Actividad de Evaluación Continua 1
Matemática Discreta

Alexander Sebasitan Kalis
UDIMA
Dr. Juan José Moreno García

1 de noviembre de 2024

Índice general

Problema 1 2
Problema 2 4
Problema 4 5
Problema 5 7
Problema 6 7
Problema 7 9
Problema 8 9
Problema 9 10
Problema 10 12

Problema 1

En cierta universidad hay 23 alumnos matriculados en un prestigioso y difícil máster de ingeniería aeroespacial que consta de 3 años. De esos alumnos, 14 están matriculados en alguna asignatura del primer curso, 12 en el segundo y 13 en el tercero. Hay 7 que están en primero y tercero y otros 7 en segundo y tercero. Si hay 4 que están en los tres cursos, ¿cuántos están matriculados en primero y segundo?

Solución

Sea A el conjunto de estudiantes matriculados en el primer curso, B en el segundo curso, y C en el tercer curso. Sabemos que:

- $|A \cup B \cup C| = 23$ (el total de estudiantes matriculados en al menos un curso).
- $|A| = 14$, $|B| = 12$, y $|C| = 13$ (el número de estudiantes en cada curso).
- $|A \cap C| = 7$, $|B \cap C| = 7$, y $|A \cap B \cap C| = 4$ (las intersecciones conocidas entre los conjuntos).

Nos piden encontrar $|A \cap B|$, es decir, el número de estudiantes matriculados en los cursos primero y segundo.

Utilizaremos el principio de inclusión-exclusión para resolver el problema:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$23 = 14 + 12 + 13 - |A \cap B| - 7 - 7 + 4$$

Simplificamos la ecuación:

$$23 = 42 - |A \cap B| - 10$$

$$23 = 32 - |A \cap B|$$

Resolviendo para $|A \cap B|$:

$$|A \cap B| = 32 - 23$$

$$|A \cap B| = 9$$

Problema 2

Considérese la relación de orden parcial definida en el conjunto D de los divisores positivos de 72, mediante la relación $a \leq b \Leftrightarrow a$ divide a b.

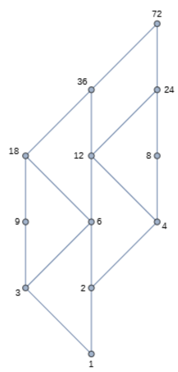
a) Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \leq)$.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

La relación de orden parcial está dada por la divisibilidad, es decir, para $a, b \in D$, definimos $a \leq b$ si y solo si a divide a b (denotado $a \mid b$).

Colocamos los divisores en niveles según su posición en la cadena de divisibilidad: - Nivel 1: 1
- Nivel 2: $2, 3$
- Nivel 3: $4, 6, 9$
- Nivel 4: $8, 12, 18$
- Nivel 5: $24, 36$
- Nivel 6: 72

El resultado es el siguiente diagrama de Hasse:



b) Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \leq)$.

- El **elemento mínimo** es 1, ya que 1 divide a todos los demás elementos de D.
- El **elemento máximo** es 72, ya que es divisible por todos los elementos de D.
- Los **elementos minimales** en este caso son solo el 1, ya que es el único que no tiene divisores en D aparte de sí mismo.
- Los **elementos maximales** son 72, por ser el único elemento que no divide a ningún otro en D aparte de sí mismo.

c) Proporcionar las cotas inferiores del conjunto $B = \{4, 12, 36\}$. ¿Existe el ínfimo? Si existe, ¿cuál es?

- Las cotas inferiores de B son todos los divisores comunes de 4, 12 y 36, es decir, $\{1, 2, 4\}$.
- El **ínfimo** es 4, ya que es el mayor divisor común de todos los elementos en B.

d) Proporcionar las cotas superiores del conjunto $C = \{6, 9, 12\}$. ¿Existe el supremo? Si existe, ¿cuál es?

- Las cotas superiores de C son todos los múltiplos comunes de 6, 9 y 12 en D, es decir, $\{18, 36, 72\}$.
- El **supremo** es 36, ya que es el menor múltiplo común en D de los elementos de C.

e) Proporcionar las cotas superiores del conjunto $E = \{3, 6, 12\}$. ¿Existe el supremo? Si existe, ¿cuál es?

- Las cotas superiores de E son todos los múltiplos comunes de 3, 6 y 12 en D, es decir, $\{12, 18, 24, 36, 72\}$.
- El **supremo** es 12, ya que es el menor múltiplo común en D de los elementos de E.

Problema 3

En un máster de Ingeniería Óptica hay varias asignaturas que dependen una de otras. En concreto se trata de Álgebra (A), Cálculo (C), Matemática

Discreta (D), Física General (F), Electricidad y Magnetismo (E), Ecuaciones Diferenciales (ED), Programación (P), Química (Q), Óptica (O), Materiales (M) y Modelado (MO). Así que el conjunto de todas las asignaturas será

$$Z = \{A, C, D, O, F, ED, Q, E, M, P, MO\}.$$

Unas asignatura dependen de otras del siguiente modo: Cálculo depende de Álgebra, Discreta depende de Álgebra, Ecuaciones Diferenciales depende de Cálculo y Álgebra, Física General depende de Cálculo y Álgebra, Química depende de Física General y Álgebra, Materiales depende de Física, Química y Electricidad y Magnetismo, esta última depende de Ecuaciones Diferenciales, Cálculo y Física, Modelado depende de Ecuaciones Diferenciales, Programación y Electricidad y Magnetismo, Óptica depende de Electricidad y Magnetismo, Materiales, Física, Modelado y Programación, pues hay que hacer una trabajo de programación en Óptica. Además, la programación depende de Matemática Discreta.

Tareas a realizar:

- Obtener el diagrama de Hasse de dependencia de todas las asignaturas sin que se crucen las líneas.
- Un estudiante que trabaja y no tiene mucho tiempo para estudiar decide hacer este máster, pero lo va a cursar secuencialmente. Obtener un orden total compatible con el orden parcial de dependencia entre asignaturas que le permita cursar todo el máster poco a poco sin conflictos.

Nota: cualquier aproximación a la solución por la fuerza bruta no recibirá puntuación.

Problema 4

Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sobre este conjunto se define la relación:

$$R = \{(3, 3), (4, 0), (0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (4, 4)\}$$

Representa gráficamente la relación. ¿Es una relación de equivalencia? Si es así, proporciona el conjunto cociente.

Queremos determinar si esta relación es de equivalencia y, de ser así, proporcionar el conjunto cociente.

- **Reflexividad:** Para que una relación sea reflexiva, todos los elementos de A deben estar relacionados consigo mismos, es decir, debe existir $(a, a) \in R$ para cada $a \in A$.

  En R encontramos los pares $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$, lo cual significa que cada elemento de A está relacionado consigo mismo. Por lo tanto, R es **reflexiva**.

- **Simetría:** Para que una relación sea simétrica, si $(a, b) \in R$, entonces también $(b, a) \in R$.

  En R vemos que $(4, 0) \in R$ y su par simétrico $(0, 4) \in R$. También, $(1, 3) \in R$ y su par simétrico $(3, 1) \in R$. No existen otros pares que necesiten simetría. Por lo tanto, R es **simétrica**.

- **Transitividad:** Para que una relación sea transitiva, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces también $(a, c) \in R$.

  En R, no encontramos ninguna cadena de pares que requiera la propiedad de transitividad para elementos distintos, ya que los pares que tenemos no forman cadenas de tres elementos distintos. Así, R es **transitiva**.

Dado que R es reflexiva, simétrica y transitiva, concluimos que R es una **relación de equivalencia**.

Conjunto cociente: Para obtener el conjunto cociente, agrupamos los elementos de A en clases de equivalencia según R:

$$[0] = \{0, 4\}, \quad [1] = \{1, 3\}, \quad [2] = \{2\}$$

Entonces, el conjunto cociente es:

$$A/R = \{\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}\}$$

Problema 5

a) Hay 350 diputados en el congreso de los diputados de cierto país. De ellos 25 tienen un supuesto título de doctorado. Si desconocemos quiénes son y vamos preguntando al azar uno a uno, ¿a cuántos como mínimo tendremos que proponer para formar parte de una comisión de 5 doctores para asegurarnos de que la podemos formar?

   Para asegurar que tenemos al menos 5 doctores en el grupo, debemos considerar el peor de los casos, en el que seleccionamos primero a los

325 diputados que no son doctores. Después de estos 325, cualquier selección adicional deberá ser necesariamente un doctor. Por lo tanto, necesitamos:

$$325 + 5 = 330$$

Así que debemos seleccionar al menos **330 diputados** para garantizar que haya al menos 5 doctores.

b) En otro congreso, los diputados están obligados a formar parte de alguna comisión de las 32 existentes. ¿Cuántos diputados tiene que haber en ese congreso para garantizar que al menos haya 12 en una misma comisión?

   Utilizamos el principio de las cajas. Si queremos que al menos una comisión tenga 12 diputados, debemos distribuir a los diputados de forma que ninguna comisión exceda los 11 diputados antes de añadir el siguiente. Entonces, para 32 comisiones, con un máximo de 11 en cada una, podemos tener como máximo:

$$32 \times 11 = 352$$

   Si añadimos un diputado más, es decir, con **353 diputados**, al menos una comisión deberá tener 12 diputados.

   Por lo tanto, necesitamos **353 diputados** para asegurar que al menos una comisión tenga 12 miembros.

Problema 6

En unas oposiciones a profesores de Matemáticas, los 4200 candidatos tienen que prepararse 20 temas de un determinado temario. Por sorteo se les asigna tres de esos temas a exponer al tribunal sin importar el orden. ¿Al menos a cuántos opositores les ha tocado la misma combinación de temas?

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

Por lo tanto, hay 1140 combinaciones posibles de temas.

Dado que hay 4200 candidatos y solo 1140 combinaciones posibles, podemos usar el principio del *pigeonhole* para determinar cuántos opositores, como mínimo, compartirán la misma combinación de temas. Si dividimos el total de candidatos entre las combinaciones posibles:

$$\frac{4200}{1140} \approx 3{,}68$$

Redondeando hacia arriba, concluimos que al menos **4 opositores** tienen la misma combinación de temas asignada.

Problema 7

Resolver los siguientes problemas de combinatoria:

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra 'centrifugadlos'?

   Para la palabra *centrifugadlos*, que tiene 14 letras (todas distintas), el número total de formas de ordenar las letras es:

   $$14! = 87178291200$$

2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra 'anticonstitucionalmente'?

   Para la palabra *anticonstitucionalmente*, que tiene 21 letras, con algunas letras repetidas, contamos las repeticiones y aplicamos el factorial para calcular el número de permutaciones:

   La palabra contiene: 'a' 2 veces 'c' 2 veces 'i' 2 veces 'n' 3 veces 't' 4 veces

   Por lo tanto, el número total de formas de ordenar las letras es:

   $$\frac{21!}{2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 4!} = 1139164387352000$$

3. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra 'soldadlos' de modo que siempre empiece y termine por 'S'?

   Soldadlos, que tiene 9 letras y empieza y termina en 'S', fijamos esas posiciones y permutamos las 7 letras restantes (o-l-d-a-d-l-o):

La palabra contiene: - 'l': 2 veces - 'd': 2 veces

Entonces, el número de formas de ordenar las letras es:

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

4. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra palíndroma 'reconocer' de modo que siempre se obtengan palabras palíndromas?

   la palabra palíndroma *reconocer*, que tiene 9 letras y debe formar una palabra palíndroma, solo necesitamos permutar la mitad de las letras (los primeros 5 caracteres determinan los últimos 4). Los caracteres únicos son 'r', 'e', 'c', 'o', y 'n', con la siguiente disposición simétrica:

   Hay una única disposición que forma un palíndromo: *reconocer*. Por lo tanto, hay **1 manera** de ordenar las letras para que siempre sea un palíndromo.

5. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra palíndroma 'reconocer' de modo que las letras iguales vayan siempre juntas?

   Si deseamos que las letras iguales vayan siempre juntas, podemos agrupar las letras iguales y tratarlas como bloques. Los bloques serían: {rr, ee, c, o, n}.

   Entonces, el número de formas de ordenar estos bloques es:

   $$5! = 120$$

Problema 8

Un jefe mañoso de una ciudad imaginaria envía a un "fontanero"de confianza para repartir 6 sobres con la misma cantidad de dinero entre 8 personas. Puede dar más de un sobre a la misma persona. ¿De cuántas maneras posibles podrá hacer tal trabajo? Si el repartidor se queda con algún sobre (o incluso todos), ¿de cuántas maneras lo podrá hacer entonces?

Para este problema, tenemos 6 sobres y 8 personas. El objetivo es repartir los sobres entre las personas, permitiendo que una persona pueda recibir más de un sobre, lo cual es un problema de combinaciones con repetición.

1. **Sin que el repartidor se quede con ningún sobre:**

   El problema se reduce a contar las formas de repartir 6 sobres entre 8 personas, permitiendo repeticiones. Usamos el concepto de combinaciones con repetición, que se calcula como:

   $$\binom{n+r-1}{r} = \binom{8+6-1}{6} = \binom{13}{6}$$

   Calculamos este valor:

   $$\binom{13}{6} = 1716$$

   Por lo tanto, hay **1716 maneras** de repartir los 6 sobres entre las 8 personas sin que el repartidor se quede con ninguno.

2. **Si el repartidor puede quedarse con alguno (o incluso todos) de los sobres:**

   En este caso, el número de personas efectivas a repartir aumenta a 9 (8 personas más el repartidor). Usamos nuevamente combinaciones con repetición para repartir los 6 sobres entre 9 personas:

   $$\binom{9+6-1}{6} = \binom{14}{6}$$

   Calculamos este valor:

   $$\binom{14}{6} = 3003$$

   Así que hay **3003 maneras** de repartir los sobres cuando el repartidor puede quedarse con algunos.

Problema 9

Resolver la siguiente ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2} - 8a_{n+1} = 9a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 4$$

Primero, encontramos la solución general de la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica es:

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$x_1 = 9 \quad \text{y} \quad x_2 = -1$$

Dado que tenemos dos raíces distintas, la solución general de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = C_1 \cdot 9^n + C_2 \cdot (-1)^n$$

Usamos las condiciones iniciales para determinar C_1 y C_2.
Para $a_0 = 1$:

$$a_0 = C_1 \cdot 9^0 + C_2 \cdot (-1)^0 = C_1 + C_2 = 1$$

Para $a_1 = 4$:

$$a_1 = C_1 \cdot 9^1 + C_2 \cdot (-1)^1 = 9C_1 - C_2 = 4$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 9C_1 - C_2 = 4 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones para eliminar C_2:

$$10C_1 = 5 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo $C_1 = \frac{1}{2}$ en la primera ecuación:

$$\frac{1}{2} + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 9^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$$

Problema 10

Resolver la siguiente ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} - 10a_n = 10 \cdot 3^n; \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 7$$

Primero, resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} - 10a_n = 0$$

La ecuación característica es:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos las raíces:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$x_1 = 5 \quad \text{y} \quad x_2 = -2$$

Dado que tenemos dos raíces distintas, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$a_n^{(h)} = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot (-2)^n$$

A continuación, encontramos una solución particular para la ecuación no homogénea. Dado que el término no homogéneo es $10 \cdot 3^n$, proponemos una solución particular de la forma:

$$a_n^{(p)} = A \cdot 3^n$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$A \cdot 3^{n+2} - 3A \cdot 3^{n+1} - 10A \cdot 3^n = 10 \cdot 3^n$$

Dividimos ambos lados por 3^n:

$$9A - 9A - 10A = 10$$

Lo que resulta en:

$$-10A = 10 \Rightarrow A = -1$$

Entonces, la solución particular es:

$$a_n^{(p)} = -3^n$$

La solución general de la ecuación de recurrencia es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$a_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot (-2)^n - 3^n$$

Usamos las condiciones iniciales para determinar C_1 y C_2.

Para $a_0 = 1$:

$$a_0 = C_1 \cdot 5^0 + C_2 \cdot (-2)^0 - 3^0 = C_1 + C_2 - 1 = 1$$

Para $a_1 = 7$:

$$a_1 = C_1 \cdot 5^1 + C_2 \cdot (-2)^1 - 3^1 = 5C_1 - 2C_2 - 3 = 7$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 5C_1 - 2C_2 = 10 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema:

1. De la primera ecuación, $C_2 = 2 - C_1$. 2. Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$5C_1 - 2(2 - C_1) = 10$$

$$5C_1 - 4 + 2C_1 = 10$$

$$7C_1 = 14 \Rightarrow C_1 = 2$$

3. Sustituyendo $C_1 = 2$ en la primera ecuación:

$$C_2 = 2 - 2 = 0$$

Por lo tanto, los valores de C_1 y C_2 son $C_1 = 2$ y $C_2 = 0$.

La solución final es:

$$a_n = 2 \cdot 5^n - 3^n$$