

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LAS UNIDADES 7, 8, 9 y 10

| | |
|--|---|
| ASIGNATURA: | Estadística y Probabilidad / Fundamentos de Estadística |
| Profesor responsable de la Asignatura: | Vanessa Fernández Chamorro |
| Tipo de actividad: | Actividad de Evaluación Continua de las Unidades 7, 8, 9 y 10 |

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

La realización de esta actividad de evaluación continua va a permitir comprobar los avances realizados por el estudiante mediante la aplicación práctica de los conceptos teóricos desarrollados en las unidades correspondientes. El objetivo que se pretende conseguir es que el estudiante sea capaz de, a partir de un enunciado, encontrar las herramientas de Estadística necesarias para resolver el problema y que sea capaz de aplicarlas con éxito.

La evaluación de este trabajo tendrán en cuenta los siguientes puntos:

1. Correcta aplicación de las expresiones matemáticas asociadas a cada uno de los enunciados propuestos y relación de conceptos vistos en estas unidades.
2. Procedimiento utilizado para llevar a cabo dicha aplicación.
3. Conclusión alcanzada con el análisis de los resultados obtenidos en cada caso.

No hay que olvidar argumentar los pasos que se van dando. No basta con dar simplemente la solución.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

PROBLEMA 1

El número diario de clientes atendidos en un puesto de servicio A en cinco días ha sido: 50, 48, 53, 60, 37; mientras que, en esos mismos días, un puesto B ha atendido: 40, 51, 62, 55 y 64.

a) Calcular un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de demanda media entre ambos puestos de servicio A y B, suponiendo la misma varianza pero desconocida.

b) Calcular un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de demanda media entre ambos puestos de servicio A y B, suponiendo diferente varianza y desconocida.

PROBLEMA 2

El fabricante de una medicina de patente afirmó que la misma fue 90% eficaz para aliviar una alergia durante un periodo de 8 horas. Se eligieron 200 personas que padecían alergia, la medicina proporcionó alivio a 160 personas. Con un nivel de significación $\alpha = 0,01$, ¿se puede aceptar la afirmación del fabricante?

PROBLEMA 3

En un depósito cilíndrico, la altura del agua que contiene varía conforme pasa el tiempo según la siguiente tabla:

| | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|
| Tiempo (h) | 8 | 22 | 27 | 33 | 50 |
| Altura (m) | 17 | 14 | 12 | 11 | 6 |

- Hallar el coeficiente de correlación lineal entre el tiempo y la altura e interpretarlo.
- Hallar la recta de regresión de la altura del agua en función del tiempo.
- ¿Cuál será la altura del agua cuando hayan transcurrido 40 horas?
- ¿Qué tiempo ha de pasar para que la altura del agua sea 2 m?

PROBLEMA 4

Se quiere comparar dos poblaciones de ranas aisladas geográficamente. Para ello se toman dos muestras de ambas poblaciones y se les mide la longitud del cuerpo expresada en milímetros, obteniéndose los siguientes datos:

$$\bar{x}_1 = 74 \quad s_1^2 = 225 \quad n_1 = 42$$

$$\bar{x}_2 = 78 \quad s_2^2 = 169 \quad n_2 = 56$$

Contrastar la hipótesis para la diferencia de medias con un nivel de significación $\alpha = 0,05$, suponiendo poblaciones normales.

PROBLEMA 5

Las tallas de un tipo de plantas sigue una distribución normal de media 15 cm y desviación típica de 2,5 cm. Se elige al azar una muestra de 45 plantas.

- Hallar la probabilidad de que la talla media sea superior a 12,5 cm.
- Calcular un intervalo de confianza al 95% para la talla media.

INSTRUCCIONES PARA LA REALIZACIÓN Y ENTREGA DE LA ACTIVIDAD

Criterios de Calificación

1. La presentación, portada con el nombre completo del alumno/a e índice.
2. El correcto planteamiento de los ejercicios.
3. La correcta solución de los ejercicios.
4. La solución esté bien argumentada.
5. Realización de forma individual.

Entrega y calificación

La actividad cumplimentada se envía al profesor a través del Buzón de entrega del Aula Virtual. En ese mismo buzón aparece la fecha límite de entrega.

Se recuerda la necesidad de identificar correctamente el documento de entrega con el nombre y apellido del alumno y el nombre de la AEC.

El formato más óptimo es .PDF

La calificación obtenida se podrá consultar con carácter permanente en el apartado CALIFICACIONES del Aula Virtual.

Soluciones de la AEC3

①

| | | | | | | |
|-----|------------|----|----|----|----|----|
| 1.) | Servicio A | 50 | 48 | 53 | 60 | 37 |
| | Servicio B | 40 | 51 | 62 | 55 | 64 |

a) IC al 95%

Suponiendo varianzas desconocidas pero iguales

Utilizaremos los datos de la pag 8-17 del manual:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leadsto t_{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{n_1 + n_2 - 2, \frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{n_1 + n_2 - 2, \frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$$

$$\bar{X}_A = 49'6 = \frac{50 + 48 + 53 + 60 + 37}{5}$$

$$\bar{X}_B = 54'4 = \frac{40 + 51 + 62 + 55 + 64}{5}$$

$$S_A = \sqrt{\frac{(50 - 49'6)^2 + \dots + (37 - 49'6)^2}{4}} = 8'38.$$

$$S_B = \sqrt{\frac{(90-54'4)^2 + \dots + (64-54'4)^2}{4}} = 9'61$$

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 49'6 - 54'4 = -4'8$$

$$S_p^2 = \frac{4 \cdot (8'38)^2 + 4 \cdot (9'61)^2}{8} = \frac{(8'38)^2 + (9'61)^2}{2} = 81'29$$

$$S_p = \sqrt{81'29} = 9'02.$$

$$1 - \alpha = 0'95$$

$$\alpha = 0'05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0'025$$

$$t_{n_1+n_2-2, \frac{\alpha}{2}} = t_{8, 0'025} = 2'306 \simeq \underline{\underline{2'31}}$$

Ya tenemos todos los datos para el intervalo.

$$\begin{aligned} \left(-4'80 \pm 2'31 \cdot 9'02 \sqrt{\frac{2}{5}} \right) &= (-4'80 \pm 13'18) \\ &= (-17'98 ; 8'38) // \end{aligned}$$

b) IC al 95%

Suponiendo diferentes variancias y desconocidas.

Utilizemos las fórmulas de la pag 8-19 del manual.

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{n_1+n_2-2-\Delta, \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right)$$

$$\Delta = \frac{[(n_2-1)A - (n_1-1)B]^2}{(n_2-1)A^2 + (n_1-1)B^2}$$

$$A = \frac{S_1^2}{n_1}$$

$$B = \frac{S_2^2}{n_2}$$

$$\bar{X}_A = 49'6$$

$$A = \frac{8'38^2}{5} = 14'04$$

$$\bar{X}_B = 54'4$$

$$B = \frac{9'61^2}{5} = 18'47$$

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = -4'8$$

$$\Delta = \frac{(4 \cdot 14'04 - 4 \cdot 18'47)^2}{4 \cdot 14'04^2 + 4 \cdot 18'47^2} = \frac{314}{2153'05} = 0'15$$

$$S_A = 8'38$$

$$S_B = 9'61$$

$$(-4'8 \pm t_{7'85, 0'025} \cdot 5'70) \simeq (-4'80 \pm t_{8, 0'025} \cdot 5'70)$$

$$= (-4'80 \pm 2'31 \cdot 5'70) = (-4'80 \pm 13'167) =$$
$$= (-17'967, 8'367)$$

Es casi idéntico al anterior //.

problema 2

Vamos a utilizar las fórmulas del manual de la pag 9-15.

¿Qué datos tenemos?

$$p_0 = 0.90 = 90\%$$

$$\hat{p} = \frac{160}{200} = 0.80 = 80\%$$

$$H_0: p = p_0; \quad p = 0.90 \quad \text{afirmación correcta}$$

$$H_1: p \neq p_0; \quad p \neq 0.90 \quad \text{afirmación falsa.}$$

$$\alpha = 0.01.$$

$$\text{El estadístico } \hat{d} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Si $\hat{d} \in (-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$ se acepta H_0 .

$$\hat{d} = \frac{0.80 - 0.90}{\sqrt{\frac{0.90 \cdot 0.10}{200}}} = -4.71$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -4.71 \notin (-2.57, 2.57) \\ \text{no aceptamos } H_0 \\ \text{Rechazamos } H_0 \end{array} \right.$$

IC $(-2.57, 2.57)$

Problema 3

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|---------------|---|
| h | 8 | 22 | 27 | 33 | 50 | 55 | X |
| m | 17 | 14 | 12 | 11 | 6 | 5 | y |

| X_i | Y_i | X_i^2 | Y_i^2 | $X_i Y_i$ |
|----------|-------|---------|---------|-----------|
| 8 | 17 | 64 | 289 | 136 |
| 22 | 14 | 484 | 196 | 308 |
| 27 | 12 | 729 | 144 | 324 |
| 33 | 11 | 1089 | 121 | 363 |
| 50 | 6 | 2500 | 36 | 300 |
| Σ | 140 | 60 | 4866 | 786 |
| | | | | 1431 |

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{140}{5} = 28$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{n} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma X_i^2}{n} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{4866}{5} - 28^2} = 13.755$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma Y_i^2}{n} - \bar{Y}^2} = \sqrt{\frac{786}{5} - 12^2} = 3.633$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma X_i Y_i}{n} - \bar{X} \bar{Y} = \frac{1431}{5} - 28 \cdot 12 = -49.8$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-49.8}{13.755 \cdot 3.633} = -0.99 \quad | -0.99 | = 0.99 \text{ es proximo a } 1$$

\Rightarrow la correlación es fuerte.

$$Y - \bar{Y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (X - \bar{X})$$

$$Y - 12 = \frac{-49.8}{(13.755)^2} (X - 28) ; Y - 12 = -0.26 (X - 28)$$

$$Y - 12 = -0.26 X + 7.37$$

$$\boxed{Y = -0.26 X + 19.37}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 40h \Rightarrow Y = 8.97 \text{ m} \\ Y = 2m \Rightarrow X = 66.81 \text{ h.} \end{array} \right.$$

problema 4

4

Por los datos que nos dan en el problema, voy a utilizar las fórmulas de la pag 9-14

$$\hat{d} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow t_{n_1+n_2-2-\Delta, \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta = \frac{[(n_2-1)A - (n_1-1)B]^2}{(n_2-1)A^2 + (n_1-1)B^2}$$

$$A = \frac{S_1^2}{n_1}$$

$$B = \frac{S_2^2}{n_2}$$

$$\alpha = 0.05.$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$\hat{d} = \frac{74 - 78}{\sqrt{\frac{225}{42} + \frac{169}{56}}} = \frac{-4}{2.89} = -1.38.$$

$$IC = (-2.000; 2.000)$$

$$\hat{d} = -1.38 \in (-2.000; 2.000)$$

Se acepta H_0 .

$$\Delta = \frac{\left(55 \cdot \frac{225}{42} - 41 \cdot \frac{169}{56}\right)^2}{55 \cdot \left(\frac{225}{42}\right)^2 + 41 \cdot \left(\frac{169}{56}\right)^2} = \frac{29210.47}{1951.85} = 14.96 \approx 15 //$$

$$t_{42+56-2-15, \frac{0.05}{2}} = t_{81, 0.025} = 2.000 //$$

Problema 5

$$N(15, 2.5) \quad n = 45$$

$$X \sim N(15, 2.5) \quad N = 45$$

$$\bar{X} \sim N\left(15, \frac{2.5}{\sqrt{45}}\right) \quad T: \text{Central del límite.}$$

$$P(\bar{X} > 12.5) = P\left(Z > \frac{12.5 - 15}{2.5/\sqrt{45}}\right) =$$

$$= P(Z > -6.71) =$$

$$= P(Z < 6.71) = 1$$

IC al 95%

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$1 - 0.025 = 0.975 \leadsto Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$IC \equiv \left(\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$IC \equiv \left(15 \pm 1.96 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{45}} \right) = (15 \pm 0.73) = (14.27, 15.73)$$
