

# Actividad de Evaluación Continua 1

## ÁLGEBRA LINEAL

The image contains a large amount of handwritten mathematical content. It includes:

- Trigonometric identities:  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ .
- Integration:  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1$ .
- Differentiation:  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ ,  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ .
- Series:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ .
- Probability:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .
- Geometry: A triangle with sides  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and angles  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Area formulas:  $\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C$ ,  $\Delta = \frac{1}{2}ac \sin B$ ,  $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A$ .
- Physics:  $E = mc^2$ ,  $F = ma$ .
- Calculus:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .
- Algebra:  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ,  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

# Índice

<b>1. Actividades</b>	<b>2</b>
1.1. Problema 1 . . . . .	2
1.2. Problema 2 . . . . .	3
1.3. Problema 3 . . . . .	3
1.4. Problema 4 . . . . .	4
1.5. Problema 5 . . . . .	5
1.6. Problema 6 . . . . .	5
1.7. Problema 7 . . . . .	6
1.8. Problema 8 . . . . .	7
1.9. Problema 9 . . . . .	7
1.10. Problema 10 . . . . .	8

## 1. Actividades

### 1.1. Problema 1

Calcular la distancia desde el punto  $Q = (1, -1, -1)$  a la recta intersección de los planos:

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 3 \\2x - 3y - z &= 6\end{aligned}$$

**RESOLUCIÓN:**

Disponemos de 2 planos cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\pi_1 : x - 2y + z &= 3 \\\pi_2 : 2x - 3y - z &= 6\end{aligned}$$

Y sus rectas normales:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &=<1, -2, 1> \\\vec{n}_2 &=<2, -3, -1>\end{aligned}$$

Con lo cual son planos no paralelos. Para definir la línea que forman al cruzarse necesitaremos un punto y su vector director el cual obtenemos calculando el **producto vectorial** de ambos:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

Para encontrar el punto resolvemos el sistema tomando  $y = 0$ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 3 \\ 2x - z = 6 \end{cases} \rightarrow P(x, y, z) = (3, 0, 0)$$

Con lo que podemos definir la ecuación de la recta y calculamos la distancia del punto  $Q(1, -1, -1)$ :

$$r : \frac{x - 3}{5} = \frac{y}{3} = z$$

$$\vec{u} = \vec{PQ} = <-2, -1, -1>$$

$$\text{Distancia}(r, Q) = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|<2, -3, 1>\|}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

## 1.2. Problema 2

Resolver el siguiente sistema por gauss y sustitución hacia atrás:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 4 \\ x - y + 3z = 0 \\ -x + 7y - 7z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz aumentada}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & -7 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & -7 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 4 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Queda el sistema reducido:

$$\begin{cases} x + 3z - y = 0 \\ -4z + 7y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

## 1.3. Problema 3

Resolver el siguiente sistema por Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{rrrrr} 2x & +6y & -2z & & = 2 \\ 3x & +9y & -3z & +3w & = 1 \\ -x & -3y & +z & -3w & = 1 \\ -2x & -6y & +2z & -6w & = 2 \end{array}$$

Obtener forma escalonada reducida por fila de la matriz ampliada del sistema. Comprobar si el sistema es compatible. Comprueba si es determinado o indeterminado. En el caso de que sea lo segundo expresar la solución en función de un parámetro  $t$  que se corresponda a la variable libre.

RESOLUCIÓN:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -6 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_1, R_1/2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -6 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + 3R_1, R_3 + R_1, R_4 + 2R_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array} \right]$$

Podemos comprobar que el sistema es compatible indeterminado ya que tenemos infinitas soluciones para las variables libres  $z = s$  e  $y = t$ .

Representamos de forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = s - 3t + 1 \\ y = t \\ z = s \\ w = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### 1.4. Problema 4

Sea el sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es la siguiente:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{array} \right]$$

Discutir en función del parámetro  $a$ .

RESOLUCIÓN:

*Se determina qué valores de  $a$  hacen que el sistema sea incompatible con el determinante de la matriz:*

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 10 & -6 \end{bmatrix} \right) = a^2 + 2a - 15 = (a - 3)(a + 5)$$

*Sabemos entonces que el sistema es compatible determinado para valores de  $a$  diferentes a 3 y -5.*

*Se evalúa el sistema para  $a = 3$ :*

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

*Podemos observar que el sistema queda compatible e indeterminado ya que existen más incógnitas que ecuaciones linealmente independientes.*

*Se realiza el mismo procedimiento para  $a = -5$ :*

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{array} \right]$$

*Lo que resulta en un sistema incompatible, ya que obtenemos el resultado  $0 = -\frac{8}{3}$ .*

### 1.5. Problema 5

Realiza la descomposición LU de la matriz A

*Se reduce de forma escalonada para obtener los coeficientes de LU*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Lo que es equivalente a multiplicarlo por:*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si la matriz A corresponde a la matriz de un sistema, calcular la solución de dicho sistema si el vector del lado derecho es:

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

*Resolvemos el sistema  $Ax = b \rightarrow LUx = b$*

$$Ly = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ 31 \end{bmatrix}$$

*Y finalmente:*

$$Ux = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ 31 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124 \\ 75 \\ 31 \end{bmatrix}$$

### 1.6. Problema 6

Realiza la descomposición LU de la matriz A y comprueba el resultado:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

*Se reduce de forma escalonada para obtener los coeficientes de LU*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 2R_1+F_2 \\ -1R_1+R_3 \\ 3R_1+R_4 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & -4 \\ 0 & 12 & 4 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 3R_2+R_3 \\ -4R_2+R_4 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

Entonces los coeficientes de LU y su comprobación son:

$$A = L \cdot U \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

### 1.7. Problema 7

Obtener por el método de Gauss-Jordan la inversa de la matriz A, si es posible.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Si A es la matriz de un sistema de ecuaciones con el vector del lado derecho

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la solución del sistema usando dicha inversa?

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-3R_2+R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{2R_3+R_2}{2R_3+R_1}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{19}{2} & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Entonces la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -11 & -7 & 2 \\ -16 & -10 & 4 \\ -10 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Y  $Ax = b$  es:

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -11 & -7 & 2 \\ -16 & -10 & 4 \\ -10 & -6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ -14 \end{bmatrix}$$

## 1.8. Problema 8

Encontrar en  $\mathbb{R}^2$  la matriz canónica de la aplicación que en el orden indicado efectúa las siguientes operaciones: giro de  $60^\circ$  en el sentido contrario a las agujas del reloj, dilatación positiva de factor 2 horizontal, dilatación positiva vertical de factor  $\sqrt{3}$  y reflexión espectral respecto al eje Y. Nota: no usar notación decimal

Para efectuar la rotación de  $60^\circ$  utilizaremos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} \cos(60) & -\sin(60) \\ \sin(60) & \cos(60) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para la dilatación positiva horizontal de factor 2 y vertical de factor  $\sqrt{3}$ :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Para efectuar la reflexión espectral respecto al eje Y:

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos representar estas 3 transformaciones conjuntamente mediante su producto en el siguiente orden:

$$A = EDR = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

## 1.9. Problema 9

Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{array} \right| \xrightarrow{-R_1+R_2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 \end{array} \right| \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 \end{array} \right| \xrightarrow{(a-1)R_2+R_3} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-2)a & -a \\ 0 & -1 & -1 & a-1 \end{array} \right| \xrightarrow{-R_2+R_4} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-2)a & -a \\ 0 & 0 & -a & a \end{array} \right| \xrightarrow{-\frac{1}{2+a}R_3+R_4} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & (\mathbf{a-2})\mathbf{a} & -a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-3+\mathbf{a})\mathbf{a}}{-2+\mathbf{a}} \end{array} \right| \end{array}$$

Una vez reducida, podemos calcular el determinante de la matriz con el producto de sus elementos diagonales

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = -\frac{-2((-2+a)a)((-3+a)a)}{-2+a} = a^3 - 3a^2$$

### 1.10. Problema 10

Sea la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuéntrese la matrix  $2 \times 2$  a la que llamaremos  $B$  cuyas columnas sean distintas de cero y que cumpla que  $AB = 0$ . Nota: en realidad se trata de una familia de soluciones.

$$\begin{aligned} \text{Tomamos } A &= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - 6c & 2b - 6d \\ -3a + 9c & -3b + 9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema  $AB = 0$  de forma matricial por eliminación Gaussiana:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 3R_1+2R_3 \\ 3R_2+2R_4 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Lo que nos devuelve un sistema compatible indeterminado con variables libres  $c$  y  $d$   
Tomamos  $c=t$  y  $d=s$  para parametrizar el sistema, entonces:

$$\begin{cases} a = 3t \\ b = 3s \\ c = t \\ d = s \end{cases} \quad \text{con lo cual la familia de soluciones del sistema tiene la forma: } B = \begin{bmatrix} 3t & 3s \\ t & s \end{bmatrix}$$