Unidad 8. Fundamentos de Hidrostática.

Ecuación Fundamental de la hidrostática

Como se ha comentado en el tema anterior se va a tratar únicamente de fluidos incompresibles por tanto ante una variación de presión no existirá variación de volumen.

En un líquido en reposo, si se aísla un volumen infinitesimal, formado por un prisma rectangular de base A y altura dz.

La presión en la base inferior del prisma es *p*, la presión en la base superior es *p+dp*. La ecuación del equilibrio en la dirección del eje z será

$$pA - (p + dp)A - \rho g\ A\ dz = 0$$

es decir

$$\frac{dp}{\rho} = -g\ dz \tag{8.1}$$

Imaginemos un plano de referencia horizontal a partir del cual se miden las alturas en el eje z

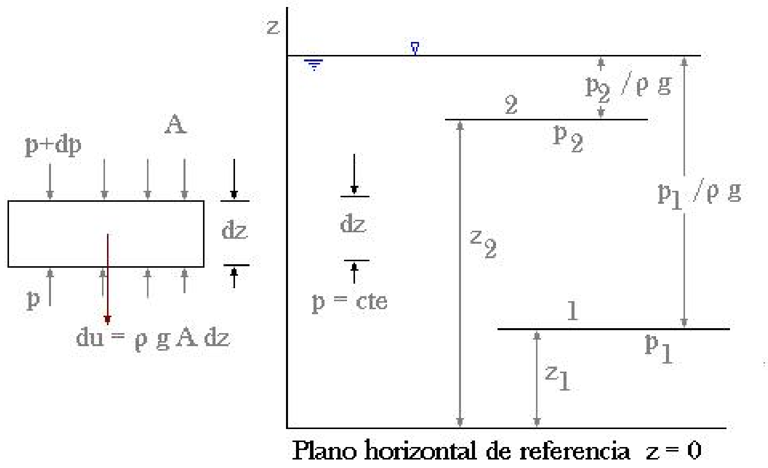

Figura 8. 1. *Deducción de la ecuación fundamental de la hidrostática. 1 y 2 son dos planos horizontales en el seno de un fluido en reposo, de densidad constante ρ.*

Integrando la ecuación (8.1) entre 1 y 2, y teniendo en cuenta que la densidad es constante, se tiene:

$$g\ (z_2 - z_1) = \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

es decir

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 g = \frac{p_2}{\rho} + z_2 g \tag{8.2}$$

y además como 1 y 2 son puntos cualesquiera dentro del seno del fluido, tendremos la **ecuación fundamental de la hidrostática del fluido incompresible**

$$\frac{p}{\rho} + zg = cte \tag{8.3}$$

que es la primera forma de la ecuación fundamental de la hidrostática del fluido incompresible

Si en la ecuación anterior (8.3) se divide todos los términos por la constante g nos quedará como

$$\frac{p}{\rho g} + z = cte \tag{8.4}$$

que es la segunda forma de la ecuación fundamental de la hidrostática del fluido incompresible. La constante de la ecuación (8.4) se llama altura piezométrica y se designa con la letra h. En todo fluido en reposo la altura piezométrica h es constante.

y si en la ecuación anterior (8.3) se multiplica todos los términos por la densidad *ρ*, nos quedará como

$$p + z\rho g = cte \tag{8.5}$$

que es la tercera forma de la ecuación fundamental de la hidrostática del fluido incompresible.

De las ecuaciones anteriores podemos deducir los siguientes conclusiones

a) Si $z_1 = z_2$ entonces $p_1 = p_2$ es decir, en un fluido en reposo todos los puntos a la misma cota del plano de referencia horizontal, tienen la misma presión.

b) Recíprocamente, si $p_1 = p_2$ entonces; $z_1 = z_2$ es decir, en un fluido en reposo todos los puntos que tienen la misma presión están en el mismo plano horizontal.

c) En particular la superficie libre de un líquido en equilibrio se halla toda a la misma presión, que es la presión atmosférica, y por tanto: la superficie libre de un líquido es horizontal. Esta superficie se llama plano piezométrico (lugar geométrico de *las presiones relativas* nulas).

d) En un tubo piezométrico (lo veremos más adelante) conectado a un punto de un líquido éste se eleva hasta una altura igual a la altura equivalente a la presión del líquido en dicho punto (véase *Figura 8. 2*. De aquí el nombre de plano piezométrico que se da a la superficie libre.

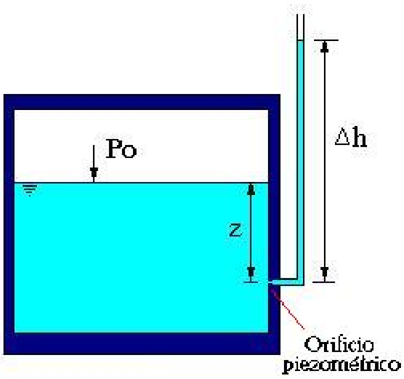

Figura 8. 2. *Tubo piezométrico conectado en uno de los lados a un recipiente en el cual se encuentra un fluido. Es el procedimiento más sencillo y económico de medir presiones relativas.*

Todas las ecuaciones anteriores son válidas tanto si se expresan las presiones en presiones relativas como si se expresan en presiones absolutas, ya que ambas presiones se diferencian únicamente en una constante, y que figuraría en ambos miembros de cada una de las ecuaciones.

Si hay varios líquidos no mezclados de diferente densidad (inmiscibles), la aplicación de las ecuaciones anteriores se hace sección por sección, empezando una nueva sección allí donde empieza un fluido de distinta densidad.

Gráfico de presiones

Si ahora aplicamos la ecuación (8.5) entre un punto de la superficie libre y un punto cualquiera en el seno del líquido, y usando presiones absolutas, quedará como

$$p_{abs} = p_{amb} + \rho g h \tag{8.6}$$

donde

p_{abs} presión absoluta en un punto cualquiera del líquido

p_{amb} presión atmosférica o barométrica

h profundidad del punto con relación al plano piezométrico o superficie libre.

y si usamos presiones relativas, quedará como

$$p = \rho g h \tag{8.7}$$

La ecuación (8.6) es la ecuación de una recta cuya ordenada en el origen es P_{amb} = presión atmosférica, y cuya pendiente es igual a ρg (Figura 8. 3).

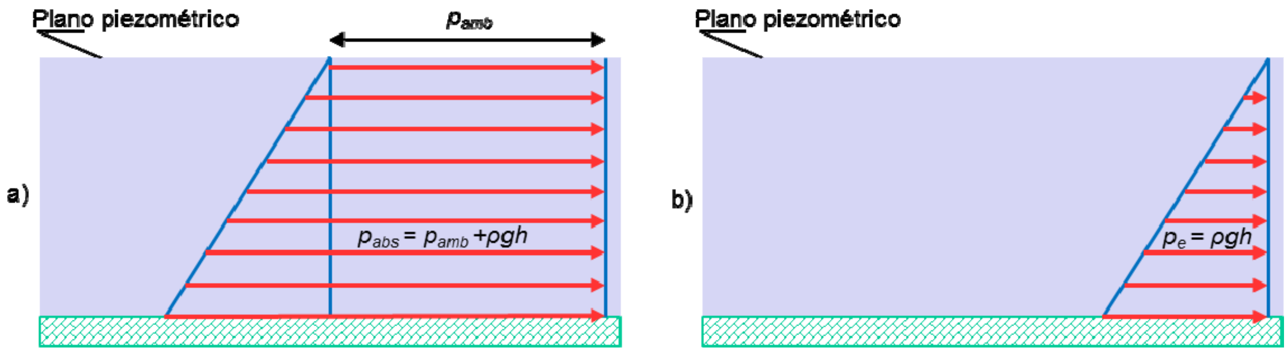

Figura 8. 3. *Gráfico de presiones. a) presión absoluta b) presión relativa.*
p_{amb} = presión barométrica; p_e = presión relativa; p_{abs} = presión absoluta.

La Figura 8. 3 explica la construcción del gráfico de presiones que puede ser de utilidad en la resolución gráfica de algunos problemas prácticos. La presión absoluta en el fondo, es la presión máxima que será llamando h_{max} a la profundidad de éste con relación al plano piezométrico, según la ecuación (8.6) será $p_{abs\ max} = p_{amb} + \rho g h_{max}$ y la presión relativa máxima según la ecuación (8.7) será $p_{e\,max} = \rho g h_{max}$

Instrumentación de medida de presiones

La medida, la transmisión a distancia de la medida y el registro de presiones es muy frecuente tanto en los laboratorios como en la industria para verificación de procesos industriales, para determinar junto con la temperatura el estado de un gas, a la salida y entrada de las máquinas de fluido, para seguridad de personas y de equipo (calderas, recipientes de presión), etc.

Los medidores de presión o manómetros necesariamente han de ser variadísimos, ya que en los laboratorios y la industria se han de medir presiones desde un vacío absoluto del 100% hasta 10^5 bar y mayores, con grado de precisión muy diverso y en medios (temperaturas elevadas, atmósferas radiactivas, etc.) muy diversos.

Los aparatos que sirven para medir las presiones se denominan manómetros. Los manómetros pueden clasificarse según los siguientes criterios:

Clasificación: según la naturaleza de la presión medida.

1. Instrumentos que miden la presión atmosférica, p_{amb} barómetros.

2. Instrumentos que miden la presión relativa, P_e o presión con relación a la atmósfera: manómetros, miden las sobrepresiones o presiones relativas positivas; vacuómetros, miden las depresiones o presiones relativas negativas.

3. Instrumentos que miden la presión absoluta, Pabs: manómetros de presión absoluta. (Este tipo de manómetros suele emplearse para la medición de presiones absolutas pequeñas.) La presión absoluta se puede medir también con un manómetro de presión relativa y un barómetro, mediante la aplicación de la ecuación (8.4).

4. Instrumentos para medir diferencia de presiones: manómetros diferenciales.

5. Instrumentos para medir presiones muy pequeñas: micromanómetros.

Clasificación: según el principio de funcionamiento.

Los manómetros se clasifican en mecánicos y eléctricos. El principio de funcionamiento de los primeros consiste en equilibrar la fuerza originada por la presión que se quiere medir con otra fuerza, normalmente, con el peso de una columna de líquido en los piezómetros de líquido y manómetros de líquido, con un resorte o muelle en los manómetros clásicos o con la fuerza que ejerce sobre la otra cara de un émbolo en los manómetros de émbolo. Esta última fuerza, se mide mecánicamente.

En los manómetros eléctricos la presión origina una deformación elástica, que se mide eléctricamente.

La diferencia entre los piezómetros de líquido y los manómetros de líquido consiste únicamente en que en los piezómetros el líquido manométrico y el líquido en el cual se mide la presión son uno mismo, mientras que en los manómetros de líquido son distintos

El grado de exactitud de cada manómetro depende del tipo, de la calidad de construcción, de su instalación y, por supuesto, de su adecuada lectura

Tubos piezométricos

Tubo piezométrico es un tubo transparente de cristal o plástico, recto o con un codo, de diámetro que no debe ser inferior a 5 mm para evitar los efectos de capilaridad debidos a la tensión superficial. Este tubo Figura 8. 2) se conecta al punto en que se quiere medir la presión, haciendo un orificio con cuidado en la pared del recipiente o tubería, que se llama orificio piezométrico.

Los tubos piezométricos sirven para medir la presión en un líquido midiendo la altura de ascensión del mismo líquido en el tubo y no requieren el empleo de otro líquido manométrico distinto. El nivel que alcanza el tubo en el líquido determina el plano piezométrico.

El orificio piezométrico en los líquidos en reposo (tanque, Cisterna) no tiene una especial importancia.

En los fluidos en movimiento, es muy distinto y, se han de tomar ciertas precauciones para evitar que se produzcan perturbaciones que transformarían parte de la energía de presión en energía dinámica y falsearían la medida: el tubo ha de terminar perpendicular a la corriente; conviene, a fin de disminuir el efecto de la capilaridad y tensión superficial, que el diámetro del tubo sea al menos de 10 a 12 mm, y hay que eliminar cualquier rebaba del metal que quede tras la perforación.

Los tubos piezométricos provistos de escala graduada:

- son cómodos, no necesitan de líquido manométrico y dan la presión en mm de columna del líquido que se quiere medir

- solo sirven para medir presiones relativas que no excedan mucho la presión atmosférica. Una sobrepresión, por ejemplo, de 200 mbar en agua requeriría un tubo piezométrico de más de 2 m.

Barómetros

En estos manómetros se emplean gran variedad de líquidos: agua, alcohol, mercurio, etc. El agua y alcohol se colorean a veces para facilitar la lectura y la fotografía de los ensayos.

Considere la figura donde se muestra un tubo cerrado en un extremo, doblado en forma de U, abierto por el otro extremo donde actúa la presión atmosférica que se desea medir. El mercurio alcanza una cierta posición de equilibrio, donde por el extremo cerrado por existir vacío, la presión es nula. Al nivel indicado, la presión debe ser la misma, de modo que podemos igualar

$$P_a = h\ (mmHg) = h\ torr$$

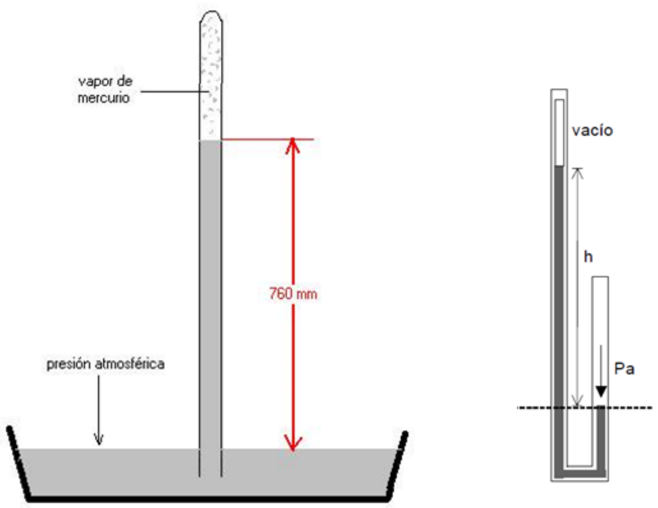

Figura 8. 4. Barómetro de mercurio

Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases

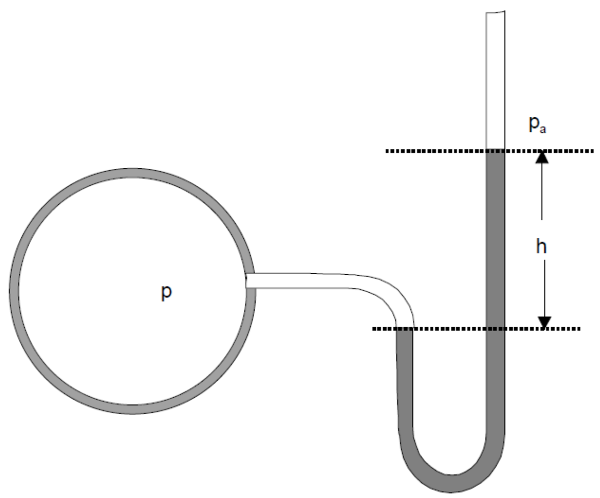

Figura 8. 5. Manómetro en U con presión interior mayor que la atmosférica

La columna en U contiene un líquido (líquido manométrico), por ejemplo agua, de modo que en la situación de equilibrio, cuando la presión p en el recipiente que contiene un gas es mayor que la atmosférica, la condición de equilibrio indicada en la figura da

$$p = p_a + \rho_L gh \tag{8.8}$$

de modo que si se mide la altura h, la presión relativa (a la atmosférica) será

$$p - p_a = \rho_L gh$$

La presión absoluta p puede también calcularse de allí si se conoce o se mide la presión atmosférica mediante un barómetro.

Si la presión en el recipiente que contiene el gas es menor que la atmosférica, la situación de equilibrio será como se indica en la figura siguiente

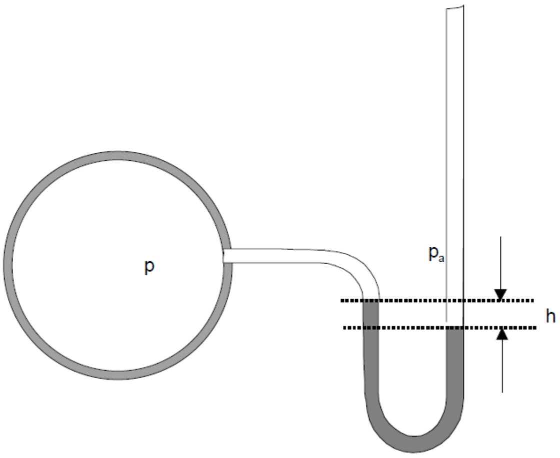

Figura 8. 6. Manómetro en U con presión interior menor que la atmosférica

de modo que la condición de equilibrio será

$$p + \rho_L gh = p_a$$

dando para la presión relativa

$$p - p_a = -\rho_L gh$$

un valor negativo que refleja que la presión en el interior del recipiente es menor que la atmosférica. Igualmente se puede calcular la presión (absoluta) si la presión atmosférica es conocida

$$p = p_a - \rho_L gh \tag{8.9}$$

Principio de Arquímedes

Cuando un cuerpo sólido está en equilibrio en el interior de un fluido, estará sometido a fuerzas exteriores de dos tipos: su peso (y otras fuerzas aplicadas), y además las fuerzas distribuidas sobre su superficie causadas por la presión al estar dentro del fluido. Esas últimas actúan normalmente a la superficie del cuerpo y su resultante vertical puede ser fácilmente calculada. En efecto, si se considera la segunda de las figuras Figura 8. 7 donde el cuerpo no está presente, pero se ha marcado la región donde el cuerpo estaba, las fuerzas sobre esa superficie imaginaria son naturalmente las mismas que actuaban sobre el cuerpo. Pero ahora, ellas equilibran verticalmente al fluido encerrado por esa superficie, de modo que la resultante vertical hacia arriba, debe igualar al peso del fluido encerrado por dicha superficie. Se tiene entonces el *llamado principio de Arquímedes:*

Cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, él experimenta una fuerza vertical y hacia arriba, llamada fuerza de empuje, que es igual al peso del volumen de fluido desplazado por el cuerpo.

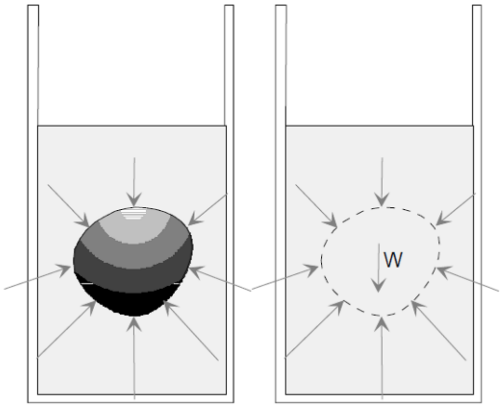

Figura 8. 7. Sólido sumergido en fluido

En términos matemáticos, si V denota el volumen sumergido, ρ_L la densidad del líquido y E el empuje, entonces

$$E = \rho_L g V \tag{8.10}$$

Fuerza de Flotación

La fuerza de empuje, que es igual al peso del fluido desplazado, tiene como punto de aplicación el centro de gravedad del volumen de fluido que es desplazado por el cuerpo. Si suponemos que el fluido es homogéneo, entonces ese punto coincide con el centroide de la región del cuerpo que ha desplazado al fluido. Ese punto se denomina centro de flotación y en las figuras lo denotaremos por B. Por otro lado, el peso del cuerpo actúa equivalentemente en el centro de masa del cuerpo G el cual puede o no coincidir con el centro de flotación, dando origen a la necesidad de analizar la estabilidad de cuerpos sumergidos en equilibrio.

Cuerpo totalmente sumergido

Cuando un cuerpo está totalmente sumergido, pueden ocurrir tres casos según el centroide del líquido desplazado, punto B, esté sobre, coincida o esté más abajo que el centro de masa del cuerpo, punto G. La figura siguiente ilustra esos tres casos. En el primero, la fuerza de empuje actúa más arriba del peso, luego para una rotación del cuerpo, aparece un par que tiende a restaurar la posición original, en consecuencia este equilibrio es estable.

En el segundo caso, no aparece par al girar el cuerpo, luego el equilibrio es indiferente.

En el tercer caso, el par que se origina tiende a alejar el cuerpo de la posición de equilibrio, la cual es en consecuencia, inestable.

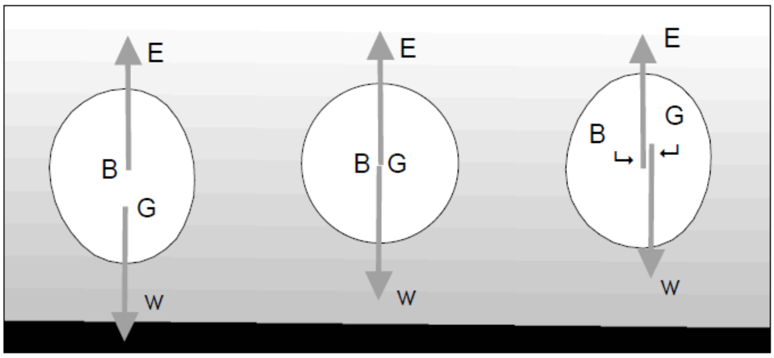

Figura 8. 8. Tipos de equilibrio en cuerpos sumergidos.

Cuerpo parcialmente sumergido

La figura siguiente ilustra dos casos para cuerpos parcialmente sumergidos.

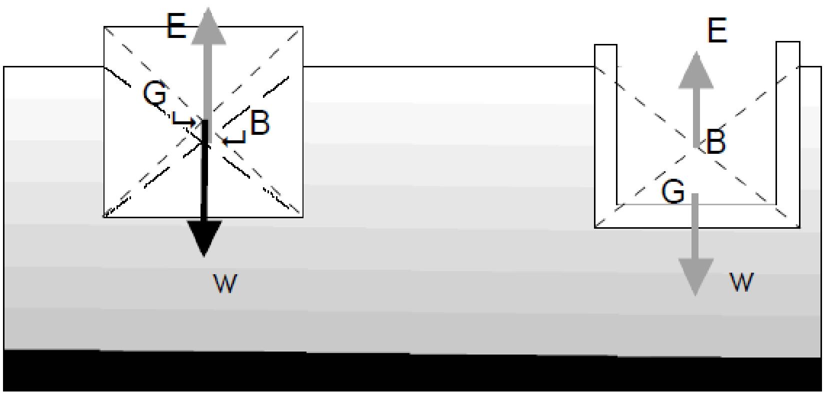

Figura 8. 9. Fuerzas que actúan sobre cuerpos sumergidos.

En el primer caso, se trata de un cuerpo homogéneo parcialmente sumergido. El centro de masa G está en el centro del cuerpo, sin embargo el centro de flotación B, correspondiente al centroide de la parte sumergida, está más abajo. Entonces en la situación de equilibrio E = W pero hay aparentemente problemas con la estabilidad. La cuestión de qué ocurre si el cuerpo se inclina levemente la analizaremos en la sección siguiente. A primera vista parecería que si el cuerpo se inclina algo hacia la derecha, el torque del par de las dos fuerzas paralelas pero no colineales, tendería a inclinarlo aún más. Ya se explicará que ocurre.

En segundo caso se trata de un cuerpo inhomogéneo que flota, y para el caso de la figura G está más abajo que B y el equilibrio es evidentemente estable, porque al inclinar el cuerpo, el par de fuerzas tiende a restaurar la posición original.

Estabilidad de un cuerpo prismático inhomogéneo

Considere un cuerpo prismático inhomogéneo, de modo que su centro de masa está más arriba del centroide, como se ilustra en la figura. Si el cuerpo está parcialmente sumergido, de modo que el centro de flotación B está más abajo que G, hay problemas con la estabilidad.

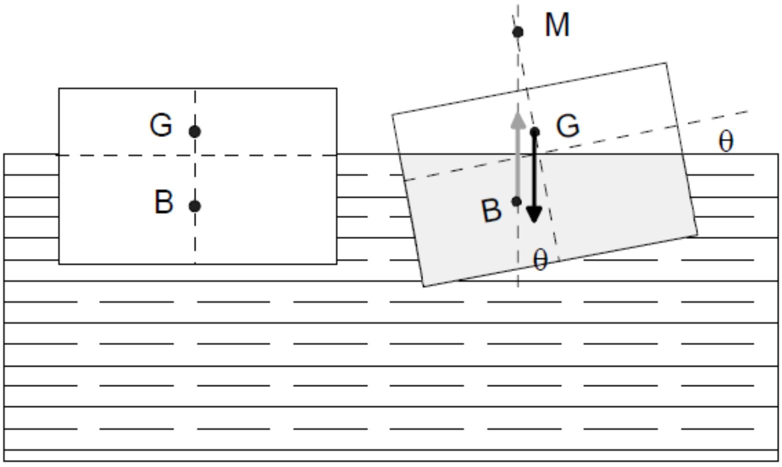

Figura 8. 10. Altura metacéntrica

Analizaremos lo que ocurre con el par de las fuerzas para variaciones pequeñas de la inclinación del cuerpo. La figura de la izquierda representa la situación de equilibrio, aparentemente inestable por estar G arriba del centro de flotación B. Sin embargo, si la figura se inclina un ángulo pequeño θ como se muestra en la figura derecha, el centro de gravedad cambia relativamente poco, pero el centro de flotación, el centroide de la zona marcada gris, puede cambiar bastante cómo se ilustra en la figura. La vertical que pasa por B, la línea de acción del empuje, corta a la línea central donde está G en un punto M que se denomina metacentro. Si ese punto queda más arriba de G el par de las fuerzas es restaurador y el equilibrio es estable, que es el caso de la figura.

La distancia $\overline{MG}$ se denomina altura metacéntrica y el par restaurador está dado por

$$Par = \overline{MG}\ W\ sen\theta \tag{8.11}$$

donde W es el peso del cuerpo. Si M está abajo de G el equilibrio es inestable y si coinciden indiferente.

Fuerzas sobre las paredes o compuertas

Las fuerzas horizontales causadas por la presión sobre superficies que encierran al fluido, aumentan linealmente con la profundidad, de modo que se tienen fuerzas distribuidas no uniformes actuando sobre ellas. La resultante de ese sistema de fuerzas paralelas es en general una fuerza paralela aplicada en un punto arbitrario, más el torque de todas esas fuerzas distribuidas respecto a ese mismo punto. Es sin embargo conveniente calcular la resultante de esas fuerzas en un cierto punto, llamado centro de presión, respecto al cual el torque de las fuerzas distribuidas es nulo. Explicaremos entonces la forma de hacerlo. Esto requiere sin embargo de elementos de cálculo integral que trataremos de omitir. Para el caso de compuertas y situaciones similares, la fuerza debido a la presión atmosférica actúa por ambos lados, y entonces la omitiremos del análisis por no contribuir en forma neta a la fuerza horizontal actuando sobre la superficie.

La figura siguiente ilustra una situación típica, donde por el interior de una superficie hay un fluido y por el exterior está la atmósfera.

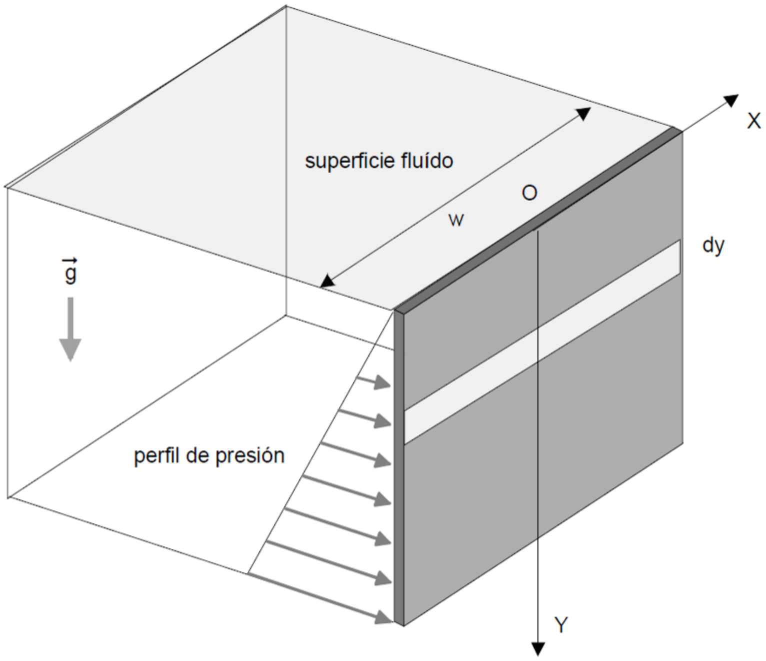

Figura 8. 11. Fuerzas ejercidas sobre

En términos de la profundidad y la fuerza neta que actúa a esa profundidad sobre el elemento de área de ancho *w* y altura *dy* es

$$dF = pw\,dy = \rho g y w\,dy \tag{8.12}$$

Entonces se tiene una fuerza distribuida cuya magnitud por unidad de longitud varía linealmente de la forma

$$\frac{dF}{dy} = \rho g w y \tag{8.13}$$

El cálculo de la fuerza resultante dependerá de la forma de la superficie que se considere como veremos a continuación.

Superficie rectangular

El caso más simple es si la superficie es rectangular como se indica en la figura que sigue donde se desea evaluar la fuerza resultante de las fuerzas distribuidas entre y_1 e y_2. Como vimos en el capítulo de fuerzas, la resultante y el punto de aplicación corresponden al área y al centroide de la figura correspondiente a la fuerza distribuida entre y_1 e y_2.

Como sabemos el área es

$$\frac{1}{2}(a+b)(y_2 - y_1) \tag{8.14}$$

y el centroide está posicionado (medido desde y_1 hacia abajo)

$$\frac{1}{3}\frac{(a+2b)}{(a+b)}(y_2 - y_1) \tag{8.15}$$

donde *a* y *b* son las fuerzas por unidad de longitud en y_1 e y_2.

$$a = \rho w g y_1$$

$$b = \rho w g y_2$$

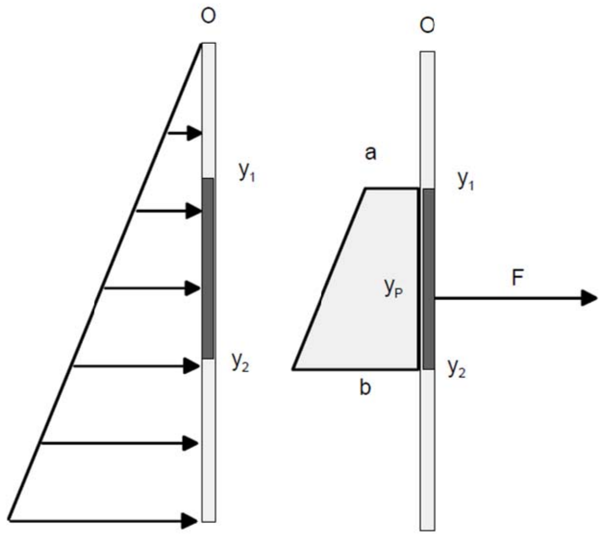

Figura 8. 12. Distribución de fuerzas

así entonces la fuerza resultante es

$$F = \frac{1}{2}\left(\rho w g y_1 + \rho w g y_2\right)\left(y_2 - y_1\right) = \frac{1}{2}\rho w g\left(y_2^{\,2} + y_1^{\,2}\right) \tag{8.16}$$

y su punto de aplicación será

$$y_F = y_1 + \frac{1}{3}\frac{\left(a + 2b\right)}{\left(a + b\right)}\left(y_2 - y_1\right) = \frac{2}{3}\frac{y_1^{\,2} + y_2 y_1 + y_2^{\,2}}{y_1 + y_2} \tag{8.17}$$

en particular si la superficie está entre $y_1 = 0$ e $y_2 = h$ resultará

$$y_F = \frac{2}{3}h \tag{8.18}$$

Superficie de forma arbitraria

Si la superficie no es rectangular, como se ilustra en la figura que sigue es necesario recurrir al cálculo integral. La fuerza actuando sobre el elemento de área $dA = dxdy$ indicado en la figura será

$$dF = \rho g y\, dA = \rho g y\, dx\, dy \tag{8.19}$$

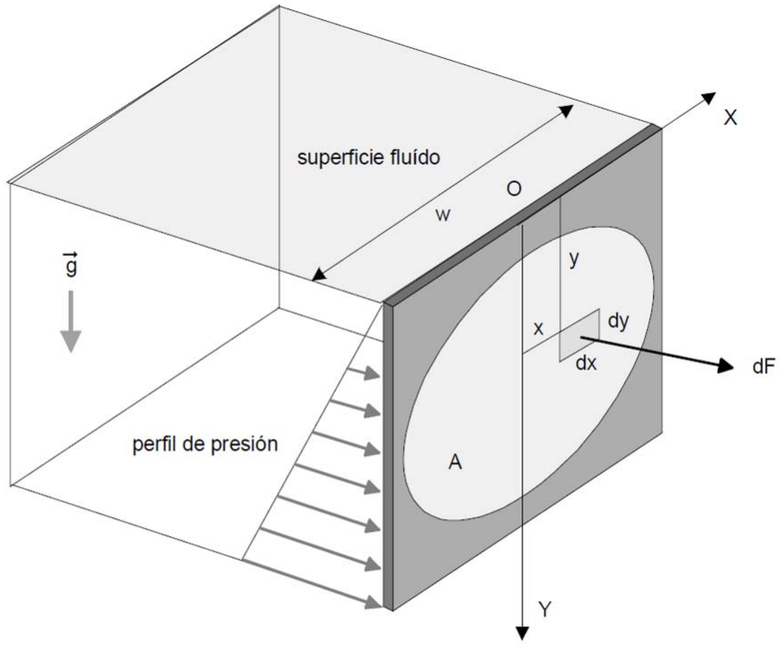

Figura 8. 13. Fuerzas ejercidas sobre

de modo que la fuerza resultante será

$$dF = \rho g \int_A y\, dx\, dy \tag{8.20}$$

y la posición del centro de fuerza estará dada por sus coordenadas

$$x_P = \frac{\int_A x\, dF}{F} \tag{8.21}$$

$$y_P = \frac{\int_A y\, dF}{F} \tag{8.22}$$

que pueden escribirse como

$$x_P = \frac{\int_A xy\, dx\, dy}{\int_A y\, dx\, dy} \tag{8.23}$$

$$y_P = \frac{\int_A y^2\, dx\, dy}{\int_A y\, dx\, dy} \tag{8.24}$$

integrales que podrían resolverse si se conoce la forma del área.

Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada

En una sección anterior se calculó la fuerza resultante y centro de la fuerza para un área vertical de sección rectangular. Para una sección rectangular inclinada un ángulo θ con la vertical, el cálculo es muy parecido, pero ahora, el eje *OY* está inclinado luego debemos tomar

$$a = \rho w g y_1 \cos\theta$$

$$b = \rho w g y_2 \cos\theta$$

y la fuerza entonces resultará

$$F = \frac{1}{2}\rho w g\left(y_2^{\ 2} + y_1^{\ 2}\right)\cos\theta \tag{8.25}$$

y su punto de aplicación será

$$y_F = \frac{2}{3}\frac{y_1^{\ 2} + y_2 y_1 + y_2^{\ 2}}{y_1 + y_2} \tag{8.26}$$

Nótese que la expresión para el centro de fuerza es la misma