UNIDAD DIDÁCTICA

1

EL CAMPO ELECTROSTÁTICO (I)

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

En este manual dedicaremos varias unidades a estudiar cómo funciona el campo electrostático. En esta primera unidad vamos a ver su comportamiento básico y cómo las cargas lo crean. Cuando acabes de estudiar esta unidad deberás:

- Entender el concepto de «interacción electrostática» y de «carga eléctrica».
- Entender el concepto de «campo» y del «campo eléctrico» en particular y cómo podemos dibujarlo mediante las líneas de campo.
- Calcular el campo eléctrico creado por distribuciones discretas y continuas de cargas.
- Comprender el concepto de «dipolo eléctrico».
- Entender el concepto de «flujo del campo eléctrico» y usar el teorema de Gauss para calcular más fácilmente el campo eléctrico en determinados casos de mucha simetría.
- Entender cómo se comportan los metales en condiciones electrostáticas.
- Saber cuáles son los postulados básicos del campo electrostático.

1. INTRODUCCIÓN

Tanto si es la primera vez que te enfrentas a estudiar la electrostática, como si ya has visto esta materia con anterioridad, de lo que estoy seguro es de que conoces alguno de sus efectos: cómo el pelo se pega a un peine que hemos frotado contra un jersey o cómo, a veces, al tocar el pomo de la puerta, salta una chispa. En esta unidad vamos a analizar los fundamentos más básicos que rigen la electrostática clásica, que puede explicar desde fenómenos que se conocen desde la Antigua Grecia, como cuando el ámbar que se había frotado contra un pedazo de cuero era capaz de atraer pequeños objetos, hasta aplicaciones más modernas, como las impresoras láser o algunos aceleradores de partículas o filtros de aire. Empezaremos viendo el concepto de «carga eléctrica», cómo Coulomb descubrió una ley que explica la forma en que estas cargas se atraen y repelen, y definiremos el concepto del «campo electrostático». Finalmente, estudiaremos algunas organizaciones o distribuciones de cargas importantes y cómo afecta el campo a los metales y conductores, para acabar describiendo los postulados fundamentales del campo.

1.1. ¿CAMPO ELÉCTRICO O ELECTROSTÁTICO?

A lo largo de esta unidad, y de la siguiente, emplearemos casi siempre el adjetivo «electrostático» y hablaremos, por tanto, del campo electrostático. Lo haremos así para recordar que estamos estudiando el campo en unas condiciones particulares: en régimen estático, cuando los fenómenos no dependen del tiempo y, por tanto, las cargas están quietas. En otros textos es habitual leer «campo eléctrico», y no es que sea incorrecto, sino que, en general, el campo eléctrico se refiere a unas condiciones que pueden ser dinámicas o estáticas, sin especificar. De hecho, como veremos en la unidad 8, el campo eléctrico, en general, tiene dos componentes: la componente estática y la componente dinámica.

2. LA CARGA: EL ORIGEN DE LA INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA

2.1. INTERACCIONES ENTRE PARTÍCULAS

Antes de entrar a explicar el campo eléctrico, me gustaría aclarar qué es la **interacción eléctrica** y en qué condiciones vamos a estudiarla.

Todos los objetos macroscópicos de nuestro día a día, desde el teclado con el que escribimos hasta las estrellas más distantes, están compuestas de un número más o menos grande de partículas elementales. Estas partículas, a su vez, se agrupan para formar, en la mayor parte de los casos, núcleos atómicos, átomos, moléculas, etc.

Además de existir partículas, todas ellas interactúan de alguna manera con el resto. Seguramente entiendas bien la interacción gravitatoria o, lo que es lo mismo, la forma en la que interactúan las partículas que tienen masa.

Otra de las interacciones más importantes, seguramente la interacción que más influye en la mayor parte de los fenómenos cotidianos, es la interacción electromagnética. Esta forma que tienen las partículas de actuar unas sobre otras es la que regula la construcción de los átomos (no de los núcleos), la que regula la química de las moléculas, la que hace que dos superficies tengan rozamiento entre ellas, la que provee de elasticidad a los materiales y la que hace que tengamos internet.

En esta primera unidad vamos a estudiar **un caso particular** de la interacción electromagnética, y es la interacción electrostática, que se da cuando las partículas no se mueven o lo hacen a velocidades realmente muy bajas.

Esta condición, como verás, simplifica mucho los cálculos.

> La **interacción electrostática** es una forma que tienen de actuar algunas partículas entre sí, y cuando las partículas interactúan, al menos en sentido clásico, ejercen fuerzas unas sobre otras.

2.2. CARGA ELÉCTRICA

2.2.1. ¿Qué es la carga eléctrica?

En el apartado anterior comentamos que, así como todas las partículas que tienen masa se atraen, es decir, ejercen una interacción entre ellas, había otras que lo hacían de forma «electrostática», pero no indicamos qué partículas interactuaban de esta manera.

Pues bien, aquellas partículas que tienen la propiedad de tener **carga eléctrica** son las que van a poder interactuar entre ellas de forma electrostática. Ejemplos de estas partículas que tienen carga son el electrón y el protón.

Es importante entender que la carga eléctrica es una propiedad de algunas partículas. Si te imaginas, cosa que es físicamente imposible, que las partículas pudieran tener color, podríamos decir que hay tres tipos de partículas: las rojas, las azules y las que son transparentes o no tienen color. Con la carga eléctrica pasa algo similar: es una propiedad de las partículas; las hay que tienen carga y las hay que no. Antes, en mi símil de los colores, decía que podía haber partículas rojas y azules o transparentes. Al igual que antes, la carga también sigue este patrón: hay partículas con carga positiva, partículas con carga negativa y partículas que no tienen esta propiedad, o partículas neutras.

Permíteme que insista: la carga es una propiedad de las partículas elementales, no es un tipo de partícula en especial.

Ahora bien, se da un fenómeno en la naturaleza y es que, como muchas otras cosas, la carga está **cuantizada**. ¿Qué significa esto? Significa que hay una medida mínima de carga. No puede haber menos de la carga de 1 electrón (se denomina $-e$ o q_e a la carga del electrón) y solo puede haber un múltiplo entero de esta carga en la realidad. ¿Por qué ocurre esto? Ocurre porque, si la carga es una propiedad de las partículas y no existen medias partículas, no puede existir media carga de una partícula.

Podríamos discutir mucho más sobre esto, y, si alguien tiene curiosidad, verá que en realidad hay una subdivisión menor, los cuarks, que tienen múltiplos de 1/3 de esta carga, pero que no pueden estar en libertad y, por tanto, es como si no existieran en nuestro mundo macroscópico.

Ahora que ya tienes claro que la carga es una propiedad de las partículas y que las partículas más habituales que tienen carga son los electrones (carga $-e$, o carga negativa elemental), verás que en realidad es más práctico decir que existen cargas sin entrar a discutir si son electrones, protones o cuarks.

2.2.2. La carga eléctrica en el mundo macroscópico

En el mundo real, la mayor parte de los cuerpos son neutros, es decir, no tienen carga neta.

> La **carga neta** es la suma de todas las partículas cargadas con su signo que tiene un cuerpo o sistema.

Normalmente, denotaremos la carga neta como Q_t, Q_{total} o, simplemente, Q.

Voy a poner un ejemplo: un globo de plástico hinchado es, por defecto, un cuerpo neutro. Ahora bien, si frotas este globo contra un jersey, verás que es capaz de atraer papelitos o de pegarse al techo. En realidad lo que ha ocurrido es que, al rozar el globo con el jersey, has arrancado una gran cantidad de electrones, muchísimos, y has dejado al globo con una carga neta.

Así, dado que la carga de un electrón es tan pequeña como el propio electrón y su masa, a efectos prácticos macroscópicos se usa una unidad de carga mucho más grande, el culombio (C). La carga de un electrón se suele escribir así:

$$q_e = e^- = -\,1.60219 \cdot 10^{-19}\ [C]$$

En realidad, que la carga del electrón sea tan pequeña viene muy bien. Aunque acabamos de ver que la carga del electrón está cuantizada, es decir, no existen más que múltiplos de la carga de un electrón, como esta cantidad es tan pequeña, en realidad, podemos asumir que la carga varía de forma continua.

Esto es muy conveniente para las matemáticas que usaremos, y es que en 1 C hay más o menos $6.24 \cdot 10^{18}$ cuantos de carga eléctrica. Casi cualquier diferencial que tomemos va a tener más carga que 1 electrón.

Cuando decimos que un cuerpo está cargado, o que hay una determinada cantidad de carga en un lugar, lo que queremos decir, de forma implícita, es que ha perdido o ganado un número determinado, aunque muy grande, de electrones. Si los ha ganado, tendrá carga neta negativa; si los ha perdido, tendrá carga neta positiva. Y esta es la manera más habitual de conseguir que un cuerpo se cargue, ya que, en general, intercambiar otras partículas cargadas, como los protones, es muy difícil.

2.2.3. El signo de la carga

Ya hemos introducido el concepto de «carga positiva» y de «carga negativa». En realidad, el valor + o – de una carga es un convenio. Simplemente, lo que quiere decir es que hay carga de dos tipos. De forma histórica se le asigna a la carga del electrón el signo negativo.

Aunque aún no hemos hablado del comportamiento de la interacción electrostática, seguramente intuyas que cargas de distinto signo se atraen y cargas del mismo signo se repelen. Si lo piensas bien, en el caso de la gravitación no existen las masas negativas y positivas, y, por tanto, la interacción gravitatoria siempre es atractiva. Es por esto que a veces la gravedad puede ayudar a entender la electrostática, pero otras muchas veces no valdrá.

2.3. DISTRIBUCIONES DE CARGA

Ya hemos visto que, desde un punto de vista elemental, la carga es una particularidad de algunas partículas como los electrones, y, por tanto, la carga neta la generan estos electrones (o protones u otras partículas cargadas). Pero esta realidad, en el mundo macroscópico, es poco útil. Entonces, diremos que, de forma práctica, la carga se organiza en distribuciones de carga. Esto es equivalente a decir que la masa se organiza en distribuciones de masa.

En función de cómo estén distribuidas en el espacio las cargas, podemos clasificar las distribuciones en:

- Distribuciones discretas o distribuciones de cargas puntuales.
- Distribuciones volumétricas o cargas volumétricas.
- Distribuciones superficiales o cargas superficiales.
- Distribuciones lineales o cargas lineales.

2.3.1. Cargas puntuales (o distribuciones puntuales)

Las cargas puntuales son equivalentes a las masas puntuales. Son aquellas agrupaciones de carga que están tan juntas entre sí que, a efectos prácticos, solo ocupan un punto en el espacio. En realidad esto ocurre cuando las partículas cargadas están a una distancia entre ellas muy pequeña y concentradas alrededor de un solo punto.

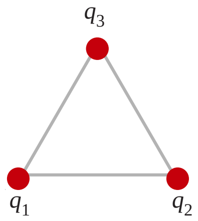
Si la carga tiene valor q y está situada en el punto r_0, podemos escribir matemáticamente esta distribución como:

$$Q(\vec{r}) = \begin{cases} q & \vec{r} = \vec{r}_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

(En realidad, matemáticamente habría que emplear deltas de Dirac para expresar correctamente esta distribución de carga).

En general, cuando las distancias máximas entre las cargas son muy pequeñas entre sí, comparadas con las distancias a las que estoy estudiando el problema, podemos decir que se trata de una carga puntual.

Muchas veces nos encontraremos con distribuciones de cargas formadas por más de una carga puntual, como, por ejemplo, si tenemos tres cargas de 1 C situadas en los vértices de un triángulo equilátero.



Para calcular la carga neta, simplemente tenemos que calcular la suma de todas las cargas:

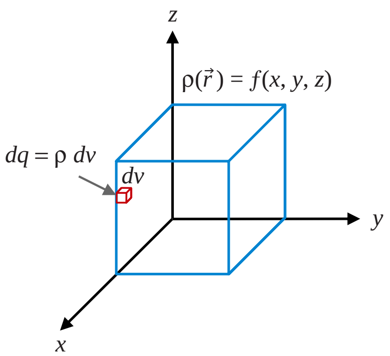
$$Q_t = \sum_{i=1}^{N} q_i$$

2.3.2. Distribuciones volumétricas de carga

Aunque muchas veces usamos las masas puntuales o partículas, cuando trabajamos con cuerpos con masa sabemos que, en la realidad, las masas puntuales no existen. En el mundo macroscópico, lo que ocurre es que los cuerpos tienen una densidad de materia que nos dice cómo se distribuye la masa por unidad de volumen, y que puede ir variando en cada punto del espacio.

En el caso de la distribución de carga volumétrica es lo mismo: nos vamos a encontrar que, en un cuerpo cargado, la carga no se suele concentrar en un punto, sino que se distribuye a lo largo del cuerpo, y en cada zona de ese cuerpo hay una cantidad de carga distinta. Si tomamos un pequeñísimo volumen (de tamaño diferencial), podemos asumir que dentro de ese volumen la carga es constante y podemos entonces definir la densidad de carga así:

$$\rho = \rho_v = \frac{dq}{dv} \; [C/m^3]$$



Esto significa que en cada pequeño *dv* existe una pequeña cantidad de carga, *dq*, y esta cantidad de carga se llama «densidad de carga» (volumétrica), cuyas unidades son culombios por metro cúbico. ¡Atención! La densidad de carga es, en general, una función de la posición, es decir, en cada punto del cuerpo cargado puede existir una densidad de carga distinta. Así:

$$\rho = f(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

Para calcular la carga neta o carga total de un cuerpo que tiene una densidad de carga determinada por una función tengo que ir sumando la carga que hay en cada pequeño diferencial de volumen. Así:

$$Q_t = \int_v dq$$

Según hemos definido la densidad de carga volumétrica, podemos decir que la cantidad de carga en un diferencial de carga es:

$$dq = \rho\, dv$$

Y, por tanto, la carga neta será:

$$Q_t = \int_v \rho\, dv$$

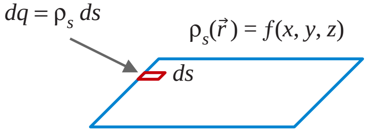
Antes de continuar, voy a recordar algo. Ya vimos que, en realidad, la carga la llevaban las partículas elementales y que, además, estaba cuantizada. Entonces, ¿cómo es posible definir una función continua llamada «densidad de carga»? También vimos que en 1 C había más de 10^{18} partículas cargadas elementales. Esto significa que, a efectos macroscópicos, cualquier diferencial de carga (*dq*) que podamos usar en cualquier diferencial de volumen (*dv*) tiene una grandísima cantidad de partículas elementales y, por tanto, la función continua es una aproximación muy buena.

2.3.3. Distribuciones de superficie y lineales

Hay muchos problemas en los que la carga, en lugar de distribuirse por todo el cuerpo, se concentra mucho en alguna de sus superficies. Por ejemplo, cuando leas el apartado «Conductores en equilibrio electrostático» verás que, en un conductor, toda la carga huye y se concentra en la superficie del mismo.

Estamos en un caso intermedio a los dos anteriores. Hay dos dimensiones en las que la carga puede variar y otra en la que está concentrada. En este caso, es muy útil definir una densidad de carga por unidad de superficie así:

$$\sigma = \rho_s = \frac{dq}{ds}\ [C/m^2]$$



A lo largo del manual usaremos indistintamente σ o ρ_s para referirnos a la densidad superficial de carga, que se mide en culombios por metro cuadrado.

Al igual que vimos en el caso de la densidad de carga volumétrica, la densidad de carga superficial también puede variar con la posición.

Si queremos calcular la carga neta acumulada en la superficie, tenemos que sumar cada pequeño diferencial de carga que hay en cada pequeño diferencial de superficie así:

$$Q_t = \int_s dq = \int_s \rho_s\, ds$$

Seguramente ya habrás intuido que, si hay distribuciones de carga en volumen y distribuciones de carga en superficie, e incluso distribuciones de carga puntuales, también habrá, de forma práctica, distribuciones de carga lineales. Y así es.

Cuando la carga está concentrada a lo largo de una línea, por ejemplo, en un hilo conductor extremadamente fino, en realidad no importa más que una sola dimensión espacial, la lineal, la que sigue al hilo. En este caso diremos que podemos definir la densidad lineal de carga como:

$$\lambda = \rho_l = \frac{dq}{dl}\ [C/m]$$

Por supuesto, esta densidad también depende de la posición y se mide en culombios por metro. De nuevo, para calcular la carga total acumulada en la línea necesito sumar todos los pequeños diferenciales de carga así:

$$Q_t = \int_l dq = \int_l \lambda\, dl$$

2.4. CONSERVACIÓN DE LA CARGA

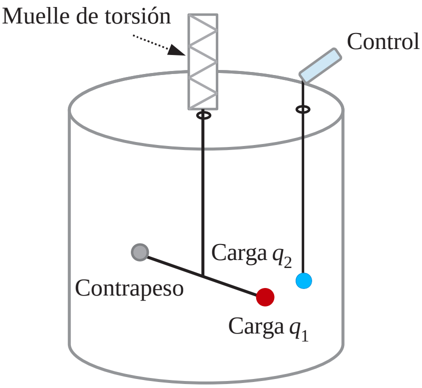
Al igual que otras magnitudes físicas, una propiedad física que tiene la carga es que se conserva. ¿Qué quiere decir que una magnitud física se conserva? Significa que en un sistema cerrado, al que no puede entrar y del que no puede salir nada, la cantidad de carga en su interior siempre es la misma: no se crea ni se destruye.

Al universo, en su totalidad, se le considera un caso particular de sistema cerrado: no entra ni sale nada de él. La cantidad total de carga en el universo permanece constante.

3. LA INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA

3.1. LA LEY DE COULOMB

La ley de Coulomb fue, en cierta forma, el primer paso analítico hacia el electromagnetismo moderno. Charles Coulomb estudió cómo interactúan, atrayéndose o repeliéndose, pequeñas (muy pequeñas) esferitas cargadas mediante una balanza de torsión (muy similar al experimento que hizo Cavendish para medir la interacción gravitatoria):



El experimento consistía en lo siguiente: dentro de un cilindro vacío había colocada una esfera cargada (con una determinada carga q_1), unida a un eje con un muelle de torsión. Este muelle de torsión permitía medir la fuerza que sentía la carga. En condición de reposo no hay fuerza y, por tanto, no hay torsión. En el cilindro se introducía, de forma controlada, otra segunda carga q_2 y se acercaba a la primera. Coulomb tomaba anotaciones de la fuerza que se producía haciendo variaciones en la distancia entre las cargas, los tipos y los valores de las cargas. Las conclusiones a las que llegó fueron las siguientes:

- Las cargas de igual signo se repelen (+ y + o – y –).
- Las cargas de distinto signo se atraen (+ y – o – y +).
- La fuerza es proporcional al valor de la carga.
- La fuerza es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado.

Si ponemos estas conclusiones en una expresión matemática, tenemos la ley de Coulomb, que es la ley que describe la fuerza entre dos cargas puntuales en el vacío:

$$\vec{F}_{q_1q_2} = k\,\frac{q_1q_2}{r^2}\,\hat{u}_r$$

Vamos a ver qué es cada término de la expresión:

- k: constante de Coulomb. Esta constante, equivalente a la constante G de la gravitación de Newton, es la que determina la intensidad de la fuerza en el vacío. Su valor en el vacío es:

$$k = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \simeq 8.9875 \cdot 10^{12} \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$$

Normalmente no usaremos la ley de Coulomb en términos de k, sino en términos de ϵ_0, que es la permitividad eléctrica del vacío, y cuyo valor es:

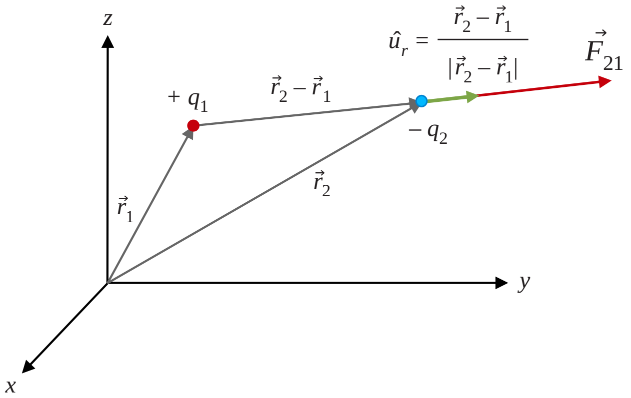
$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}\,[F/m]$$

- q_1 y q_2: valores de las cargas eléctricas puntuales.
- r^2: cuadrado de la distancia que separa las cargas.
- $\hat{u}_r$: vector unitario que es paralelo a la dirección que une ambas cargas.

Si tenemos los vectores de posición de cada una de las dos cargas, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, podemos escribir la ley de Coulomb de una forma más explícita y completa. Así, la fuerza que sobre la carga 2 ejerce la carga 1 será:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Analiza bien esta expresión y verás que dice lo mismo que la anterior, pero de una forma más «explícita». Fíjate en esta figura:



En ella he dibujado los vectores de posición de las dos cargas ($\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$) y he dibujado el vector unitario (en verde), que es:

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Digo esto porque estas dos expresiones:

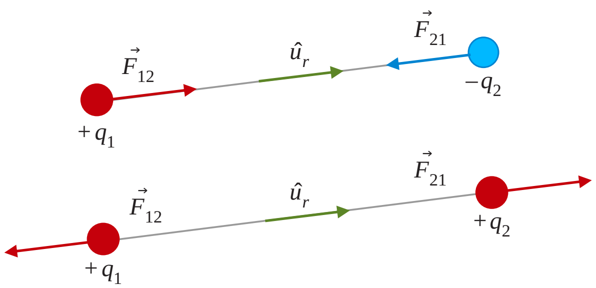
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \text{y} \quad \vec{F}_{q_1 q_2} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{u}_r$$

pueden parecer diferentes, ya que una tiene un cubo y la otra un cuadrado en el denominador, pero, si las reescribimos, nos damos cuenta de que son las mismas expresiones:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\,\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\,\hat{u}_r$$

Hay que tener en cuenta todas las implicaciones que estas expresiones tienen sobre la ley de Coulomb y sobre la fuerza electrostática en general:

- La fuerza eléctrica entre dos cargas es un vector.
- La dirección de atracción (o repulsión) sigue el vector que une ambas cargas (fíjate en el dibujo de más abajo).
- La fuerza electrostática, como no podría ser de otra forma, cumple la tercera ley de Newton, de acción y reacción; es decir, la fuerza que una carga 1 ejerce sobre otra carga 2 es igual, pero de sentido contrario, a la que la carga 2 ejerce sobre la carga 1. El siguiente dibujo muestra esto:



- La fuerza electrostática sigue el principio de superposición: si en lugar de 2 cargas, tenemos 3 cargas, la fuerza que sobre la carga 3 ejercen la 2 y la 1 es simplemente la suma vectorial de las dos fuerzas por separado. Esto es así porque, como veremos, el campo electrostático (el electromagnético en general) es lineal.
- La fuerza electrostática es una fuerza central: se ejerce hacia el centro (en la dirección que une las cargas, como ya hemos dicho). Esto, como veremos en la siguiente unidad, tiene una implicación crítica: es una fuerza conservativa. Pero, por el momento, eso no nos dice mucho.

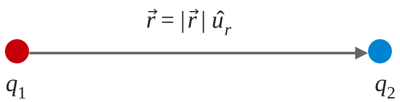
3.2. EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

3.2.1. Otra forma de entender la ley de Coulomb

Aunque Coulomb desarrolló su teoría electrostática en términos de la fuerza que unas cargas ejercían sobre otras, es posible analizar la interacción electrostática de una manera totalmente distinta y que, según avancemos, verás que es mucho más útil: el campo electrostático.

Antes de seguir, quiero dejar clara una cosa: al igual que en el experimento de Coulomb, a lo largo de la unidad estamos asumiendo que, salvo que digamos lo contrario, todos los cálculos los realizamos en el vacío, sin ningún medio material de por medio.

En el apartado anterior vimos que dos cargas puntuales se atraían (o repelían) entre sí en función de la distancia y de sus cargas. Esto es lo mismo que decir que para que haya interacción electrostática hacen falta al menos dos cargas, como en este dibujo:

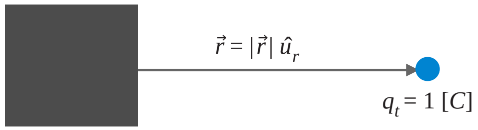


$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2}\,\hat{u}_r$$

Pero ¿qué ocurre si eliminamos una de las dos cargas? Si quitamos una de las dos cargas, la fuerza desaparece, ya que desaparece la interacción electrostática.

Aun así, si, por ejemplo, eliminamos la carga 2 del dibujo, la carga 1 permanece en su sitio. Si ahora acercamos una nueva carga, que llamamos «carga de prueba» o «carga de test» de 1 *C*, esta va a sentir una fuerza; sufre una interacción.

En el siguiente esquema hemos rodeado la carga 1 con una caja negra para no verla y vamos a acercar a ella una carga de prueba:



En este caso la fuerza que experimenta la carga de prueba es:

$$\vec{F}_t = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1\,q_t}{|\vec{r}|^2}\,\hat{u}_r$$

Si agrupo los términos de forma conveniente, tengo que:

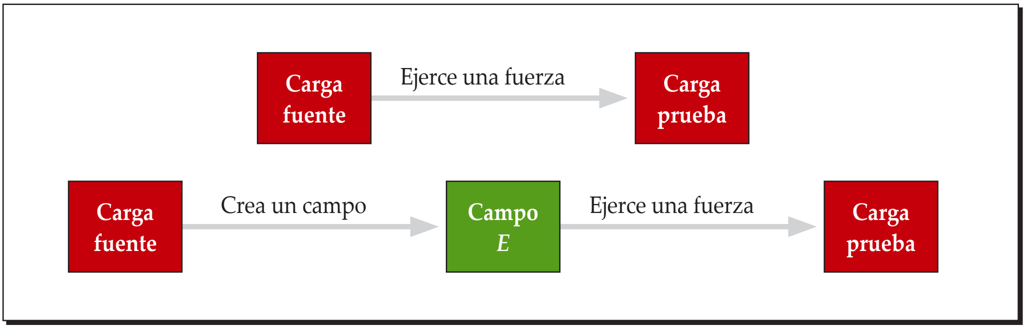
$$\vec{F}_t = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1}{|\vec{r}|^2}\cdot q_t\,\hat{u}_r = \vec{E}\cdot q_t$$

Es decir, aunque yo no conozca o no vea la carga que está escondida tras la caja negra del dibujo, una carga de prueba colocada en el espacio que la rodea experimenta una fuerza. Dicho de otra manera: es como si la carga *q*, oculta tras la caja negra, hubiera creado un campo a su alrededor, de tal forma que, si colocáramos una carga de test en algún punto del espacio, sentiría una fuerza según esta expresión:

$$\vec{F}_t = q_t\,\vec{E}$$

3.2.2. Un nuevo esquema mental

Fíjate que acabamos de presentar un concepto central de esta asignatura: el «campo electrostático». Como iremos viendo a lo largo de las unidades, hemos cambiado totalmente el paradigma de Coulomb y, ahora, en lugar de decir que «una carga hace una fuerza sobre otra carga», diremos que «una carga crea un campo en el espacio. El campo hace una fuerza sobre una segunda carga». Fíjate en este esquema mental, que usamos cuando analizamos el concepto de «campo electrostático»:



Dicho de otra forma, podemos analizar la interacción electrostática en términos de fuerzas: una o más cargas ejercen una fuerza sobre otra u otras cargas de interés.

O, de una manera más interesante, podemos analizar la interacción electrostática en términos del campo:

- Una o más cargas generan en el espacio a su alrededor un campo vectorial llamado «campo eléctrico».
- Cuando en este espacio lleno de campo se introducen una o más cargas de prueba, el campo ejerce una fuerza sobre estas cargas.

3.2.3. Propiedades básicas del campo electrostático

Las propiedades del campo electrostático son directamente heredadas de las propiedades que tenía la fuerza de Coulomb, pues, al fin y al cabo, es una forma diferente de entender el mismo fenómeno físico. Es importante dejar clara aquí una cosa: estas propiedades del campo electrostático son leyes de la naturaleza y, por tanto, se deducen de la observación y de la experimentación científica: no se pueden deducir de otras leyes previas más básicas o fundamentales.

3.2.3.1. Es un campo vectorial

El campo electrostático es un campo vectorial y, por tanto, en cada punto del espacio donde exista un campo electrostático se puede medir, o calcular, un vector con una dirección, un sentido y un módulo. El vector campo electrostático se mide en newtons por culombio o voltios por metro:

$$[\vec{E}] = [N/C] = [V/m]$$

3.2.3.2. Las fuentes del campo son las cargas

El campo electrostático lo generan las cargas. Dicho de forma un poco más precisa: las fuentes del campo eléctrico en condiciones estáticas son las cargas. Como ya hemos visto, en el caso elemental de una sola carga puntual, el campo electrostático se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\hat{u}_r$$

De forma general podemos escribir que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta expresión matemática nos dice literalmente lo siguiente: la divergencia del campo electrostático es igual a la densidad de carga dividida por una constante. Esta constante es la permitividad del vacío y es un valor propio. Esto mismo lo podemos leer como las fuentes del campo electrostático (y sus sumideros) son las cargas.

3.2.3.3. El campo cumple el principio de superposición

El campo electrostático es un campo lineal y, por lo tanto, el campo generado por una carga en un punto se suma al generado por cualquier otra carga en ese mismo punto. Dicho de otra manera: si tenemos dos cargas y medimos el campo en un punto P del espacio, el campo total será la suma del campo generado individualmente por cada una de ellas:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

3.2.3.4. El campo solo toma un valor en un punto

Cada punto del espacio tiene un único valor de campo, uno solo. Sé que es bastante lógico, pero es posible que a veces pensemos que, si hay dos cargas generando campo, podría haber dos valores del campo. En realidad, este razonamiento no es cierto: el campo solo puede tomar un valor en cada punto. El principio de superposición nos permite calcular el valor del campo en cada punto, y este es único.

3.2.3.5. Es un campo conservativo

Como veremos con más detalle en la siguiente unidad, el campo electrostático es un campo conservativo. Quizás ahora no nos diga mucho esa propiedad, pero cuando veamos la energía asociada a los campos, esta será clave. Que sea conservativo lo que quiere decir es que:

- Cualquier integral de línea cerrada del campo vale 0.
- Su rotacional es 0, o lo que es lo mismo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

- Es un campo central: todas las líneas de campo terminan y acaban en alguna carga o en el infinito.
- Existe una energía potencial asociada al campo que solo depende de la posición.

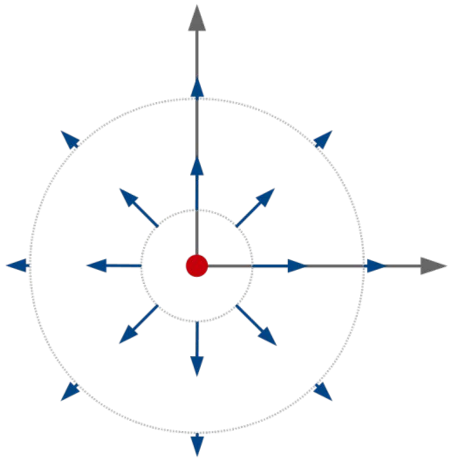
Dedicaremos casi toda una unidad a estos conceptos, así que, por el momento, no tienen más importancia.

3.2.4. Dibujando el campo electrostático

Vamos a intentar visualizar el campo generado por una carga puntual positiva de valor q situada en el origen de coordenadas. Sabemos que la expresión del campo que genera, en coordenadas esféricas, es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

En la siguiente figura hemos dibujado el valor del campo cada 45º alrededor del origen a dos distancias del centro:



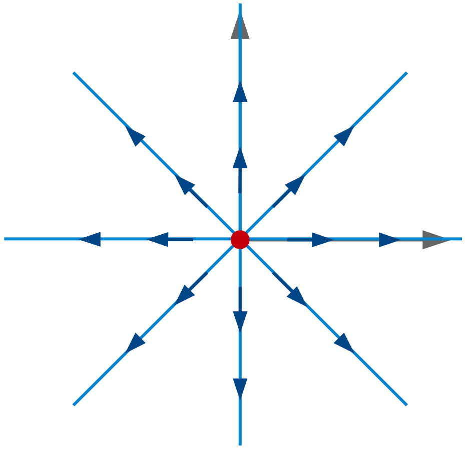
De forma general, si queremos dibujar un campo vectorial, como el campo electrostático, o cualquier otro campo, por ejemplo, un mapa de velocidades del viento, una solución que podemos usar es la del dibujo anterior: dibujar en algunos lugares de interés flechas que representan la dirección y el valor del campo. El problema de esta forma de dibujar el campo es que puede resultar un poco engorroso y poco claro en algunas zonas, y en otras nos puede dejar sin la información de cómo varía el campo.

3.2.4.1. *Líneas de campo*

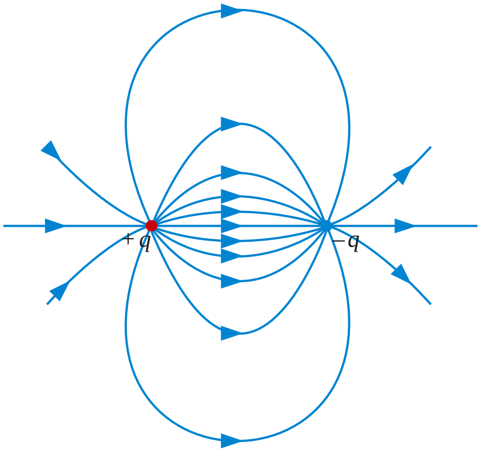
Existe una forma de dibujar un campo vectorial muy habitual: las líneas de campo.

> Las **líneas de campo** son unas líneas imaginarias que tienen las siguientes propiedades:
>
> - El vector del campo es siempre tangente a las líneas.
> - Las líneas se dibujan más próximas entre sí cuanto más intenso sea el campo y más separadas cuanto menos intenso sea el campo.
> - Las líneas de campo suelen llevar una flecha indicando su orientación. Esta flecha nos da el sentido del campo vectorial cuando lo dibujamos tangente a la propia línea.

De este modo, si dibujamos las líneas de campo en el dibujo anterior, obtenemos la siguiente figura:



En este caso nos han salido unas líneas de campo rectas y radiales, puesto que solo tenemos una carga puntual situada en el origen de coordenadas, pero, en general, tendremos distribuciones de líneas de campo que pueden ser curvas, como, por ejemplo, el campo eléctrico entre dos cargas puntuales del mismo valor y distinto signo:



Me gustaría que hiciéramos una reflexión: ¿significa que en los espacios en blanco entre las líneas, donde no hay nada dibujado, no existe campo? Claro que existe: tenemos que recordar que el campo llena todo el espacio alrededor de las cargas. Simplemente es una forma de dibujar el campo: en las zonas donde las líneas están más separadas, el campo es menos intenso, y en aquellos lugares donde las líneas están más juntas, el campo tiene un módulo mayor.

3.2.4.2. Propiedades de las líneas de campo electrostático

Cuando dibujamos un campo electrostático mediante las líneas de campo, debido a las características propias del campo, podemos estar seguros de que:

- Las líneas de campo son siempre abiertas: surgen y acaban en algún lugar.
- Si hay cargas presentes, las líneas de campo surgen de las cargas positivas y acaban en las cargas negativas. Como decíamos antes: las cargas positivas son las fuentes de las líneas de campo y las cargas negativas son los sumideros de las líneas del campo.
- Si no hay cargas presentes, las líneas surgen o acaban en el infinito.
- Las líneas de campo no se cruzan: si se cruzasen, significaría que el campo toma más de un valor al menos en el punto donde dos líneas se cruzan, y sabemos que eso no es posible.

Resumen

- Podemos entender la fuerza electrostática entre cargas de otra manera: las cargas generan un campo, que llamamos «campo electrostático».
- Podemos calcular la fuerza que ejerce el campo electrostático sobre una carga:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

- El campo electrostático cumple el principio de superposición: el campo generado por dos o más cargas es la suma del campo generado por cada una de ellas y, por tanto, el campo solo toma un valor en cada punto del espacio.
- El campo electrostático tiene como fuente (y sumidero) de líneas de campo las cargas, es decir, las líneas de campo eléctrico empiezan y acaban en las cargas positivas y negativas respectivamente:

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- El campo electrostático es conservativo o, lo que es lo mismo, sus líneas de campo no se cierran sobre sí mismas:

$$rot\,\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

4. CÁLCULO DEL CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL VACÍO

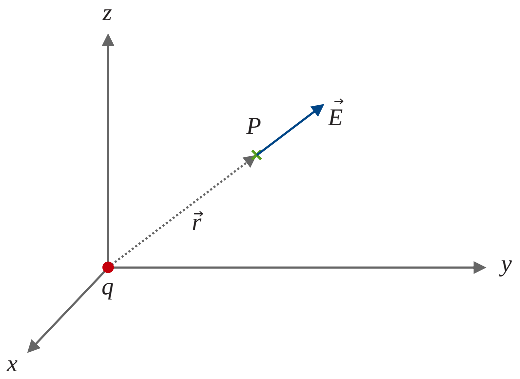
Ahora que ya conocemos qué es el campo electrostático y cuáles son sus propiedades básicas, lo siguiente que podemos plantearnos es cómo es el campo que genera una distribución de carga. Recuerda que, si conocemos el campo en una región del espacio, podemos conocer cómo es la fuerza que este campo ejerce sobre una carga. Así:

$$\vec{F}_e = q\,\vec{E}$$

Creo que es un buen momento para hacer un inciso: la carga prueba sobre la que medimos la fuerza que hace el campo ha de ser despreciable frente a las cargas que generan el campo o, al menos, el efecto que esta carga de prueba tenga sobre la distribución de cargas que genera el campo ha de ser despreciable. En todos nuestros problemas será así.

4.1. CAMPO DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS DISCRETAS

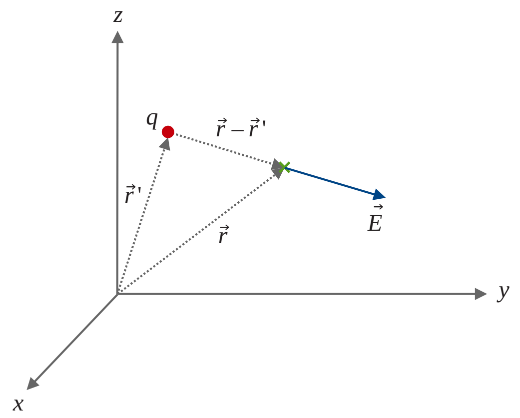
En primer lugar, vamos a calcular cómo es el campo generado por una asociación de cargas discretas. Para empezar, imaginemos una carga q situada en el origen de coordenadas y calculemos el campo en un punto P dado por su vector de posición $\vec{r}$, como en este dibujo:



Gracias al análisis de la ley de Coulomb sabemos que el campo generado en este punto por la carga q será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q}{|\vec{r}|^3}\,\hat{r}$$

Ahora, repitamos el cálculo, pero moviendo la carga q desde el origen a un punto $\vec{r}\,'$:



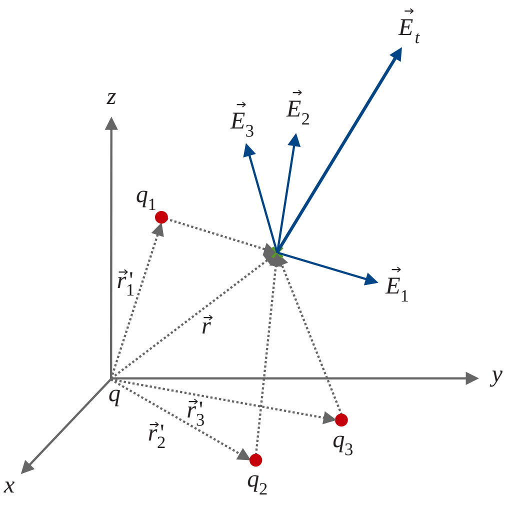
Como sabemos que el campo, al igual que la fuerza de Coulomb, sigue la línea que une la carga con el punto donde lo medimos, he dibujado el vector $\vec{r} - \vec{r}\,'$ y ya podemos escribir el valor del campo generado por la carga en el punto donde queremos calcularlo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} (\vec{r} - \vec{r}\,')$$

Fíjate en la expresión anterior: el campo en el punto con vector de posición $\vec{r}$ es, como siempre, proporcional a la carga y a la distancia que separa la carga y el punto elevada al cuadrado. Al igual que hicimos con la ley de Coulomb, aunque en el denominador hay un cubo, el módulo del vector que hay en el numerador hace, que al final, la potencia quede al cuadrado. Es lo mismo que escribir esto:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} (\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \hat{u}_r$$

Ya que sabemos cuál es el campo generado en un punto cualquiera por una carga situada en cualquier otro punto del espacio, para calcular el campo total generado por N cargas solo tendremos que aplicar el principio de superposición y sumar el campo:



Así, la expresión general para una distribución de N cargas será:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i')$$

Tenemos que recordar una cosa importante: la suma es una suma vectorial y, por tanto, los vectores se suman componente a componente. Por lo tanto, cuando calculamos el campo generado por N cargas, hay que calcular N vectores, uno para cada carga con sus tres componentes, y hacer la suma de las componentes por separado.

Nota. Quizás te hayas dado cuenta de un detalle sobre el campo eléctrico (y también sobre la fuerza de Coulomb) que genera una carga puntual: ¿qué ocurre cuando la distancia a la carga que genera el campo se hace 0? Aparentemente, el campo se hace infinito, ya que:

$$\lim_{d \to 0} |\vec{E}| = \lim_{d \to 0} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1}{d^2} = \infty$$

Pero, en realidad, seguramente también te habrás imaginado que esto no ocurre y que se debe solo a que estamos usando la aproximación de una carga puntual. Y es que dijimos, si recuerdas, que, para que un cuerpo cargado pueda aproximarse a una carga puntual, tiene que ocurrir que la distancia d a la que se estudia sea mucho mayor que el tamaño de la carga. Teniendo en cuenta esto, intentar calcular este límite no tiene sentido físico, ya que invalida la aproximación.

4.2. CAMPO DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA CONTINUA

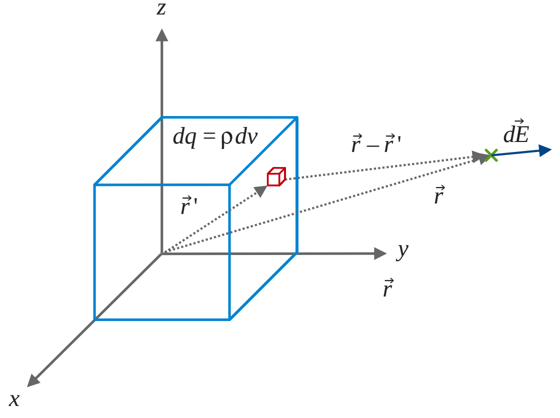
Tal y como acabamos de ver, si tenemos una distribución de cargas puntuales o discretas, podemos calcular el campo eléctrico simplemente echando mano del principio de superposición; por tanto:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i')$$

La diferencia es que cuando tenemos una distribución continua no tenemos cargas discretas de las que calcular el campo para luego sumarlo. Pero lo que sí podemos hacer es usar la misma idea: vamos a calcular el campo que genera una carga elemental, un diferencial de carga, y después sumamos el campo generado por cada uno de estos diferenciales de carga. Los diferenciales que usaremos son los que ya vimos:

- Distribuciones volumétricas: $dq = \rho\ dv$.
- Distribuciones superficiales: $dq = \rho_s\ ds = \sigma\ ds$.
- Distribuciones lineales: $dq = \rho_l\ dl = \lambda\ dl$.

Ahora, nos podemos imaginar que al igual que una carga q genera un campo eléctrico, un diferencial de carga dq genera un diferencial de campo eléctrico $d\vec{E}$, y que, además, matemáticamente tendrá la misma forma que el campo generado por una carga puntual, puesto que el diferencial de carga es, en esencia, puntual. Fíjate en esta figura:



En ella tenemos:

- $dq = \rho\ dv$: diferencial de carga que estamos estudiando.
- $\vec{r}\,'$: vector de posición del diferencial de carga.
- $\vec{r}$: vector de posición del punto donde queremos calcular el campo.
- $\vec{r} - \vec{r}\,'$: vector que une el diferencial de carga y el punto donde calculamos el campo.
- $d\vec{E}$: diferencial de campo electrostático que genera el diferencial de carga.

Por tanto, por simetría con el cálculo que hicimos para una carga puntual, podemos decir que el diferencial de campo que genera el diferencial de carga será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\rho\;dv'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Para calcular el campo total generado por toda la distribución de carga, solo tenemos que sumar la contribución de cada uno de los diferenciales de carga, aplicando el principio de superposición del campo. Ya sabemos que, cuando hablamos de diferenciales, la suma es en realidad una integral; por tanto:

$$\vec{E} = \int_{v'} d\vec{E} = \int_{v'} \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\;dv'$$

Las primas en el diferencial de carga y en la extensión de la integral (leído como volumen prima) lo que nos están recordando es que hay que integrar a lo largo de todo el cuerpo cargado.

Si en lugar de una distribución de carga volumétrica, la tenemos en superficie, la integral del campo es equivalente, pero cambiando el diferencial de carga y haciendo una integral de superficie:

$$\vec{E} = \int_{s'} d\vec{E} = \int_{v'} \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\sigma}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\;ds'$$

Y, por último, si tenemos una distribución lineal de carga:

$$\vec{E} = \int_{s'} d\vec{E} = \int_{l'} \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\lambda}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\;dl'$$

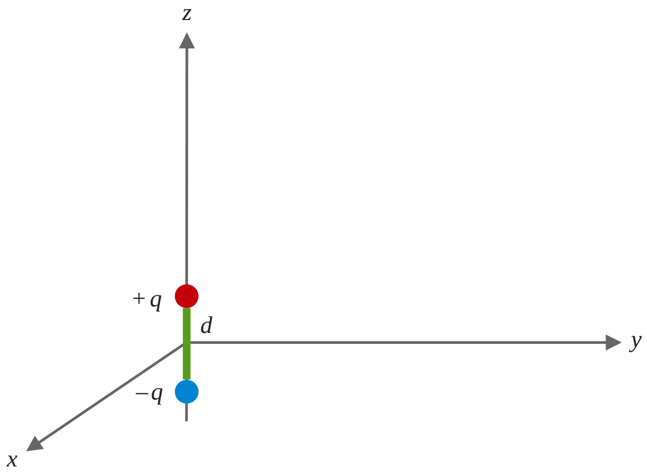
Uno podría pensar que, vistas estas integrales, calcular el campo electrostático de una distribución de carga es un problema sencillo. En realidad no lo es. Estas integrales, aunque tienen una forma bastante compacta, cuando se desarrollan se vuelven bastante complejas y, en general, no se pueden resolver de forma analítica, salvo para casos muy sencillos, donde hay mucha simetría. Muchas veces, la única forma de poder calcular el campo es mediante métodos computacionales, haciendo una aproximación numérica.

5. EL CAMPO DEL DIPOLO ELÉCTRICO

Antes de continuar estudiando el campo electrostático, vamos a detenernos en una distribución de cargas que es especialmente interesante: el dipolo eléctrico.

> Llamaremos **dipolo eléctrico** a una distribución de dos cargas puntuales del mismo valor, pero de distinto signo, separadas una distancia *d* entre ellas.

Este es el dibujo de un dipolo eléctrico en el origen de coordenadas y orientado según el eje *z*, de carga *q* y de distancia *d*:



5.1. ¿QUÉ PODEMOS ESPERAR DEL CAMPO DEL DIPOLO?

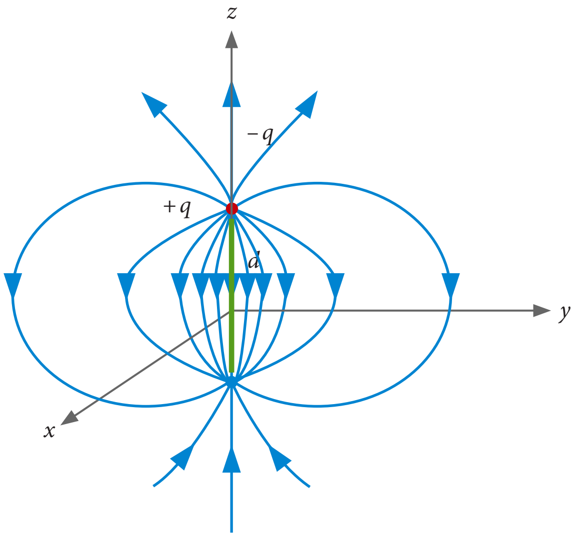
Enseguida veremos la importancia de esta distribución de cargas en particular, pero, en primer lugar, intentaremos predecir algunas cosas del campo:

- Como la carga neta de la distribución es 0, ya que ambas cargas se anulan, podemos pensar que, según nos alejemos del dipolo, el campo eléctrico que genera tiene que hacerse pequeño rápidamente. O al menos más rápidamente que el campo eléctrico de una carga puntual sola.

- Como las dos cargas están orientadas según el eje *z*, a medida que nos alejemos del dipolo a lo largo del plano *xy*, el campo, en lugar de ser radial, paralelo al plano *xy*, como cuando tenemos una carga aislada, deberá ser vertical, perpendicular al plano *xy*.

5.2. LÍNEAS DE CAMPO DEL DIPOLO

Cuando hablamos de las líneas de campo vimos, como uno de los ejemplos, las líneas de campo del dipolo. Voy a volver a dibujarlas aquí, pero esta vez orientando el dipolo según el eje *z*:



5.3. MOMENTO DIPOLAR

Vamos a definir un vector que nos va a resultar muy útil: el momento dipolar.

> Se dice que un dipolo tiene un **momento dipolar**, que es el vector que une ambas cargas, desde la negativa a la positiva, multiplicado por el valor de la carga positiva.

$$\vec{p} = q\vec{d} = qd\,\hat{u}_d$$

Las unidades del vector momento dipolar son culombios por metro:

$$[\vec{p}] = [Cm]$$

El momento dipolar del dipolo que hemos tomado como ejemplo al inicio de este apartado será:

$$\vec{p} = qd\,\hat{k}$$

5.4. CÁLCULO DEL CAMPO DEL DIPOLO A UNA GRAN DISTANCIA

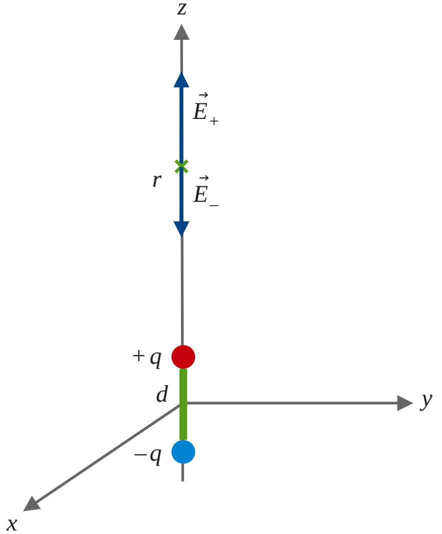
Para comprobar si las predicciones que hicimos hace un par de apartados son correctas, tenemos que hacer el cálculo del campo electrostático a una gran distancia del dipolo, de tal forma que se cumpla lo siguiente:

$$r \gg d$$

Por simplificar los cálculos generales, vamos a calcular el campo en dos situaciones particulares: a lo largo del eje *z* y a lo largo del plano *xy*.

5.4.1. Campo del dipolo a lo largo del eje *z*

Puesto que nuestro dipolo está en el eje *z*, podemos calcular el campo del dipolo a lo largo de esta recta de una forma bastante sencilla.



Vamos a fijarnos en el dibujo de la derecha.

En el punto que está a una distancia *r* del origen, tenemos la suma de los campos de ambas cargas. En el caso del semiespacio superior ($z > 0$), la carga positiva está ligeramente más cerca del punto que la carga negativa; así pues, parece razonable pensar que existirá un campo pequeño y en el sentido positivo de z. Vamos a calcularlo. Como el campo solo tendrá componente en el eje z, podemos hacer los cálculos directamente en módulo:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_+| + |\vec{E}_-|$$

Con:

$$|\vec{E}_+| = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{(r-d/2)^2} \qquad \text{y} \qquad |\vec{E}_-| = \frac{-q}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{(r+d/2)^2}$$

Por tanto:

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{1}{(r-d/2)^2} - \frac{1}{(r+d/2)^2}\right)$$

Si hacemos común denominador, obtenemos:

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{(r+d/2)^2-(r-d/2)^2}{(r^2-d^2/4)^2}\right)$$

En el denominador, como r es mucho mayor que d, podemos escribir de forma aproximada:

$$|\vec{E}| \simeq \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{(r+d/2)^2-(r-d/2)^2}{r^4}\right) = \frac{2qd}{4\pi\,\epsilon_0\,r^3} = \frac{qd}{2\pi\,\epsilon_0\,r^3}$$

Si lo escribimos de forma vectorial:

$$\vec{E} \simeq \frac{qd}{2\pi\,\epsilon_0\,r^3}\,\hat{k}$$

Que, a su vez, podemos escribir en términos del momento dipolar:

$$\vec{E} \simeq \frac{qd}{2\pi\,\epsilon_0\,r^3}\,\hat{k} = \frac{\vec{p}}{2\pi\,\epsilon_0\,r^3}$$

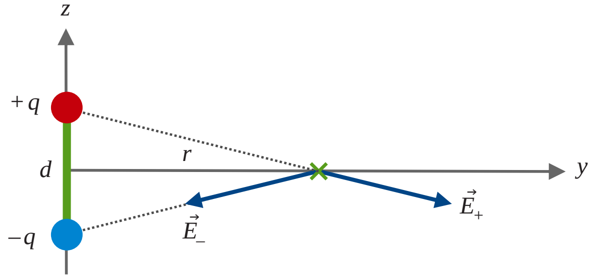
Podemos generalizar esta expresión y concluir, sin perder generalidad, lo siguiente: si tenemos un dipolo eléctrico orientado en cualquier sentido del espacio y conocemos su momento dipolar, entonces, el campo eléctrico, a una gran distancia r a lo largo de la recta que forman las cargas del dipolo, será:

$$\vec{E} \simeq \frac{\vec{p}}{2\pi\, \epsilon_0\, r^3}\ [V/m]$$

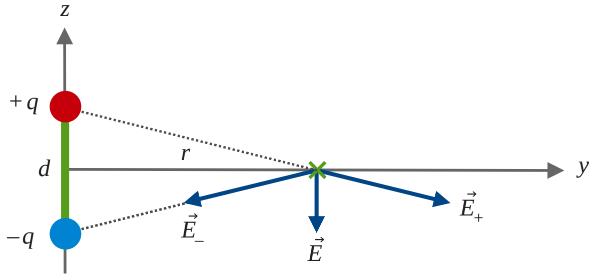
Parece que esta expresión nos da la razón en nuestra predicción inicial: el campo de un dipolo, al menos a lo largo de su eje, decae con el cubo de la distancia, en lugar de hacerlo con el cuadrado.

5.4.2. Campo del dipolo en el plano *xy*

Acabamos de calcular el campo que genera un dipolo en el eje del mismo. Vamos ahora a calcularlo en el plano perpendicular al dipolo que pasa por su centro. En nuestro caso, este plano es el plano xy. Fíjate en este dibujo:



Del dibujo podemos deducir que las componentes horizontales del campo (las paralelas al plano xy) se van a anular y las componentes verticales se van a sumar. Algo así:



Para calcular el valor del campo solo tenemos que calcular el valor de la componente z del campo generado por cualquiera de las dos cargas y multiplicarlo por dos. Vamos a operar con la carga positiva del dipolo.

La distancia R de la carga positiva al punto donde calculamos el campo es:

$$R = \sqrt{r^2 + (d/2)^2}$$

Y el módulo del campo generado por la carga positiva en el punto será:

$$|\vec{E}_+| = \frac{q}{4\pi\, \epsilon_0\, R^2} = \frac{q}{4\pi\, \epsilon_0\, (r^2 + (d/2)^2)}$$

Para calcular la componente z de este campo, podemos fijarnos en el triángulo de la página anterior que va desde el origen a la carga positiva y hasta el punto donde medimos el campo. La componente vertical, con signo negativo por apuntar hacia abajo, será:

$$E_{+vert} = -\,|E_+|\, \frac{d/2}{\sqrt{r^2 + (d/2)^2}}$$

Sustituyendo:

$$E_{+vert} = \frac{-\,q}{4\pi\, \epsilon_0\, (r^2 + (d/2)^2)}\; \frac{d/2}{\sqrt{r^2 + (d/2)^2}} = \frac{-\,qd/2}{4\pi\, \epsilon_0\, (r^2 + (d/2)^2)^{3/2}}$$

Si, como en el caso anterior, despreciamos la contribución de la parte en d frente a la parte en r del denominador, tenemos una versión aproximada y simplificada del campo:

$$E_{+vert} \simeq \frac{-\,qd/2}{4\pi\, \epsilon_0\, (r^2)^{3/2}} = \frac{-\,qd/2}{4\pi\, \epsilon_0\, r^3}$$

Y, por tanto, el campo total, que es la suma de las dos componentes verticales del campo generadas por cada una de las dos cargas, será:

$$\vec{E} \simeq \frac{-\,qd}{4\pi\, \epsilon_0\, r^3}\, \hat{k}$$

Como hicimos antes, podemos expresar ese campo en términos del momento dipolar que tiene el dipolo. Así:

$$\vec{E} \simeq \frac{-\vec{p}}{4\pi\,\epsilon_0\, r^3}\ [V/m]$$

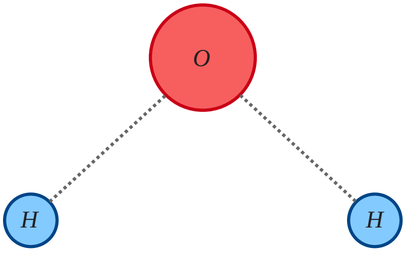
De nuevo, el campo que hemos calculado nos da la razón y demuestra nuestra predicción: en el plano perpendicular al dipolo, y que pasa por su centro, el plano *xy* en este caso, el campo es perpendicular al plano, vertical y no radial como en el caso de una carga aislada.

5.5. IMPORTANCIA DEL DIPOLO ELÉCTRICO

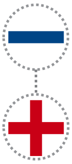
Seguro que te estás preguntando por qué hemos dedicado todo un apartado al campo generado por una distribución de dos cargas puntuales. Yo lo haría. La cuestión es la siguiente: en la naturaleza, la mayor parte de los objetos, tanto macroscópicos como microscópicos, tienen una carga neta que es 0. Sin embargo, aunque un cuerpo tenga una carga neta nula, no significa que no tenga cargas en su interior; solo quiere decir que tiene la misma cantidad de carga negativa que positiva. Vamos a ver un ejemplo: la molécula de agua.

5.5.1. Molécula de agua y otras moléculas polares

De forma muy simplificada podemos dibujar la molécula de agua así:



Los dos átomos de hidrógeno resultan ser mucho menos electronegativos que el de oxígeno, así que, en media, los electrones que comparten en los enlaces covalentes (dibujados como líneas punteadas) están más cerca del oxígeno y más lejos de los átomos de hidrógeno. Esto significa que, si nos fijamos solo en la carga y en el valor que esta ocupa en promedio, podemos dibujar la molécula de agua de la siguiente manera:



Esto es lo mismo que decir que las moléculas de agua, aunque totalmente neutras, tienen una distribución de carga que se comporta como un pequeño dipolo eléctrico. Además del agua, muchas moléculas son polares. De una forma general, cuando a una molécula se la categoriza como polar, lo que quiere decir es que hay una distribución de la carga dentro de la molécula que hace que se comporte como un pequeño dipolo.

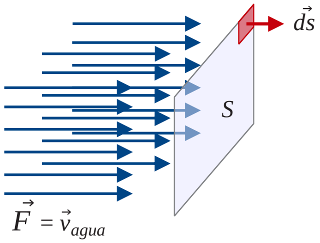
6. EL FLUJO DEL CAMPO ELECTROSTÁTICO Y LA LEY DE GAUSS

6.1. FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

Hay una operación matemática que se puede realizar sobre cualquier campo vectorial: el flujo a través de una superficie, abierta o cerrada. El flujo de un campo vectorial *F* se define así:

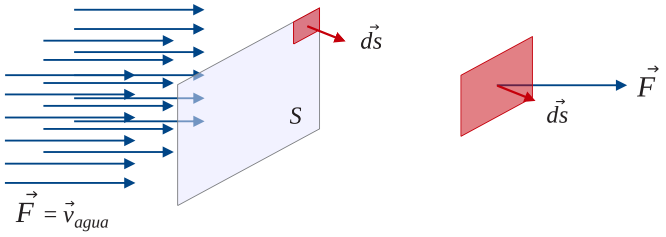
$$\Phi = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Si analizamos esta integral con calma, veremos lo que significa: el flujo es la suma del producto escalar del campo $\vec{F}$ por cada uno de los diferenciales de superficie. Imagínate que el campo vectorial $\vec{F}$ es la velocidad de una corriente de agua y que la superficie *S* corta a la corriente de agua en la forma que se ve en el siguiente diagrama:



Entonces, según este dibujo, el flujo del campo de velocidades (que se mide en metros por segundo) es la suma de la velocidad en cada punto de la superficie por el diferencial de superficie, es decir, la integral que vimos hace un par de párrafos. Esta suma, cuyas unidades, como ya habrás visto, son de metros cúbicos por segundo, da el volumen de agua que atraviesa la superficie en cada segundo, el caudal.

¿Qué ocurre si, en lugar de usar esa superficie que es perpendicular a la corriente de agua, usamos una que es oblicua?:



En este caso, la contribución de cada pequeña unidad de superficie es menor, ya que el producto escalar de *F* y *ds* es:

$$\vec{F} \cdot \vec{ds} = |\vec{F}||\vec{ds}|\cos(\alpha)$$

Los dos ejemplos que he puesto antes son un caso muy particular y el cálculo que se puede hacer es muy fácil, ya que el campo *F* es constante y la superficie es plana; por tanto:

$$\Phi = \int_s \vec{F} \cdot \vec{ds} = \vec{F} \cdot \int_s \vec{ds} = |\vec{F}| S_{total} \cos(\alpha)$$

Esto significa que si mantenemos el tamaño *S* de la superficie constante, el flujo de agua a través de la superficie es máximo cuando esta es perpendicular al flujo de agua, cosa que, por otra parte, es bastante intuitiva. Si ponemos una plancha sólida en una corriente de agua, sentimos más fuerza cuando la plancha está orientada perpendicularmente a la velocidad del agua, y, según la vamos girando, la fuerza disminuye, hasta hacerse 0 al hacerla paralela al agua, ya que el coseno del ángulo que forman se hace 0.

En realidad, en muchos casos, esta integral no se puede simplificar tanto, ya que los campos vectoriales no suelen ser constantes a lo largo de la superficie y, además, las superficies no suelen ser planas.

Ahora volvamos al campo electrostático: si en el caso del campo vectorial de la velocidad del agua lo que fluye a través de una superficie al calcular el flujo es el volumen de agua, ¿qué es lo que fluye en el caso del campo eléctrico? En realidad nada. Si nos ponemos a jugar con las unidades del flujo del campo eléctrico, veremos que son:

$$\left[\frac{N \cdot m^2}{C}\right] = \left[\frac{V}{m} \cdot m^2\right] = [V \cdot m]$$

Entonces, ¿por qué se calcula esta operación que es abstracta? Porque, aunque no tiene un significado físico directo, el flujo del campo electrostático cumple una particularidad a la que le vamos a dedicar todo el apartado siguiente y que nos resultará muy útil para calcular el campo de algunas distribuciones de carga.

Además, aunque no podamos decir que fluye nada, cuando en general calculamos el flujo de un campo vectorial a través de una superficie, matemáticamente podemos interpretar que el flujo nos da una idea del número de líneas de campo que atraviesan la superficie. A través de una superficie, abierta o cerrada, el flujo del campo puede ser 0. Si lo es, significa que o bien esa superficie no es atravesada por ninguna línea de campo, o bien la atraviesan la misma cantidad de líneas en sentido entrante y sentido saliente.

6.2. LA LEY DE GAUSS

6.2.1. En versión diferencial

Cuando al comienzo analizamos las propiedades del campo, dijimos lo siguiente: las fuentes del campo eléctrico son las cargas. Esto significa, literalmente, que las líneas de campo nacen en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. Describimos esta propiedad con la ecuación de la divergencia del campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Como veremos al final de la unidad, este es uno de los dos postulados fundamentales del campo electrostático, y, como tal, tiene una importancia fundamental; tanto, que le dedicamos todo un apartado de la unidad. A esta expresión se la llama la «ley de Gauss» y es, como ya dijimos, una propiedad del campo. No se puede deducir de otras leyes más elementales.

6.2.2. En versión integral

Quizás, tal cual la hemos escrito anteriormente, la ley de Gauss no nos resulte muy útil, pero si la encerramos entre dos integrales de volumen, vamos a llegar a otra versión de la ley que resultará mucho más interesante para resolver problemas:

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, dv = \int_v \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dv$$

Sabemos lo siguiente:

- La parte de la izquierda de la igualdad la podemos sustituir, haciendo uso del teorema de la divergencia (también llamado «teorema de Gauss»), por la expresión:

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, dv = \oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

- La parte de la derecha de la igualdad es la integral de la densidad de carga en un volumen o, lo que es lo mismo, la carga total encerrada dentro de ese volumen:

$$\int_v \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dv = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

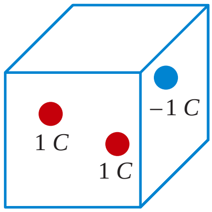
Y, por tanto, podemos escribir la igualdad así:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Esta expresión también es la ley de Gauss; eso sí, expresada en su forma integral. Si la leemos, nos dice lo siguiente: si tomamos una superficie cerrada *S*, entonces, estamos seguros de que el flujo del campo eléctrico a través de esa superficie cerrada es igual a la carga total encerrada divida por la permitividad eléctrica del vacío.

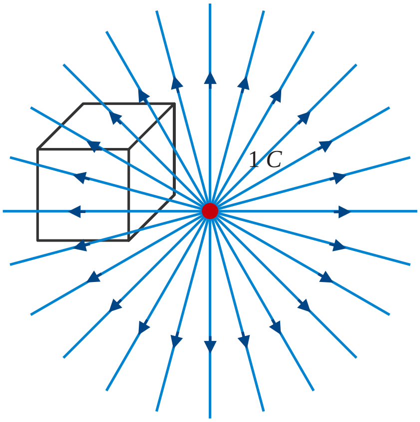
6.2.3. Consecuencias de la ley de Gauss

Veamos algunos ejemplos de las implicaciones básicas de la ley de Gauss:

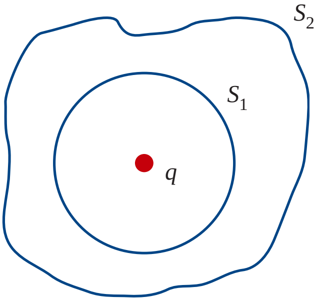


En esta figura he dibujado un cubo en el que hay encerradas tres cargas. En general, el campo en la superficie del cubo será un vector difícil de calcular. En algunas zonas de la superficie será 0 y en otras no. Pero de lo que estamos seguros es de que, como dentro de la superficie la carga total vale 1 C, el flujo total del campo a través de la superficie del cubo va a ser:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}$$



En este segundo ejemplo tenemos un cubo y una carga de 1 C fuera del cubo. ¿Cuánto vale el flujo a través de la superficie del cubo? Vale 0. Dentro del cubo no hay carga neta; en particular, ninguna carga, y, por lo tanto, el flujo total será 0. **¿Significa esto que el campo eléctrico vale 0 en todas las superficies del cubo? Claro que no**, sabemos que el campo va a ser distinto de 0 en cada pared. Al fin y al cabo hemos puesto una carga junto al cubo. Lo que sí significa es que el número de líneas de campo que entran dentro del cubo es el mismo que el número de líneas que salen y, por tanto, el flujo vale 0.



En este ejemplo tenemos una carga q rodeada de una superficie esférica y de una superficie irregular. Aplicando directamente la ley de Gauss, sabemos que el flujo a través de S_1 y de S_2 debe ser igual; por tanto:

$$\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Y, entonces, ¿esto significa que el campo eléctrico es igual en la superficie S_1 y en la superficie S_2? Claramente la respuesta es no. El campo eléctrico en cada superficie es distinto, pero la integral de flujo es la misma. Es más, por simetría, en S_1 el campo eléctrico es igual para cada punto de la superficie, mientras que en S_2 es diferente para cada punto.

6.2.4. Uso de la ley de Gauss para calcular el campo

En algunos casos muy particulares, pero bastante habituales, nos vamos a encontrar que la ley de Gauss nos va a permitir calcular cuánto vale el campo electrostático. Como verás, necesitaremos que el problema tenga una distribución de carga con una fuerte simetría, de tal forma que podamos encontrar una superficie cerrada imaginaria, que llamaremos «superficie gaussiana», en la que se cumpla que:

- El campo sea perpendicular (o en algún caso paralelo) a la superficie en todos sus puntos.
- El módulo del campo sea constante en todos los puntos de la superficie a la que es perpendicular.

Si podemos encontrar una superficie de este tipo, entonces podremos usar la ley de Gauss para resolver el problema. El procedimiento para resolver el problema siempre es igual:

1. Buscamos la superficie gaussiana.
2. Aplicamos la ley de Gauss en la superficie gaussiana. En esta superficie, como el campo es perpendicular a la superficie y de módulo constante, la integral queda muy sencilla. Así:

$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_s |\vec{E}|\, ds = |\vec{E}| \int_s ds = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

3. La integral del diferencial de superficie es directamente el área S de la superficie gaussiana:

$$|\vec{E}| \int_s ds = |\vec{E}|\, S = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

4. Despejamos el módulo del campo en la superficie:

$$|\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0\, S}$$

5. Calculamos el área de la superficie y la carga encerrada y ya hemos obtenido el módulo del campo en la superficie. Solo queda añadir el carácter vectorial del campo, pero que será fácil, pues sabemos que es perpendicular a la superficie.

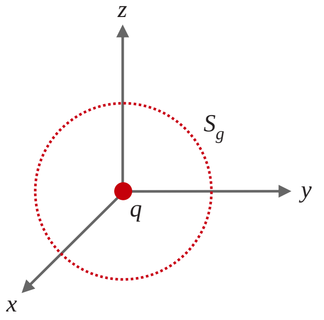
Ahora vamos a calcular el campo de algunas distribuciones haciendo uso de la ley de Gauss.

6.2.4.1. Campo de una carga puntual en el origen

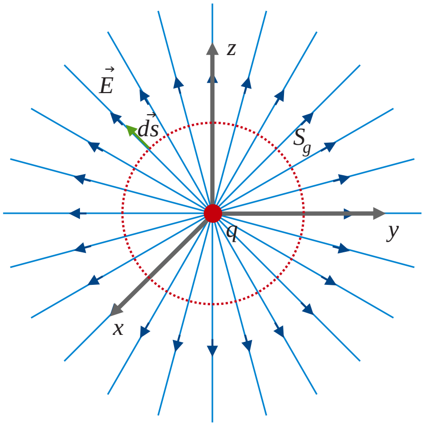
Imagina que tenemos una carga puntual de valor q en el origen de coordenadas. Vamos a calcular el campo que hay a su alrededor. Sabemos, puesto que ya lo hemos visto antes, que el campo, en esféricas, deberá ser:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\, \epsilon_0\, r^2}\, \hat{r}$$

Demostraremos que es así haciendo uso de la ley de Gauss. Este es el esquema:



En él tenemos dibujada la carga en el origen, y he dibujado una superficie esférica imaginaria punteada S_g. Esta es la superficie gaussiana. Por simetría del problema, da igual los giros que haga; el campo solo puede ser radial, es decir, radiar desde el origen de coordenadas. Esto implica que si rodeamos la carga con una esfera, el campo será siempre perpendicular a ella y, además, de módulo constante en toda la esfera. Fíjate:



Importante. La esfera gaussiana S_g es una superficie imaginaria. No existe físicamente, simplemente la usamos como una herramienta para aplicar la ley de Gauss. En este caso, la superficie S_g es simplemente una esfera de radio r, variable, con la que mentalmente rodeamos la carga.

Como el campo es perpendicular a la esfera que hemos elegido como superficie gaussiana y, además, el módulo del campo es constante en toda la superficie, podemos aplicar la ley de Gauss:

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_s |\vec{E}|\, ds = |\vec{E}| \int_s ds = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Despejando el módulo del campo:

$$|\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0\, S}$$

Como la superficie de una esfera de radio *r* es:

$$S_{esf} = 4\pi\, r^2$$

Y la carga encerrada por la esfera gaussiana es *q*, podemos calcular el módulo del campo:

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\, \epsilon_0\, r^2}$$

Y como el campo es radial, perpendicular a la esfera, sabemos que toma la dirección del vector *r* unitario:

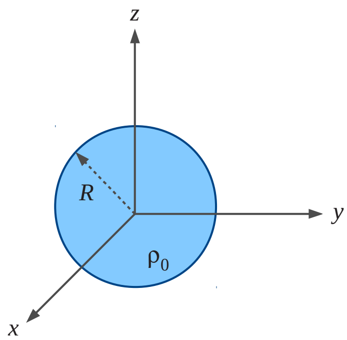
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\, \epsilon_0\, r^2}\, \hat{r}$$

Como decíamos al principio del ejemplo: ya sabíamos qué valor nos tenía que dar el campo y hemos demostrado que por el método de la ley de Gauss llegamos al mismo lugar.

6.2.4.2. Esfera cargada uniformemente

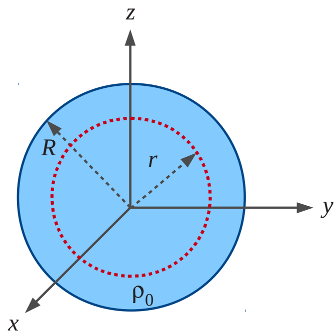
Ahora vamos a calcular el campo que crea una esfera de radio *R* cargada con una densidad de carga uniforme de valor ρ_0.

Este es el esquema:



En este caso, por simetría esférica, podemos pensar que la superficie de Gauss apropiada será también una esfera. Así es. No importa cuántos giros hagamos alrededor de los tres ejes, ya que el problema será el mismo. Esto significa que el campo será radial (perpendicular a cualquier esfera centrada en el origen) y constante a una distancia *r* del origen. La diferencia es que ahora tenemos dos zonas del espacio en las que el problema es diferente: dentro y fuera de la esfera. Dentro, la densidad de carga es no nula, mientras que fuera es 0. En ambos casos usaremos como superficie gaussiana una esfera de radio *r* centrada en el origen, pero haremos el cálculo del campo en dos partes:

Interior de la esfera



En el esquema tenemos dibujada la esfera cargada y, en punteado, la superficie gaussiana en su interior. Aplicamos la ley de Gauss:

$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_s |\vec{E}|\, ds = |\vec{E}| \int_s ds = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \longrightarrow |\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0\, S}$$

La superficie de la esfera gaussiana es fácil de calcular:

$$S = 4\pi\, r^2$$

Con lo que tenemos que tener más cuidado es con el valor de la carga encerrada por la superficie. Según varía el radio de la zona gaussiana entre 0 y R, hay más carga encerrada por la superficie gaussiana. Como la densidad de carga es constante, calcular la carga encerrada como una función del radio es sencillo:

$$Q_{enc}\,(r) = \frac{4}{3}\,\pi r^3\,\rho_0$$

Si la densidad de carga no hubiera sido constante, habría que haber integrado. Ya tenemos todos los ingredientes para poder calcular el módulo del campo:

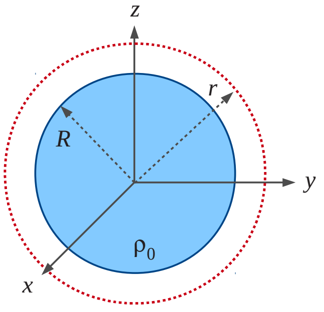
$$|\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0\, S} = \frac{\frac{4}{3}\,\pi r^3\,\rho_0}{4\pi\,\epsilon_0\, r^2} = \frac{r\,\rho_0}{3\epsilon_0}$$

Y vectorialmente:

$$\vec{E} = \frac{r\,\rho_0}{3\epsilon_0}\,\hat{r}$$

Exterior de la esfera

Si repetimos los cálculos aplicados en el exterior de la esfera, tendremos:



Enseguida nos daremos cuenta de que, una vez el radio de la esfera de Gauss se hace mayor que R, la carga encerrada por ella siempre es la misma; permanece constante y es la carga total que tenía la esfera cargada. Así:

$$Q_{enc} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0$$

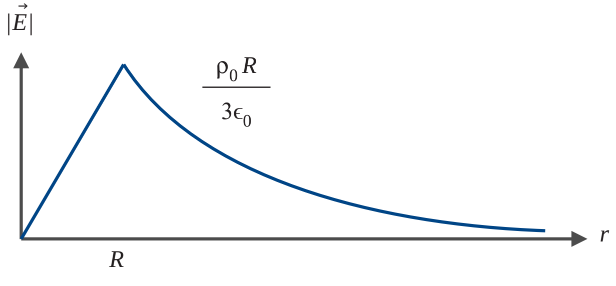
Y, por tanto, aplicamos la ley de Gauss y obtenemos que:

$$|\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0 S} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Y vectorialmente:

$$\vec{E} = \frac{r \rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Si dibujamos el módulo del campo eléctrico frente a la distancia r al origen, obtenemos la siguiente gráfica:



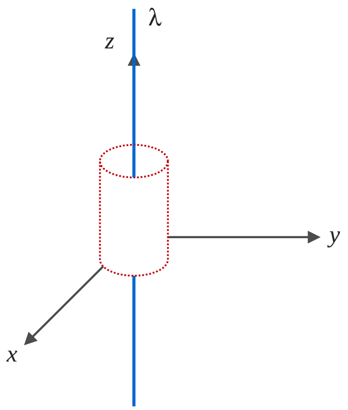
Se produce una cosa curiosa: fuera de la esfera, el campo decrece con el cuadrado de la distancia, al igual que ocurría cuando la carga era puntual. Sin embargo, dentro de la esfera, según nos alejamos del centro y vamos llegando al borde, el campo va creciendo de forma lineal. Si lo pensamos bien, es lógico. Dentro de la esfera, según nos alejamos del centro, cada vez hay más carga acumulada de forma proporcional al radio al cubo y, por lo tanto, como el campo decrece de forma natural con el radio al cuadrado, nos queda que, al final, el campo tiene que crecer con r.

Otro punto importante es que el campo es continuo en R. Aunque en este manual no veamos las condiciones de continuidad del campo, gracias a la experiencia de ir haciendo ejercicios y problemas, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Cuando hay cambios en la densidad de carga volumétrica, el campo es continuo.
- Cuando hay cambios en la densidad de carga superficial, el campo es, en general, discontinuo.

6.2.4.3. Campo creado por un hilo infinito

Si tenemos un hilo cargado de longitud infinita situado a lo largo del eje z, también podremos calcular el campo en cualquier punto del espacio haciendo uso de la ley de Gauss. Veamos el esquema:



Puesto que el hilo es infinito, cualquier giro que hagamos al problema alrededor del eje z o cualquier traslación también a lo largo del eje z nos deja el problema sin ningún cambio. Esto significa que:

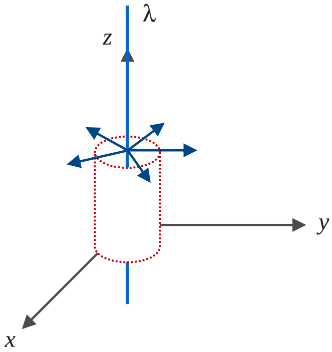
- El campo electrostático solo puede ser radial.
- El campo módulo ha de ser constante a lo largo de cualquier movimiento en el eje z.

Esta simetría nos permite elegir una superficie gaussiana que sea un cilindro de radio r y altura h, centrado en el eje z.

El cilindro tiene, en realidad, tres superficies:

- Las dos tapas de arriba y abajo.
- La superficie lateral.

Puesto que el campo es radial, como acabamos de decir, será perpendicular a la superficie lateral del cilindro y será paralelo a las tapas de arriba y abajo:



Teniendo en cuenta esto, podemos aplicar la ley de Gauss a las tres superficies. Empezamos por las tapas, donde no hay mucho que hacer: el campo es paralelo a la tapa y, por lo tanto, el flujo a través de esta superficie es 0.

Continuamos por la superficie lateral del cilindro:

$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_s |\vec{E}|\, ds = |\vec{E}| \int_s ds = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0\, S}$$

La superficie lateral, S, del cilindro de altura h y radio r es:

$$S = 2\pi\, hr$$

Por otra parte, la carga encerrada por el cilindro será la carga que hay en el tramo de hilo encerrado. Como la densidad de carga es constante, calcular la carga es muy sencillo:

$$Q_{enc} = \lambda h$$

Y ya podemos calcular el módulo del campo:

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda h}{2\pi \epsilon_0 hr} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

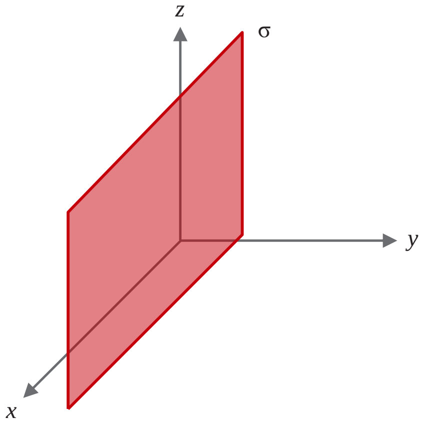
Y, vectorialmente, en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{r}$$

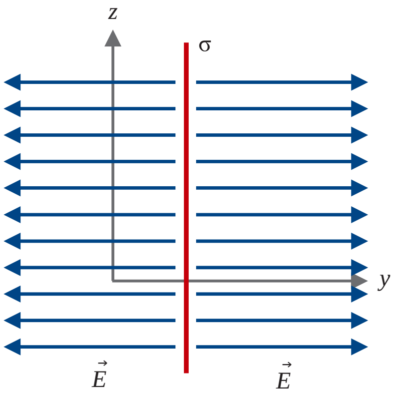
6.2.5. Campo creado por una superficie cargada infinita

Al igual que un hilo cargado infinito, una superficie cargada infinita es solo una superficie imaginaria. No es posible construirla. Pero como veremos en la unidad 3, este tipo de distribución tiene muchas aplicaciones en ingeniería.

En la siguiente figura hay dibujada una superficie cargada que tenemos que imaginarnos que se extiende infinitamente:



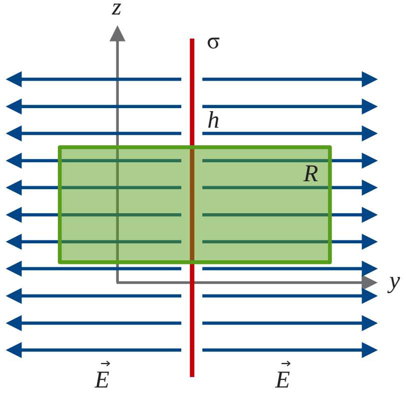
Para poder elegir una superficie gaussiana, en primer lugar, hay que imaginarse cómo es el campo generado por la superficie: puesto que la superficie es infinita, cualquier traslación que hagamos deja el problema en las mismas condiciones, es decir, es un problema que tiene simetría de traslación. El campo solo puede ser de una manera para mantener esta simetría: perpendicular a la superficie. Algo así:



En estas condiciones, ¿qué superficie gaussiana podemos usar? Si usamos un cilindro de radio *R* y altura *h* perpendicular a la superficie, vamos a ver que cumple las condiciones que necesitamos:

- El campo es perpendicular a las tapas del cilindro y de módulo constante en toda la tapa.
- El campo es paralelo a las paredes laterales del cilindro.

Este es el esquema:



Si aplicamos la ley de Gauss al cilindro, veremos que al flujo solo contribuyen las tapas, ya que el flujo por la superficie lateral es 0. En realidad, el flujo por una tapa es igual al flujo por la otra. Así que:

$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{2\ tapas} |\vec{E}|\, ds = 2 \int_{1\ tapa} |\vec{E}|\, ds = 2\, |\vec{E}| \int_{1\ tapa} ds = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{2\, \epsilon_0\, S_{1\ tapa}}$$

La superficie de cada una de las tapas del cilindro de radio *R* y altura *h* es:

$$S_{1\ tapa} = \pi\, R^2$$

Y la carga encerrada por el cilindro es justo la carga que hay en la superficie cargada en una circunferencia de radio *R*, es decir:

$$Q_{enc} = \sigma\, \pi\, R^2$$

Así pues, el módulo del campo generado por la superficie cargada a cada uno de sus lados es:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\, \epsilon_0}$$

Y, en este caso, en el que la superficie es paralela al plano *xz*, el campo será, vectorialmente:

- A la derecha de la superficie:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\, \epsilon_0}\, \hat{j}$$

- A la izquierda de la superficie:

$$\vec{E} = \frac{-\,\sigma}{2\, \epsilon_0}\, \hat{j}$$

Fíjate en las particularidades del campo generado por la superficie:

- A diferencia del campo generado por una carga puntual o por un hilo cargado, el campo es independiente de la distancia a la superficie cargada.
- Al final, el campo ha resultado ser independiente tanto del radio (R) como de la altura (h) del cilindro que elegimos como superficie de Gauss.

Si lo pensamos bien, sabemos que en el vacío no medimos campo electrostático, salvo que haya cargas cerca, lo cual nos asegura que en el universo no hay ninguna superficie cargada infinita o, si las hay, hay más de una y se anulan una a otra. Está claro que es una distribución de carga imposible de construir, pero tiene mucha utilidad por lo siguiente: imagínate una superficie cargada finita de, por ejemplo, $1\ m \times 1\ m$. Si medimos el campo en la zona próxima al centro de la superficie y a una distancia pequeña de unos pocos centímetros, nos encontraremos que el campo que genera la superficie es casi el mismo que el que acabamos de calcular para una superficie infinita.

6.2.6. Otros ejemplos y contraejemplos de aplicabilidad de la ley de Gauss

En general ya hemos visto cuál es el criterio fundamental según el cual podemos aplicar la ley de Gauss: una distribución de carga tan simétrica que podamos elegir una superficie cerrada imaginaria, llamada «superficie gaussiana», **en la que el campo electrostático sea perpendicular a ella y de módulo constante en todos los puntos de la superficie**.

6.2.6.1. Sí son simetrías esféricas

Podemos aplicar la ley de Gauss a una distribución de carga que tenga simetría esférica, como, por ejemplo:

- Una esfera cargada con carga uniforme.
- Una esfera cargada cuya densidad de carga solo dependa de r.
- Una corteza de esfera cargada cuya densidad de carga sea constante o solo dependa de r.

- Una sucesión de cortezas esféricas cuya densidad de carga sea constante o solo dependa de r.

En todos estos casos podemos elegir como superficie gaussiana una esfera.

6.2.6.2. No son simetrías esféricas

No podemos aplicar la ley de Gauss a distribuciones de carga que parecen que tienen simetría esférica pero, en realidad, no la tienen, como, por ejemplo:

- Una esfera cuya carga dependa de las coordenadas angulares.
- Una semiesfera de carga uniforme.
- Un casquete de esfera de carga uniforme o cuya densidad de carga solo dependa del radio.

En estos contraejemplos no es posible encontrar una superficie cerrada en la que el campo sea perpendicular a la misma y de módulo constante en todos los puntos.

6.2.6.3. Sí son simetrías cilíndricas

Podemos aplicar la ley de Gauss a una distribución de carga que tenga simetría cilíndrica, como, por ejemplo:

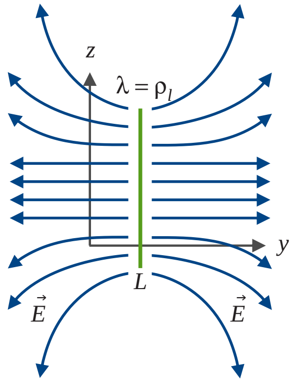
- Una barra cilíndrica de longitud infinita cargada con carga uniforme.
- Una barra cilíndrica de longitud infinita cuya densidad de carga solo dependa de r.
- Una corteza cilíndrica de longitud infinita cuya densidad de carga sea constante o solo dependa de r.
- Una superficie cilíndrica de longitud infinita y de densidad de carga constante.

En todos estos casos podemos elegir como superficie gaussiana un cilindro coaxial con la distribución de carga.

6.2.6.4. No son simetrías cilíndricas

No podemos aplicar la ley de Gauss a distribuciones de carga que parece que tienen cilíndrica esférica pero, en realidad, no la tienen, como, por ejemplo:

- Un hilo cargado de longitud finita *L*. En la figura está dibujado el hilo y una aproximación de las líneas de campo en el plano *yz*. Si nos fijamos bien, es imposible encontrar un cilindro (u otra superficie) que cumpla las necesidades que tiene una superficie gaussiana para resolver el problema:



  La única manera que tenemos de resolver este problema es mediante la integración del campo.

- Una barra cargada de longitud finita.
- Una barra cargada de longitud infinita, pero cuya densidad de carga dependa de la coordenada longitudinal o angular.

7. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Hasta este punto, a lo largo de toda la unidad hemos asumido que las cargas y el campo estaban en el vacío. Aunque dentro de dos unidades analizaremos el comportamiento del campo electrostático en la materia, vamos a detenernos ahora en estudiar el comportamiento del campo en el interior y cerca de un tipo especial de materiales: los conductores.

Aunque ya lo hemos dicho varias veces, lo voy a recordar una vez más aquí: vamos a estudiar el campo en condiciones estáticas, y, por tanto, los conductores los estudiaremos también en condiciones de equilibrio electrostático.

7.1. ¿QUÉ ES UN CONDUCTOR?

> Analizados desde el punto de vista que nos interesa, los **conductores** son un tipo de material que tienen una particularidad: contienen en su interior una gran cantidad de cargas libres.

En general, los conductores son neutros, pero, aun así, disponen de cargas libres en su interior que pueden moverse si, por ejemplo, les aplicamos un campo.

7.1.1. Metales

Un tipo muy común de conductor son los metales. Los metales se forman mediante el enlace metálico que forma una red cristalina y una nube electrónica que se mueve libremente a través de la red. Esta nube de electrones libre, que puede moverse por el metal, es la que vuelve a los metales buenos conductores de la electricidad.

En general, siempre que hablemos de metales nos referimos a conductores y, de hecho, los usaremos casi siempre como ejemplo de conductores.

7.1.2. Otros conductores

Los metales no son los únicos conductores que podemos encontrarnos. Por ejemplo, si disolvemos una sal en agua, liberamos un montón de iones positivos y negativos que pueden moverse a través del líquido. Estos iones convierten el agua en un conductor.

7.2. ¿QUÉ SIGNIFICA EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO?

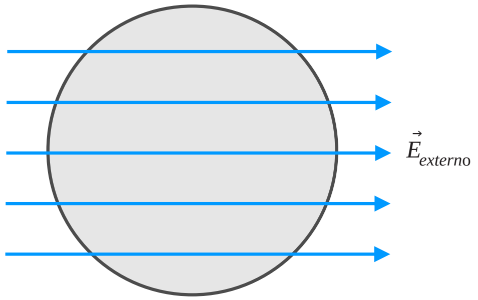
Para poder entender cómo se van a comportar los conductores ante un campo electrostático es fundamental tener claro cuál es el concepto de «equilibrio electrostático».

Decimos que un conductor está o ha llegado a un **equilibrio electrostático** cuando las cargas en su interior están distribuidas de una forma que no varía con el tiempo, es decir, no hay fuerzas netas sobre las cargas y, por tanto, no hay movimiento neto de carga.

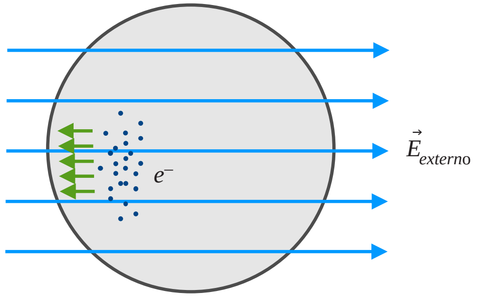
Esta condiciones son especialmente importantes, como vamos a ver.

7.3. CAMPO EN EL INTERIOR DEL METAL

En primer lugar, para hacernos una idea de lo que ocurre en su interior, hagamos el ejercicio mental de meter una esfera metálica en un campo eléctrico, como en la siguiente figura:



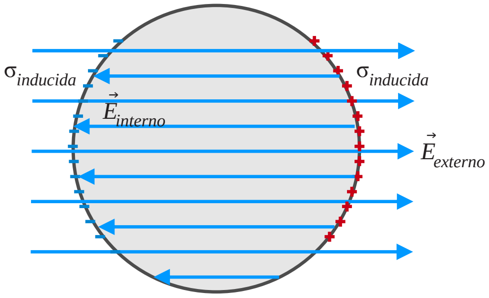
¿Qué es lo que ocurre a continuación? Como en el interior del metal hay muchos electrones libres y los electrones son cargas negativas, estas van a sentir la fuerza que sobre ellas ejerce el campo. Esta fuerza las va a hacer moverse muy rápidamente por el interior del metal y, como son negativas, en la dirección contraria del campo:



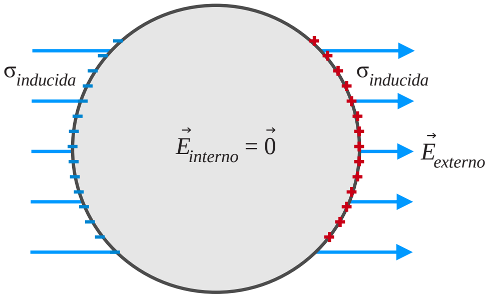
¿Hasta cuándo? Hasta que se alcance un equilibrio. Como dijimos al principio, al final se llega a un equilibro electrostático y, por lo tanto, los electrones dejarán de moverse. Y aquí viene la clave del tema: si los electrones dejan de moverse porque han llegado al equilibrio, es porque el campo dentro del metal se ha anulado. De alguna forma, como veremos, se ha creado un campo interior que se opone totalmente al campo externo. Esto es así porque al llegar al equilibrio no hay movimiento neto de cargas y, por tanto, no hay fuerzas netas sobre ellas y, por ello, el campo total ha de ser nulo.

Con este razonamiento, hemos llegado a la primera conclusión:

> El campo electrostático en el interior de un conductor en equilibrio es 0 o nulo.



¿Cómo ocurre esto? Ocurre porque los electrones que se mueven libremente en el metal se dirigen a una de las superficies, generando un exceso de carga en esa zona. A su vez, en el lado opuesto, aparecen cargas positivas. Estas cargas positivas no son más que los átomos del metal fijos de la red que han perdido sus electrones y, como se han alejado, suponen una carga neta positiva. En la siguiente figura tenemos el resultado final: una esfera de metal bañada por un campo electrostático y que ha llegado al equilibrio. Han aparecido cargas superficiales sobre la esfera que anulan el campo en el interior.



Y, de esta manera, llegamos a la segunda conclusión:

El campo electrostático induce una carga superficial en un metal de tal forma que el campo electrostático interior se hace nulo.

Además, usando el mismo razonamiento, podemos llegar a otra conclusión:

Cualquier carga neta que tenga un metal se irá, en el equilibrio, a su superficie.

Si no se fuera a la superficie, esta carga crearía un campo en su interior que movilizaría las cargas del metal para llegar a la misma conclusión que en el caso anterior: la carga se deposita en la superficie.

Para llegar a la conclusión anterior, además, podemos usar la ley de Gauss en el interior del conductor. Puesto que el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo, cualquier superficie de Gauss que elijamos en el interior del conductor tendrá un flujo total de campo de valor 0; es decir:

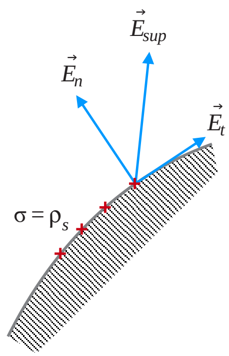
$$\Phi_{superf.\ interior} = \int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0 \rightarrow \frac{q_i}{\epsilon_0} = 0$$

O, lo que es lo mismo, cualquier superficie interior al metal no puede encerrar ninguna carga, con lo que se demuestra que cualquier carga en un metal en equilibrio habrá de estar en la superficie externa del mismo.

7.4. CAMPO EN LA SUPERFICIE DEL METAL

7.4.1. Forma del campo

Fíjate en este detalle de una superficie metálica que he dibujado a la derecha para que podamos estudiar cómo es el campo electrostático en la superficie del metal.



En esta superficie he dibujado, en un punto cualquiera, un campo eléctrico que me he inventado totalmente. Este campo es el $\vec{E}_{sup}$ en el dibujo. Podemos proyectar el campo en dos componentes, una normal o perpendicular a la superficie y otra tangente o paralela a la superficie:

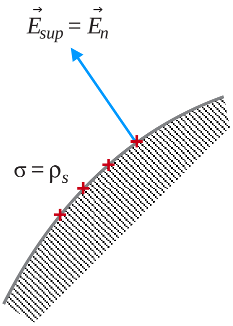
$$\vec{E}_n \quad \text{y} \quad \vec{E}_t$$

Ahora bien, si como venimos diciendo, el metal está en equilibrio electrostático, ¿cuánto ha de valer la componente tangencial del campo? La componente tangencial será 0. Si no lo fuera, ocurriría que el campo tangencial generaría una fuerza sobre los electrones y los movería hasta alcanzar un nuevo equilibrio; es decir, si la componente $\vec{E}_t$ no fuera 0, no estaríamos en equilibrio electrostático.

Y así llegamos a la siguiente conclusión:

> El campo electrostático en la superficie de un conductor en equilibrio solo puede ser perpendicular a la superficie, ya que la componente tangencial de este campo debe ser nula.

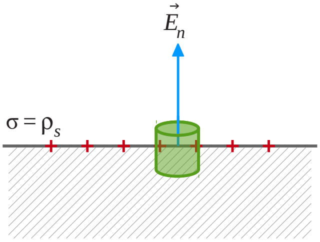
Este es el dibujo corregido:



7.4.2. Valor del campo y de la densidad de carga superficial

Como ya sabemos que el campo en la superficie metálica es perpendicular a la superficie y que en su interior es 0, podemos hacer un pequeño experimento mental y calcular qué relación hay entre el campo y la densidad de carga superficial.

Fíjate en este dibujo: representa la zona de la frontera entre un conductor y el vacío exterior. La línea continua es la superficie de separación entre ambos.



Sobre la superficie del metal tenemos depositada una densidad superficial de carga. En un punto está dibujado el campo electrostático, que sabemos que es perpendicular a la superficie y solo toma valor en la parte externa del metal. En ese mismo punto hay dibujado, visto en una sección transversal, un cilindro de altura *h* y de radio *R* y que tiene su eje paralelo al campo. Sé que he dibujado un conductor que parece plano, pero este mismo experimento se puede realizar para cualquier superficie si tomamos un cilindro lo suficientemente pequeño, hasta hacerlo diferencial, como para que la superficie sea plana en su interior.

Aplicaremos la ley de Gauss al cilindro, y, en primer lugar, veremos cómo es el flujo a través de sus superficies:

- Por la tapa inferior, la que está en el interior del metal, el flujo es 0, ya que el campo es 0.
- Por la superficie lateral, el flujo es 0, ya que el campo, o es 0, en la parte del cilindro dentro del metal, o es paralelo a la superficie, en la parte del cilindro que queda fuera del metal.
- Por la tapa superior, el flujo no es nulo y es perpendicular a la superficie y constante en toda la superficie.

De este modo:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{sup} |\vec{E}|\, ds = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \longrightarrow |\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0\, S_{sup}}$$

La superficie de la tapa superior es:

$$S_{sup} = \pi\, R^2$$

La carga encerrada por el cilindro es justo la carga superficial que hay en un círculo de radio R:

$$Q_{enc} = \rho_s \pi R^2$$

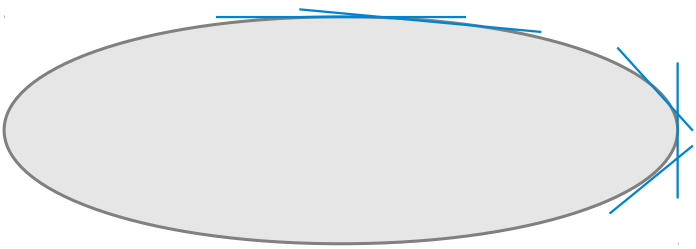
Y, por tanto, el módulo del campo en la superficie del conductor es:

$$|\vec{E}| = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

> Si conocemos la densidad superficial en un punto del conductor, podemos calcular el vector campo eléctrico en ese punto, que será un vector normal a la superficie en el punto, y, de módulo, la densidad de carga partido por la permitividad eléctrica del vacío.
>
> Y podemos aplicarlo al revés: si conocemos el campo eléctrico en un punto de la superficie de un conductor, simplemente, multiplicando el módulo del campo por la permitividad eléctrica del vacío, tendremos el valor de la densidad superficial de carga que hay en ese conductor.

7.4.3. Campo y curvatura del metal

Además, esta conclusión nos permite hacernos una idea de cómo es la densidad de carga en la superficie de un metal. Cuando el radio de curvatura de la superficie se hace muy pequeño, la densidad de carga aumenta en esa zona. Si el radio se agranda, la densidad baja. ¿Por qué? Porque, cuando el radio de curvatura se hace más pequeño, hace falta acumular más carga para poder anular las componentes tangenciales del campo, ya que son menos paralelas entre sí. Aunque no es una demostración, fíjate en el siguiente dibujo:



En él he dibujado las tangentes a la superficie del metal en una zona de radio de curvatura grande (la superior) y en una zona de radio de curvatura pequeña (la derecha). Las tangentes varían mucho más a la izquierda y, por tanto, en esta zona hará falta acumular más carga para poder anular el campo.

Resumen

Después de estudiar los conductores en condiciones de equilibrio electrostático, podemos decir lo siguiente:

- El campo eléctrico en el interior del conductor es 0.
- El campo eléctrico en la superficie del conductor es perpendicular a la superficie.
- Toda la carga neta de un conductor se deposita en sus superficies y es 0 en su interior.
- La densidad de carga superficial es mayor en las zonas del metal que tienen un radio de curvatura menor.
- El campo en la superficie del metal vale:

$$\vec{E}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

8. POSTULADOS FUNDAMENTALES DEL CAMPO ELECTROSTÁTICO

Hasta este punto, a lo largo de la unidad, hemos hablado mucho sobre el campo electrostático, sus propiedades, lo que le pasa cuando aparece un conductor, etc. Una buena forma de cerrar esta unidad es intentar buscar cómo podemos describir de la forma más elemental el campo.

8.1. TEOREMA DE HELMHOLTZ

8.1.1. Enunciado del teorema

El teorema de Helmholtz dice, de una forma poco ortodoxa, lo siguiente:

En una región cerrada del espacio, un campo vectorial queda completamente determinado si conocemos su divergencia y su rotacional y su valor en la frontera.

O dicho de otra manera, y aplicado para todo el espacio:

Un campo vectorial está completamente determinado si conocemos su divergencia, su rotacional y si su valor tiende a 0 en el infinito.

¿Qué significa esto? Significa que, sea cual sea el campo vectorial que estamos estudiando, si conocemos cuál es su rotacional y su divergencia, habremos definido qué forma tiene el campo.

8.1.2. Fuentes escalares y fuentes vectoriales de un campo

Vamos a imaginarnos que estamos trabajando con un campo vectorial $\vec{F}$. Ahora no estamos trabajando con el campo electrostático. Podría ser, pero también podría ser el campo de velocidades del viento en una región de la atmósfera.

Para tener totalmente determinado el campo solo tenemos que conocer:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = f_e \qquad \text{y} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{f}_v$$

Teniendo en cuenta esto, diremos que:

- La divergencia del campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = f_e$$

son las fuentes escalares del campo. Las líneas de campo empiezan en los puntos donde la divergencia vale > 0 y terminan en los puntos donde la divergencia es < 0. En los puntos donde la divergencia se hace 0, las líneas de campo ni empiezan ni terminan.

- El rotacional del campo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{f}_v$$

son las fuentes vectoriales del campo. En los puntos donde el rotacional es no nulo, las líneas de campo giran o se cierran alrededor de este punto.

8.1.3. Clasificación de los campos

Podemos clasificar un campo en función de cómo son su divergencia y su rotacional.

8.1.3.1. Campos solenoidales

Si se cumple que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \ \forall \ P$$

Es decir, si la divergencia es nula en todos los puntos del espacio, entonces diremos que el campo es solenoidal.

En un campo solenoidal, las líneas de campo:

- Se cierran sobre sí mismas.
- O si no se cierran sobre sí mismas, son abiertas, es decir, comienzan y terminan en el infinito.
- El flujo a través de cualquier superficie cerrada siempre vale 0.

8.1.3.2. Campos irrotacionales o conservativos

Si se cumple que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \ \forall \ P$$

Es decir, si el rotacional es nulo en todos los puntos del espacio, entonces diremos que el campo es conservativo.

En un campo conservativo:

- Las líneas de campo nunca se cierran sobre sí mismas.
- La integral de línea a través de cualquier trayectoria cerrada siempre vale 0.

8.1.3.3. Campos mixtos

Cualquier otra combinación es posible: nos podemos encontrar con campos solenoidales y conservativos y nos podemos encontrar campos que no son ni solenoidales ni conservativos.

8.2. EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

Ahora que ya conocemos el teorema de Helmholtz, podemos describir matemáticamente el campo electrostático de la forma más sencilla posible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \qquad \text{y} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

A estas dos ecuaciones se las llama los «postulados fundamentales del campo». A la primera de ellas se la conoce, como ya hemos dicho antes, como la ley de Gauss.

Estas dos expresiones encierran todas las características e implicaciones del campo electrostático, y, haciendo uso de ellas, podríamos resolver cualquier problema en electrostática.

Para describir completamente todos los fenómenos electrostáticos, a estas dos ecuaciones que describen al campo tenemos que unirles:

- La fuerza de Coulomb: $\vec{F}_e = q\,\vec{E}$.
- La ley de conservación de la carga.

Haciendo uso de la clasificación de campos que hemos visto anteriormente, podemos decir que el campo electrostático es un campo conservativo, sus líneas no se cierran sobre sí mismas y no es solenoidal, ya que las líneas de campo empiezan y terminan en las cargas o en el infinito.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

Enunciado 1

Una esfera está cargada según la siguiente distribución de carga:

$$\rho = 3\cos(\theta) - 2r\ [C/m^3]$$

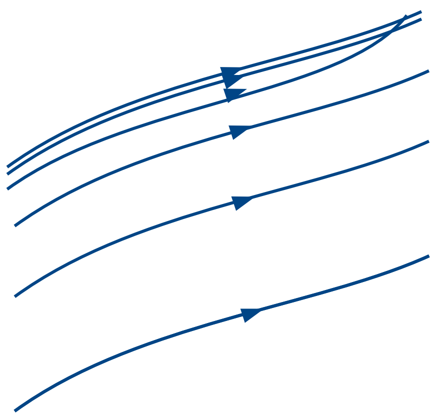
¿Esta distribución de carga permite usar la ley de Gauss para calcular el campo usando una esfera como superficie gaussiana?

Enunciado 2

Un cilindro de 3 *m* de largo y de radio 2 *m* tiene una densidad de carga de 1 uC/m^3. ¿Cuánto vale la carga neta del cilindro?

Enunciado 3

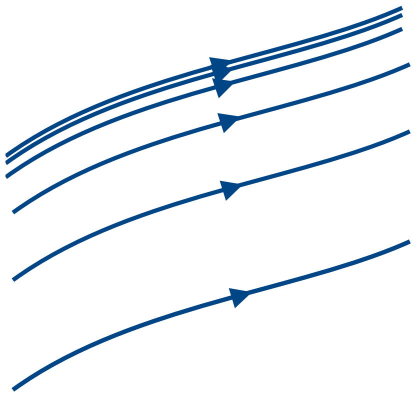
Dada una distribución de carga, hemos resuelto el valor del campo eléctrostático y obtenemos el siguiente conjunto de líneas:



¿Es esta una solución posible? Razónalo.

Enunciado 4

Estas son las líneas de campo electrostático en una región del espacio:



¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas?:

a) El campo es más intenso en la parte inferior que en la superior.
b) El campo solo toma valor no nulo en los puntos por donde pasan las líneas de campo.
c) El campo es tangente a las líneas de campo.
d) El campo toma valor en todos los puntos de la región de campo dibujada.

Enunciado 5

En una región del espacio tenemos una carga neta de 4 C. En un momento determinado, por la superficie que rodea a esa región del espacio comienza a entrar carga a una razón de 1 C/s. ¿Es posible que transcurridos 10 s la carga neta en la región sea de 10 C?

Enunciado 6

¿Por qué las líneas de campo electrostático no se cierran sobre sí mismas?

Enunciado 7

Tenemos un cubo de radio 1 *m* cargado uniformemente con una carga de 2 *C*. Vamos a usar como superficie gaussiana para calcular el campo una superficie cúbica que rodea a la distribución de carga. ¿Tendremos éxito?

Enunciado 8

Una superficie cilíndrica de radio *R* y de longitud infinita tiene una carga superficial de 3 uC/m^2. ¿Qué superficie gaussiana usarías para calcular el campo y cuánto vale este para $r < R$?

Enunciado 9

Una esfera metálica en equilibrio electrostático tiene una carga total de 1 *C* y un radio de 1 *m*. ¿Dónde se acumula la carga y cuánto vale su densidad?

Enunciado 10

El valor del campo medido sobre la superficie de un cilindro metálico en equilibrio es de 3 [*V*/*m*]. ¿Cuánto vale la densidad superficial de carga del cilindro?

Enunciado 11

La siguiente expresión en coordenadas esféricas es un campo electrostático generado por una distribución de carga:

$$\vec{E} = \frac{3}{r^2} - 2r \; [V/m]$$

Calcula la integral de línea a lo largo de una circunferencia paralela al plano *xy* de radio 3 *m* y en la coordenada $z = 7$.

Enunciado 12

Un elipsoide de revolución de semieje menor 3 y semieje mayor 4 centrado en el origen, y cuyo eje mayor coincide con el eje *y*, encierra tres cargas de 2 *C* cada una. Calcula el flujo del vector campo eléctrico generado por estas tres cargas a través del elipsoide.

Solución 1

No. La carga no es simétrica con respecto a rotaciones alrededor de cualquier eje *y*, por lo tanto, no tiene simetría esférica.

Solución 2

$Q_t = \rho\ V = 12\pi \cdot 10^{-6}\ [C]$.

Solución 3

No. Las líneas de campo electrostático no se pueden cortar, ya que el campo solo toma un valor en cada punto del espacio y, allí donde se corten las líneas, el campo tendría que tomar dos valores diferentes, uno tangente a cada línea.

Solución 4

Son ciertas las afirmaciones c) y d).

Solución 5

No. La carga se conserva y, si al comenzar había 4 *C*, pasados 10 *s* añadiendo carga a razón de 1 *C*/*s*, la carga total será de 14 *C*.

Solución 6

Porque el rotacional del campo electrostático es nulo y, por lo tanto, las líneas de campo son siempre abiertas o comienzan y acaban en un punto con carga.

Solución 7

No. El campo en el exterior del cubo no es perpendicular a las caras del cubo y, por tanto, no podemos usar un cubo como superficie gaussiana.

Solución 8

Un cilindro coaxial con la superficie cilíndrica. El campo en el interior vale 0.

Solución 9

Se acumula en la superficie y su densidad es $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{1}{4\pi}\ [C/m^2]$.

Solución 10

$$\sigma = \frac{|\vec{E}|}{\epsilon_0} = \frac{3}{\epsilon_0}\ [C/m^2].$$

Solución 11

0. Cualquier integral de línea cerrada (también llamada circulación) es 0 para un campo electrostático.

Solución 12

$$\Phi_E = \frac{6}{\epsilon_0}\ [V/m].$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básica

Cheng, D. K. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. 2.ª ed. México DF: Alhambra Mexicana, SA, 2014. 492 pp.

Magro Andrade, R.; Abad Toribio, L.; Serrano Pérez, M.; Velasco Fernández; A. I.; Sánchez Sánchez, S. y Tejedor de las Muelas, J. *Fundamentos de electricidad y magnetismo*. Madrid: García Maroto, 2009. 318 pp.

Avanzada

Feynman, R. P.; Leighton, R. B. y Sands, M. *The Feynman lectures on Physics*. Vol. II: *Mainly electromagnetism and matter*. Perseus Distribution. The New Millennium Edition, 2011. 592 pp.