Actividad de Evaluación Continua 2

1506: Fundamentos Matemáticos

[3cm]

Autor: Alexander Sebastian Kalis
Profesor: Dr. Juan José Moreno García
Curso: Ingeniería de Organización Industrial
UDIMA

Problema 1

Hallar los puntos críticos, y determinar su naturaleza, de la función:

$$f(x,y) = ln(x^2 + y^2 + 1)$$

Para hallar los puntos críticos debemos primero encontrar las derivadas parciales de la función, tanto las de primer orden como las de segundo orden.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2+y^2+1\right)\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\ln(u)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+1\right) = \frac{1}{x^2+y^2+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+1\right) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

Y por tanto

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2+y^2+1\right)\right) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

Encontramos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right) = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+1}\right) = 2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)\left(x^2+y^2+1\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+1\right)x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} =$$

$$2\cdot\frac{1\cdot\left(x^2+y^2+1\right)-2xx}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = \frac{2\left(-x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

Y por tanto

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{2\left(-y^2+x^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

Por último la derivada cruzada

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+y^2+1\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+1\right) =$$

$$= 2x\left(-\frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\cdot 2y\right) = -\frac{4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

Para lograr los puntos críticos, igualamos a 0 las derivadas parciales primeras y lo resolvemos como un sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} = 0 \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} = 0 \end{cases} \implies x=0, y=0$$

Entonces el punto $(0,0)$ es el único punto crítico. Para saber de qué tipo de punto se trata, computamos el discriminante:

$$D(f(x,y)) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \implies D(f(0,0)) = 0$$

Esto significa que no podemos clasificar el punto.

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

Problema 2

Halla los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ condicionado al círculo de radio 1 centrado en el origen.

Para resolver este problema disponemos del método de multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{aligned} &f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ &f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ &g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Donde

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial\, x}\left(x^2 - y^2\right) = 2x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial\, y}\left(x^2 - y^2\right) = -2y$$

$$D = g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial\, x}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2x$$

$$g_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial\, y}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2y$$

Teniendo todos los componentes podemos montar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1, y = 0 \\ x = 0, y = -1 \\ x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0 \end{cases}$$

Se evalúan los puntos en la función:

$$f(-1, 0) = 1 \;\; f(0, -1) = -1 \;\; f(0, 1) = -1 \;\; f(1, 0) = 1$$

Lo que significa que el máximo de la función se encontrará en los puntos (-1,0) (1,0) y sus mínimos en (0,-1) (0,1).

Problema 3

Sea R el rectángulo $[-2, 1] \times [0, 1]$ y sea la función $f(x, y) = y(x^3 - 12x)$. Calcular la siguiente integral:

$$I = \int \int_R f(x, y) dx\ dy$$

El enunciado nos proporciona el área cerrada del rectángulo siendo $[-2, 1]$ el intervalo de integración en x y $[0, 1]$ el intervalo de integración en y:

$$\int_0^1 \int_{-2}^1 y(x^3 - 13x)\ dx\ dy = \int_0^1 I_x\ dy$$

Integramos I_x:

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

$$I_x = \int_{-2}^{1} y(x^3 - 13x)\ dx = y\int_{-2}^{1}(x^3 - 13x)\ dx = y\left(\int_{-2}^{1} x^3\ dx - \int_{-2}^{1} 13x\ dx\right) =$$

$$= y\left(\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} - 13\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}\right) = y\left(-\frac{15}{4} - \left(-\frac{39}{2}\right)\right) = \frac{63}{4}y$$

Integramos I:

$$\int_0^1 I_x\ dy = \int_0^1 \frac{63}{4}y\ dy = \frac{63}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{63}{8}$$

Problema 4

Calcular la integral

$$\iint\limits_D (3 - x - y)\ dA$$

En donde D es la región en forma triangular encerrada por el eje x y las líneas $y = x$ y $x = 1$.

Podemos entonces interpretar que el valor de la integral será la mitad del área del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 (3 - x - y)\ dx\ dy\right] = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 3 - y - \frac{1}{2}\ dy\right] = \frac{1}{2}\left[3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 1$$

O lo que sería lo mismo, integrar utilizando como límite de integración la recta $y = x$:

$$\int_0^1\int_0^x (3 - x - y)\ dy\ dx = 1$$

Problema 5

Usando el cambio a coordenadas esféricas, calcular la integral

$$I = \iiint\limits_\Omega \frac{1}{\left[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{3}{2}}} dx\ dy\ dz,$$

En donde Ω es todo $\mathbb{R}^3$.
Empezamos haciendo el cambio a coordenadas esféricas, sabiendo que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$,

$$\Omega = \left\{(\theta, \phi, \rho) : 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \rho < \infty\right\}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\phi}{\left[1 + [\rho^2]^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{3}{2}}}\ d\theta\ d\phi\ d\rho = \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\phi}{[1 + \rho^3]^{\frac{3}{2}}}\ d\theta\ d\phi\ d\rho = \int_0^\infty\int_0^\pi \frac{2\pi\rho^2 \sin\phi}{(1 + \rho^3)^{\frac{3}{2}}}\ d\phi\ d\rho =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\pi\rho^2}{(1 + \rho^3)^{\frac{3}{2}}}\left[-\cos\phi\right]_0^\pi\ d\rho = \int_0^\infty \frac{4\pi\rho^2}{(1 + \rho^3)^{\frac{3}{2}}}\ d\rho = 4\pi\frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{(1 + u)^{\frac{3}{2}}}\ du = 4\pi\frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}}\ dv =$$

$$= 4\pi\frac{1}{3}\cdot\int v^{-\frac{3}{2}}\ dv = 4\pi\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(1 + \rho^3\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2} + 1} = \left[-\frac{8\pi}{3\,(1 + \rho^3)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^\infty = \frac{8\pi}{3}$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

Problema 6

Calcular la integral

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\ dx\ dy\ dz.$$

En donde Ω la región limitada por un cono recto de revolución centrado en el origen de altura $h = 2$, cuya base se asienta en el plano XY y cuyo radio de la base es $r = 1$. La ecuación del cono será entonces

$$a^2(h - z)^2 = h^2(x^2 + y^2),$$

siendo $a = 1$ al ser el radio de la base del cono y nuestro caso $h = 2$.

En este caso se resolverá el problema aplicando una conversión a coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_{\Omega} \rho^3\ dV$$

Ahora evaluamos los límites de integración.

- θ Va de 0 a 2π, pues el cono completa la vuelta al eje.
- ρ Va de 0 hasta el radio máximo, 1.
- z Empieza desde el plano XY y su límite superior (cono inferior) es el cono $z = 2 - 2\rho$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2-2\rho} \rho^3\ dz\ d\rho\ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3\,(-2\rho + 2)\ d\rho\ d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \int_0^1 -\rho^4 + \rho^3\ d\rho\ d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{10}\ d\theta = \frac{\pi}{5}$$

Problema 7

Evaluar la integral de linea

$$\int_C \left(x^3 y + \frac{y^3 x}{3} \right)\ dx + x^2 dy$$

en donde la trayectoria C es el contorno de la región definida por el círculo $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e $y > 1$. Nota: la figura no es más que un círculo centrado en el punto $(0, 1)$, así que cuando $y > 1$ lo que estamos definiendo es el semicírculo superior. Por tanto, la parametrización para el diámetro será $(t, 1)$ y para el semicírculo $(\cos t, 1 + \sin t)$ (al que llamaremos C_2).

Ya que se trata de una integral de curva simple cerrada podemos utilizar el Teorema de Green para simplificar la integral.

$$\oint P\ dx + Q\ dy = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]\ dA$$

Nos quedaría entonces:

$$\iint_R -xy^2 - x^3 + 2x\ dA = \int_{-1}^{1} \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} -xy^2 - x^3 + 2x\ dy\ dx =$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

$$\int_{-1}^{1}\left(-\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} x^3 dy + \int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} 2x dy - \int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy\right)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x\left(1-\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^3\right) - x\sqrt{1-x^2}(x^2-2)\right)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)\left(2\sqrt{1-x^2}-3\right)\right)\, dx$$

Puesto que $f(x)=-\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)\left(2\sqrt{1-x^2}-3\right)$ es una función impar,

$$\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)\left(2\sqrt{1-x^2}-3\right)\right)\, dx = 0$$

Problema 8

Usar el teorema de Green para calcular la integral

$$\int_C y^2\; dx + 3xy\; dy$$

De nuevo aplicamos Green y ya que es una región similar al problema 7, los límites de integración también lo serán En este caso la circunferencia está centrada en el origen XY y su radio también es 1:

$$\oint P\; dx + Q\; dy = \iint\limits_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\; dA$$

Nos queda:

$$\iint\limits_R y\; dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\; dy\; dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2}\; dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} 1dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx\right) = \frac{2}{3}$$

Problema 9

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' - 7y' + 6y = 0,\; y\,(0) = 0,\; y'\,(0) = 5$$

Es una ecuación homogénea de coeficientes constantes y polinomio característico:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

Lo que nos da las raíces $\lambda_1 = 1$,$\lambda_2 = 6$ que son soluciones reales y distintas y por lo tanto podemos escribir:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{6t}, y' = c_1 e^t + c_2 e^{6t}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 5 = c_1 + 6c_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{matrix}$$

Sustituimos los valores y obtenemos:

$$y = e^{6t} - e^t$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

Problema 10

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{2}{e^t}, y(0) = 1, y'(0) = 2$$

En este caso es una ecuación no homogénea con coeficientes constantes.
Resolvemos la ecuación correspondiente homogénea:

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Con polinomio característico

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

Con raíces $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$. Entonces la solución a la homogénea es:

$$y_h = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$$

Utilizando el método de coeficientes indeterminados podemos encontrar la solución particular.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2e^{-t} \implies y_p = t(k_1 e^{-t})$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dy}{dt} = k_1 e^{-t} - k_1 e^{-t} t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k_1 \left(-2e^{-t} + e^{-t} t\right)$$

Ahora podemos sustituir los valores en nuestra ecuación no homogénea:

$$k_1 \left(-2e^{-t} + e^{-t}t\right) + 4\left(k_1 e^{-t} - k_1 e^{-t} t\right) + 3(k_1 e^{-t} t) = 2e^{-t}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $k_1 = 1$ y por tanto $y_p = e^{-t}t$.
La solución general será:

$$y = y_h + y_p \implies y = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} + e^{-t}t, y' = e^{-t} - e^{-t}t - 3c_1 e^{-3t} - c_2 e^{-t}$$

Conociendo los datos de las condiciones iniciales obtenemos las constantes:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -3c_1 - c_2 + 1 = 2 \end{cases} \implies \begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{matrix}$$

Y finalmente podemos escribir:

$$y = -e^{-3t} + 2e^{-t} + e^{-t}t$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

Problema 11

Resolver, usando transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 9$$

Aplicamos la transformada:

$$\mathcal{L}\left[f^{''}(t)\right] = s^2\mathcal{L}\left[f(t)\right] - sf(0) - f^{'}(0)$$

$$\mathcal{L}\left[y'' + 9y\right] = \mathcal{L}[0]$$
$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 9\mathcal{L}[y] = 0$$

Insertamos los valores iniciales:

$$s^2\mathcal{L}[y] - s - 9 + 9\mathcal{L}[y] = 0$$

Resolviendo para $\mathcal{L}[y]$ obtenemos:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+9}{s^2+9}$$

Aplicamos la inversa de la transformada de Laplace y reescribimos las fracciones de tal forma que podamos utilizar la tabla de transformadas de Laplace:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+9}{s^2+9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2} + 3\frac{3}{s^2+3^2}\right]$$
$$y = \cos(3t) + 3\sin(3t)$$

Problema 12

Resolver la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace:

$$y'' - 3y' - 10y = 12e^t, y(0) = 2, y'(0) = 7$$

Aplicamos Laplace:

$$\mathcal{L}\left[y'' \ - 3y' \ - 10y\right] = \mathcal{L}\left[12e^t\right]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 3\left(s\mathcal{L}[y] - y(0)\right) - 10\mathcal{L}[y] = \frac{12}{s-1}$$

Insertamos las condiciones iniciales y simplificamos:

$$s^2\mathcal{L}[y] - 3s\mathcal{L}[y] - 2s - 10\mathcal{L}[y] - 1 = \frac{12}{s-1}$$

Resolvemos la ecuación para $\mathcal{L}[y]$:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2s^2 - s + 11}{(s-1)(s^2-3s-10)}$$

Aplicamos la inversa de Laplace. En este caso debemos simplificar la fracción en fracciones parciales simples para que nos cuadre con la tabla de transformadas:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2 - s + 11}{(s-1)(s^2-3s-10)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-5}\right] = -e^t + e^{-2t} + 2e^{5t}$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García