UNIDAD
DIDÁCTICA

5

SUCESIONES Y SERIES

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Sucesiones numéricas
    - 1.1. Definiciones y propiedades
        - 1.1.1. Sucesión de números reales
        - 1.1.2. Límite de una sucesión
        - 1.1.3. Carácter de una sucesión
        - 1.1.4. Tipos de sucesiones
        - 1.1.5. Propiedades
        - 1.1.6. Subsucesiones y propiedades
    - 1.2. Cálculo de límites de sucesiones
        - 1.2.1. Límites de operaciones con sucesiones
        - 1.2.2. Límites de sucesiones como límites de funciones
        - 1.2.3. Sucesiones equivalentes
        - 1.2.4. Infinitos. Jerarquía de infinitos
        - 1.2.5. Dos reglas para el cálculo de límites
        - 1.2.6. Criterio de Stolz
    - 1.3. Sucesiones recurrentes
2. Series numéricas
    - 2.1. Definiciones y propiedades
        - 2.1.1. Serie de números reales

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Determinar la convergencia o divergencia de una sucesión numérica y saber calcular límites.
- Hallar límites usando sucesiones equivalentes y jerarquía de infinitos.
- Saber decidir cuándo una serie recurrente es convergente y hallar su límite.
- Saber sumar las series telescópicas y geométricas.
- Conocer y aplicar los criterios de convergencia de las series numéricas.
- Hallar límites puntuales de sucesiones de funciones.
- Conocer y aplicar el criterio de la mayorante para la convergencia de una serie de funciones.
- Saber calcular el campo de convergencia de una serie de potencias.
- Calcular series de potencias de funciones.
- Saber el concepto de serie de Fourier clásica.
- Determinar las series trigonométricas en modo complejo.
- Aplicar el concepto de serie de Fourier para conocer la convergencia de diferentes series.

1. SUCESIONES NUMÉRICAS

1.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

1.1.1. Sucesión de números reales

Se llama **sucesión de números reales** a cualquier lista infinita ordenada de números reales:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Se suele representar por $\{a_n\}$. Una sucesión se puede interpretar también como una aplicación $n \to a_n$ donde la expresión, si existe, de cada término en función del lugar que ocupa, $a_n = f(n)$, se llama **término general** de la sucesión.

EJEMPLO 1

Hallar el término general de:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

b) $2, -4, 6, -8, 10, -12, \ldots$

c) $12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

Solución

a) Cada término de la sucesión es el inverso del lugar que ocupa, luego, su término general es:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

b) Cada término es el doble del lugar que ocupa y los signos son alternos, luego:

$$a_n = (-1)^{n+1}\, 2n$$

.../...

.../...

c) Cada término se obtiene dividiendo el anterior por 2, luego:

$$a_n = \frac{12}{2^{n-1}} = 24 \cdot 2^{-n}$$

1.1.2. Límite de una sucesión

Intuitivamente, se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene **límite** ℓ (que puede ser un número real, $-\infty$ o $+\infty$) si a_n tiende a ℓ cuando n tiende a infinito, y se indica:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \qquad \text{o} \qquad \lim_{n} a_n = \ell \qquad \text{o} \qquad a_n \to \ell$$

Formalmente,

$$\lim_{n} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } \vartheta \text{ tal que } (n > \vartheta \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

$$\lim_{n} a_n = +\infty \iff \text{Para todo } M > 0 \text{ existe } \vartheta \text{ tal que } (n > \vartheta \Rightarrow a_n > M)$$

$$\lim_{n} a_n = -\infty \iff \text{Para todo } M > 0 \text{ existe } \vartheta \text{ tal que } (n > \vartheta \Rightarrow a_n < -M)$$

El límite de una sucesión, si existe, **es único**. Las sucesiones con límite cero se llaman **infinitésimos**.

1.1.3. Carácter de una sucesión

- Una sucesión es **convergente** si tiene límite finito.
- Una sucesión $\{a_n\}$ es **divergente** si la sucesión $\{|a_n|\}$ tiende a $+\infty$.

  Observa que son divergentes las sucesiones con límite $+\infty$ y con límite $-\infty$, pero también lo son ciertas sucesiones sin límite como, por ejemplo, la sucesión: 1, – 2, 3, – 4, 5, – 6, …
- Una sucesión es **oscilante** si no es convergente ni divergente. Por ejemplo: 1, – 1, 1, –1, …

1.1.4. Tipos de sucesiones

- La sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** si existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Una sucesión es **monótona** cuando es monótona creciente o monótona decreciente.

Las siguientes propiedades son muy intuitivas. Para su demostración consultar bibliografía.

1.1.5. Propiedades

- Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
- Toda sucesión monótona y no acotada es divergente.
- Toda sucesión convergente está acotada.

1.1.6. Subsucesiones y propiedades

Se llama **subsucesión** de la sucesión $\{a_n\}$ a cualquier sucesión $\{a_{nk}\}$ donde $n_1 < n_2 < \ldots$, es decir, cualquier sucesión formada por términos elegidos arbitrariamente en orden creciente de ubicación.

Las siguientes propiedades son también muy intuitivas (para demostración, consultar bibliografía):

- Toda subsucesión de una sucesión convergente (divergente) es una sucesión convergente (divergente) y el límite es el mismo.
- Toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente.
- Toda sucesión admite una subsucesión que es convergente o divergente.

Puesto que una sucesión oscilante contiene subsucesiones convergentes, tiene sentido definir los límites de estas como **límites de oscilación** de la primera. Así, por ejemplo, 1, – 1 y + ∞ son límites de oscilación de la sucesión: 1, – 1, 1, 1, –1, 2,1 , – 1, 3, 1, –1, 4, 1, –1, 5, 1, – 1, 6, …

1.2. CÁLCULO DE LÍMITES DE SUCESIONES

1.2.1. Límites de operaciones con sucesiones

Si $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$, entonces:

$$a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b \qquad a_n b_n \rightarrow ab \qquad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \qquad {a_n}^{b_n} \rightarrow a^b$$

siempre que no se presente alguna de las siguientes **indeterminaciones**:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

1.2.2. Límites de sucesiones como límites de funciones

Una sucesión es un caso particular de función que solo toma valores en los números naturales, y por tanto:

$$\text{Si} \quad a_n = f(n) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{entonces} \quad \lim_n a_n = \lim_n f(n) = \ell$$

Esta observación permite usar en el cálculo de límites de sucesiones, de las que se conoce su término general, todas las técnicas usadas en el cálculo de límites de funciones, incluso la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 2

Hallar el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{n}$

d) $a_n = \dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots}$

.../...

.../...

Solución

En el primer caso se multiplica por el conjugado, en el segundo se aplica L'Hôpital, en el tercero se reduce al segundo al tomar logaritmos y en el cuarto se consideran órdenes de infinitud:

$$\text{a) } \lim_n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = (\infty-\infty) = \lim_n \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{b) } \lim_n \frac{\ln n}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{c) } \lim_n \ln \sqrt[n]{n} = \lim_n \frac{\ln n}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \sqrt[n]{n} = e^{\lim\limits_n \ln \sqrt[n]{n}} = e^0 = 1$$

$$\text{d) } \lim_n \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots} = \lim_n \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \begin{cases} \pm\infty, \text{ si } p > q \\ \dfrac{a_p}{b_p}, \text{ si } p = q \\ 0 \ , \text{ si } p < q \end{cases}$$

1.2.3. Sucesiones equivalentes

Se dice que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **sucesiones equivalentes** si $\lim\limits_n \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, y se indica $a_n \sim b_n$.

Las siguientes equivalencias de sucesiones, excepto la fórmula de Stirling, son consecuencia de la equivalencia de infinitésimos:

- Si $a_n \to 0$, son equivalentes:

$$\text{sen } a_n \sim a_n \sim \text{arcsen } a_n \qquad (1+a_n)^p \sim 1 + p a_n \qquad \ln(1+a_n) \sim a_n$$

$$\tan a_n \sim a_n \sim \arctan a_n \qquad 1-\cos^2 a_n \sim \frac{a_n^2}{2} \qquad e^{a_n} - 1 \sim a_n$$

- Si $a_n \to 1$, son equivalentes:

$$\ln a_n \sim a_n - 1 \qquad \sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln a \qquad (a > 0)$$

Fórmula de Stirling: $n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n} = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

En el cálculo de límites, en productos y cocientes se pueden sustituir sucesiones por otras equivalentes. En particular, la fórmula de Stirling se utiliza para hallar el límite de sucesiones que involucran factoriales.

EJEMPLO 3

Hallar el límite de las siguientes sucesiones:

$$a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}; \qquad b_n = n^2 (e^{-1/n^2} - 1); \qquad c_n = \frac{2^n}{n!}$$

Solución

En las dos primeras se utilizan sucesiones equivalentes y en la tercera la fórmula de Stirling:

$$\lim_n n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = (\infty \cdot 0) \overset{SE}{=} \lim_n n \frac{1}{n} = \lim_n 1 = 1$$

$$\lim_n n^2 (e^{-1/n^2} - 1) = (\infty \cdot 0) \overset{SE}{=} \lim_n n^2 \frac{-1}{n^2} = \lim_n (-1) = -1$$

$$\lim_n \frac{2^n}{n!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{St}{=} \lim_n \frac{2^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \lim_n \left(\frac{2e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = (0^\infty \cdot 0 = 0 \cdot 0) = 0$$

1.2.4. Infinitos. Jerarquía de infinitos

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es un **infinito** si es divergente, es decir, si $\lim_n |a_n| = \infty$.

Dados dos infinitos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se establece su jerarquía según el límite del cociente:

$$\lim_n \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow\ a_n \text{ es } \textbf{infinito de orden inferior a } b_n \\ \ell \neq 0, \infty & \Rightarrow\ a_n \text{ y } b_n \text{ son } \textbf{infinitos del mismo orden} \\ \infty & \Rightarrow\ a_n \text{ es } \textbf{infinito de orden superior a } b_n \end{cases}$$

Si a_n es un infinito de orden inferior a b_n, se indica $a_n \ll b_n$. La jerarquía de infinitos en las sucesiones es la misma que en las funciones:

$$\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n \qquad (p > 0,\ a > 1)$$

En el cálculo de límites se puede sustituir una suma o diferencia de infinitos por aquel que tiene jerarquía superior (siempre que solo exista un sumando con dicha jerarquía superior).

EJEMPLO 4

Hallar el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3 + n^2} - (\ln n)^{13}}{n\sqrt{n+1}}$$

Solución

El numerador es la suma de dos infinitos, uno polinómico y otro logarítmico, siendo el polinomio de orden superior. Por tanto:

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^3 + n^2} - (\ln n)^{13}}{n\sqrt{n+1}} = \lim_n \frac{\sqrt{n^3 + n^2}}{n\sqrt{n+1}} = \lim_n \frac{\sqrt{n^3}}{n\sqrt{n}} = 1$$

1.2.5. Dos reglas para el cálculo de límites

En el cálculo de límites de sucesiones son muy útiles las dos reglas que ya se vieron en la Unidad didáctica 1, epígrafe 3.2.2, para el cálculo de límites de funciones:

- **Regla del sándwich.** El límite de una sucesión comprendida entre otras dos que tienen el mismo límite coincide con este:

$$\left.\begin{array}{l} b_n \le a_n \le c_n \\ \lim\limits_n b_n = \lim\limits_n c_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_n a_n = \ell$$

- El producto de una sucesión acotada por otra con límite cero también tiene límite cero:

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\} \text{ acotada} \\ \lim\limits_n b_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_n a_n b_n = 0$$

EJEMPLO 5

Calcular el límite de las sucesiones:

$$a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \operatorname{sen} \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \operatorname{sen} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}\left[\left(\frac{n^3+3n^2+\ln n}{n!}\right)^n\right]$$

Solución

La primera sucesión está formada por n sumandos, de los que el mayor es el primero y el menor el último (si los ángulos disminuyen, sus senos también). Por tanto, esa suma será mayor o igual que n veces el último sumando y menor o igual que n veces el primer sumando, es decir:

$$n \operatorname{sen} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \le a_n \le n \operatorname{sen} \frac{1}{n+\sqrt{1}}$$

Puesto que las dos sucesiones de los extremos tienen el mismo límite:

$$\lim_n n \operatorname{sen} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = (\infty \cdot 0) \overset{SE}{=} \lim_n \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{n}{n} = 1$$

.../...

.../...

y análogamente:

$$\lim_n n \operatorname{sen} \frac{1}{n + \sqrt{1}} = 1$$

se usa la regla del sándwich para concluir que:

$$\lim_n \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \operatorname{sen} \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \ldots + \operatorname{sen} \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right) = 1$$

En la otra sucesión, basta observar que el seno, por muy complicado que sea el ángulo, está siempre acotado por 1, y está multiplicado por una sucesión que tiende a cero:

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \left[\left(\frac{n^3 + 3n^2 + \ln n}{n!} \right)^n \right] = (0 \cdot \text{acotado}) = 0$$

1.2.6. Criterio de Stolz

Si $\{b_n\}$ es monótona divergente, o $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son infinitésimos con $\{b_n\}$ monótona, entonces:

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

siempre que este último límite exista.

El criterio de Stolz se utiliza con frecuencia para resolver indeterminaciones de cocientes en los que el numerador o denominador es suma de n sumandos.

También, aplicando el criterio de Stolz, se pueden probar los siguientes tres criterios para el cálculo de límites (aplicables cuando el último límite existe):

- **Criterio de la media aritmética:**

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_n a_n$$

- **Criterio de la media geométrica:**

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1\, a_2 \, \ldots \, a_n} = \lim_n a_n$$

- **Criterio de la raíz:**

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

EJEMPLO 6

Hallar los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$

c) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2}{n^2+1}}$

d) $\sqrt[n]{n}$

Solución

En la primera se aplica el criterio de Stolz, en la segunda y tercera los criterios de las medias, y en la última el criterio de la raíz:

a) $$\lim_n \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} \overset{Stolz}{=}$$

$$\overset{Stolz}{=} \lim_n \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}{\ln n - \ln(n-1)} =$$

$$= \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{\ln \frac{n}{n-1}} \overset{SE}{=} \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n-1}-1} = \lim_n \frac{n-1}{n} = 1$$

.../...

.../...

b) $\lim_n \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} = \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ como se vio en el ejemplo 2 c) y se verá en d).

c) $\lim_n \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2}{n^2+1}} = \lim_n \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$

d) $\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n \dfrac{n+1}{n} = 1$

1.3. SUCESIONES RECURRENTES

Se dice que $\{a_n\}$ es una **sucesión recurrente** cuando sus términos vienen definidos en función de los que la preceden.

La sucesión recurrente más conocida es la **sucesión de Fibonacci**:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2 \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

Sus primeros términos son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Puesto que para cada $n > 2$, $a_n \geq a_{n-1} + 1$, la sucesión de Fibonacci es divergente con límite $+\infty$.

Leonardo de Pisa, Fibonacci. Nació en Pisa en 1170, siendo más conocido por el apodo de Fibonacci. Vivió con su padre en el norte de África, donde aprendió el sistema árabe de numeración, y viajó por los pueblos del Mediterráneo, estudiando con los matemáticos árabes. A su vuelta a Pisa, en 1202, publicó su libro *Liber abaci*, en el que presentaba el sistema de numeración árabe, que se utiliza en la actualidad, la descomposición en factores primos y criterios de divisibilidad, así como la sucesión que lleva su nombre, que aparece como solución a un problema de cría de conejos. Este libro causó un gran impacto en Europa, siendo huésped del emperador Federico II. En 1240, la República de Pisa le concede un salario permanente hasta su muerte, en Pisa, en 1250.

En general, para estudiar la convergencia y hallar el límite en sucesiones recurrentes, se puede proceder como se indica a continuación:

- Probar que la sucesión es monótona y acotada, de donde se deduce (véase epígrafe 1.1.5) que tiene límite.
- Tomar límites en la expresión de recurrencia y hallar los posibles límites con la ecuación resultante.

EJEMPLO 7

Hallar los primeros términos y el límite de la sucesión:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - a_n}\ , n \geq 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Solución

Aplicando la recurrencia, los primeros términos de la sucesión son 2, 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{5}{13}$, ...

Para estudiar la convergencia se empieza probando, por inducción, que es una sucesión decreciente:

- De los primeros términos: $a_1 > a_2$.
- Suponiendo que $a_n > a_{n+1}$, es decir, que $a_{n+1} - a_n < 0$, hay que probar que $a_{n+1} > a_{n+2}$:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_{n+1}} - \frac{1}{3 - a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{(3 - a_{n+1})\,(3 - a_n)} < 0$$

ya que el numerador es negativo, y el denominador, positivo (se está suponiendo que la sucesión es decreciente y que el primer término es 2). Por tanto, $a_{n+1} > a_{n+2}$.

Ahora hay que probar que la sucesión está acotada. Es evidente que está acotada superiormente por 2, y se va a probar por inducción que inferiormente lo está por 0:

- $a_1 = 2 > 0$.
- Suponiendo que $a_n > 0$, hay que probar que $a_{n+1} > 0$, lo que se deduce de la definición:

$$0 < a_n < 2 \ \Rightarrow\ 1 < 3 - a_n < 3 \ \Rightarrow\ \frac{1}{3} < \frac{1}{3 - a_n} < 1 \ \Rightarrow\ 0 < a_{n+1} < 2$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente y está acotada (entre 0 y 2), luego tiene límite. Si el límite es ℓ (que ha de estar comprendido entre 0 y 2), tomando límites en la expresión de recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \frac{1}{3 - \ell} \Rightarrow \ell^2 - 3\ell + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \ell = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Puesto que $\ell = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} > 2$, el límite de la sucesión es $\ell = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \simeq$ 0,382.

2. SERIES NUMÉRICAS

2.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

2.1.1. Serie de números reales

Se llama **serie numérica** o **de números reales** a la suma de los infinitos términos de una sucesión:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Para simplificar, muchas veces se indica simplemente por $\Sigma\, a_n$. Como a veces ocurre, no es necesario que la suma comience en $n = 1$, pudiéndolo hacer en otro valor cualquiera de n.

2.1.2. Carácter de una serie

Dada una serie $\Sigma\, a_n$, se llama **sucesión de las sumas parciales** a $\{S_N\}$, donde $S_N = a_1 + \ldots + a_N$ es la suma de los N primeros sumandos de la serie. Entonces:

- Si la sucesión de las sumas parciales converge a S, se dice que la **serie** es **convergente** y su **suma** es S:

$$\lim_{N} S_N = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

- Si la sucesión de las sumas parciales es divergente u oscilante, se dice que la **serie** es **divergente** u **oscilante**, respectivamente.

2.1.3. Propiedades

- Si $\Sigma\, a_n = A$, $\Sigma\, b_n = B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces: $\Sigma(a_n \pm b_n) = A \pm B$ y $\Sigma\, \lambda a_n = \lambda A$.
- Si se quitan o añaden una cantidad finita de sumandos, el carácter de la serie no varía, aunque sí la suma.
- En general, no se puede aplicar la propiedad asociativa a los sumandos de una serie.

2.1.4. Condición necesaria de convergencia

Si una serie es convergente, su término general tiende a cero: $\Sigma\, a_n$ converge $\Rightarrow a_n \to 0$.

Esta condición es necesaria pero no suficiente ($a_n \to 0 \not\Rightarrow \Sigma\, a_n$ converge), ya que hay series divergentes cuyo término general tiende a cero, por ejemplo: $\Sigma\, 1/n = \infty$.

Como consecuencia, se obtiene el siguiente **criterio para la divergencia de una serie**:

Si la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero, la serie $\Sigma\, a_n$ no converge (es divergente u oscilante).

En particular, si $a_n \to a \neq 0$, la serie $\Sigma\, a_n$ es divergente.

EJEMPLO 8

Estudiar la convergencia o divergencia de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

Solución

a) Puesto que el término general tiende a cero, esta serie puede ser convergente. Se estudia la sucesión de las sumas parciales y se observa que converge a 1:

$$S_N=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1$$

.../...

.../...

Por tanto, la serie es convergente y su suma es 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

b) El término general tiende a cero, por lo que esta serie puede ser convergente o divergente. Más adelante se verá que esta serie es convergente, pero su suma es más difícil de calcular.

c) Esta serie es divergente, ya que su término general tiende a 1:

$$\lim_{n} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1$$

d) Puesto que el término general no converge a cero (oscila entre – 1 y 1), esta serie no converge. Del estudio de la sucesión de las sumas parciales se deduce que la serie es oscilante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+1-\ldots \Rightarrow \{S_N\}=\{-1,0,-1,0,-1,0,\ldots\}$$

2.2. SERIES SUMABLES

Se estudian aquí algunos tipos de series para las que es posible calcular su suma.

2.2.1. Serie telescópica

Se llama **serie telescópica** a cualquier serie de la forma

$$\Sigma\, a_n \text{ con } a_n = b_n - b_{n+1}$$

Las sumas parciales de esta serie son:

$$S_N = a_1 + \ldots + a_N = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

De donde se deduce que la serie es convergente si el límite de $\{b_n\}$ es finito, siendo su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim_n (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_n b_n$$

EJEMPLO 9

Estudiar la convergencia, y sumar si es posible, de la serie: $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$.

Solución

Esta serie es telescópica, ya que:

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)\,(n+1)} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}$$

Las sumas parciales son:

$$S_N = a_2 + \ldots + a_N = \left(\frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3}\right) + \left(\frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{4}\right) + \left(\frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5}\right) + \left(\frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{6}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1/2}{N-2} - \frac{1/2}{N}\right) + \left(\frac{1/2}{N-1} - \frac{1/2}{N+1}\right) = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{N} - \frac{1/2}{N+1}$$

Y entonces, la serie es convergente, siendo su suma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_N \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{N} - \frac{1/2}{N+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2.2.2. Serie geométrica

Se llama **serie geométrica** a cualquier serie de la forma $\Sigma\, ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots$, con $a \neq 0$, es decir, a la serie que resulta de sumar los términos de una progresión geométrica de razón r.

Como se recordará del bachillerato, la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es infinito si $|r| > 1$ o $r = 1$; es oscilante si $r = -1$, y es finita si $|r| < 1$, en cuyo caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

EJEMPLO 10

De un intervalo cerrado de longitud unidad se quita el intervalo abierto central de longitud 1/3. Si se repite esta operación sobre cada uno de los intervalos cerrados que van quedando, quitando siempre el intervalo abierto central de longitud 1/3 del intervalo original, el conjunto que queda al final del proceso se llama **conjunto de Cantor.** ¿Cuál es la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos que se quitan? ¿Cuál es la longitud del conjunto de Cantor?

Solución

En la primera etapa se quita un intervalo de longitud $\ell_1 = 1/3$. Si a cada uno de los dos intervalos cerrados que quedan se les quita el intervalo abierto central de longitud 1/3 del intervalo original, la longitud que se quita en la segunda etapa es $\ell_2 = 2 \cdot 1/3 \cdot 1/3 = 2/9$. En la tercera etapa se parte de $4 = 2^2$ intervalos cerrados de longitud $1/9 = 1/3^2$, y la longitud que se quita es $\ell_3 = 2^2 \cdot 1/3 \cdot 1/3^2 = 2^2/3^3$.

Siguiendo así, en la etapa enésima, la longitud que se quita es $\ell_n = 2^{n-1} \cdot 1/3 \cdot 1/3^{n-1} = 2^{n-1}/3^n$. La longitud que se quita en todo el proceso es la suma de las longitudes que se quitan en todas las etapas, que es una serie geométrica de razón 2/3, cuya suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{1-2/3} = 1$$

La longitud del conjunto de Cantor es la diferencia entre la inicial y la que se quita: $1 - 1 = 0$.

2.2.3. Serie aritmético-geométrica

Se llama **serie aritmético-geométrica** a cualquier serie de la forma $\Sigma\, P(n)r^n$, donde $P(n)$ es un polinomio en n. La serie aritmético-geométrica converge siempre que $|r| < 1$, y para calcular su suma S se aplica repetidamente, hasta llegar a una serie geométrica, el hecho de que:

$$S - rS = k + \Sigma\, Q(n)r^n, \text{ donde } Q \text{ es un polinomio de grado inferior a } P$$

EJEMPLO 11

Estudiar la convergencia, y sumar si es posible, de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Solución

Se trata de una serie aritmético-geométrica de razón $r = 1/3$ y, si su suma es S, entonces:

$$S - \frac{1}{3} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots \right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \ldots \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

donde la última serie es geométrica de razón $r = 1/3$. Sumando esta serie se llega a la suma de la serie original:

$$S - \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{1/3}{1 - 1/3} \Rightarrow \frac{2}{3} S = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{3}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

2.3. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Son muy pocas las series que se pueden sumar. En la mayoría de los casos basta con saber si la serie es convergente y, en caso afirmativo, calcular su suma aproximada mediante la suma de sus primeros términos. A continuación se darán algunos de los criterios más importantes para decidir la convergencia o divergencia de una serie.

2.3.1. Criterio de comparación con la integral

Si $f(x)$ es una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la integral indefinida $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ tienen el mismo carácter (ambas son convergentes o ambas divergen).

EJEMPLO 12

Estudia el carácter de la **serie armónica**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$.

Solución

Usando el criterio de convergencia con la integral, se obtiene la divergencia de la serie:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{r\to\infty} \int_1^{r} \frac{dx}{x} = \lim_{r\to\infty} [\ln |x|]_{x=1}^{r} = \lim_{r\to\infty} (\ln r - 0) = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

2.3.2. Serie armónica generalizada

Se llama **serie armónica generalizada** a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots \quad \text{que es} \quad \begin{cases} \text{divergente, si } 0 < p \leq 1 \\ \text{convergente, si } p > 1 \end{cases}$$

Las series armónicas se utilizan con frecuencia para decidir el carácter de una serie con los dos siguientes criterios de comparación.

2.3.3. Criterio de comparación de Gauss

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n (o, al menos, para $n \geq n_0$), entonces:

- $\Sigma\, b_n$ converge $\Rightarrow$ $\Sigma\, a_n$ converge.
- $\Sigma\, a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\Sigma\, b_n$ diverge.

2.3.4. Criterio de comparación en el límite

Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son dos series de términos positivos tales que existe

$$\lim_{n} \frac{a_n}{b_n} = \ell \text{ con } 0 < \ell < \infty,$$

entonces las dos series tienen el mismo carácter (ambas convergen o ambas divergen).

EJEMPLO 13

Estudiar el carácter de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(n^3)}{n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$

Solución

En la primera se utiliza el criterio de comparación de Gauss y en la segunda en el límite:

a) $0 \leq \dfrac{\operatorname{sen}^2(n^3)}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(n^3)}{n^3}$ es convergente.

b) $\lim_n \dfrac{n/(n^2+1)}{1/n} = \lim_n \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ es divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1}$ es divergente.

2.3.5. Criterio de la raíz

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie de términos positivos tal que existe $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Entonces:

- $0 \leq \ell < 1 \;\Rightarrow\; \Sigma\, a_n$ converge.
- $\ell > 1 \;\Rightarrow\; \Sigma\, a_n$ diverge.

Si $\ell = 1$, este criterio no decide (la serie puede ser convergente o divergente).

2.3.6. Criterio del cociente

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie de términos positivos tal que existe $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Entonces:

- $0 \leq \ell < 1 \;\Rightarrow\; \Sigma\, a_n$ converge.
- $\ell > 1 \;\Rightarrow\; \Sigma\, a_n$ diverge.

Si $\ell = 1$, este criterio no decide (la serie puede ser convergente o divergente).

2.3.7. Criterio de Raabe

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie de términos positivos tal que existe $\lim\limits_n n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ell$. Entonces:

- $\ell < 1 \;\Rightarrow\; \Sigma\, a_n$ diverge.
- $\ell > 1 \;\Rightarrow\; \Sigma\, a_n$ converge.

Si $\ell = 1$, este criterio no decide (la serie puede ser convergente o divergente).

El criterio de Raabe suele decidir cuando no lo hace el criterio del cociente.

EJEMPLO 14

Estudiar el carácter de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$

Solución

En la primera se utiliza el criterio de la raíz, y en la segunda, el criterio del cociente:

a) $\lim\limits_n \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_n (\sqrt[n]{n}-1) = 1-1=0<1 \quad\Rightarrow$ la serie converge.

b) $\lim\limits_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_n \dfrac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim\limits_n \dfrac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)(n!)} =$

$= \lim\limits_n \dfrac{2}{n+1} = 0<1 \quad\Rightarrow$ la serie converge.

2.4. SERIES ALTERNADAS

2.4.1. Definición

Se dice que $\Sigma\, a_n$ es una **serie alternada** si $a_n a_{n+1} < 0$ para todo n, es decir, si es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

con $a_n > 0$ para todo n.

2.4.2. Criterio de convergencia de series alternadas

Como se ha visto en el epígrafe 2.1.4, la convergencia a cero del término general de una serie arbitraria no implica la convergencia de la serie. Sin embargo, en series alternadas sí lo implica cuando la sucesión de los valores absolutos es decreciente.

Concretamente:

$$\{|a_n|\} \text{ es decreciente y } \lim_n a_n = 0 \Rightarrow \text{ la serie alternada } \Sigma\, a_n \text{ converge}$$

2.4.3. Suma aproximada de series alternadas

Cuando una serie alternada $\Sigma\, a_n$ es convergente verificando las condiciones del criterio de convergencia anterior, su suma se puede aproximar por cualquier suma parcial con un error menor que el valor absoluto del primer término desechado:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \Rightarrow |S - S_N| \leq |a_{N+1}|$$

La aproximación es por defecto cuando el primer término desechado es positivo y por exceso cuando el primer término desechado es negativo.

EJEMPLO 15

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

En caso de convergencia, calcula su suma con un error menor o igual que una décima.

Solución

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

es alternada con sus términos decrecientes en valor absoluto y término general que tiende a cero. Por tanto, es convergente. El error cometido al aproximar la suma por una suma

.../...

.../...

parcial es menor que 0,1 cuando el primer término desechado es menor o igual que 0,1, lo que ocurre cuando se eligen los nueve primeros términos:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \simeq S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{9} = \frac{1879}{2520} \simeq 0{,}7456$$

$$\text{error} = |S - S_9| \leq \frac{1}{10} = 0{,}1$$

3. SUCESIONES DE FUNCIONES

3.1. DEFINICIÓN

Se llama **sucesión de funciones** a cualquier lista ordenada de funciones reales definidas sobre un mismo conjunto de números reales: $\{f_n(x)\} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\}$.

3.2. CONVERGENCIA PUNTUAL

Se dice que la sucesión $\{f_n(x)\}$ **converge puntualmente** a la función $f(x)$ en $A \subset \mathbb{R}$ si

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in A$$

Se llama **campo de convergencia** de una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ al conjunto de números reales donde converge puntualmente, es decir, al conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \{f_n(x)\} \text{ es convergente}\}$$

EJEMPLO 16

Estudiar la convergencia puntual de las sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = x^n$

b) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx}$

.../...

.../...

Solución

En ambos casos, se calcula el límite puntual de la sucesión para cualquier valor de x.

a) Cuando $|x| > 1$, la sucesión $\{x^n\}$ es divergente (a $+\infty$ cuando $x > 1$ y oscilando entre $+\infty$ y $-\infty$ cuando $x < -1$). En el resto de casos:

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n x^n = \begin{cases} \text{oscila entre } -1 \text{ y } 1 & , \text{si } x = -1 \\ 0 & , \text{si } |x| < 1 \\ 1 & , \text{si } x = 1 \end{cases}$$

El campo de convergencia es $A = (-1, 1]$ y la función límite es:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } -1 < x < 1 \\ 1, \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

b) Se calcula el límite puntual distinguiendo el caso en que $x = 0$.

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{nx^2}{1+nx} = \left\{ \begin{array}{ll} \lim_n 0 = 0 & , \text{si } x = 0 \\ \lim_n \dfrac{nx^2}{1+nx} = \dfrac{x^2}{x} = x & , \text{si } x \neq 0 \end{array} \right\} = x$$

El campo de convergencia es $A = \mathbb{R}$ y la función límite es $f(x) = x$.

3.3. CONVERGENCIA UNIFORME

Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a $f(x)$ en $A \subset \mathbb{R}$. Entonces:

$$\{f_n(x)\} \textbf{ converge uniformemente} \text{ a } f(x) \text{ en } A \Leftrightarrow \sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3.3.1. Continuidad, acotación e integración de la función límite

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a la función f en $A \subset \mathbb{R}$. Entonces:

- Si todas las funciones f_n son continuas, f es continua.

- Si todas las funciones f_n son acotadas, f es acotada.
- Si todas las funciones f_n son integrables en $[a, b] \subset A$, f es integrable en $[a, b]$ y

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Como consecuencia de lo anterior, si la función límite puntual de una sucesión de funciones continuas (acotadas) no es continua (acotada), la convergencia no puede ser uniforme.

EJEMPLO 17

Estudiar la convergencia uniforme de las sucesiones del ejemplo 16 en el intervalo $I = [0, 1]$.

Solución

a) Según el resultado del ejemplo 16, la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } I = [0, 1]$$

Puesto que las funciones f_n son todas continuas en I y f no es continua en I, la convergencia no puede ser uniforme en I.

¿Podría converger uniformemente en $J = [0, 1)$? En ese intervalo todas las funciones y la función límite ($f \equiv 0$) son continuas, pero la convergencia tampoco es uniforme porque no se cumple la definición:

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} = \sup\{|x^n| : 0 \leq x < 1\} = 1 \text{ que no tiende a } 0$$

ya que $x^n \to 1$ cuando $x \to 1$.

b) En este caso, tanto las funciones $f_n(x) = nx^2/(1 + nx)$ como la función límite $f(x) = x$ son continuas en $I = [0, 1]$. Para decidir si la convergencia es uniforme, se recurre a la definición:

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} = \sup\left\{\left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| : 0 \leq x \leq 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{-x}{1+nx}\right| : 0 \leq x \leq 1\right\} = \sup\left\{\frac{x}{1+nx} : 0 \leq x \leq 1\right\}$$

.../...

.../...

Puesto que:

$$\left(\frac{x}{1+nx}\right)' = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0 \Rightarrow \frac{x}{1+nx} \text{ es creciente en } [0,1] \Rightarrow \sigma_n = \frac{x}{1+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La convergencia es uniforme.

4. SERIES DE FUNCIONES

4.1. DEFINICIÓN

Se llama **serie de funciones** a la suma de los infinitos términos de una sucesión de funciones:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Para simplificar, muchas veces se indica simplemente por Σf_n. Como a veces ocurre, no es necesario que la suma comience en $n = 1$, pudiendo hacerlo en otro valor cualquiera de n.

4.2. CONVERGENCIA PUNTUAL Y UNIFORME

4.2.1. Definición

Dada una serie de funciones $\Sigma f_n(x)$, se llama sucesión de las **sumas parciales** a la sucesión de funciones $\{S_N(x)\}$, donde $S_N(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_N(x)$ es la suma de las N primeras funciones de la serie. Entonces:

- Se dice que la serie de funciones $\Sigma f_n(x)$ **converge puntualmente** a la función $S(x)$ si la sucesión de las sumas parciales converge puntualmente a dicha función.
- Se dice que la serie de funciones $\Sigma f_n(x)$ **converge uniformemente** a la función $S(x)$ en $A \subset \mathbb{R}$ si la sucesión de las sumas parciales converge uniformemente a dicha función en A.

4.2.2. Continuidad, acotación e integración de la función límite

Sea $\Sigma\, f_n(x)$ una serie de funciones que converge uniformemente a la función $S(x)$ en $A \subset \mathbb{R}$. Entonces:

- Si todas las funciones f_n son continuas, S es continua.
- Si todas las funciones f_n son acotadas, S es acotada.
- Si todas las funciones f_n son integrables en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, S es integrable en $[a, b]$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b S(x)\, dx$$

Como consecuencia de lo anterior, si la función suma de una serie de funciones continuas (acotadas) no es continua (acotada), la convergencia no puede ser uniforme.

4.2.3. Criterio mayorante de Weierstrass para la convergencia uniforme

Si $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $x \in A$ y para todo $n \geq n_0$, y la serie numérica $\Sigma\, a_n$ es convergente, entonces la serie de funciones $\Sigma\, f_n(x)$ converge uniformemente en A.

EJEMPLO 18

a) Estudiar la convergencia puntual de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$.

b) Estudiar la convergencia uniforme de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$.

Solución

a) Se trata de una serie geométrica de razón $r = \dfrac{x}{2}$, que converge cuando $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$, es decir, cuando $|x| < 2$, y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots = \frac{\dfrac{x}{2}}{1 - \dfrac{x}{2}} = \frac{x}{2-x} \text{ para todo } x \in (-2, 2)$$

.../...

.../...

b) Utilizando el criterio mayorante de Weierstrass:

$$\left| \frac{\text{sen } nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y } \Sigma \frac{1}{n^2} \text{ es convergente}$$

Por tanto, la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

5. SERIES DE POTENCIAS

5.1. DEFINICIÓN Y CONVERGENCIA

5.1.1. Definición

Se llama **serie de potencias** centrada en $x_0 \in \mathbb{R}$ a cualquier serie de funciones de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

con $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. En particular, si $x_0 = 0$, se dice que la serie de potencias está centrada en el origen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

5.1.2. Radio de convergencia

Se llama **radio de convergencia** de la serie $\Sigma\, a_n(x - x_0)^n$ al número (real o infinito) que se obtiene por cualquiera de los límites siguientes:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad\qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n} \left| \dfrac{a_n + 1}{a_n} \right|}$$

con el convenio de que $\dfrac{1}{0} = \infty$.

5.1.3. Convergencia de la serie de potencias

Si R es el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, a_n(x - x_0)^n$, entonces:

- La serie de potencias converge puntualmente si $|x - x_0| < R$, es decir, en el intervalo abierto $(x_0 - R, x_0 + R)$, llamado **intervalo de convergencia**.
- La serie de potencias diverge si $|x - x_0| > R$, es decir, en la unión de intervalos abiertos $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$.
- En $|x - x_0| = R$, es decir, en $x = x_0 \pm R$ la serie puede ser convergente o divergente (hay que estudiarlas en cada caso).
- La serie de potencias converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

5.1.4. Campo de convergencia

Se llama **campo de convergencia** de la serie $\Sigma\, a_n(x - x_0)^n$ al conjunto donde converge puntualmente. Si R es el radio de convergencia de la serie, el campo de convergencia puede ser $(x_0 - R, x_0 + R)$, $[x_0 - R, x_0 + R)$, $(x_0 - R, x_0 + R]$ o $[x_0 - R, x_0 + R]$.

EJEMPLO 19

Hallar el campo de convergencia de las series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-2)^n}{n}$

Solución

a) Se halla el radio de convergencia:

$$a_n = \frac{1}{2^n} \;\Rightarrow\; \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}} = 2$$

.../...

.../...

Puesto que $R = 2$ y la serie está centrada en $x_0 = 0$, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. Ahora hay que estudiar la convergencia de la serie en los extremos del intervalo:

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \Rightarrow \quad \text{la serie es oscilante}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{la serie diverge}$$

Por tanto, el campo de convergencia es el intervalo abierto $(-2, 2)$.

b) Se halla el radio de convergencia:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{(-1)^{n+1}/(n+1)}{(-1)^n/n} \right| =$$

$$= \lim_n \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

Puesto que $R = 1$ y la serie está centrada en $x_0 = 2$, el intervalo de convergencia es $(1, 3)$. Ahora hay que estudiar la convergencia de la serie en los extremos del intervalo:

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{la serie diverge}$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{la serie converge}$$

Por tanto, el campo de convergencia es el intervalo semiabierto $(1, 3]$.

5.1.5. Derivación e integración de series de potencias

Sea $\Sigma\, a_n(x - x_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y cuya suma es la función:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

Entonces:

- La función f es derivable y su serie de potencias es la que se obtiene derivando término a término la serie de f, es decir:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots$$

- La función f admite primitiva cuya serie de potencias se obtiene integrando término a término la serie de f, es decir:

$$\int f(x)\,dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= c + a_0(x - x_0) + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + a_2 \frac{(x - x_0)^3}{3} + \ldots$$

El radio de convergencia de las series derivada e integral es el mismo de la serie original, pero el campo de convergencia puede diferir por el comportamiento en los extremos.

EJEMPLO 20

Hallar las series de la derivada y las primitivas de la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, calculando el campo de convergencia de cada una de ellas.

¿Cuál es la expresión algebraica de f?

Solución

El radio e intervalo de convergencia de la serie de f son:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \;\Rightarrow\; R = 1 \;\Rightarrow\; \text{Intervalo convergencia: } (-1, 1)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = -1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \;\Rightarrow\; \text{converge} \qquad\qquad x = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \;\Rightarrow\; \text{diverge}$$

Por tanto, el campo de convergencia de la serie de f es el intervalo $[-1, 1)$.

.../...

.../...

Derivando la función f y su serie de potencias, se obtiene la serie de potencias de la función $f\,'$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \ldots \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

El intervalo de convergencia es el mismo de la serie de f, es decir, $(-1, 1)$, y en los extremos:

$$x = -1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \;\Rightarrow\; \text{oscila} \qquad\qquad x = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \;\Rightarrow\; \text{diverge}$$

Por tanto, el campo de convergencia de la serie de f' es el intervalo $(-1, 1)$.

Integrando la función f y su serie de potencias se obtienen las series de potencias de sus primitivas:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = c + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \ldots = c + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

El intervalo de convergencia es el mismo de la serie de f, es decir, $(-1, 1)$, y en los extremos:

$$x = -1 \;\Rightarrow\; \sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \;\Rightarrow\; \text{converge} \qquad x = 1 \;\Rightarrow\; \sum \frac{1}{n(n-1)} \sim \sum \frac{1}{n^2} \;\Rightarrow\; \text{converge}$$

Por tanto, el campo de convergencia de la serie de $\int f(x)\,dx$ es el intervalo $[-1, 1]$.

De las tres series consideradas, la de f' es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $r = x$, es decir, es una serie geométrica cuya suma se puede calcular, e integrando se puede obtener la expresión algebraica de f:

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + c$$

Se calcula el valor de la constante y se obtiene la expresión algebraica de f:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x| + c \;\underset{x=0}{\Rightarrow}\; f(0) = 0 = -\ln 1 + c \;\Rightarrow\; c = 0$$

Por tanto, la expresión algebraica de f es $f(x) = -\ln|1-x|$.

5.2. DESARROLLOS EN SERIE DE POTENCIAS

Desarrollar una función f en serie de potencias de centro x_0 es hallar una serie tal que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \text{ para } |x - x_0| < R$$

5.2.1. Serie de Taylor

Si f es infinitamente derivable en x_0, su serie de potencias es la **serie de Taylor**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Brook Taylor. Nació en Edmonton (Inglaterra) en 1685. Estudió derecho y matemáticas en la Universidad de St. John (Cambridge).

En 1712 fue elegido miembro de la Royal Society y entró a formar parte del comité para el juicio sobre las reclamaciones entre Newton y Leibniz. En 1715 publicó *Methodus incrementorum directa et inversa*, donde aparece por primera vez el cálculo de las diferencias finitas y su hoy llamada serie de Taylor, cuya importancia no fue reconocida hasta 1772.

También hizo aportaciones a los problemas de magnetismo, capilaridad y refracción astronómica.

Murió en Londres en 1731.

que es, simplemente, el polinomio de Taylor (estudiado en el epígrafe 5.3 de la Unidad didáctica 2) con infinitos términos.

EJEMPLO 21

Hallar la serie de potencias de la función $f(x) = e^x$ centrada $x = 0$ y su campo de convergencia.

Solución

Puesto que la función $f(x) = e^x$ es infinitamente derivable, se puede hallar su serie de Taylor, que se calcula a partir de sus derivadas (que son todas iguales):

$$f^{n)}(x) = e^x, \text{ para todo } n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f^{n)}(0) = 1, \text{ para todo } n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Su radio de convergencia es:

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 \ \Rightarrow \ R = \infty$$

Por tanto, su intervalo y campo de convergencia es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, es decir, la serie converge en toda la recta real.

5.2.2. Series de potencias de algunas funciones elementales

Para hallar series de potencias se recurre a la serie de Taylor, a la serie geométrica y a las propiedades de derivación e integración de series de potencias. Algunas de ellas, con su campo de convergencia, aparecen a continuación:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots , \; |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots , \; |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots , \; |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots , \; |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots , \; |x| < 1$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots , \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots , \; \forall x \in \mathbb{R}$$

6. SERIES DE FOURIER

6.1. DEFINICIÓN DE LA SERIE DE FOURIER CLÁSICA

Se llama **serie trigonométrica de Fourier** a una serie de funciones reales, de la forma:

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

donde podemos tener un periodo:

$$T = \frac{2\pi}{w} = b - a$$

y los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx$$

6.2. LAS SERIES TRIGONOMÉTRICAS EN MODO COMPLEJO

Para definir la serie trigonométrica en modo complejo, se necesita hacer uso de la fórmula $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$; entonces se define la siguiente serie:

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

6.3. EJEMPLO

Sea f una función periódica de periodo 2π definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Calcular la serie de Fourier de dicha función y utilizar dicha serie para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Vamos a calcular los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1\,dx) + \int_0^{\pi}(1\,dx)\right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1\cos(nx)\,dx) + \int_0^{\pi}(1\cos(nx)\,dx)\right) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1\sin(nx)\,dx) + \int_0^{\pi}(1\sin(nx)\,dx)\right) = \frac{4}{n\,\pi}(-1)^{n+1}$$

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\,\pi}(-1)^{n+1}\sin(nx)\right)$$

$$f_{2n-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n-1)\,\pi}(-1)^{n+1}\sin((2n-1)\,x)\right)$$

En $x = \frac{\pi}{2}$, la serie es $1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n-1)\,\pi}(-1)^{n+1}\right)$ y despejando queda lo que queríamos demostrar.

Notas:

- Hay que tener cuidado al calcular los coeficientes de Fourier porque n puede ser par o impar.
- Se ha sustituido por $x = \frac{\pi}{2}$. La razón es que el seno es 1. Por ejemplo, para la función coseno se sustituye por $x = 0$ porque es donde es 1.

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Límite de una sucesión.
- Sucesiones equivalentes.
- Métodos para el cálculo de límites.
- Convergencia de una serie.
- Series geométricas y armónicas.
- Criterios de convergencia de una serie numérica.
- Series de potencias.
- Radio y campo de convergencia.
- Derivación e integración de series de potencias.
- Fórmula de Taylor.
- Series de Fourier.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Encontrar el término general de las siguientes sucesiones:

a) $2, -4, 8, -16, 32, \ldots$

b) $2, 1, \dfrac{8}{9}, 1, \dfrac{32}{25}, \dfrac{64}{36}, \ldots$

c) $-1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-3}{5}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{-5}{9}, \ldots$

Enunciado 2

Hallar los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

b) $\dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

c) $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}$

d) $n \ln \sqrt{\dfrac{n+a}{n-a}}$

e) $\dfrac{n^n}{n!}$

Enunciado 3

Hallar los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

c) $\dfrac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, para $p \in \mathbb{N}$

Enunciado 4

Estudiar la convergencia y calcular el límite, si existe, de la sucesión:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n} - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Enunciado 5

Hallar el límite de la sucesión: $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \ldots$

Enunciado 6

Estudiar la convergencia, y sumar si es posible, las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n-1}{2^n}$

Enunciado 7

Se deja caer una pelota desde una altura de 2 m y se deja botar indefinidamente hasta que se para. Si la altura alcanzada en cada salto es igual a 3/4 de la altura alcanzada en el salto anterior, ¿cuál es la distancia vertical recorrida por la pelota?

Enunciado 8

Estudiar la convergencia, y sumar si es posible, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n - (-2)^n}{6^n}$.

Enunciado 9

Estudiar el carácter de las series:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$

Enunciado 10

Estudiar el carácter de las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2\, 2^{n+1}}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

Enunciado 11

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$

b) $f_n(x) = ne^{-nx^2}$

Enunciado 12

Hallar el campo de convergencia de las series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x + 1)^n}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$

Enunciado 13

Hallar la serie de potencia de la función $f(x) = \ln(1 + x)$, centrada en $x = 0$, y su campo de convergencia. Usar la serie obtenida para sumar la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Enunciado 14

Sea $f(x) = x\ (\sin(x))$, si $-\pi < x < \pi$, entonces:

a) Determinar la serie de esta función.

b) Probar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \right) = \frac{1}{4}$$

Solución 1

a) $a_n = -(-1)^n 2^n = -(-2)^n$

b) $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

c) $\dfrac{(-1)^n n}{2n-1}$

Solución 2

a) 1

b) 1/3

c) 0

d) a

e) ∞

Solución 3

a) 1

b) 2/3

c) $\dfrac{1}{p+1}$

Solución 4

0

Solución 5

2

Solución 6

a) Convergente: 1.
b) Convergente: 7.

Solución 7

14 m.

Solución 8

Convergente: 5/4.

Solución 9

a) Divergente.
b) Convergente.

Solución 10

a) Convergente.
b) Divergente.

Solución 11

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$. La convergencia no es uniforme.
b) Converge puntualmente a $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. La convergencia no es uniforme.

Solución 12

a) $(-4, 2)$
b) $(-1, 1]$

Solución 13

$$\ln(1+x)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} \qquad (-1, 1] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Solución 14

La serie es:

$$1 - \frac{1}{2}\cos(x) + 2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\right)\cos(nx)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, A. et ál. (1994). *Cálculo I*. Madrid: Clagsa.

Gómez, M. et ál. (2012). *Métodos matemáticos: definiciones, teoremas y resultados*. Madrid: García-Maroto Editores, SL.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo I y II*. Madrid: McGraw-Hill.

Mata, A. y Reyes, M. *Apuntes de cálculo*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo.