UNIDAD DIDÁCTICA

4

CURVAS Y SUPERFICIES

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Conocer las ecuaciones reducidas y generales de las cónicas, así como sus propiedades geométricas y de reflexión.
- Conocer las aplicaciones más importantes de las cónicas y usarlas en problemas aplicados.
- Saber representar y calcular tangentes en curvas paramétricas.
- Conocer las parametrizaciones de las curvas más importantes: cónicas y gráficas de funciones.
- Pasar de coordenadas cartesianas a polares y viceversa.
- Representar curvas en coordenadas polares.
- Representar superficies a partir de sus intersecciones con planos.
- Identificar las superficies cuádricas y hacer un esbozo de su representación gráfica.

1. CÓNICAS

Las cónicas (circunferencia, elipse, hipérbola y parábola) son curvas planas que provienen de la intersección de un cono o superficie cónica con un plano y se pueden definir mediante propiedades geométricas muy sencillas. Algebraicamente, una **cónica** se puede definir como el conjunto de puntos del plano que verifican una ecuación general de segundo grado en las variables x e y.

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Si a una ecuación de este tipo se le aplica el giro y la traslación adecuadas, se obtiene la ecuación reducida de la cónica, ecuación que permite identificarla y calcular sus principales parámetros. En lo que respecta a esta Unidad didáctica, se supondrá que la cónica no necesita ser girada para obtener la ecuación reducida, lo que equivale a que el coeficiente de xy en la ecuación general es $C = 0$.

La simplicidad de su definición contrasta con el interés de sus propiedades geométricas, lo que provoca su frecuente aparición en las formas de la naturaleza y en numerosas aplicaciones en las ciencias y la tecnología, de manera que ya eran conocidas en la época griega y usadas en sus construcciones.

En este epígrafe se hará un repaso de las ecuaciones y principales propiedades de las cónicas, de tal manera que se puedan usar en problemas aplicados.

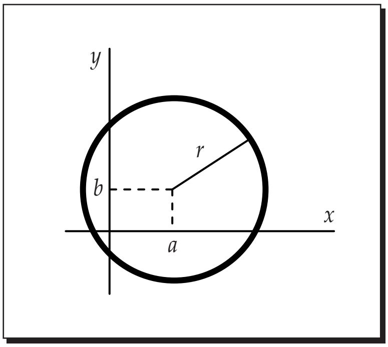
1.1. LA CIRCUNFERENCIA

La **circunferencia** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que distan de un punto fijo, llamado **centro**, una cantidad constante, llamada **radio**.

Usando la definición, un punto (x, y) pertenece a la circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r si:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando al cuadrado, se obtiene la ecuación de la circunferencia en función del centro y el radio:



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Desarrollando esta ecuación, se obtiene la ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

donde $A = -2a$ y $B = -2b$ y solo dependen del centro de la circunferencia, y $C = a^2 + b^2 - r^2$ depende también del radio. Para obtener el centro y el radio de la ecuación general de la circunferencia se procede a completar cuadrados para obtener la ecuación en función del centro y del radio.

EJEMPLO 1

Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$, se pide:

a) Hallar la ecuación general de la circunferencia concéntrica con ella de radio $r = 2$.

b) Hallar la ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x = 2$ y ordenada negativa.

Solución

Completando cuadrados se halla el centro y el radio de la circunferencia dada:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 5 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 5 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

El centro es el punto $(1, -2)$ y el radio $r = \sqrt{10}$.

a) La ecuación general de la circunferencia de radio $r = 2$ concéntrica con esta es:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

b) En primer lugar se halla el punto de tangencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \underset{x=2}{\Longrightarrow} y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -5 \end{cases}$$

.../...

.../...

Para hallar la tangente en el punto (2, – 5) se halla la derivada de la ecuación implícita de la circunferencia en dicho punto:

$$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2-2x}{2y+4} = \frac{1-x}{y+2} \quad \Rightarrow \quad y'(2,-5) = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

La ecuación de la tangente a la circunferencia en el punto (2, – 5) es:

$$y + 5 = \frac{1}{3}(x-2)$$

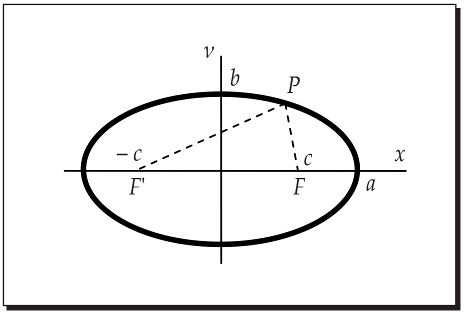
1.2. LA ELIPSE

La **elipse** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es una cantidad constante $k > 0$.

1.2.1. Ecuaciones de la elipse

Si los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$, y $k = 2a$, se obtiene, por definición, que un punto (x, y) pertenece a la elipse si:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$



Haciendo operaciones hasta eliminar las raíces se llega a la **ecuación reducida de la elipse**, que es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$. Los segmentos que unen cada punto de la elipse con los focos, PF y PF', se llaman **radios vectores**, a y b se llaman **semiejes mayor y menor**, respectivamente, y c se llama **semidistancia focal**. El punto medio entre los focos se llama **centro de la elipse**.

Se llama **excentricidad** de la elipse al cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor, es decir, $e = c/a$. La excentricidad es un número comprendido entre 0 y 1 que cuanto más se aproxima a 0 más se parece a una circunferencia.

Si la elipse se somete a una traslación paralela, de tal manera que su centro se traslada al punto (x_0, y_0), la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

Esta última es la **ecuación general de la elipse** con ejes paralelos a los ejes de coordenadas. Completando cuadrados en esta ecuación se puede llegar a la ecuación reducida.

EJEMPLO 2

Comprobar si la ecuación implícita $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 5 = 0$ es la ecuación de una elipse, identificando sus parámetros principales y su excentricidad.

Solución

Se completan cuadrados hasta identificar la elipse encontrando su forma reducida:

$$2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 5 = 0 \;\Rightarrow\; 2(x^2 + 4x) + 3(y^2 - 2y) = -5 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2(x+2)^2 - 8 + 3(y-1)^2 - 3 = -5 \;\Rightarrow\; 2(x+2)^2 + 3(y-1)^2 = 6 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{2(x+2)^2}{6} + \frac{3(y-1)^2}{6} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{(x+2)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

Los semiejes son $a = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{2}$, y la semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3-2} = 1$. El centro de la elipse es $(-2, 1)$, y los focos están en la recta que pasa por dicho punto paralela al eje de abscisas, es decir, en los puntos $(-2 \pm \sqrt{5}, 1)$.

La excentricidad de la elipse es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}58$$

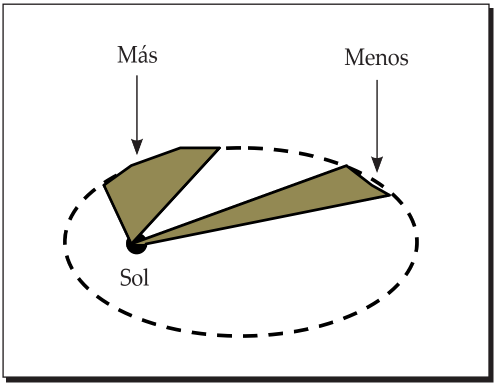
1.2.2. Las leyes de Kepler

La elipse juega un papel fundamental en la astronomía, tanto en el movimiento de los planetas (leyes de Kepler) como en su forma. Por ejemplo, la Tierra no tiene forma esférica, sino una forma de elipsoide en la que sus círculos máximos no son círculos sino elipses con excentricidad $e = 1/12$.

Entre 1609 y 1619, para explicar el movimiento de los planetas, Kepler enunció las tres leyes que llevan su nombre:

- **Primera.** Las órbitas planetarias son elipses en las que el Sol ocupa uno de sus focos.
- **Segunda.** En las órbitas planetarias, el área barrida por los radios vectores que unen cada planeta con el Sol es constante por unidad de tiempo. Esta ley significa que la velocidad de desplazamiento de los planetas no es siempre la misma.
- **Tercera.** Los cuadrados de los periodos de revolución de los diversos planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.

Como muestra de la vigencia actual de las leyes de Kepler, basta observar que esta tercera ley proporciona la órbita en la que debe ponerse un satélite alrededor de la Tierra para que siempre esté situado sobre el mismo punto de la misma.



Johannes Kepler. Nació en Württemberg en 1571. Estudió astronomía en la Universidad de Tubingen. Tras abandonar Tubingen, por sus disensiones con la ortodoxia protestante, enseñó en la Universidad de Graz donde, en 1596, desarrolló el primer modelo cosmológico que apoyaba la teoría heliocéntrica de Copérnico. En Praga fue nombrado «matemático imperial» como sucesor del astrónomo Tycho Brahe. Descubrió que las órbitas que describen los planetas son elipses y, entre 1609 y 1619, enunció las tres leyes que llevan su nombre y que explican los movimientos de los planetas. También contribuyó al avance de las matemáticas y de la óptica, dando la primera explicación correcta del funcionamiento del ojo humano. Murió en Regensburg en 1630.

1.2.3. Tangente a la elipse

Las rectas tangente y normal a la elipse por un punto, que se pueden calcular mediante derivación implícita, tienen la interesante propiedad geométrica de ser las bisectrices de los ángulos que forman las rectas que contienen los radios vectores en dicho punto.

EJEMPLO 3

Hallar las rectas tangente y normal a la elipse de focos $(\pm 2, 0)$ que pasa por el punto $P(-2, 3)$.

Solución

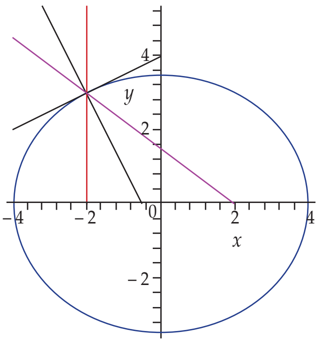
Se hallan las ecuaciones de las rectas que contienen los radios vectores, que son las rectas que pasan por el punto P y cada uno de los focos:

$$\frac{x-(-2)}{2-(-2)} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow 3x+4y-6=0 \qquad \frac{x-(-2)}{-2-(-2)} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow x+2=0$$

Las bisectrices a los ángulos que determinan estas rectas son:

$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{9+16}} = \pm \frac{x+2}{\sqrt{1+0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+4y-6 = \pm 5(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x-2y+8=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$$



Con la representación gráfica, se puede ver que la recta tangente es $x - 2y + 8 = 0$ y la normal $2x + y + 1 = 0$.

1.2.4. Propiedad de reflexión

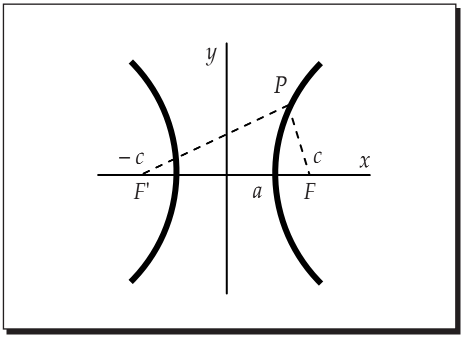
La elipse tiene una de las propiedades geométricas con más aplicaciones en las ciencias y, en general, en la vida cotidiana. Se trata de la **propiedad de reflexión**: *un «rayo» que parte de uno de los focos de la elipse se refleja en la superficie y pasa por el otro foco*. El «rayo» del que habla la propiedad de reflexión puede ser un rayo de luz o una onda sonora.

Esta propiedad se ha usado desde tiempos remotos para diseñar galerías de murmullos, justifica la propagación del sonido en las galerías del metro, etc. Entre sus múltiples aplicaciones actuales están:

- La litotricia, que es una técnica que consiste en romper los cálculos de riñón tras sumergir al paciente en una bañera con forma elíptica y hacer que el cálculo ocupe uno de los focos. Una descarga de ultrasonidos producida en el otro foco incidirá directamente sobre el cálculo, mientras que el resto del cuerpo no se verá afectado.
- Las lámparas de los dentistas tienen forma elíptica, con la bombilla en uno de sus focos. Todos los rayos de luz se reflejan sobre la pantalla de la lámpara e inciden sobre la boca del paciente, que está en el otro foco.

1.3. LA HIPÉRBOLA

La **hipérbola** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es una cantidad constante $k > 0$.



Si los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ y $k = 2a$, se obtiene, por definición, que un punto (x, y) pertenece a la hipérbola si:

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Haciendo operaciones hasta eliminar las raíces se llega a la **ecuación reducida de la hipérbola**, que es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$. Los segmentos que unen cada punto de la hipérbola con los focos, PF y PF', se llaman **radios vectores**, a y b se llaman **semiejes real e imaginario**, respectivamente, y c se llama **semidistancia focal**. El punto medio entre los focos se llama **centro de la hipérbola**.

Se llama **excentricidad** de la hipérbola al cociente entre la semidistancia focal y el semieje real, es decir, $e = c/a > 1$.

Si la hipérbola se somete a una traslación paralela, de tal manera que su centro se traslada al punto (x_0, y_0), la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + F = 0 \;\text{ con }\; A, B > 0$$

Esta última es la **ecuación general de la hipérbola** con ejes paralelos a los ejes de coordenadas. Completando cuadrados en esta ecuación se llega a la ecuación reducida.

La hipérbola tiene también múltiples aplicaciones, aunque no tan conocidas como las de la elipse, y es frecuente su presencia en la vida cotidiana. Por ejemplo:

- Los perfiles de las torres de enfriamiento de las centrales nucleares tienen forma de hipérbola.
- El sistema de navegación marina LORAN se basa en conocer la posición del barco midiendo el tiempo que tarda en escuchar sonidos emitidos simultáneamente por dos estaciones (véase ejemplo 4).

EJEMPLO 4

En un determinado lugar explota un barreno y, en otro, que dista del primero 2 km, explota otro barreno un segundo después.

¿En qué lugares se oyen simultáneamente los dos barrenos?

Solución

Sea $F'(-1, 0)$ el punto donde se produce la primera explosión y $F(1, 0)$ donde se produce la segunda. Puesto que la velocidad del sonido es de 0,34 km/s, si en un punto P se oyen simultáneamente los barrenos, se debe cumplir que:

$$d(P, F') = d(P, F) + 0{,}34, \text{ es decir, } d(P, F') - d(P, F) = 0{,}34$$

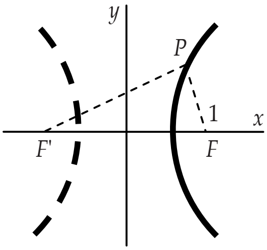
.../...

.../...

Por tanto, P debe ser un punto del semiplano $x > 0$ de la hipérbola con distancia focal $2c = 2$ y $k = 2a = 0{,}34$, es decir, $c = 1$ y $a = 0{,}17$, de donde $a^2 = 0{,}0289$ y $b^2 = 1^2 - 0{,}17^2 = 0{,}9711$.

Los barrenos se oyen simultáneamente en todos los puntos del semiplano $x > 0$ de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{0{,}0289} - \frac{y^2}{0{,}9711} = 1$$



1.4. LA PARÁBOLA

La **parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto del plano, llamado **foco**, y de una recta, llamada **directriz**.

La recta que pasa por el foco perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola y el punto de intersección del eje con la parábola se llama **vértice**.

1.4.1. Ecuación reducida de la parábola

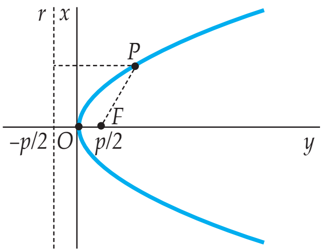
Si el foco de la parábola es el punto $F(p/2,\ 0)$ y la directriz es la recta r de ecuación $x = -p/2$, se obtiene, por definición, que un punto $P(x, y)$ pertenece a la parábola si:

$$d(P,F) = d(P,r) \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

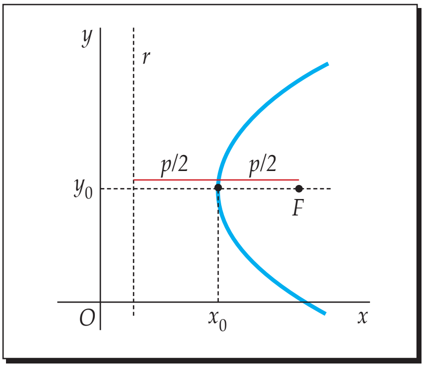
Elevando al cuadrado y simplificando se llega a la **ecuación reducida de la parábola**, que es:

$$y^2 = 2px$$

El eje de esta parábola es el eje de abscisas y el vértice es el origen.



1.4.2. Ecuaciones de otras parábolas con directrices paralelas a los ejes coordenados



La **ecuación reducida** de la parábola con vértice en el punto $V(x_0, y_0)$ y directriz paralela al eje de ordenadas (eje paralelo al eje de abscisas) es:

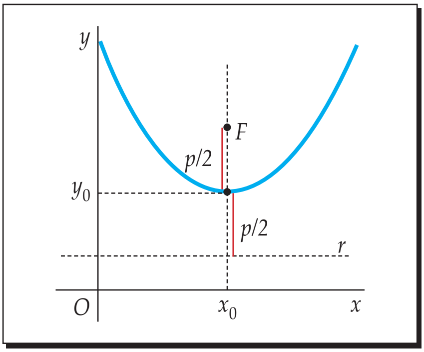
$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

El foco es el punto $F(x_0 + p/2, y_0)$, la directriz es la recta $x = x_0 - p/2$, y el eje, la recta $y = y_0$. Al desarrollar la ecuación reducida se obtiene la **ecuación general** de la parábola con eje paralelo al eje de abscisas:

$$x = Ay^2 + By + C$$

La **ecuación reducida** de la parábola con vértice en el punto $V(x_0, y_0)$ y directriz paralela al eje de abscisas (eje paralelo al eje de ordenadas) es:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$



El foco es el punto $F(x_0, y_0 + p/2)$, la directriz es la recta $y = y_0 - p/2$, y el eje, la recta $x = x_0$. Al desarrollar la ecuación reducida se obtiene la **ecuación general** de la parábola con eje paralelo al eje de ordenadas:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Completando cuadrados se puede llegar de estas ecuaciones generales a la reducida.

EJEMPLO 5

a) Hallar la ecuación de la parábola con foco $F(5, 3)$ y directriz $x = -1$.

b) Hallar el vértice, foco, directriz y eje de la parábola $y = 3x^2 - 6x + 1$.

.../...

.../...

Solución

a) La distancia del foco a la directriz es $p = 5 - (-1) = 6$, el eje es la recta $y = 3$, y el vértice, que es el punto medio entre el foco y el punto donde la directriz corta el eje, está en el punto $V(2, 3)$. Por tanto, las ecuaciones reducida y general de la parábola son:

$$(y-3)^2 = 12(x-5) \Rightarrow x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{11}{4}$$

b) Puesto que es x el término elevado al cuadrado, la parábola tiene el eje paralelo al eje de ordenadas. Completando cuadrados se llega a la ecuación reducida:

$$y = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow y = 3(x^2 - 2x) + 1 = 3(x-1)^2 - 3 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{3}(y+2)$$

De aquí se deduce que el vértice es $V(1, -2)$ y el parámetro es $p = 1/6$, de donde se deduce que la directriz es la recta es

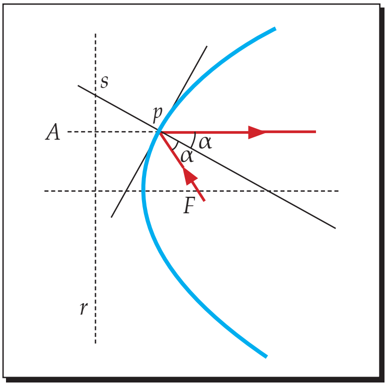
$$y = -2 - \frac{1}{12} = \frac{-25}{12} \text{ y el foco } F\left(1, -2 + \frac{1}{12}\right), \text{ es decir, } F\left(1, \frac{-23}{12}\right)$$

1.4.3. Ecuación general de la parábola a partir del vértice y un punto

La ecuación general de una parábola, con eje paralelo a uno de los ejes coordenados, se puede obtener a partir del vértice $V(x_0, y_0)$ y un punto P como sigue:

- Si el eje es paralelo al eje de ordenadas: $y = A(x - x_0)^2 + y_0$.
- Si el eje es paralelo al eje de abscisas: $x = A(y - y_0)^2 + x_0$.

El valor de A se obtiene imponiendo la condición de que pase por el punto P.



1.4.4. Propiedades de la parábola

La parábola aparece con mucha frecuencia en la naturaleza. Así, por ejemplo, la trayectoria que sigue un objeto (proyectil, piedra, etc.) lanzado con cierta inclinación sigue una trayectoria parabólica, es decir, con forma de parábola.

Por otro lado, la parábola tiene múltiples aplicaciones por la siguiente **propiedad de reflexión**:

- Cualquier rayo de luz que parte del foco se refleja sobre la parábola en dirección paralela a su eje.
- Inversamente, cualquier rayo de luz paralelo al eje se refleja sobre la parábola en dirección a su foco.

Una muestra de las aplicaciones de esta propiedad es la siguiente:

- Los tubos fluorescentes se sitúan en el foco de una pantalla con sección parabólica y eje perpendicular al suelo, por lo que los rayos de luz se reflejan perpendicularmente hacia el suelo de la sala.
- Galileo fue el primero en utilizar la propiedad de reflexión para construir telescopios, concentrando los rayos de luz en la proximidad del foco. Sucesivas mejoras debidas a Newton y, posteriormente, a Guillaume Cassegrain siguen utilizando la propiedad. El telescopio Hubble, puesto en órbita por la NASA en 1990, utiliza el sistema Cassegrain.
- Las antenas parabólicas recogen las señales que inciden en su bóveda y las concentran en su foco.

Galileo Galilei. Nació en Pisa en 1564.

Estudió medicina en Pisa, interesándose también por las ciencias y las matemáticas.

En 1589 era profesor de matemáticas en la Universidad de Pisa y en 1592 en la Universidad de Padua. A partir de 1609 se convierte en «matemático y filósofo natural» del duque de la Toscana. En 1632 publicó su *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo: ptolemaico y copernicano*, en el que defiende la tesis de Copérnico, condenada por la Iglesia.

En 1633 es llamado a Roma como sospechoso de herejía, y obligado a renunciar públicamente de sus ideas sobre el movimiento de la Tierra ante el tribunal de la Inquisición. Además es condenado a permanecer de por vida en su casa de Arcetri y a no publicar libros.

Quedó ciego en 1637, pero consiguió publicar su obra *Discursos y demostraciones matemáticas relativas a dos nuevas ciencias* en Leiden en 1638.

Además, Galileo organizó la mecánica, analizó la caída de graves, descubrió la trayectoria parabólica de los proyectiles y construyó telescopios para sus descubrimientos astronómicos.

Murió en Arcetri en 1642.

Observación

Como se ha visto, al aplicar a las ecuaciones reducidas de las cónicas una traslación se obtienen nuevas ecuaciones que representan a las cónicas con ejes paralelos a los ejes de coordenadas; si a esta nueva ecuación se le aplica un giro, se obtiene la ecuación general de la cónica. Un estudio completo del tema se puede consultar en la bibliografía recomendada.

2. CURVAS PARAMÉTRICAS

Hasta ahora se han visto las curvas que resultan de la representación gráfica de una función, que son curvas muy particulares en el sentido de que ninguna recta paralela al eje de ordenadas las puede cortar en más de un punto. Pero existen muchos más tipos de curvas, entendiéndose como tales todas aquellas que se pueden trazar sobre el papel sin levantar el lápiz.

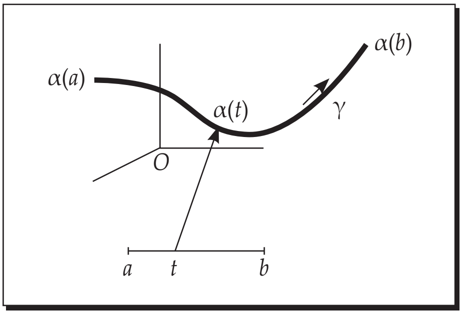
2.1. CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICA

2.1.1. Definiciones

Se dice que $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una **curva** si existe una aplicación continua:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : [a, b] & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & \alpha(t) \end{array}$$

tal que $\alpha([a, b]) = \gamma$. La aplicación α se llama **parametrización** de la curva.



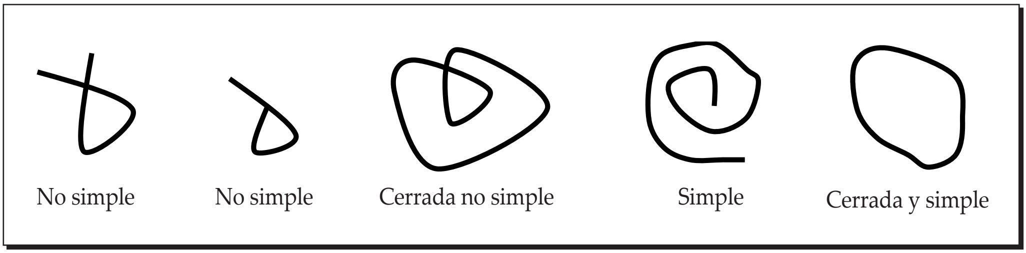
Los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman, respectivamente, **origen** y **extremo** de la curva, y el **sentido de la curva** es el que va de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$.

Si $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada por $\alpha(t)$, $a \leq t \leq b$, se dice que:

- γ es una **curva cerrada** cuando el origen y el extremo coinciden, es decir, si $\alpha(a) = \alpha(b)$.
- γ es una **curva simple** cuando la parametrización α es inyectiva en $[a, b)$ y en $(a, b]$, es decir, si $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$ con $t_1, t_2 \in [a, b)$ o con $t_1, t_2 \in (a, b]$.

Intuitivamente, una curva es simple cuando no se corta a sí misma salvo, quizás, en el origen que puede coincidir con el extremo, en cuyo caso la curva es cerrada y simple.

La curva γ no es simple cuando existen **puntos múltiples**, es decir, cuando existen $t_1, t_2 \in [a, b)$ o $t_1, t_2 \in (a, b]$ tales que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$.



2.1.2. Observación

La definición de curva se puede extender de forma natural al caso en que el intervalo de definición no es cerrado o no es acotado. En estos casos, puede ocurrir que el origen y/o extremo no se alcancen.

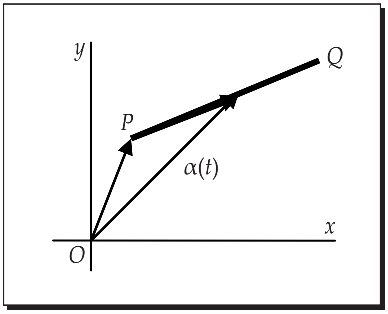
2.1.3. Algunas parametrizaciones de curvas

1. El segmento que va de $P(x_1, y_1)$ a $Q(x_2, y_2)$ es una curva parametrizada por:

$$\alpha(t) = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} =$$

$$= (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)),$$

$$0 \leq t \leq 1$$



También se suele representar de la forma:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \text{ con } \begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

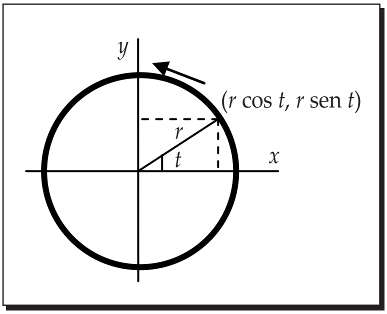
2. La recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ con vector de dirección $\vec{u} = (a, b)$ es una curva infinita parametrizada por:

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt), t \in \mathbb{R}$$

que, como se recordará, coincide con las ecuaciones paramétricas de la recta estudiadas en bachillerato. Limitando el recorrido del parámetro se obtienen tramos de recta (segmentos o semirrectas).

3. También son curvas los segmentos y rectas del espacio, cuyas parametrizaciones se obtienen como en el plano pero añadiendo la tercera coordenada z.

4. Una circunferencia en el plano es una curva cerrada. Una parametrización de la circunferencia centrada en el origen de radio r es la siguiente:



$$\alpha(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le 2\pi$$

O también:

$$\alpha \equiv \begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \operatorname{sen} t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Cuando la circunferencia no está centrada en el origen, se suman las coordenadas del centro a la parametrización:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ \Rightarrow\ \alpha \equiv \begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos t \\ y(t) = y_0 + r \operatorname{sen} t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Esta parametrización recorre la circunferencia en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj). Otras dos parametrizaciones de la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r son las siguientes:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos 2\pi t \\ y(t) = y_0 + r \operatorname{sen} 2\pi t \end{cases},\ 0 \le t \le 1 \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos t \\ y(t) = y_0 - r \operatorname{sen} t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$$

donde la primera de ellas recorre la circunferencia en sentido positivo y la segunda en sentido negativo.

5. Una elipse en el plano es una curva cerrada. Una parametrización de la elipse centrada en (x_0, y_0) y con semiejes a y b se deduce directamente de sus ecuaciones cartesianas:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow\ \alpha \equiv \begin{cases} x(t) = x_0 + a \cos t \\ y(t) = y_0 + b \operatorname{sen} t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$$

6. El grafo de cualquier función continua $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una curva del plano parametrizada por:

$$\alpha(t) = (t, f(t)),\ t \in I \ \Rightarrow\ \alpha \equiv \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases},\ t \in I$$

EJEMPLO 6

Hallar una parametrización de las curvas de ecuaciones cartesianas:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

b) $y^2 = x^3$

Solución

a) Se trata de la ecuación de una circunferencia, de la que se haya el centro y el radio:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 + 4 + 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

El centro es (1, – 2) y el radio 3, luego una parametrización es:

$$\alpha(t) = (1 + 3 \cos t, -2 + 3 \operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le 2\pi$$

b) Para hallar una parametrización no se puede hacer $x = t$, ya que en ese caso el valor de y no es único. Sin embargo, sí se puede hacer $y = t$, de donde $x = \sqrt[3]{t^2}$, y entonces una parametrización es:

$$\alpha(t) = \left(\sqrt[3]{t^2},\ t\right),\ t \in \mathbb{R}$$

Otra parametrización, sin usar raíces, es (se puede ver que verifica las ecuaciones cartesianas):

$$\beta(t) = \left(t^2,\ t^3\right),\ t \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO 7

Dos partículas parten en el instante $t = 0$ siguiendo las trayectorias indicadas por las curvas:

$$\text{Partícula 1: } \begin{cases} x = \dfrac{16 - 8t}{3} \\ y = 4t - 5 \end{cases},\ t \ge 0 \qquad \text{Partícula 2: } \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi t}{2} \\ y = -3 \cos \dfrac{\pi t}{2} \end{cases},\ t \ge 0$$

¿En qué puntos se cortan sus trayectorias? ¿En qué puntos chocan las partículas?

…/…

.../...

Solución

Las trayectorias se cortan en los puntos por los que pasan las dos partículas en instantes iguales o distintos, por lo que hay que buscar t_1, $t_2 \geq 0$ tales que:

$$\begin{cases} x = \dfrac{16 - 8t_1}{3} = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi t_2}{2} \\ y = 4t_1 - 5 = -3 \cos \dfrac{\pi t_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{\pi t_2}{2} = \dfrac{16 - 8t_1}{6} \\ \cos \dfrac{\pi t_2}{2} = \dfrac{4t_1 - 5}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{\pi t_2}{2} = \dfrac{16 - 8t_1}{6} \\ \operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi t_2}{2} + \cos^2 \dfrac{\pi t_2}{2} = \left(\dfrac{16 - 8t_1}{6} \right)^2 + \left(\dfrac{4t_1 - 5}{-3} \right)^2 = 1 \end{cases}$$

Se resuelve la segunda ecuación del sistema y su solución se sustituye en la primera:

$$\left(\frac{16 - 8t_1}{6} \right)^2 + \left(\frac{4t_1 - 5}{-3} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow 4t_1^2 - 13t_1 + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \Rightarrow \operatorname{sen} \dfrac{\pi t_2}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi t_2}{2} = k\pi \Rightarrow t_2 = 2k, k = 0, 1, 2, \ldots \\ t_1 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} \dfrac{\pi t_2}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{\pi t_2}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t_2 = 1 + 4k, k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Para hallar los puntos de corte se sustituyen los parámetros en la parametrización, y son:

- $P(0, 3)$, por donde la partícula 1 pasa en el instante $t = 2$ y la partícula 2 en los instantes $t = 0, 2, 4, 6, \ldots$
- $P(2, 0)$, por donde la partícula 1 pasa en el instante $t = \dfrac{5}{4}$ y la partícula 2 en los instantes $t = 1, 5, 9, 13, \ldots$

Las partículas chocan si pasan por el mismo punto en el mismo instante, lo que solo ocurre en el punto (0, 3) por el que las dos partículas pasan en el instante $t = 2$.

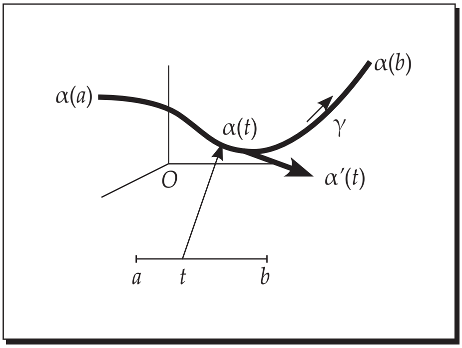
2.1.4. Curva contraria

Si $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada por $\alpha(t)$, $a \leq t \leq b$, se llama **curva contraria** de γ a la misma curva recorrida en sentido contrario. Se suele representar por $-\gamma$, y una parametrización suya es:

$$\beta(t) = \alpha(-t), \qquad -b \leq t \leq -a$$

2.2. CURVAS SUAVES

2.2.1. Definiciones



Se dice que $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una **curva suave** si admite una parametrización $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $a \leq t \leq b$, derivable, siendo el **vector velocidad** o **vector tangente**:

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$$

y la **velocidad**:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \ldots + x_n'(t)^2}$$

La ecuación de la **recta tangente** a la curva en el instante $t = t_0$ es, en forma vectorial:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha(t_0) + t\alpha'(t_0)$$

2.2.2. Curvas suaves planas

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ y $a \leq t \leq b$ es una **curva suave plana**, entonces:

- **Vector tangente:** $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$.
- **Velocidad:** $|\alpha'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.

Si además $x'(t) \neq 0$, la pendiente de la curva y la derivada de y respecto de x, en el instante t, son:

$$\textbf{Pendiente} = \boldsymbol{y'(x)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Son de interés los puntos en que la tangente es:

- **Horizontal:** $y'(t) = 0$ y $x'(t) \neq 0$.
- **Vertical:** $x'(t) = 0$ e $y'(t) \neq 0$.

Los puntos en que $x'(t) = y'(t) = 0$ se llaman **puntos singulares**, y en ellos puede haber tangente horizontal, vertical o ninguna de ellas.

EJEMPLO 8

Dada la curva $\alpha(t) = (1 - t, t^3 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(3, -2)$.

b) Encontrar los puntos con tangencia horizontal y vertical.

Solución

El vector tangente o velocidad viene dado por $\alpha'(t) = (-1, 3t^2 - 3)$.

a) Se halla el valor del parámetro para el que se obtiene el punto P:

$$\begin{cases} x = 1 - t = 3 \\ y = t^3 - 3t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \ t = -2$$

El vector tangente en dicho punto y las ecuaciones vectorial, continua y general de la tangente son:

$$\alpha'(-2) = (-1, 9) \qquad (x, y) = (3, -2) + t(-1, 9) \qquad \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{9} \qquad 9x + y - 25 = 0$$

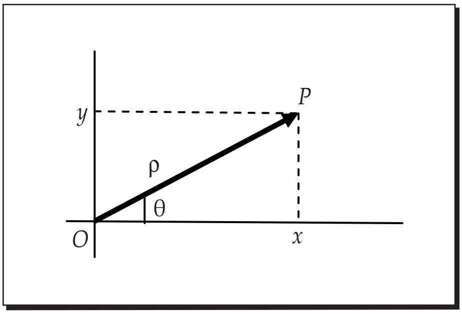
b) Puesto que $x'(t) = -1 \neq 0$, no hay puntos con tangencia vertical. Los puntos de tangente horizontal ocurren cuando $y'(t) = 3t^2 - 3 = 0$, es decir, cuando $t = \pm 1$, siendo los puntos $(0, -2)$ y $(2, 2)$.

3. CURVAS EN COORDENADAS POLARES

3.1. COORDENADAS POLARES

Cada punto P del plano distinto del origen queda unívocamente determinado por el vector $\overrightarrow{OP}$ que lo une con el origen, llamado radio vector, que a su vez queda unívocamente determinado por su longitud $\rho > 0$ y por el ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ que forma con la parte positiva del eje de abscisas. El par (ρ, θ) se llama coordenadas polares del punto P. El origen es el único punto para el que $\rho = 0$, por lo que sus coordenadas polares son $(0, \theta)$ con cualquier valor de θ.

La relación entre las coordenadas cartesianas y polares se deduce de la figura:



$$(x, y) \longrightarrow\!\!\longrightarrow\!\!\longrightarrow (\theta, \rho) \qquad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$(\theta, \rho) \longrightarrow\!\!\longrightarrow\!\!\longrightarrow (x, y) \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

3.2. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

3.2.1. Ecuación polar de una curva

En coordenadas cartesianas los puntos (x, y) de una curva se caracterizan por cumplir cierta relación que se expresa por $f(x, y) = 0$ y se llama ecuación cartesiana de la curva. Cuando los puntos se expresan en coordenadas polares, la relación que se establece $f(\theta, \rho) = 0$ se llama ecuación polar de la curva y, siempre que sea posible, se expresa como $\rho = f(\theta)$, con $\theta \in D$.

En principio, debería ser $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\rho \geq 0$. Sin embargo, es posible considerar valores de θ fuera de ese intervalo (considerando sucesivas circunferencias) e incluso valores negativos de ρ. En este último caso, si $\rho < 0$ en la dirección θ, el punto se dibuja a distancia $-\rho > 0$ sobre la semirrecta correspondiente a la dirección $\theta + \pi$.

EJEMPLO 9

Pasar de coordenadas cartesianas a polares, o viceversa, las siguientes funciones:

a) $x = 2$

b) $x^2 + y^2 = 1$

c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

d) ρ sen $\theta = 4$

e) $\rho = \text{sen}\ \theta + \cos\theta$

f) $\rho = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

Solución

En los tres primeros casos se sustituye $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho\ \text{sen}\ \theta$, teniendo en cuenta que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, y se opera hasta conseguir coordenadas polares. En los otros, usando las mismas relaciones, se procede hasta eliminar las coordenadas polares.

a) $x = 2 \ \Rightarrow\ \rho\cos\theta = 2 \ \Rightarrow\ \rho = \dfrac{2}{\cos\theta}$

b) $x^2 + y^2 = 1 \ \Rightarrow\ \rho^2 = 1 \ \underset{\rho > 0}{\Longrightarrow}\ \rho = 1$

c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \rho^2 + 2\rho(\cos\theta - 2\ \text{sen}\ \theta) + 1 = 0$

d) $\rho\ \text{sen}\ \theta = 4 \ \Rightarrow\ y = 4$

e) $\rho = \text{sen}\ \theta + \cos\theta \ \Rightarrow\ \rho^2 = \rho\ \text{sen}\ \theta + \rho\cos\theta \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = y + x \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 - x - y = 0$

f) $\rho = \dfrac{2}{1 - \cos\theta} \Rightarrow \rho - \rho\cos\theta = 2 \Rightarrow \rho^2 = (2 + \rho\cos\theta)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (2 + x)^2 \Rightarrow y^2 = 4 + 4x$

EJEMPLO 10

Hacer un esbozo de la representación gráfica de las funciones:

a) $\rho = 1 - \cos\theta$.

b) $\rho = 1 - 2\cos\theta$.

c) $\rho = \cos 2\theta$.

.../...

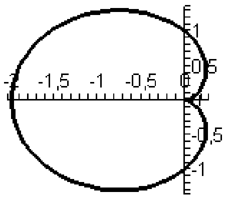
.../...

Solución

En cada caso, el esbozo se hará a partir de una tabla con un conjunto significativo de puntos. Para una representación gráfica exacta se recomienda recurrir a algún *software* matemático.

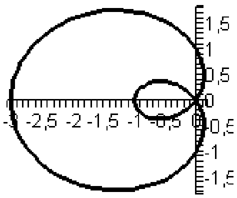
a) Puesto que cos (– θ) = cos θ, la gráfica de esta función es simétrica respecto del eje de abscisas, por lo que sería suficiente representarla en el intervalo [0, π], y por simetría dibujarla en [π, 2π].

θ	0		π/2		π
ρ	0	↗	1	↗	2



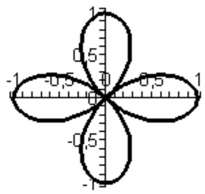
b) Como la anterior, esta gráfica también es simétrica respecto del eje de abscisas.

θ	0		π/2		π
ρ	– 1	↗	1	↗	3



c) Al igual que las anteriores también es simétrica respecto del eje de abscisas:

θ	0		π/4		π/2		3π/4		π
ρ	1	↘	0	↘	– 1	↗	0	↗	1



3.2.2. Propiedades de tangencia

A partir de la ecuación polar de una curva es fácil obtener unas ecuaciones paramétricas:

$$\rho = f(\theta) \rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta \end{cases} \rightarrow \alpha(\theta) = (f(\theta) \cos \theta,\, f(\theta) \operatorname{sen} \theta)$$

Entonces, usando técnicas de curvas paramétricas:

- Vector tangente: $\alpha'(\theta) = (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \text{ sen } \theta, f'(\theta) \text{ sen } \theta + f(\theta) \cos \theta)$.
- Recta tangente en un punto (θ_0, ρ_0) con $\rho_0 = f(\theta_0)$:

$$(x, y) = (\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \text{ sen } \theta_0) + t(f'(\theta_0) \cos \theta_0 -$$
$$- f(\theta_0) \text{ sen } \theta_0, f'(\theta_0) \text{ sen } \theta_0 + f(\theta_0) \cos \theta_0)$$

- Puntos con tangencia horizontal: $f'(\theta) \text{ sen } \theta + f(\theta) \cos \theta = 0$.
- Puntos con tangencia vertical: $f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \text{ sen } \theta = 0$.

Son también de interés los puntos extremales, que son aquellos puntos donde el radio vector es perpendicular al vector tangente, lo que sucede cuando $f'(\theta) = 0$.

EJEMPLO 11

Dada la curva $\rho = 1 - \cos \theta$, se pide:

a) Hallar la tangente en el punto $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Hallar los puntos de tangencia horizontal y vertical.

c) Hallar los puntos extremales.

Solución

Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\alpha \equiv \begin{cases} x(\theta) = (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ y(\theta) = (1 - \cos \theta) \text{ sen } \theta \end{cases}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

a) El punto y el vector tangente en dicho punto son:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \qquad \begin{cases} x'(\theta) = - \text{ sen } \theta + 2 \cos \theta \text{ sen } \theta = \\ \quad = \text{ sen } \theta \,(2 \cos \theta - 1) \\ y'(\theta) = \cos \theta + \text{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta = \\ \quad = - 2 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1 \end{cases} \qquad \alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) = (0, 1)$$

.../...

.../...

Las ecuaciones vectorial, paramétricas y general de la recta tangente son:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + t(0, 1) \qquad \begin{cases} x = 1/4 \\ y = \sqrt{3}/4 + t \end{cases} \qquad 4x - 1 = 0$$

b) Los puntos de tangencia horizontal son:

$$y'(\theta) = -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0) \\ \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{-3}{4}, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4} \right) \end{cases}$$

Los puntos de tangencia vertical son:

$$x'(\theta) = \operatorname{sen}\theta\,(2\cos\theta - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = 0, \pi \quad \Rightarrow (0, 0) \text{ y } (-2, 0) \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{cases}$$

En el punto (0, 0) se anulan las dos derivadas y, por tanto, no es punto de tangencia vertical ni horizontal, es un punto singular.

Los puntos $(-3/4, \pm(3\sqrt{3})/4)$ son de tangencia horizontal y los puntos $(-2, 0)$ y $(1/4, \pm\sqrt{3}/4)$ son de tangencia vertical.

c) Los puntos extremales son aquellos en que $f'(\theta) = \operatorname{sen}\theta = 0$, es decir, donde $\theta = 0, \pi$, que corresponde a los puntos $\alpha(0) = (0, 0)$ y $\alpha(\pi) = (-2, 0)$.

4. SUPERFICIES

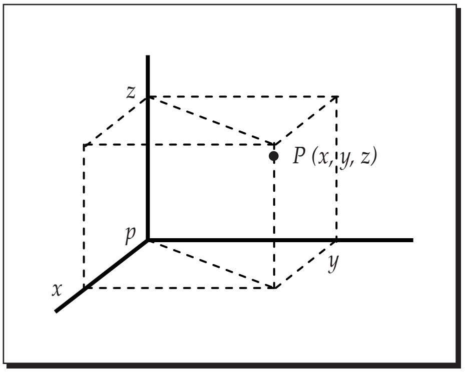
En este epígrafe se introducirán algunas superficies que se utilizarán más adelante. Se comenzará introduciendo las herramientas básicas del espacio $\mathbb{R}^3$, la ecuación de una superficie y las herramientas básicas para obtener una representación gráfica de las mismas, para continuar con las superficies ya conocidas, planos y esferas, y terminar con los cilindros y superficies cuádricas.

4.1. EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

4.1.1. Sistema de referencia cartesiano

Como se recordará de bachillerato, para la representación gráfica del espacio tridimensional se dispone de tres **ejes coordenados**, cada uno de ellos perpendicular a los otros dos y que se cortan en un punto común O, llamado **origen de coordenadas**. Los tres ejes se identifican como ejes x, y y z. Las **coordenadas** de cada punto del espacio son la terna ordenada (x, y, z), donde cada componente se obtiene al proyectar el punto sobre el eje correspondiente.

Este **sistema de referencia**, llamado **cartesiano**, se suele representar como en la figura, en la que solo aparecen los semiejes positivos, estando los ejes y y z sobre el plano del papel, y el eje x perpendicular al mismo.



Los planos determinados por cada dos ejes junto con el origen se llaman planos coordenados y se representan por xy, xz e yz, respectivamente.

4.1.2. Superficies

Una **superficie** es el conjunto de puntos que verifican una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, llamada **ecuación general de la superficie**.

4.1.3. Representación gráfica de superficies

Para obtener la representación gráfica de una superficie se puede recurrir a hacer cortes por planos paralelos a los planos coordenados. Si la ecuación general de la superficie es $F(x, y, z) = 0$, entonces:

- Las curvas que se obtienen al cortar por planos paralelos al plano xy son las curvas $F(x, y, k) = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.
- Las curvas que se obtienen al cortar por planos paralelos al plano xz son las curvas $F(x, k, z) = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Las curvas que se obtienen al cortar por planos paralelos al plano *yz* son las curvas $F(k, y, z) = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

Para representaciones gráficas más precisas de superficies se debe recurrir a algún *software* matemático gráfico.

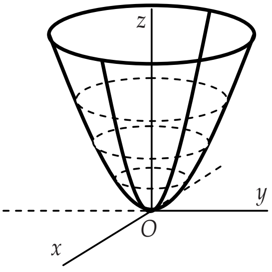
EJEMPLO 12

Hacer, mediante cortes con planos, una representación aproximada de la superficie $x^2 + y^2 - z = 0$.

Solución

En primer lugar se puede observar que $z = x^2 + y^2 \geq 0$, por lo que solo existe superficie en el semiespacio $z \geq 0$. Además:

- Cortando por los planos $z = k \geq 0$ (planos paralelos al plano *xy*) se obtienen circunferencias, $x^2 + y^2 = k$, centradas en el origen y con radio $\sqrt{k}$. En el caso particular de que $z = k = 0$ se obtiene $x^2 + y^2 = 0$, que es el origen.
- Cortando por el plano $x = 0$ se obtiene la parábola $z = y^2$, y cortando por el plano $y = 0$ se obtiene la parábola $z = x^2$.



4.2. PLANOS, ESFERAS Y CILINDROS

4.2.1. Planos

Los **planos** son las superficies de ecuación general:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Como se recordará, un plano queda determinado por tres de sus puntos no alineados, o por un punto y un vector perpendicular, o por un punto y dos vectores no paralelos. Para más detalles, consultar en el libro de segundo de bachillerato.

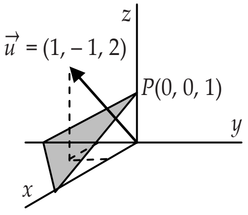
EJEMPLO 13

Hallar la ecuación general del plano perpendicular al vector $\vec{u} = (1, -1, 2)$ que pasa por el punto $P(0, 0, 1)$. Representarlo gráficamente.

Solución

La ecuación general del plano es:

$$1(x-0) + (-1)(y-0) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - y + 2z - 2 = 0$$



Para la representación gráfica se representan los puntos del plano que cortan los ejes de coordenadas.

4.2.2. Esferas

La **ecuación reducida de la esfera** con centro en el punto $C(x_0, y_0, z_0)$ y radio r es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) = r^2$$

Desarrollando la ecuación reducida se obtiene la ecuación general, que es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Como en la circunferencia, completando cuadrados se pasa de la ecuación general a la reducida.

EJEMPLO 14

Representar gráficamente la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + 1 = 0$.

.../...

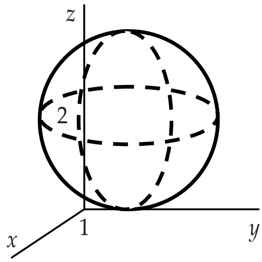
.../...

Solución

Completando cuadrados se obtiene la ecuación reducida:

$$x^2 + (y^2 - 2y) + (z^2 - 4z) = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = -1 + 1 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$$

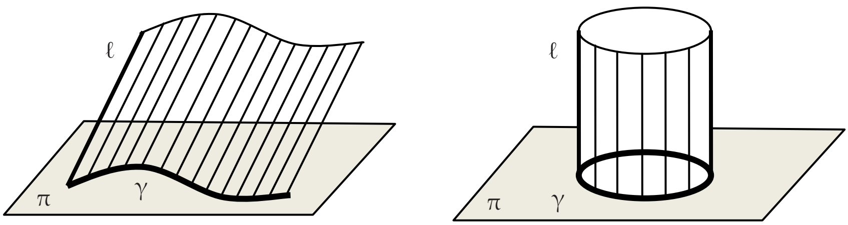
El centro es el punto $C(0, 1, 2)$ y el radio $r = 2$. A partir del centro y el radio se obtiene la representación gráfica.



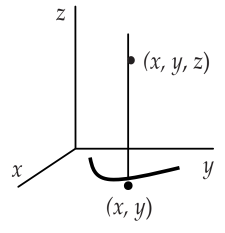
4.2.3. Cilindros

Dada una curva γ contenida en un plano π, llamada **curva generatriz**, y una recta ℓ no contenida en el plano, llamada **directriz**, se llama **cilindro** a la superficie engendrada por todas las rectas paralelas a ℓ que se apoyan en γ. Cuando la recta es perpendicular al plano π que contiene a la curva, se dice que el **cilindro** es **recto**.

En la siguiente figura aparecen dos cilindros. El de la izquierda no es recto y el de la derecha es recto con la curva cerrada, que es el ya familiar cilindro.



Aquí, solo se considerarán cilindros rectos con la curva generatriz contenida en uno de los planos coordenados. Si, por ejemplo, la curva γ está contenida en el plano xy, su ecuación general será de la forma $f(x, y) = 0$, y un punto $P(x, y, z)$ pertenecerá al cilindro si está en la recta paralela al eje z que pasa por un punto (x, y) de la curva γ, es decir, si $f(x, y) = 0$, ya que z puede tomar cualquier valor.



Por tanto, las ecuaciones que solo contienen dos variables son cilindros rectos con curva generatriz contenida en el plano coordenado correspondiente a esas dos variables y recta directriz paralela al eje de la variable que falta.

EJEMPLO 15

Identificar cuáles de las siguientes ecuaciones generales corresponden a cilindros:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$

b) $x^2 + z^2 - 2x = 0$

c) $y^2 - z = 0$

d) $x^2 + y^2 = z$

Solución

Solo corresponden a cilindros las ecuaciones que no contienen las tres variables.

a) $x^2 + 4y^2 = 4$ es la ecuación de un cilindro con curva generatriz contenida en el plano xy y directriz paralela al eje z. La curva generatriz es la elipse:

$$x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

b) $x^2 + z^2 - 2x = 0$ es la ecuación de un cilindro con curva generatriz contenida en el plano xz y directriz paralela al eje y. La curva generatriz es la circunferencia con centro $(1, 0)$ y radio 1:

$$x^2 + z^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + z^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + z^2 = 1$$

c) $y^2 - z = 0$ es la ecuación de un cilindro con curva generatriz contenida en el plano yz y directriz paralela al eje x. La curva generatriz es la parábola $z = y^2$.

d) $x^2 + y^2 = z$ no es la ecuación de un cilindro.

4.3. SUPERFICIES CUÁDRICAS

En el espacio, se llama **superficie cuádrica** al conjunto de puntos que verifican una ecuación de segundo grado de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Si a esta ecuación se le aplica el giro y la traslación adecuados, se obtiene la ecuación reducida de la cuádrica, que permite identificarla y encontrar sus elementos geométricos.

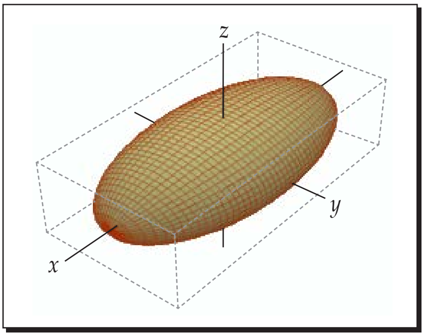
En lo que respecta a esta Unidad, se consideran solo ecuaciones en las que $D = E = F = 0$.

Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas que se dan a continuación.

4.3.1. Elipsoide

La ecuación reducida del **elipsoide** con centro en el origen y semiejes a, b y c, respectivamente, es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



En el caso particular de que $a = b = c = r$, el elipsoide es la esfera centrada en el origen y radio r.

Las secciones coordenadas, que son las secciones obtenidas al cortar el elipsoide con los planos coordenados, son elipses.

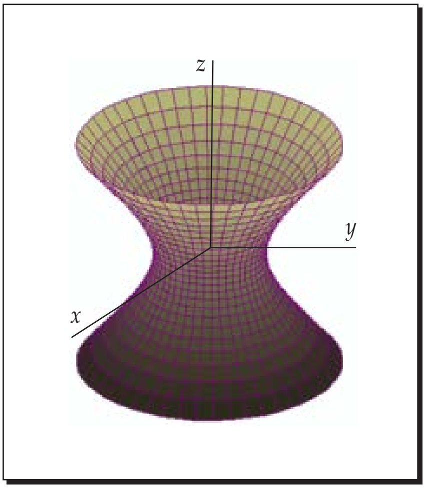
Si el elipsoide centrado en el origen se somete a una traslación paralela a los ejes de tal manera que su nuevo centro sea el punto $C(x_0, y_0, z_0)$, su ecuación se transforma en:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

4.3.2. Hiperboloide de una hoja

La ecuación reducida del **hiperboloide de una hoja** con centro en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



La sección con el plano *xy* es una elipse y las secciones con los planos *xz* e *yz* son hipérbolas.

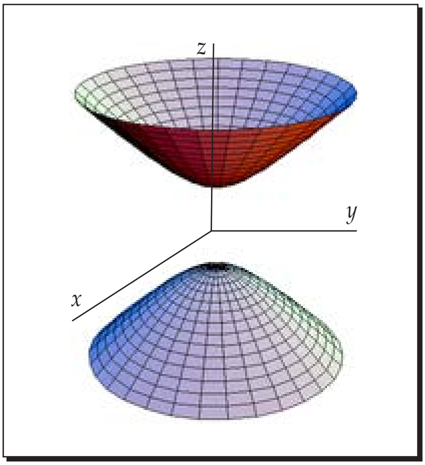
Si el hiperboloide centrado en el origen se somete a una traslación paralela a los ejes de tal manera que su nuevo centro sea $C(x_0, y_0, z_0)$, su ecuación se transforma en:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

4.3.3. Hiperboloide de dos hojas

La ecuación reducida del **hiperboloide de una hoja** con centro en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

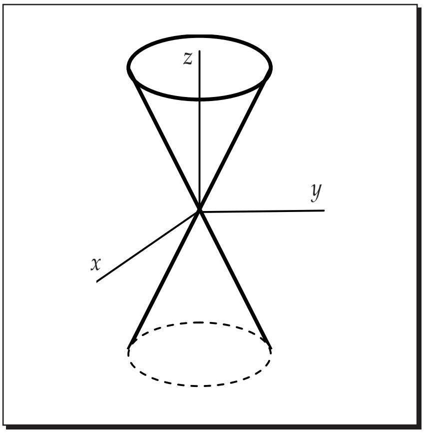


No corta el plano *xy*, y las secciones con los planos *xz* e *yz* son hipérbolas.

Si el hiperboloide centrado en el origen se somete a una traslación paralela a los ejes de tal manera que su nuevo centro sea $C(x_0, y_0, z_0)$, su ecuación se transforma en:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1$$

4.3.4. Cono elíptico



La ecuación reducida del **cono elíptico** con centro en el origen es:

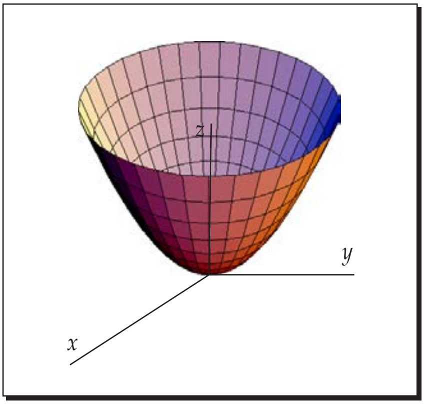
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

La sección con el plano xy es el origen, las secciones con los planos xz e yz son pares de rectas y las secciones por planos paralelos al plano xy son elipses.

Si el cono elíptico centrado en el origen se somete a una traslación paralela a los ejes de tal manera que su nuevo centro sea $C(x_0, y_0, z_0)$, su ecuación se transforma en:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$$

4.3.5. Paraboloide elíptico



La ecuación reducida del **paraboloide elíptico** con centro en el origen es:

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

La sección con el plano xy es el origen, las secciones con los planos xz e yz son parábolas y las secciones por planos paralelos al plano xy con $z > 0$ son elipses.

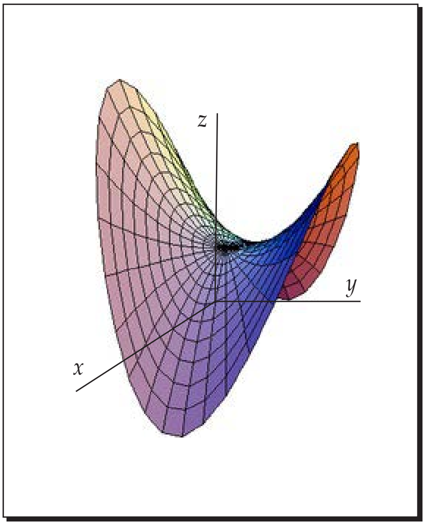
Si el paraboloide elíptico centrado en el origen se somete a una traslación paralela a los ejes de tal manera que su nuevo centro sea $C(x_0, y_0, z_0)$, su ecuación se transforma en:

$$z-z_0=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

4.3.6. Paraboloide hiperbólico

La ecuación reducida del **paraboloide hiperbólico** con centro en el origen es:

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$



Las secciones paralelas con el plano xy son hipérbolas y las secciones con los planos xz e yz son parábolas.

Si el paraboloide hiperbólico centrado en el origen se somete a una traslación paralela a los ejes de tal manera que su nuevo centro sea $C(x_0, y_0, z_0)$, su ecuación se transforma en:

$$z - z_0 = \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}$$

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Ecuaciones de las cónicas (circunferencia, elipse, hipérbola y parábola).
- Propiedades geométricas y de reflexión de las cónicas.
- Curvas paramétricas.
- Parametrización de una curva.
- Coordenadas polares.
- Planos, esferas y cilindros.
- Superficies cuádricas.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Hallar el centro y el radio de las circunferencias:

a) $x^2 + y^2 + x - y - 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$

Enunciado 2

Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, 2)$, sabiendo que su centro está sobre la recta $x - y = 1$.

Enunciado 3

Hallar la ecuación reducida de la elipse de focos (± 2, 0) que pasa por el punto P (– 2, 3). Calcular, mediante derivación, la tangente en P y comprobar que el resultado coincide con el del ejemplo 3.

Enunciado 4

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$ en sus puntos de intersección con la recta $x - y + 1 = 0$.

Enunciado 5

Dos sonidos se emiten simultáneamente desde dos faros que distan 6 km. ¿Dónde se escuchan con dos segundos de diferencia?

Enunciado 6

Hallar el vértice, el foco, la directriz y el eje de la parábola $y^2 = x$, así como su tangente en (1, 1).

Enunciado 7

Dos objetos siguen las trayectorias indicadas por las siguientes curvas:

$$\text{Objeto } A: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, t \geq 0 \qquad \text{Objeto } B: \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = -\operatorname{sen} t \end{cases}, t \geq 0$$

a) Hallar las ecuaciones cartesianas de las dos trayectorias y hacer un esbozo de sus gráficas.

b) Encontrar los puntos de corte de las trayectorias y decidir si los objetos se encuentran en alguno de ellos.

c) Hallar el ángulo que forman las dos trayectorias en alguno de sus puntos de contacto distintos del origen (si existen).

Enunciado 8

Determinar el punto de la curva $\alpha(t) = (1 - 2t, t^2, 2e^{2(t-1)})$, $t \in \mathbb{R}$, en el que el vector tangente es paralelo al vector de posición. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en dicho punto? ¿Y la velocidad?

Enunciado 9

Pasar de coordenadas cartesianas a polares, o viceversa, las siguientes funciones:

a) $y = 3$

b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $y = ax$

d) $\rho \cos \theta = 4$

e) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Enunciado 10

Hacer un esbozo de la gráfica de las funciones:

a) $\rho = 1 + \cos \theta$

b) $\rho = 1 + 2 \cos \theta$

Enunciado 11

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\rho = \dfrac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$ en $\theta = \pi/2$.

Solución 1

a) Centro: $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Radio: $r = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

b) Centro: $(0, -1)$. Radio: $r = 2$.

Solución 2

$$x^2 + y^2 - 7x - 5y + 6 = 0$$

Solución 3

- Elipse: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.
- Tangente: $x - 2y + 8 = 0$.

Solución 4

- En $P_1(-1, 0)$, tangente: $x + 1 = 0$.
- En $P_2(-3, -2)$, tangente: $3x - 4y + 1 = 0$.

Solución 5

Si se supone un sistema de referencia cartesiano con los faros situados en los puntos $(\pm 3, 0)$, los sonidos se escuchan con una diferencia de 2 segundos en los puntos de la hipérbola

$$\frac{x^2}{0{,}1156} - \frac{y^2}{8{,}8844} = 1$$

Solución 6

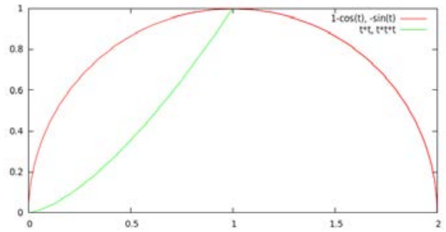
- Vértice: $(0, 0)$.
- Foco: $(1/4, 0)$.
- Directriz: $x = -1/4$.

- Eje: $y = 0$.
- Tangente: $x - 2y + 1 = 0$.

Solución 7

a) $A \equiv x^3 = y^2$, $B \equiv (x - 1)^2 + y^2 = 1$

b) $O(0, 0)$ y $P(1, 1)$, y se encuentran en $O(0, 0)$.



c) $\theta = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

Solución 8

- $P(-1, 1, 2)$
- Recta tangente: $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$.
- Velocidad: $2\sqrt{6}$.

Solución 9

a) $\rho = \dfrac{3}{\text{sen}\ \theta}$

b) $\rho = 3$

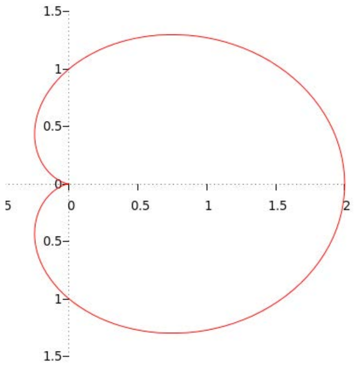
c) $\tan \theta = a$

d) $x = 4$

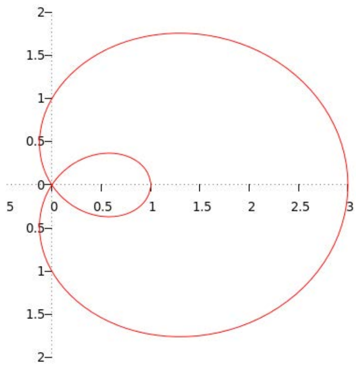
e) $y = x\sqrt{3}$

Solución 10

a)



b)



Solución 11

$$2x - y + 1 = 0$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, A. et ál (1994). *Cálculo I*. Madrid: Clagsa.

— (1996). *Cálculo II*. Madrid: Clagsa.

Hernández, E. (1994). *Álgebra y geometría*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo I*. Madrid: McGraw-Hill.

Mata, A. y Reyes, M.: *Apuntes de cálculo*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo.