

SOLUCIONES

Problema 1 (2 puntos):

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$$

SOLUCIÓN:

Directamente nos da una indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

Pero podemos descomponer en binomios y simplificar

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 4)}{(x - 3)} = -6$$

Problema 2 (2 puntos):

Hallar la naturaleza del punto crítico $(1, 1)$ de la función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{1}{x^4 y^4}$$

SOLUCIÓN:

Las derivadas segundas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{4(3x^8 y^4 + 5)}{x^6 y^4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{4(3x^4 y^8 + 5)}{x^4 y^6} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{16}{x^5 y^5}. \end{aligned}$$

Así que la hessiana vendrá dada por

$$H = \begin{bmatrix} 32 & 16 \\ 16 & 32 \end{bmatrix}. \quad \text{Como } \det(H) = 768 > 0 \text{ y } 32 > 0,$$

entonces es un mínimo.

Problema 3 (3 puntos):

Calcular, usando coordenadas polares, la siguiente integral:

$$I = \int_C 2^2(x^3 y + y^3 x) \, dx \, dy.$$

En donde C es el conjunto de los puntos (x, y) pertenecientes a la parte de la semicorona circular comprendida entre $r = 1$ y $r = 2$ y correspondiente al tercer cuadrante.

SOLUCIÓN:

Es resoluble fácilmente usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned} I &= \int_C 2^2(x^3y + y^3x) \, dx \, dy = \int_C 4(x^2 + y^2)xy \, dx \, dy = 4 \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^2 r^2 r \cos \theta r \sin \theta r \, dr \, d\theta = \\ &4 \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^2 r^5 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta = 4 \int_1^2 r^5 \, dr \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \\ &4 \int_1^2 r^5 \, dr \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \right]_{\pi}^{3\pi/2} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \int_1^2 r^5 \, dr = 2 \left[\frac{r^6}{6} \right]_1^2 = 21 \end{aligned}$$

Problema 4A (3 puntos):

(SOLAMENTE PARA LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA INFORMÁTICA) Hallar la solución de esta ecuación lineal:

$$y'' - 10y' + 21y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

SOLUCIÓN:

El polinomio característico es $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$ que tiene como soluciones $\lambda = 7$ y $\lambda = 3$. Así que la solución será de la forma:

$$y(t) = Ae^{7t} + Be^{3t}$$

y cuya deriva es

$$y'(t) = 7Ae^{7t} + 3Be^{3t}.$$

Si imponemos las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$ obtendremos

$$A + B = 0$$

$$7A - 3A = 1$$

Este sistema tiene como solución $A = 1/4$ y $B = -1/4$, así que la solución final es

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{7t} - \frac{1}{4}e^{3t}$$

Problema 4B (3 puntos):

(SOLAMENTE PARA LOS ESTUDIANTES DE I. ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL) Hallar la solución de esta ecuación por el método de la transformada de Laplace:

$$y'' - 4y' + 4y = 4t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(s^2 - 4s + 4)} = \frac{4}{s^2(s-2)^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$y = t + 1 - e^{2t} + te^{2t} = e^{2t}(t-1) + t + 1$$