \sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{3} \ln x}{\dfrac{1}{2} \ln x} = \frac{2}{3}$$

3.3.3. Infinitos

Se dice que una función $f(x)$ es un **infinito** en $x = a$ si $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$, lo que es equivalente a que $1/f(x)$ sea un infinitésimo en el punto. Dos infinitos en un mismo punto son comparables cuando existe el límite de su cociente, y entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow f \text{ es un } \textbf{infinito de orden menor} \text{ que } g \\ l \neq 0 & \Rightarrow f \text{ y } g \text{ son dos } \textbf{infinitos del mismo orden} \\ \pm\infty & \Rightarrow f \text{ es un } \textbf{infinito de orden mayor} \text{ que } g \end{cases}$$

Los polinomios y las funciones exponenciales y logarítmicas, de base mayor que 1, son infinitos en + ∞. Al compararlos se obtiene, para cualesquiera a, $b > 1$, que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log_b x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{\log_b x} = \pm\infty$$

Es decir, la exponencial es un infinito de orden superior a los polinomios y estos de orden superior a los logaritmos. En el cálculo de límites, una suma o diferencia de infinitos puede sustituirse por el sumando de orden superior.

EJEMPLO 11

Hallar los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de la función $f(x) = \dfrac{e^x - \ln|x| + x^2}{e^x + \ln|x| - x}$.

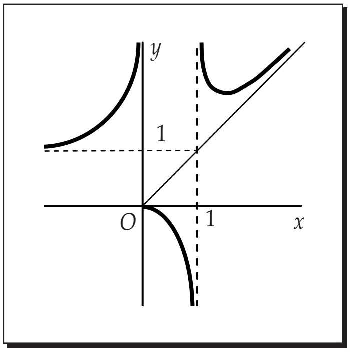
Solución

En $+\infty$, el infinito de orden superior es la exponencial, y en $-\infty$ el polinomio. Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \ln|x| + x^2}{e^x + \ln|x| - x} = \left(\frac{\infty - \infty + \infty}{\infty + \infty - \infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - \ln|x| + x^2}{e^x + \ln|x| - x} = \left(\frac{0 - \infty + \infty}{0 + \infty + \infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$

3.4. ASÍNTOTAS



Se llama **asíntota** de una función a cualquier recta a la que se acerca indefinidamente su gráfica en el infinito. Las asíntotas, como las rectas, pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.

Para la función cuya gráfica aparece en la figura:

- La recta $x = 0$ es asíntota vertical por la izquierda.
- La recta $x = 1$ es asíntota vertical por ambos lados.

- La recta $y = 1$ es asíntota horizontal en $-\infty$.
- La recta $y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$.

En general:

- La recta $x = a$ es **asíntota vertical** de una función si alguno de sus límites laterales en dicho punto es infinito.
- La recta $y = l$ es **asíntota horizontal** de una función si su límite en $+\infty$ o en $-\infty$ es l.
- La recta $y = mx + n$ es **asíntota oblicua** si el límite en $+\infty$ o en $-\infty$ de la diferencia entre la función y la recta es 0. Para que $y = mx + n$ sea asíntota oblicua de $f(x)$ es necesario que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0, \pm\infty \qquad \text{y que} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = n$$

Observación

Es fácil comprobar que si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional, entonces:

- Si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, la función tiene asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$. En particular, cuando el grado del numerador es menor, la asíntota es $y = 0$.
- Si el grado del numerador supera en una unidad al del denominador, la función tiene asíntota oblicua en $+\infty$ y en $-\infty$. Su expresión coincide con el cociente de la división.
- Si la diferencia entre el grado del numerador y el del denominador es mayor que 1, la función no tiene asíntota horizontal ni oblicua.
- Las posibles asíntotas verticales ocurren en los puntos donde se anula el denominador.

EJEMPLO 12

Hallar todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{(x-1)^2}$.

.../...

Sumario

.../...

Solución

El denominador se anula en $x = 1$, y $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2}{(x-1)^2} = +\infty$.

Por tanto, $x = 1$ es asíntota vertical. Puesto que el grado del numerador es 3 y el del denominador 2, la función admite asíntota oblicua, que es el cociente de la división: $y = x + 2$.

EJEMPLO 13

Juan compra 10 acciones de la compañía A, que cotiza en bolsa a 6,26 euros la acción, y un cierto número de acciones de la compañía B, que cotiza a 4,37 euros la acción.

a) Expresar el valor promedio de cada acción de Juan en función de las acciones que compra de la compañía B y hacer un esbozo de la gráfica de la función obtenida.

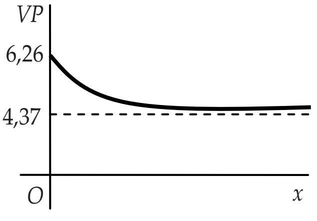
b) Justificar que comprando cierto número de acciones de B el valor promedio puede llegar a ser 5 euros. ¿Podría el valor promedio llegar a ser de 4,37 euros?

Solución

a) Si compra 10 acciones a 6,26 euros y x acciones a 4,37 euros, el valor promedio es:

$$VP(x) = \frac{10 \cdot 6{,}26 + x \cdot 4{,}37}{10 + x} = \frac{4{,}37x + 62{,}6}{x + 10}, \; x \geq 0$$

Es una función racional cuyo denominador se anula en $x = -10$, que no pertenece al dominio, luego no admite asíntotas verticales (no puede tender a ∞ en ningún punto). Sin embargo, al tener el numerador y el denominador el mismo grado, admite asíntota horizontal en $+\infty$, que es:



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4{,}37x + 62{,}6}{x + 10} = 4{,}37 \;\Rightarrow\; \text{A.H.: } y = 4{,}37$$

La función vale 6,26 en $x = 0$ y, al aumentar x, va disminuyendo, acercándose a la asíntota, a la que nunca corta:

$$\frac{4{,}37x + 62{,}6}{x + 10} = 4{,}37 \;\; \text{No tiene solución (contradicción)}$$

.../...

.../...

b) Como se acaba de ver, el valor promedio nunca puede llegar a ser de 4,37 euros, pero sí puede llegar a ser de 5 euros. El número de acciones que tiene que comprar a B es:

$$VP(x) = \frac{4{,}37x + 62{,}6}{x + 10} = 5 \Leftrightarrow 4{,}37x + 62{,}6 = 5x + 50 \Leftrightarrow x = \frac{62{,}6 - 50}{5 - 4{,}37} = 20 \text{ acciones}$$

4. CONTINUIDAD

4.1. DEFINICIONES

Intuitivamente, una función es continua en un punto cuando su gráfica se puede trazar alrededor del punto sin levantar el lápiz del papel. Una definición más formal es la que sigue.

4.1.1. Continuidad de una función en un punto

Se dice que la función $y = f(x)$ es **continua** en el punto $x = a$ si en dicho punto existen y coinciden el límite y el valor de la función, es decir, si:

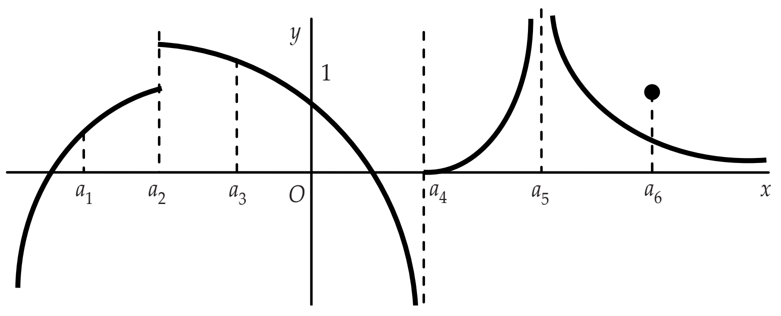
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

4.1.2. Tipos de discontinuidad

Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una discontinuidad en el punto, que puede ser:

- **Discontinuidad evitable.** Si existe y es finito el límite de la función.
- **Discontinuidad esencial.** Si no existe o es infinito alguno de los límites laterales de la función.
- **Discontinuidad de salto.** Si existen y son finitos los límites laterales, pero son distintos.

La función cuya gráfica aparece en la figura presenta una discontinuidad evitable en $x = a_1$ y $x = a_6$, una discontinuidad esencial en $x = a_4$ y $x = a_5$, una discontinuidad de salto en $x = a_2$, y es continua tanto en $x = a_3$ como en el resto de puntos que no han sido considerados.



Cuando una función presenta una discontinuidad evitable en un punto se puede redefinir en dicho punto para que sea continua:

$$f(x) \text{ discontinuidad evitable en } x = a \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), & \text{si } x = a \end{cases} \text{ es continua en } x = a$$

EJEMPLO 14

Estudiar la continuidad en $x = 0$ de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Solución

La función $f(x) = 1/x$ presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$, ya que sus límites laterales por la izquierda y por la derecha son $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente.

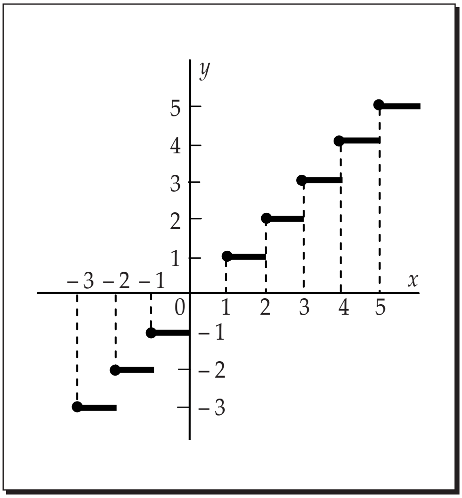
La función $g(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$, ya que:

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = (0 \cdot \text{acotado}) = 0 \text{ y, entonces, } \tilde{g}(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ es continua en } x = 0$$

4.1.3. Continuidad lateral

Cuando el límite de la función en un punto no existe, pero alguno de los límites laterales coincide con el valor de la función, se dice que la función es **continua por el lateral** correspondiente.

Así, por ejemplo, la función parte entera $f(x) = \lfloor x \rfloor$, que asigna a cada número real x el mayor número entero menor o igual que x, es continua en todos los números no enteros y discontinua en todos los enteros, puntos en los que presenta una discontinuidad de salto, siendo continua por la derecha.



4.1.4. Propiedades de la continuidad

- Todas las funciones elementales son continuas en su dominio de definición.
- La suma, diferencia y producto de funciones continuas es una función continua.
- El cociente de funciones continuas es continuo en aquellos puntos donde no se anula el denominador.
- Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, la función $g \circ f$ es continua en a.

EJEMPLO 15

El accidente de un barco petrolero provoca el vertido al mar de una gran cantidad de petróleo, de cuya recogida se encarga el Gobierno. El tanto por ciento de petróleo recuperado a los t años del vertido viene dado por la función:

$$T(t) = \begin{cases} 75t^2, & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{100t}{t+a}, & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

…/…

.../...

a) Encontrar el valor de a para que esta función pueda representar este fenómeno de forma real. ¿Qué tanto por ciento se ha recogido al año de la catástrofe?

b) Hallar el límite de la función en $+\infty$ e interpretar el resultado. ¿Cuándo se elimina el 96 por 100 del vertido?

Solución

a) La función debe ser continua, para lo que los límites laterales deben coincidir:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 1^-} T(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} 75t^2 = 75 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} T(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{100t}{t+a} = \dfrac{100}{1+a} \end{array}\right. \Rightarrow \quad 75 = \frac{100}{1+a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{100}{75} - 1 = \frac{1}{3}$$

Al año de la catástrofe se recogió $T(1) = 75$, es decir, el 75 por 100 del petróleo.

b) El límite de la función en $+\infty$ es:

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{100t}{t+1/3} = 100$$

Nunca se llegará a recoger la totalidad del petróleo (el 100 %), aunque se podrá recoger tanto como se quiera con tal de mantener el dispositivo de recogida el tiempo necesario. Para eliminar el 96 % hay que esperar:

$$T(t) = \frac{100t}{t+1/3} = 96 \quad \Leftrightarrow \quad 100t = 96t + 32 \quad \Leftrightarrow \quad t = 8 \text{ años}$$

EJEMPLO 16

Estudiar la continuidad (clasificando sus discontinuidades) de la función:

$$f(x) = \frac{(x^3-1)\, e^{-1/x}}{x-1}$$

Solución

La función es continua en su dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. En los puntos de discontinuidad los límites son:

.../...

.../...

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0-1}{0-1} \lim_{x\to 0^-} e^{-1/x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0-1}{0-1} \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1} \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = e^{-1}\left(\frac{0}{0}\right) = e^{-1} \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = 3e^{-1}$$

de donde se deduce que la discontinuidad en $x = 0$ es esencial y en $x = 1$ evitable.

4.2. PROPIEDADES

De la idea intuitiva de función continua en un punto, como aquella que se traza alrededor del punto sin levantar el lápiz del papel, se deduce que si una función es positiva en un punto en el que es continua, entonces es también positiva en todo un entorno del punto. Más en general, se tiene:

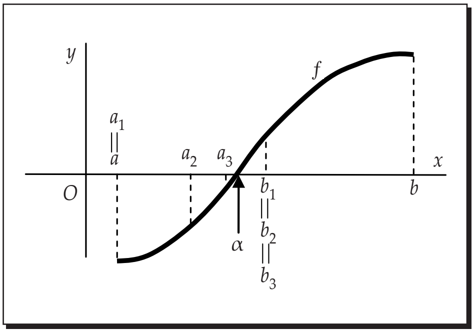
4.2.1. Teorema del signo de una función continua

Si f es una función continua en a y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de a en el que el signo de $f(x)$ coincide con el signo de $f(a)$.

Para una demostración más formal de este resultado se puede consultar la bibliografía recomendada. Como una consecuencia de lo anterior, se obtiene el siguiente resultado:

4.2.2. Teorema de Bolzano

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y toma signo contrario en los extremos del intervalo, es decir, si $f(a)\,f(b) < 0$, entonces existe un $\alpha \in (a, b)$ donde $f(\alpha) = 0$.



Esquema de la demostración. Se considera el punto medio del intervalo donde se comprueba si la función se anula. Si es así, entonces α es el punto buscado, y si no se anula, entonces la función toma signo contrario en los extremos de alguno de los dos intervalos en que α divide al intervalo inicial. A dicho intervalo se le llama $[a_1, b_1]$ y se le aplica el mismo razonamiento anterior, y así sucesivamente.

Con este proceso, conocido como **método de bipartición**, se llega hasta encontrar el punto donde se anula la función o a aproximarse al punto tanto como se desee.

4.2.3. Aplicación del teorema de Bolzano al cálculo aproximado de raíces de una ecuación

El teorema de Bolzano se puede usar en ecuaciones para conocer la existencia de raíces y, aplicando el **método de bipartición**, para hallarlas aproximadamente. Para ello, dada la ecuación $f(x) = 0$, se aplica el siguiente algoritmo numérico para hallar una raíz con un error menor que cierto ε dado:

- Se busca un intervalo $[a, b]$ donde f sea continua y verifique que $f(a)\,f(b) < 0$.
- Hasta que $f((a + b)/2) = 0$ o hasta que $b – a < 2\varepsilon$, se realiza lo siguiente:
  - Se calcula $f((a + b)/2)$.
  - Si $f((a + b)/2) \neq 0$, se comprueba si es $f(a)\,f((a + b)/2) < 0$, en cuyo caso el nuevo valor de b es $(a + b)/2$, o es $f((a + b)/2)\,f(b) < 0$, en cuyo caso el nuevo valor de a es $(a + b)/2$, y dicho intervalo será el nuevo intervalo $[a, b]$.
- Con un error menor que ε, una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es $\alpha = (a + b)/2$.

EJEMPLO 17

Demostrar que la ecuación $x^3 + x = 1$ tiene al menos una raíz. Hallarla con un error menor que 0,01.

Solución

Una raíz de la ecuación es cualquier punto donde se anula la función $f(x) = x^3 + x – 1$. Puesto que $f(0) = – 1$, $f(1) = 1$ y la función es siempre continua, se puede aplicar el teorema de Bol-

.../...

.../...

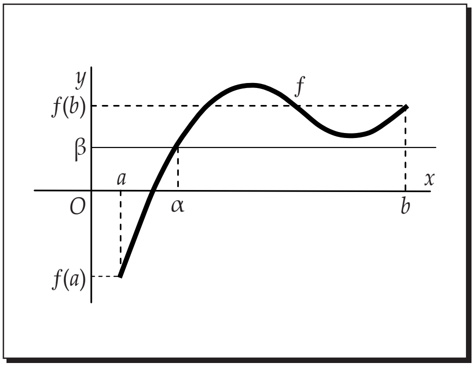
zano en el intervalo [0, 1] y existirá un $\alpha \in (0, 1)$ donde $f(\alpha) = 0$, es decir, que es raíz de la ecuación. El resultado de aplicar el algoritmo anterior a la ecuación se puede resumir en la siguiente tabla, donde en la columna del extremo izquierdo del intervalo (a) se indica el signo que tiene la función, al igual que en el extremo derecho (b). El algoritmo se para cuando en la columna que indica la amplitud del intervalo se obtiene $b - a < 2\varepsilon = 0{,}02$, lo que ocurre en el paso 6, y se obtiene que una raíz de la ecuación con un error menor que 0,01 es $\alpha = 0{,}6796875$.

Paso	a $(f < 0)$	b $(f > 0)$	$b - a$	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	0	1	1	0,5	– 0,375
1	0,5	1	0,5	0,75	0,171875
2	0,5	0,75	0,25	0,625	– 0,130859375
3	0,625	0,75	0,125	0,6875	0,012451171875
4	0,625	0,6875	0,0625	0,65625	– 0,061126708984375
5	0,65625	0,6875	0,03125	0,671875	– 0,024829864501953125
6	0,671875	0,6875	0,015625	**0,6796875**	

4.2.4. Teorema de los valores intermedios de Darboux

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, para cualquier β comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = \beta$.

Esquema de la demostración. Esta propiedad es una generalización del teorema de Bolzano, ya que afirma que una función continua no solo toma el valor 0 cuando $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo contrario, sino que tiene que tomar todos los valores comprendidos entre los valores de sus extremos. Para la demostración, basta aplicar el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - \beta$.



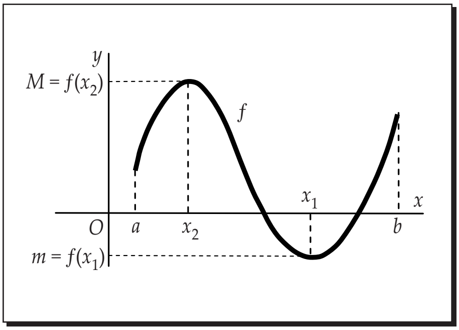
Un resultado básico para la resolución de los importantes problemas aplicados de optimización es el que asegura la existencia de los valores extremos de una función continua.

4.2.5. Teorema del máximo-mínimo de Weierstrass

Toda función continua $f(x)$ definida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo, es decir, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que:

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$$

para todo $x \in [a, b]$.



Karl Weierstrass. Nació en 1815 en Ostenfelde (Alemania), hijo de un oficial de Napoleón.

En 1839 comenzó sus estudios de matemáticas. Sus primeros años de docencia los ejerció en enseñanza secundaria, hasta que en 1854 se dio a conocer con un trabajo sobre funciones por el que recibió el doctorado honorífico de la Universidad de Königsberg. En 1856 fue aceptado como profesor asociado en la Universidad de Berlín. Se le considera padre del análisis moderno, y a él se deben las definiciones actuales de límite, continuidad y derivada. Tras los ataques públicos de Kronecker por su apoyo a las ideas de Cantor, y la muerte de su amiga Sofía Kovalevskaya, sufrió una crisis mental, pasando el resto de su vida en una silla de ruedas.

Murió, víctima de una neumonía, en 1897 en Berlín.

Sofía Kovalevskaya. Nació en 1850 en Moscú en el seno de una rica familia.

Pronto se sintió atraída por las matemáticas, lo que la llevó a casarse a los 18 años para irse a Alemania. Allí se entrevistó con el famoso matemático Weierstrass, que le propuso varios problemas difíciles. Le llevó la solución de todos a la semana siguiente. A partir de entonces recibió siempre su apoyo.

Se doctoró en matemáticas en Göttingen en 1874 y fue nombrada profesora de la Universidad de Estocolmo, siendo, en 1889, la primera mujer matemática en conseguir un puesto vitalicio.

En 1891, de visita en Francia, le sobrevino un resfriado, que se agravó con el frío de Estocolmo y la llevó a la muerte en 1891.

ANEXO

ANOTACIONES ELEMENTALES SOBRE COMPLEJOS

1. TIPOS DE NÚMEROS

Antes de ver los números complejos repasamos los tipos de números que existen.

1.1. NÚMEROS NATURALES

Los números naturales, que denotaremos por $\mathbb{N}$, se definen como la sucesión ilimitada de 0, 1, 2, 3 … Es decir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$

Con estos números se puede efectuar la operación aritmética más sencilla que es la de contar. Otras operaciones fundamentales que se pueden establecer con ellos es la adición y la multiplicación, que siempre son posibles, pues siempre nos dan un número natural como resultado (son operaciones cerradas).

Estas operaciones permiten la existencia de las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:** $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativa:** $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- **Existencia de elemento neutro:** $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$.

Además, se pueden establecer las relaciones de igualdad, mayor que o menor que, mayor o igual que y menor o igual que.

Hay infinitos números naturales.

1.2. NÚMERO ENTEROS

Los números enteros, cuyo conjunto denotaremos con $\mathbb{Z}$, estarán compuestos por los naturales más sus equivalentes de signo negativo – 1, – 2, – 3 … Es decir:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6 \ldots\}$$

Este conjunto de números nos permite introducir la operación inversa a la suma que es la sustracción, de tal modo que su resultado siempre esté en $\mathbb{Z}$. Otra operación interesante que se puede introducir es la de valor absoluto, de tal modo que $|a| = a$ si $a \geq 0$ y $|a| = -a$ si $a < 0$. Sin embargo, la operación de dividir, que es la inversa de la multiplicación, solo puede llevarse a cabo en $\mathbb{Z}$ y cuando el dividendo es múltiplo del divisor.

Hay infinitos números enteros.

1.3. NUMEROS RACIONALES

Para levantar la restricción en la división vista anteriormente se introducen fracciones de la forma $\frac{m}{n}$, siempre que $n \neq 0$. Los números formados de este modo serán los números fraccionarios. El conjunto de los números fraccionarios más los números enteros formarán el conjunto de los números racionales, cuyo conjunto denotaremos con $\mathbb{Q}$.

Todo número racional admite una notación decimal constituida por un número finito de cifras decimales o una infinidad de ellas, pero en este último caso una secuencia de cifras finita se repite periódicamente y en el mismo orden de manera indefinida.

Hay infinitos números racionales.

La raíz cuadrada produce a veces resultados que no pueden expresarse como una fracción. Números como $\sqrt{2}$, π o e no son racionales, pues sus infinitos decimales no tienen el patrón mencionado antes. Estos últimos son denominados números irracionales. Hay infinitos números irracionales.

1.4. NÚMEROS REALES

Los números reales, cuyo conjunto denotaremos con $\mathbb{R}$, formarán el conjunto constituido por los racionales más los irracionales. Hay infinitos números reales. Aunque el conjunto de los naturales, enteros y racionales tienen el mismo cardinal (infinito), cada uno de estos tienen un cardinal menor que el del conjunto $\mathbb{R}$. Se puede afirmar que el infinito que define el tamaño de esos conjuntos es menor que el infinito que define el tamaño de $\mathbb{R}$.

Los números reales se pueden representar gráficamente como puntos en la recta real.

Los números irracionales serán simplemente el conjunto real menos el conjunto de los racionales. Es decir, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

En $\mathbb{R}$ tenemos bien definidas la adición, multiplicación, sustracción, división, potencia y logaritmo, salvo las siguientes excepciones:

- La visión por cero.
- La elevación de un número negativo a potencia fraccionaria irreducible con denominador par, o potencia irracional.
- La obtención de logaritmos de números negativos, de base igual a 1 o negativa.

Es decir, para que $\alpha^{\frac{m}{n}}$ esté definido dentro de los reales con $\alpha < 0$, entonces n no puede ser par.

Así, por ejemplo, $(-2)^{3/2} \notin \mathbb{R}$ y tampoco están definidos dentro de los reales objetos como $(-2)^{\pi}$. También ocurrirá con expresiones como $\log_{10}(-3) \notin \mathbb{R}$.

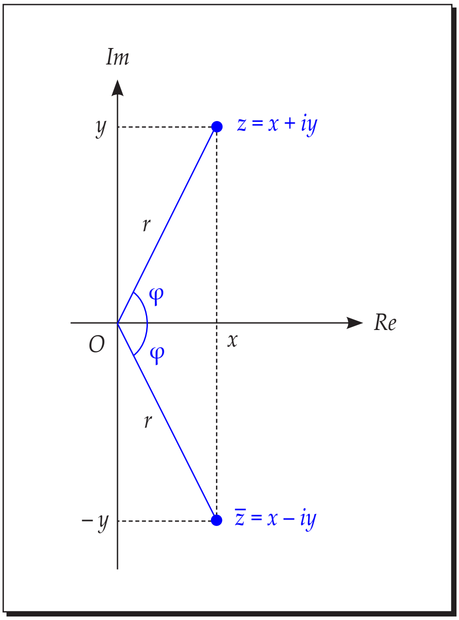
1.5. NÚMEROS COMPLEJOS

Para poder considerar las excepciones que hemos visto en $\mathbb{R}$ hay que considerar un conjunto mayor que es el de los números complejos y que, a su vez, contiene a $\mathbb{R}$. A este conjunto se le denota con $\mathbb{C}$.

Así, por ejemplo, la operación $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, pues no hay ningún número real que multiplicado por él mismo dé -4. Pero podemos escribir $(-4)^{1/2} = 2 \cdot \sqrt{-1} = 2i$ y decir que es un número imaginario. Denotaremos a la raíz cuadrada de -1 con i, lo que nos ayudará a expresar los números complejos. Obviamente tenemos que $i^2 = -1$. Los números imaginarios solo pueden pertenecer a $\mathbb{C}$. El conjunto $\mathbb{C}$ contendrá a $\mathbb{R}$ y a los números imaginarios.

Los números complejos tienen, en general, parte real e imaginaria. Se suele simbolizar un número complejo del siguiente modo:

$$z = x + iy,$$



en donde el primer componente es la parte real de z o $Re(z)$ y el segundo componente la parte imaginaria o $Im(z)$. Los números imaginarios puros serán aquellos que no tienen parte real y serán de la forma $z = yi$.

Los números complejos se pueden representar gráficamente en el plano complejo de tal modo que el eje de abscisas corresponde a la parte real y el eje de ordenadas a la parte imaginaria. El complejo conjugado de un número complejo en concreto es él mismo, pero con el signo entre las dos partes cambiado. Es decir, el complejo conjugado de $z = x + iy$ es $z^* = \overline{z} = x - iy$.

1.5.1. Operaciones básicas

Otra forma de representar un número complejo es $z = a + bi$ o bien como $z = c + di$. Según esta notación se pueden establecer las siguientes operaciones:

- **Suma:**

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$$

- **Sustracción:**

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\, i$$

- **Multiplicación:**

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

- **División:**

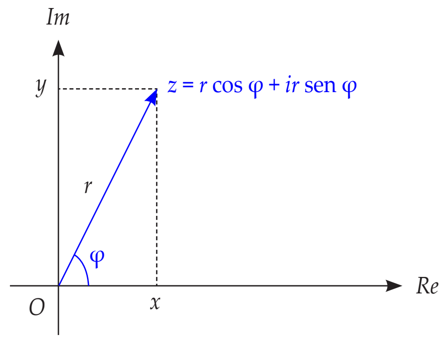
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i$$

1.5.2. Forma polar

Un número complejo siempre se puede expresar de forma polar sin más que tener en cuenta un poco de trigonometría:

$$z = x + iy = r\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = r\cos\varphi + ir\operatorname{sen}\varphi$$

que gráficamente, sobre el plano complejo, es así:



El módulo de z será $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{zz^*} = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)}$ y el argumento o fase será φ, que expresada en función de las partes real e imaginaria es igual a:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$

Además, se puede escribir un número complejo en forma exponencial gracias a las siguientes relaciones:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi,$$

que son las identidades de Euler. La periodicidad de estas expresiones será 2π, pues:

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2kn)},$$

siendo k entero.

Esto no es más que dar vueltas sobre el diagrama anterior, pues para 2π (una vuelta completa) estaremos en el mismo punto de partida, y así sucesivamente.

Un resultado curioso viene de tomar $\varphi = \pi$ que es $e^{i\pi} = -1$ y que reescrito nos da una expresión que relaciona varios números singulares:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

1.5.3. Propiedades

Se pueden ahora escribir las funciones trigonométricas en función de la exponencial del siguiente modo:

$$\text{sen } \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\tan \varphi = -i \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}$$

Además, se puede escribir la forma polar de una manera compacta usando la exponencial:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \text{ sen } \varphi) = r \cos \varphi + ir \text{ sen } \varphi = re^{i\varphi}$$

Las operaciones básicas en forma polar son triviales si tenemos en cuenta las propiedades trigonométricas. Así, por ejemplo, la multiplicación será:

$$[r_1 (\cos \varphi_1 + i \text{ sen } \varphi_1)] \cdot [r_2 (\cos \varphi_2 + i \text{ sen } \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \text{ sen } (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

y esto mismo se puede escribir con notación exponencial del siguiente modo:

$$(r_1\, e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2\, e^{i\varphi_2}) = r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Con esta notación exponencial la división es obvia:

$$\frac{r_1\, e^{i\varphi_1}}{r_2\, e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

La potencia, en la que interviene un número real p, viene dada por el teorema de Moivre:

$$[r\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^p = r^p\,(\cos p\varphi + i \operatorname{sen} p\varphi)$$

que en notación exponencial es:

$$(re^{i\varphi})^p = r^p\, e^{ip\varphi}$$

La raíz n-ésima de un número completo será:

$$[r\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

siendo k un entero cualesquiera, de tal modo que se pueden obtener n raíces n-ésimas distintas de un número complejo. En notación exponencial es:

$$(r\, e^{i\varphi})^{1/n} = r^{1/n}\, e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$$

Es trivial calcular el logaritmo natural de un complejo si consideramos la notación exponencial:

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\,(\varphi + 2k\pi)$$

siendo k un entero.

Estas fórmulas nos sirven para calcular las raíces impares o logaritmos de números reales negativos. Así, por ejemplo, si nos piden calcular el logaritmo natural de $-e^2$, sabemos que no tiene sentido en los reales, pero sí en $\mathbb{C}$. Ese número se puede escribir como $-e^2 = e^2\, e^{i\pi}$, ya que está sobre el eje real negataivo, φ es por tanto π y su módulo es $r = e^2$. Por tanto:

$$\ln(-e^2) = \ln(e^2\, e^{i\pi}) = \ln(e^2) + i\,(\pi + 2k\pi) = 2 + i\,(\pi + 2k\pi), \text{ siendo } k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

1.5.4. Ejercicios

1. Calcular $(2 + 3i) + (1 - 2i)$.

Solución: $3 + i$

2. Calcular $(5 + 2i) - (1 - 6i)$.

Solución: $4 + 8i$

3. Calcular el siguiente producto: $(1 + 2i) \cdot (2 - 3i)$.

Solución: $8 + i$

4. Calcular las raíces complejas de $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Solución: $x = 1 \pm i\sqrt{2}$

5. ¿Cuál es el módulo de $3 + 4i$?

Solución: 5

6. Calcular $\sqrt{2i}$.

Solución: $1 + i$

7. Calcular $\sqrt{-5 - 12\,i}$.

Solución: $2 - 3i$

8. Calcular y expresar en forma exponencial la expresión $\sqrt{1 + i}$.

Solución: $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$

9. Calcular el logaritmo natural de $-e^{-i\pi/2}$.

Solución: $\ln(-e^{-i\pi/2}) = \dfrac{i\pi}{2}$

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Funciones elementales.
- Acotación de conjuntos y funciones.
- Límites de funciones.
- Infinitésimos, infinitos y asíntotas.
- Continuidad y tipos de discontinuidad.
- Teorema del máximo-mínimo de Weierstrass.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Hallar el dominio de las funciones:

a) $y = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$

b) $y = \sqrt{\ln \dfrac{5x - x^2}{4}}$

Enunciado 2

El propietario de una finca pretende cerrar un recinto rectangular que se encuentra junto al río. Dispone de 100 m de cerca, y no es necesario cercar el lado que se encuentra a lo largo del río. Expresar el área del recinto en función de la longitud x de los lados perpendiculares al río. ¿Cuál es el dominio de la función obtenida? A partir de la representación gráfica de la función obtenida, estimar las dimensiones del recinto que producen mayor área.

Enunciado 3

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x + 1)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 2}{3x + 1} \right)^x$

d) $\lim_{x \to 0} 2^{-1/x}$

Enunciado 4

Calcular, usando infinitésimos equivalentes:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{2x^2 + 5x}$

b) $\lim_{x \to +\infty} x \sin \dfrac{1}{x}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\text{sen } x}{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}$

Enunciado 5

Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 + x^2 - 2x}$

b) $g(x) = \ln(x^2 - x)$

Enunciado 6

El precio por kilo de un determinado producto viene dado con relación al número de kilos que se venden por la función:

$$p(x) = \begin{cases} ax + 20, \text{ si } x \leq 10 \\ \dfrac{3x}{x-8}, \text{ si } x > 10 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de a para que no exista una cantidad crítica de compra (donde el precio del kilo sufra un salto brusco).

b) Hallar el límite de la función $p(x)$ cuando $x \to +\infty$ e interpretar el resultado.

Enunciado 7

Estudiar la continuidad (clasificando sus discontinuidades) de la función:

$$f(x) = \frac{(x-1)\, e^{1/x}}{x^3 - 1}$$

Enunciado 8

Demostrar que la ecuación $2x^3 + 5x = 13$ tiene al menos una raíz y utilizar el método de bipartición para hallarla con un error menor que 0,01.

Solución 1

a) $[-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

b) $[1, 4]$

Solución 2

$A(x) = 2x(50 - x)$; $D(A) = (0, 50)$; Mayor área cuando $x = 25$.

Solución 3

a) 5

b) 1

c) $e^{1/3}$

d) $+\infty$ por la izquierda y 0 por la derecha.

Solución 4

a) 3/5

b) 1

c) 0

Solución 5

a) A.V.: $x = 0$ y $x = 1$. A.H.: $y = 0$

b) A.V.: $x = 0$ y $x = 1$

Solución 6

a) $a = -1/2$

b) El límite es 3, que es donde se acerca el precio por kilo en compras muy grandes.

Solución 7

Es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. La discontinuidad en $x = 0$ es esencial y en $x = 1$ es evitable.

Solución 8

El valor aproximado de una raíz de la ecuación es $x \simeq 1{,}430091834$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, A. et ál. (1994). *Cálculo I*. Madrid: Clagsa.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo I*. Madrid: McGraw-Hill.

Mata, A. y Reyes, M. *Apuntes de cálculo*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo.