

UNIDAD  
DIDÁCTICA

# 10

## SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

### OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Introducción
2. Preámbulo de álgebra
  - 2.1. Autovalores y autovectores
  - 2.2. Diagonalización
3. Sistemas de ecuaciones de primer orden
  - 3.1. Resolución de sistemas mediante variación de constantes
  - 3.2. Resolución de sistemas mediante Laplace
4. Sistemas de ecuaciones autónomas
  - 4.1. Mapas de fases
  - 4.2. Clasificación de puntos críticos
  - 4.3. Sistemas no lineales
  - 4.4. Metodología
  - 4.5. Ecuaciones autónomas de segundo orden
  - 4.6. Ecuaciones y sistemas exactos

### CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

### ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS



## OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Saber distinguir los sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Conocer los métodos convencionales de resolución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.
- Uso de la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Uso de métodos aproximados para dibujar las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales homogéneos.
- Aplicación de métodos aproximados a problemas realistas.

## 1. INTRODUCCIÓN

Si nos quedáramos solo en ecuaciones diferenciales de cualquier orden, nos perderíamos los sistemas de ecuaciones. Puede que algunos sistemas tengan solo una variable, pero, en general, si nuestro sistema es un poco complejo, habrá más de una, pues, por ejemplo, las corrientes que circulen por cada circuito de una malla serán distintas o los ecosistemas tendrán más de una especie, especies que compiten entre sí o se comen entre sí.

Pero para tratar estos sistemas necesitamos unos pequeños conocimientos de álgebra que vamos a ver a continuación. Pueden servir de repaso para aquellos que ya lo sepan o de introducción para aquellos que no lo hayan visto todavía. En ambos casos, se asume que el lector conoce el concepto de matriz, cómo operar con matrices y también cómo calcular trazas y determinantes.

Luego empezaremos con sistemas lineales de coeficientes constantes que resolveremos por dos métodos distintos, el tradicional, que es una extensión de lo ya visto, y por transformada de Laplace, que también es una extensión trivial de lo visto con anterioridad.

Más tarde pasaremos a dibujar soluciones aproximadas de sistemas de ecuaciones que sean autónomos, sean estos lineales o no.

## 2. PREÁMBULO DE ÁLGEBRA

Es importante repasar ciertos conceptos y herramientas antes de seguir adelante; en concreto, la diagonalización de matrices. Como nos vamos a circunscribir al caso  $2 \times 2$ , los cálculos son muy sencillos, casi triviales, y los vamos a dejar prácticamente tabulados. Aunque conceptualmente la diagonalización se puede extender a cualquier tamaño de matriz, algunas de las expresiones que vamos a ver serán válidas solo para este caso sencillo.

Este concepto de diagonalización nos será útil para resolver sistemas. Si tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, se puede demostrar que su solución se puede poner como una expresión en la que aparecen exponenciales de matrices. La diagonalización nos permite precisamente calcular la exponencial de una matriz.

## 2.1. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Este epígrafe es un texto de repaso sobre autovectores y autovalores. Nos será también útil para dibujar mapas de fases de sistemas autónomos y es de donde partimos para realizar la diagonalización de una matriz.

Si consideramos una matriz  $A$ , que en estas notas será una matriz  $2 \times 2$ , pero que se puede extender a cualquier tamaño y un escalar  $\lambda$ . Por definición, un autovalor de  $A$  si el vector  $\mathbf{v}$  no es nulo en  $\mathbb{R}^n$  será tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Esta definición se puede reescribir si tenemos en cuenta la matriz unitaria  $I$  de la forma siguiente:

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

Esta expresión se cumplirá para ciertos vectores  $\mathbf{v}$  a los que llamaremos autovectores.

Para poder averiguar los autovalores solo tenemos que hallar las raíces del polinomio característico definido por

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Para el caso  $2 \times 2$  en el que la matriz  $A$  la simbolizamos por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

el polinomio característico vendrá dado por la expresión:

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

Será un polinomio de segundo orden en  $\lambda$  que, una vez más, puede tener dos raíces reales y distintas, una raíz real doble y dos raíces complejas conjugadas.

Una manera alternativa y elegante de definir el polinomio característico, pero solo para matrices  $2 \times 2$ , es la siguiente:

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda - \det(A) = 0$$

En donde  $\text{tr}(A)$  es la traza de  $A$ , es decir, la suma  $(a + d)$  de los elementos de la diagonal.

Los autovectores asociados a cada autovector se obtendrán de la resolución del sistema homogéneo

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = 0$$

asociado a cada uno de esos autovalores. Si tenemos dos autovalores distintos (reales o complejos), tendremos dos autovectores y la matriz será diagonalizable (veremos más adelante qué significa esto).

Si solo hay un autovalor doble, entonces, o bien hay dos autovectores asociados linealmente independientes, por lo que  $A$  ya tiene forma diagonal, o bien solo hay uno y en ese caso habría que usar la forma canónica de Jordan que se escapa a los objetivos de estas notas.

Aunque el concepto de autovector parezca muy exótico, tiene aplicaciones tecnológicas en el mundo actual. Así, por ejemplo, se emplea en el corazón del motor de búsqueda de Google.

### EJEMPLO 1

Calcular los autovalores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

### **Solución**

Según la definición, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \cdot 4 = 0$$

.../...

.../...

O lo que es lo mismo:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

Así que los autovalores son 5 y -1.

Si quisiéramos calcular los autovectores de  $A$ , podemos aplicar la definición vista anteriormente a este caso:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como los autovalores son 5 y -1, tendremos los sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 - 5 & 2 \\ 4 & 3 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 2 \\ 4 & 3 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, tendremos estos dos sistemas:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como son sistemas homogéneos, necesariamente una fila debe ser proporcional a otra. Si no sale así, es que hay errores en las operaciones. Operaciones elementales por filas nos llevan a partir del primer caso a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nunca hay una solución directa precisamente por ser las filas proporcionales, sino que tendremos que poner siempre una variable en función de la otra. Así, si en este caso tomamos  $x_2 = \alpha$ , entonces podemos obtener el autovector asociado a  $\lambda = 5$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)\alpha \\ 1\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.../...

.../...

como nos vale ese autovector o cualquier múltiplo de él, podemos tomar uno más bonito:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A partir del segundo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y si tomamos  $x_2 = \alpha$ , podemos expresar su solución como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 2.2. DIAGONALIZACIÓN

Quizás lo que es aún más interesante es que si formamos la matriz

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$AP = PD \quad \Rightarrow \quad A = PDP^{-1},$$

siendo  $P$  la matriz cuya primera columna empezando por la izquierda es el autovector de  $\lambda_1$  y su segunda columna, el autovector de  $\lambda_2$ . Naturalmente la inversa será la habitual:

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

La diagonalización no siempre es posible, pero cuando es así nos permite hacer operaciones fabulosas, como calcular la exponencial de una matriz:

$$e^A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} P^{-1}$$

## EJEMPLO 2

Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

### Solución

Ya tenemos casi todo calculado con anterioridad, por lo que es inmediato hallar  $D$  y  $P$ :

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solo nos falta la inversa de  $P$ :

$$P^{-1} = \frac{1}{1+2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Así que

$$A = PDP^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Si nos pidieran la exponencial de  $A$ , esta sería la siguiente:

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$



### 3. SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

No necesariamente nuestro problema tendrá solo una variable y una variación en el tiempo de la misma; puede ocurrir que haya más de una variable. Puede ser, por ejemplo, un caso en el que haya poblaciones de mosquitos y murciélagos o más especies que estarán interrelacionadas y evolucionarán conjuntamente en el tiempo. De este modo podemos reservar las variable dependientes  $x(t)$ ,  $y(t)$  o  $z(t)$  para ese tipo de sistemas y usar la variable independiente  $t$ . Si el número de variables dependientes es muy alto, entonces se puede usar un conjunto de variables con subíndices:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . El número de variable y, por tanto, de ecuaciones puede ser arbitrario. De nuevo nos vamos a encontrar con que podemos concebir sistemas lineales y no lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden.

En estas notas solo nos centraremos en el caso lineal, que para dos variables será de la forma:

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}$$

Naturalmente los coeficientes  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $d(t)$  no necesariamente tienen que ser funciones de  $t$ , pudiendo ser constantes, caso que es más fácil de solucionar.

Para poder resolver estos sistemas podemos usar, por ejemplo, el método de la variación de las constantes o por transformada de Laplace.

Si los coeficientes son constantes, y cambiando a una notación que nos permita expandir a cualquier número de variables, tenemos para el sistema de dos variables algo así:

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 + f(t) \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 + g(t) \end{cases}$$

que podemos reescribir de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

y que simbólicamente es  $x' = Ax + f(t)$  con la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ .

La notación que estamos empleando viene a decir que las mayúsculas simbolizan matrices y las minúsculas en negrita, vectores columna.

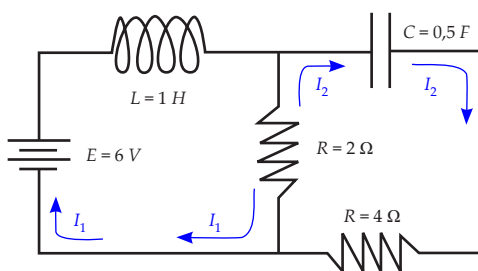
Otro aspecto que debemos considerar es que una ecuación diferencial de segundo orden puede expresarse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden si introducimos una nueva variable que sea la derivada de la original. Esto lo podremos hacer siempre que sea posible despejar las variables de manera adecuada, sea la ecuación lineal o no, pero será trivial para el primer caso. De este modo, si tenemos la ecuación lineal de segundo orden  $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$ , podemos usar la variable  $x = y'$  y sustituirla en la ecuación  $x' + a(t)x + b(t)y = f(t)$  y reordenando un poco tendremos nuestro sistema:

$$\begin{cases} x' = -a(t)x - b(t)y + f(t) \\ y' = x \end{cases}$$

Naturalmente, el sistema puede tener un número arbitrario de variables y ecuaciones, no ser lineal o ser lineal pero no homogéneo, dependiendo de la ecuación original. No siempre podremos expresar una ecuación de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de manera adecuada, pero si es lineal, siempre podremos.

### EJEMPLO 3

Plantear un sistema de ecuaciones diferenciales que describa la siguiente malla de dos circuitos



### Solución

Si aplicamos la ley de Kirchhoff a cada circuito de esa red, obtenemos para el de la izquierda o circuito 1 (un circuito RL) lo siguiente:

$$1I_1' + 2(I_1 - I_2) = 6$$

.../...

.../...

En donde  $I_1$  e  $I_2$  son las corrientes que circulan por el circuito de la izquierda y derecha respectivamente (o circuito 1 y 2), para las que mantenemos una notación en mayúsculas. Además,  $2(I_1 - I_2)$  es la caída de voltaje a lo largo de la resistencia porque las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  circulan en sentidos opuestos.

De manera similar, para el circuito de la derecha, que es un circuito RC, tenemos:

$$4I_2 + 2(I_2 - I_1) + \frac{1}{0,5} \int I_2 dt = 0$$

O lo que es lo mismo, si diferenciamos la expresión anterior  $4I_2' + 2I_2' - 2I_1' + 2I_2 = 0$  y si tenemos en cuenta que  $I_1' = -4I_1 + 4I_2 + 6$  según lo obtenido sobre el circuito 1, nos queda:

$$I_2' - \frac{4}{6} I_1' + \frac{2}{6} I_2' + \frac{12}{6} = 0 \quad \rightarrow \quad I_2' = \frac{2}{3} I_1' - \frac{1}{3} I_2' - 2$$

Así que el sistema solicitado será

$$\begin{cases} I_1' = -4I_1 + 4I_2 + 6 \\ I_2' = \frac{2}{3} I_1' - \frac{1}{3} I_2' - 2 \end{cases}$$

que es un sistema lineal no homogéneo de coeficientes constantes.

### 3.1. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE VARIACIÓN DE CONSTANTES

Podemos aprovecharnos de la posibilidad de expresar la exponencial de una matriz gracias a la diagonalización que vimos:

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$$

y usar esto en la fórmula de variación de constantes para el valor inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{x} = P e^{D(t-t_0)} P^{-1} \mathbf{x}_0 + P \int_{t_0}^t e^{D(t-t_0)} P^{-1} \mathbf{f}(s) ds$$

Pero quizás la mejor manera de ver cómo funciona es usando un ejemplo como este sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y + e^t \end{cases}$$

con la condición inicial  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ , es decir:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

es

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

que tiene como raíces  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Así que

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es un caso muy parecido al que ya hemos visto. Calculemos sus autovectores:

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el primer caso en el que  $\lambda_1 = 5$  tenemos:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para el segundo caso en el que  $\lambda_2 = 1$  tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{4} P e^{D(t)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} P \int_0^t e^{D(t)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^s \end{pmatrix} ds = \\ &= \frac{1}{4} P e^{D(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} P \int_0^t e^{D(t)} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

Ahora introducimos la exponencial de  $D(t)$ :

$$\mathbf{x} = \frac{1}{4} P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} P \int_0^t \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds$$

Y ahora  $P$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t e^{5t-4s} ds \\ -\int_0^t e^t ds \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Integrando y operando un poco:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{5t} - e^t \\ 3e^{5t} + e^t \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} (e^{5t} - e^t) \\ -te^t \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5e^{5t} - 5e^5 - 4te^t \\ 15e^{5t} + e^t + 4te^{et} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si estamos en el caso de dos ecuaciones con dos variables, la solución de la homogénea es muy simple y se puede demostrar que es:

$$\mathbf{x}_h = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

en la que  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son los autovectores.

Se puede además demostrar que una solución particular es

$$\mathbf{x}_p = W(t) \int W^{-1}(t) f(t) dt,$$

en donde el wronskiano es, en este caso,

$$W(t) = P e^{D(t)}$$

Para el ejemplo anterior

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^t \\ 3e^{5t} & -e^t \end{pmatrix} \rightarrow W^{-1}(t) = \frac{1}{-e^{6t} - 3e^{6t}} \begin{pmatrix} -e^t - e^t & e^{5t} \\ -3e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-5t} & e^{-5t} \\ 3e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

y la solución particular será:

$$\mathbf{x}_p = W(t) \int W^{-1}(t) f(t) dt = \frac{1}{6} W(t) \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -4t \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -e^t - 4te^t \\ -3e^t + 4te^t \end{pmatrix}$$

Naturalmente la solución total será la suma siguiente:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} t e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### EJEMPLO 4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'_1 = -4x_1 + 4x_2 + 12 \\ x'_2 = -1,6x_1 + 1,2x_2 + 4,8 \end{cases}$$

con la condición inicial (esta forma de expresar un vector como su transpuesto es más compacta a la hora de escribir, así que podrá ser empleada a partir de ahora):

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [0, 0]^T$$

#### **Solución**

La matriz  $A$ , en este caso, es

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1,6 & 1,2 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico es

$$\lambda^2 + 2,8\lambda + 1,6 = 0$$

Como siempre que estemos en un polinomio de grado 2 podemos resolver la ecuación de segundo grado correspondiente para calcular las raíces, que en este caso son:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -0,8$$

Los correspondientes autovectores serán:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

.../...

.../...

La solución general de la homogénea es, por tanto, la siguiente:

$$\mathbf{x}_h = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix} e^{-0,8t}$$

Para encontrar una solución particular de la no homogénea podríamos usar el método que acabamos de ver o, como en este caso las «funciones» que modifican la homogénea son constantes, podemos ensayar un vector con constantes. Es decir, un vector del tipo

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

que nos dé

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = c_1 v_1 e^{-2t} + c_2 v_2 e^{-0,8t} + \mathbf{a},$$

tal y como hicimos en las ecuaciones simples si seguimos la misma filosofía. Esto lo podemos conseguir resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -4a_1 + 4a_2 + 12 = 0 \\ -1,6a_1 + 1,2a_2 + 4,8 = 0 \end{cases}$$

que nos da como solución:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix} e^{-0,8t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos falta por averiguar las constantes. Si ahora tenemos en cuenta la condición inicial, nos queda el sistema de ecuaciones ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 0,8c_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

.../...



.../...

que tiene por soluciones  $c_1 = -4$  y  $c_2 = 5$ , así que

$$x = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix} e^{-0,8t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o explícitamente:

$$x_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0,8t} + 3$$

$$x_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0,8t}$$

### 3.2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE LAPLACE

La transformada de Laplace nos permite atacar sistemas de ecuaciones de una manera más o menos trivial. La única diferencia será ahora que el sistema algebraico a resolver es un sistema de ecuaciones. La dificultad, como siempre, estará en el último paso, cuando tengamos que usar la antitransformada.

La potencia de las transformadas de Laplace nos permite resolver incluso sistemas de tres o más ecuaciones, como el siguiente:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$$

con las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = -3$$

En el primer paso, aplicamos la transformada sobre el sistema diferencial para obtener el correspondiente sistema algebraico de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} sX - 1 = 2X + Y + Z \\ sY - 2 = X + 2Y + Z \\ sZ + 3 = X + Y + 2Z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-s)X + Y + Z = -1 \\ X + (2-s)Y + Z = -2 \\ X + Y + (2-s)Z = 3 \end{cases}$$

Si resolvemos este sistema algebraico, obtenemos que

$$X = \frac{1}{s-a}, \quad Y = \frac{s}{s-1} \quad y \quad Z = \frac{-3}{s-1},$$

de las cuales podemos obtener la solución usando la antitransformada:

$$x = e^t, \quad y = 2e^t, \quad z = -3e^t$$

Naturalmente, en este caso los números están ajustados para que se simplifiquen las expresiones y para que en la obtención de las soluciones no sea ni siquiera necesario descomponer en fracciones simples. Con coeficientes y condiciones iniciales al azar la situación sería muy distinta.

Para rizar más el rizo podemos plantear sistemas de ecuaciones en los que aparezcan funciones especiales, como en este caso:

$$\begin{cases} x' = -x + e^{-1}\delta(t-1) \\ y' = x - y \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{matrix}$$

Aplicamos la transformada sobre nuestro sistema diferencial para obtener el sistema algebraico:

$$\begin{cases} sX = -X + e^{-1}e^{-s} \\ sY - 1 = X - Y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (s+1)X = e^{-1}e^{-s} \\ -X + (s+1)Y = 1 \end{cases}$$

Sistema muy fácil de solucionar, pues el valor de  $X$  sale directamente:

$$X = \frac{e^{-1}e^{-s}}{s+1}$$

y este valor se puede sustituir en la segunda ecuación para así obtener  $Y$ :

$$Y = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-1}e^{-s}}{(s+1)^2}$$

Queda la parte más complicada, que es la de la antitransformada. Para la  $x$  tendremos que

$$x = u_1(t)e^{-t},$$

pues

$$L[x] = L[u_1(t)e^{-t}] = U_1(s+1) = \frac{1}{s+1} e^{-(s+1)} = \frac{e^{-1}e^{-s}}{s+1}$$

Y para la  $y$  tendremos, por una lado, para el primer sumando que

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$$

y, por otro lado:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = te^{-t}, \quad L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+1}\right] = u_1(t)e^{-t+1}, \quad L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right] = (t-1)u_1(t)e^{-t+1}$$

Así que en total la solución para la  $y$  es la siguiente:

$$y = e^{-t} + e^{-1} \{(t-1)u_1(t)e^{-t+1}\} = \{1 + (t-1)u_1(t)\}e^{-t}$$

## 4. SISTEMAS DE ECUACIONES AUTÓNOMAS

Como ya sabemos, hay ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales tanto en derivadas ordinarias como parciales. Las parciales son tan complicadas de resolver analíticamente que solo se conocen unos cuantos casos; el resto se resuelven numéricamente.

Si solo nos circunscribimos a las ordinarias, tenemos dos grandes grupos (tanto en ecuaciones solitarias como en sistemas), las lineales y las no lineales. Ya hemos visto cómo se resuelven las lineales. Podrá ser farragoso o largo de resolver, pero podemos resolver todos los casos que nos planteen. Pero si son no lineales, la situación es complicada. Solo se saben resolver analíticamente determinados tipos de casos, casos que son de por sí sencillos de resolver o que, dada su importancia en física o ingeniería, alguien

ha trabajado en ellos y ha aportado la solución. Para los demás casos solo nos quedan los métodos numéricos que podemos programar en un computador. Pero si tenemos determinados casos especiales, podemos usar métodos aproximados para saber el comportamiento del sistema. Ya vimos el caso de las ecuaciones autónomas de primer grado. Ahora vamos a ver el caso de los sistemas de ecuaciones autónomas.

Como en el caso más sencillo ya visto, un sistema de ecuaciones autónomas es aquel en el que no aparece la variable independiente, es decir, si nos restringimos al caso de dos variables dependientes, cuando es de la forma siguiente:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son generalmente funciones de  $x$  e  $y$ , aunque puede ocurrir que una de ellas solo sea función de una variable, sea  $x$  o  $y$ .

#### 4.1. MAPAS DE FASES

Es ahora cuando empiezan nuestros problemas de visualización. Si tenemos dos variables dependientes y una independiente, necesariamente necesitamos un espacio tridimensional en el que representar las soluciones, sea nuestro sistema lineal o no, autónomo o no (si tenemos una variable más, incluso necesitaríamos más dimensiones).

Necesitamos un sistema de representación más sencillo. Si nuestro sistema solo tiene dos ecuaciones, es autónomo y la variable independiente representa el tiempo, podemos visualizar la evolución del sistema con un espacio bidimensional  $x, y$ , al que llamaremos mapa o espacio de fases, sobre el que proyectaremos las curvas solución dotadas de dirección y sentido. Las curvas sobre el mapa de fases, a las que llamaremos órbitas, serán líneas con flecha que recorran dicho espacio y un reflejo de lo que sucede en el espacio real tridimensional, sea este geométrico o no (no necesariamente  $x$  e  $y$  representan distancias, sino que pueden ser poblaciones animales o cualquier otro observable físico).

Veamos, por ejemplo, el caso típico de la ecuación  $x'' + x = 0$ , que se puede escribir como el sistema autónomo siguiente:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

y cuya sencilla solución para la condición

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [0, 1]^T$$

es la siguiente:

$$x = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

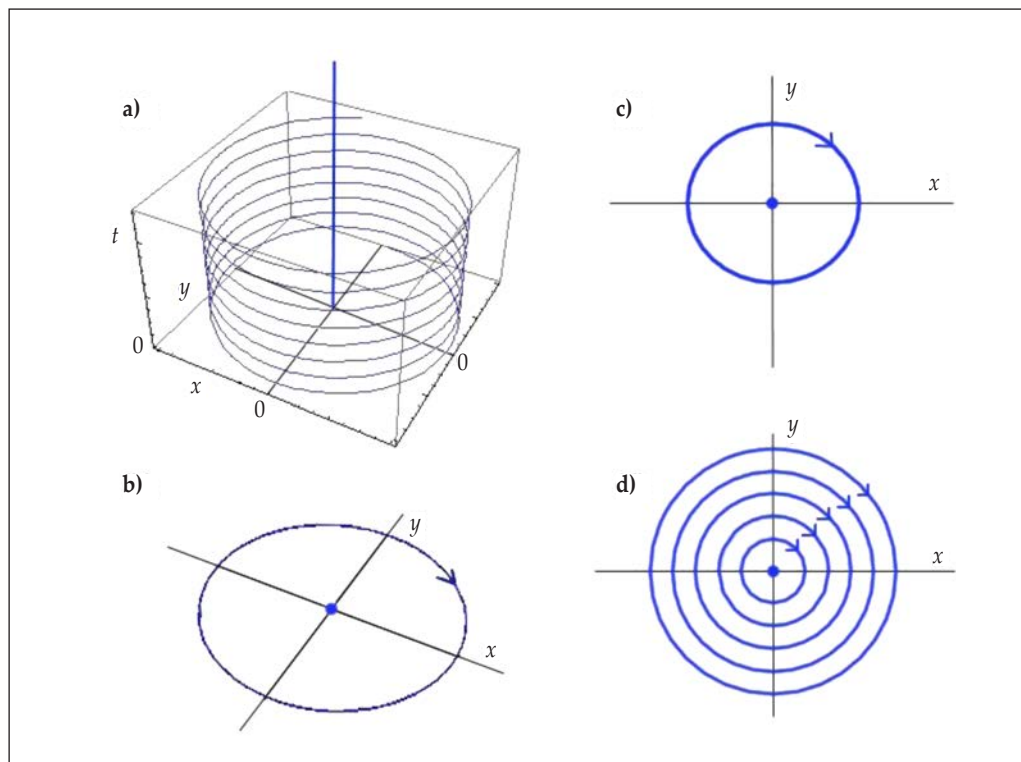
Si hacemos un dibujo tridimensional de esta curva, vemos, en la parte a) de la figura que aparece en la página siguiente, que se trata de una hélice. Esta curva parte del punto  $(0, 1)$  y se prolonga, según pasa el «tiempo», hacia «arriba». Si proyectamos esa curva sobre el plano  $x - y$  (sería como la sombra de la curva con luz cenital), nos quedará una circunferencia centrada en el origen y orientada según el sentido de la curva original [parte b) de la figura de la página siguiente]. Podemos imaginar un punto que recorra, según transcurre el tiempo, la curva solución original; ese punto parecerá describir órbitas alrededor del origen sobre el plano de fases, de ahí que el nombre de «órbitas» tenga cierto sentido para estas proyecciones de las soluciones.

Si consideramos ahora la condición inicial  $x(0) = [0, 0]^T$ , la curva solución será muy simple, pues consistirá en una recta que parte del origen y para la que las variables  $x$  e  $y$  siempre valen cero, es decir:  $x(t) = [0, 0]^T$ . La proyección de esa curva solución nos da solo un punto situado sobre el origen en el mapa de fases.

Este punto será lo que llamaremos un punto crítico y es equivalente a las soluciones constantes que nos aparecían en las ecuaciones autónomas. Hubiera bastado con igualar las derivadas a cero en el sistema original para obtenerlo:

$$\begin{cases} 0 = y \\ 0 = x \end{cases}$$

En este caso, hallar el punto crítico ha sido trivial, pero en general habrá que resolver un problema algebraico relativamente complicado, ya que si el sistema de ecuaciones original no es lineal, tampoco lo será el algebraico. Puede haber varios puntos críticos que pueden estar situados en distintos sitios del mapa de fases, ser de distinta naturaleza, ser estables o inestables, etc.



Si seguimos con nuestro ejemplo, podemos prescindir a partir de ahora del eje  $t$  y considerar solo el espacio de fases  $xy$ , como podemos ver en la parte c) de la figura. Pero para cada condición inicial tendremos un punto de partida distinto a partir del cual evolucionará la solución correspondiente y que tendrá su correspondiente órbita en el mapa de fases. Esas órbitas serán en este caso circunferencias centradas en el origen y hay tantas como posibles condiciones iniciales (infinitas). Pero para hacernos una idea de cómo se comporta el sistema bastará con representar unas cuantas órbitas equiespaciadas d).

El dibujo aproximado del mapa de fases nos dirá el comportamiento a grosso modo del sistema, pero, a veces, no necesitamos un resultado numérico, sino solo analizar el comportamiento del sistema representado por el sistema de ecuaciones diferenciales.

La idea es tratar de obtener el mapa de fases sin necesidad de resolver el sistema, porque si somos capaces (como en el ejemplo anterior) de obtener las soluciones, no necesitamos para nada cualquier otra técnica aproximada, ya que tenemos la solución

analítica exacta. De todos modos, aunque no sepamos resolver el sistema, quizás sí podamos hallar las ecuaciones que describen las órbitas resolviendo la siguiente ecuación diferencial que nos proporcionará curvas integrales:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

Pero como hemos eliminado  $t$  de la escena, las curvas integrales no tendrán orientación ninguna; digamos que no tendremos «flecha». Para el ejemplo que hemos visto es fácil ver que las curvas integrales son:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = C$$

que corresponden a circunferencias. Tanto en este caso como en el caso en el que ni siquiera podamos extraer curvas integrales, nos será de gran ayuda el dibujar el «campo vectorial» siguiente:

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

que coincide con el vector tangente  $[x', y']^T$  a la órbita en el punto  $(x, y)$ . Las órbitas serán curvas tangentes a este campo  $\mathbf{v}(x, y)$  que podremos representar por flechas ancladas en puntos de interés. Generalmente se utilizará este campo para completar o dar precisión a determinadas partes del mapa de fases, sobre todo allí donde las demás técnicas no nos proporcionen información.

El teorema siguiente también nos puede ayudar a la hora de dibujar las órbitas.

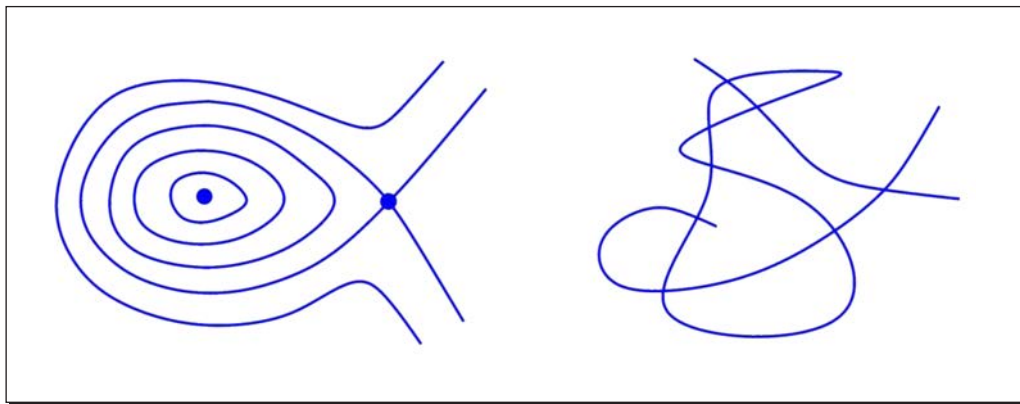
### Teorema

Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita de

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Si una órbita se corta a sí misma, entonces corresponde a una solución periódica y dicha curva es una curva cerrada simple.

Esto lo que viene a decir es lo representado en la siguiente figura:



No puede ocurrir lo que está representado a la derecha y que las órbitas se corten de cualquier manera. Si parece que se cortan, lo que sucede en realidad es que hay un punto crítico, como lo que ocurre en el dibujo de la izquierda, o son curvas cerradas.

Además, las órbitas vienen y se van al infinito a no ser que sean órbitas cerradas (como lo que sucede en el dibujo de la izquierda) que corresponden a soluciones periódicas. Una órbita no puede aparecer de la nada en un punto y terminar en cualquier punto del mapa de fases (como lo que está representado en el dibujo de la derecha). Si hay un punto de origen o final, este debe ser un punto crítico.

## 4.2. CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Para averiguar los puntos críticos, como ya hemos dicho, bastará igualar a cero las derivadas del sistema y resolver el sistema algebraico correspondiente. Pero esto no nos dice cómo se comportan las órbitas en las cercanías de esos puntos.

Hay un limitado número de clases de puntos críticos en función de la forma que adoptan las órbitas a su alrededor y en función de su estabilidad. Esto nos será de gran ayuda a la hora de dibujar el mapa de fases de un sistema y saber su comportamiento, aunque no sepamos averiguar las soluciones.

Por tanto, si nos piden dibujar el mapa de fases, lo primero que tendremos que hacer es calcular sus puntos críticos y su naturaleza (o tipo) y luego dibujar unas cuantas flechas del campo vectorial para rellenar lo que nos falte.



Si se trata de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = ax + by \\ y' = g(x, y) = cx + dy \end{cases}$$

el punto crítico es trivial, pues se calcula resolviendo el sistema algebraico lineal siguiente:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

En este caso, al tratarse de un sistema homogéneo, su solución es siempre la solución nula, que se corresponde con el origen. Si fuera no homogéneo, el punto crítico será otro distinto.

Si llamamos  $A$  a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

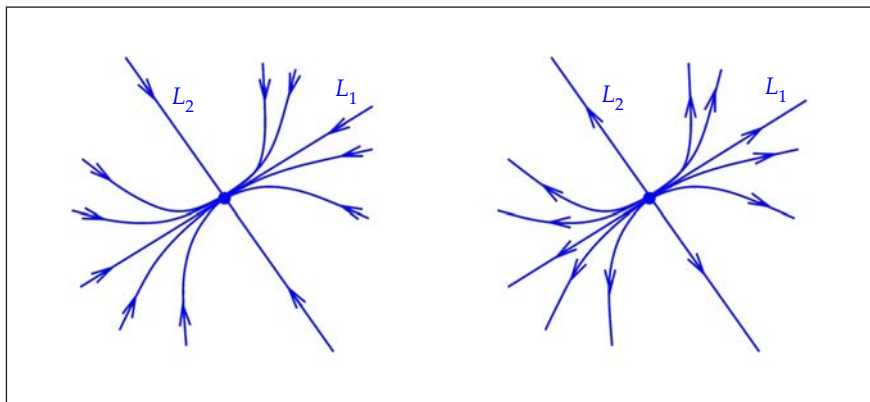
podemos clasificar los puntos críticos en función de cómo sean los autovalores de  $A$ .

Para fijar la situación vamos a suponer que el determinante de  $A$  no es cero y que el único punto crítico es el origen (lineal y homogéneo), por tanto,  $\lambda = 0$  no será autovalor de  $A$ . Teniendo en cuenta esto, el punto crítico  $(0, 0)$  puede ser de los siguientes tipos:

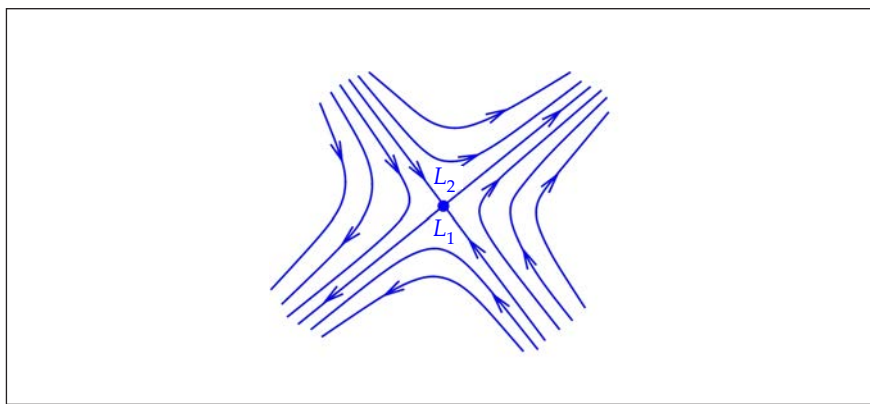
- **Nodo.** Esto sucederá cuando los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y distintos. Habrá autovectores asociados  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ . Las rectas que contienen esos dos vectores serán  $L_1$  y  $L_2$ , que podremos dibujar sobre el mapa de fases.

Además, si  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , todas las soluciones tienden al origen (hacia el punto crítico) y lo hacen con una pendiente dada por el autovector correspondiente. En este caso, se trataría de la situación de la izquierda de la siguiente figura, que es un nodo estable.

Si  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , las órbitas salen del punto crítico con una pendiente dada por los autovectores correspondientes, así que en ese caso se tratará de un nodo inestable (situación de la derecha).

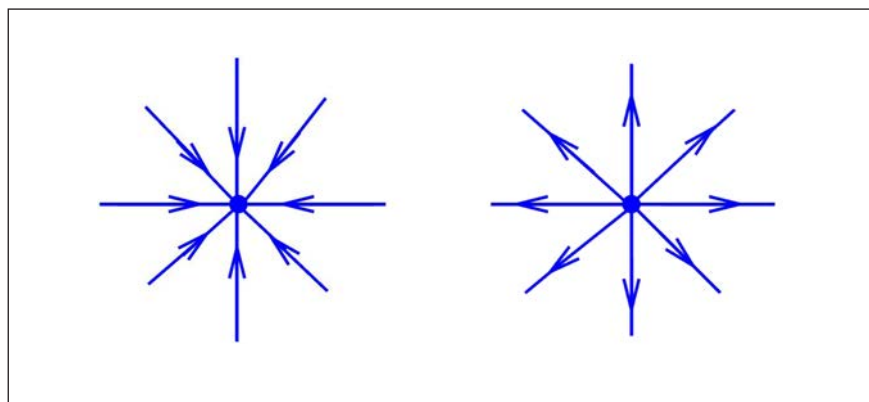


- **Punto silla.** En este caso, los autovalores son reales y distintos, pero  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , es decir, uno es negativo y otro positivo. Es lo representado en la siguiente figura:

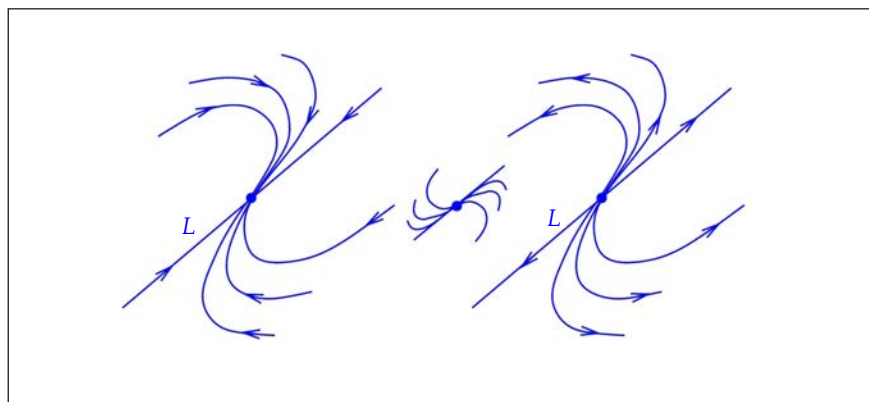


Este tipo de punto es siempre inestable, pues mientras que unas órbitas entran en el punto crítico, otras salen y basta una pequeña variación en las condiciones iniciales cercanas a ese punto para que la trayectoria sea completamente distinta. A las órbitas que salen del punto silla se las llama separatrices.

- **Nodo estelar.** Si el autovalor es real, doble y  $A$  es diagonal, entonces se trata de un nodo estelar (por su similitud con una estrella). Si  $\lambda < 0$ , se tratará de un nodo estelar estable (parte izquierda de la siguiente figura) y si  $\lambda > 0$ , se tratará de un nodo estelar inestable (parte derecha de la siguiente figura).

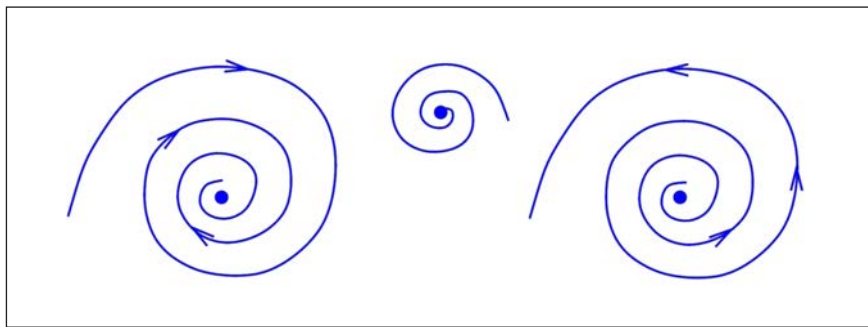


- **Nodo de una tangente.** Si el autovalor es real, doble y  $A$  no es diagonal, entonces se trata de un nodo de una tangente, que está representado en la siguiente figura:

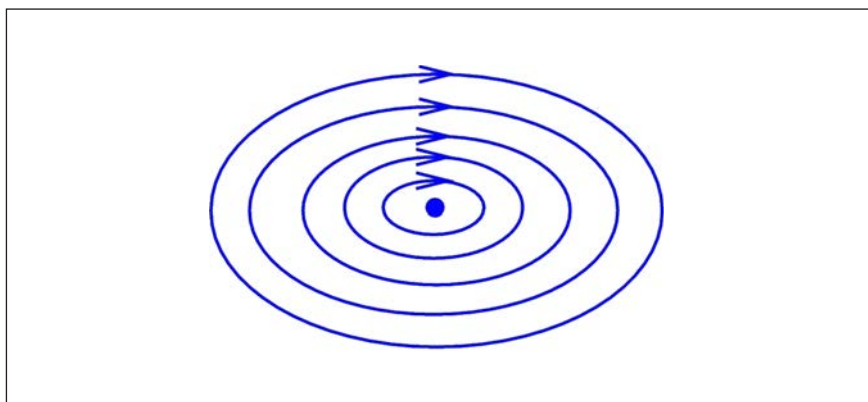


Si  $\lambda < 0$ , será estable (izquierda), y si  $\lambda > 0$ , será inestable (derecha). La recta tangente  $L$  será la recta que incluye al autovector correspondiente. La situación especular está representada en el centro.

- **Foco.** En este caso se trata de autovalores que son complejos conjugados:  $\lambda = p \pm qi$  con  $p \neq 0$ . Las soluciones son periódicas moduladas por una exponencial y su representación en el mapa de fases son espirales. Si  $p < 0$ , se tratará de un foco estable (izquierda) y si  $p > 0$ , se tratará de un foco inestable (derecha). La situación especular está representada en el centro.



- **Centro.** En este caso también se trata de autovalores que son complejos conjugados  $\lambda = p \pm qi$ , pero con  $p = 0$ , las soluciones son todas periódicas (no hay exponencial) y su representación en el mapa de fases son curvas cerradas que pueden ser tanto en sentido horario como antihorario.



Si se trata de un sistema lineal, dibujar todo su mapa de fases es muy sencillo si tenemos en cuenta la clasificación anterior. Primero averiguaremos el punto crítico y luego su naturaleza. Para nodos y puntos silla habrá que dibujar además las semirrectas correspondientes que contienen los autovectores.

También podemos dibujar el campo vectorial sobre algunas rectas que pasen por el origen (como por ejemplo los ejes o rectas que nos proporcionen pendiente vertical o nula), que serán isoclinas de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + dy}{ax + by}$$

Si se trata de un sistema lineal y homogéneo, las órbitas serán siempre calculables, pero generalmente no merecerá la pena.

Si el sistema no es homogéneo ( $|A| \neq 0$ ), bastará hacer el cambio  $u = x - x_0$  para trasladar el punto crítico  $x$  al origen manteniendo la matriz  $A$ .

### EJEMPLO 5

Dibujar el mapa de fases del sistema:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

### **Solución**

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene como autovalores y vectores asociados:

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow v_1 = [1, 2]^T, \quad \lambda_2 = 2 \rightarrow v_2 = [2, 1]^T$$

El punto crítico (el origen) será, por tanto, un punto silla.

El campo vectorial  $v$  será horizontal cuando  $x' = 0$ , es decir, cuando

$$x' = 3x - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{3x}{2}$$

y vertical cuando

$$y' = 2x - 2y = 0 \rightarrow y = x$$

Sobre el eje  $x$  tendremos que  $y = 0$ , así que el campo vectorial queda a lo largo de esa recta como:

$$v(x, 0) = x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

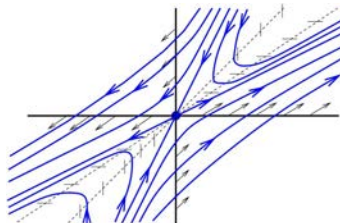
.../...

.../...

Es decir, las «flechitas» del campo son vectores  $[3, 2]^T$  para la parte positiva del eje  $x$  (signo inverso en el semieje negativo). Sobre el eje  $y$  tendremos que  $x = 0$ , así que en este caso

$$v(0, y) = 2y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y las «flechitas» del campo son vectores  $[-1, -1]^T$  para el semieje positivo  $y$  (signo inverso en el semieje negativo). Podemos ahora poner todo eso sobre el plano de fases y tratar de dibujar las órbitas.



### 4.3. SISTEMAS NO LINEALES

Obviamente, el mapa de fases de un sistema lineal (homogéneo o no) carece de interés, pues ya sabemos cómo obtener las soluciones. Lo interesante es aplicar esta técnica a sistemas no lineales para los cuales no tenemos una solución analítica.

Para ello vamos a aproximar el sistema no lineal como un desarrollo de Taylor en torno al punto crítico y luego llevaremos ese punto crítico al origen con el cambio  $u = x - x_0$  y  $v = y - y_0$ . O bien haciendo el cambio y luego el desarrollo (lo que es lo mismo). De este modo, si tenemos el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

y el punto crítico  $x_0 = (x_0, y_0)$ , entonces el desarrollo en cuestión es:

$$\begin{cases} u' = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + R_f(u, v) \\ v' = g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + R_g(u, v) \end{cases}$$

Es de esperar que tanto  $R_f(u, v)$  como  $R_g(u, v)$  sean pequeñas en torno al punto en cuestión, así que podemos tomar una aproximación lineal, de tal modo que tendremos un nuevo sistema diferencial

$$u' = Mu,$$

tal que la matriz  $M$  es:

$$M = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Este tipo de aproximación puede ser útil, ya que muchas veces nos interesa el comportamiento de un sistema en torno a los puntos de equilibrio.

Supongamos que el determinante de  $M$  es distinto de cero. Podemos decir que  $\mathbf{x}_0$  es un punto crítico elemental del sistema no lineal. El teorema de la función implícita nos asegura, además, que ese punto es aislado, es decir, que hay un entorno alrededor de ese punto en el que no hay más puntos críticos. Si  $|M| = 0$ , entonces puede que no sea aislado.

### Teorema

Si los autovalores de  $M$  tienen parte real menor que cero, entonces  $\mathbf{x}_0$  es solución de equilibrio asintóticamente estable del sistema no lineal. Si alguno de los autovalores tiene parte real positiva, entonces  $\mathbf{x}_0$  es inestable. No se sabe la naturaleza de la estabilidad si hay algún autovalor con parte real nula.

La idea es averiguar la naturaleza de los puntos críticos del sistema no lineal a partir de la linealización que acabamos de ver; sin embargo, tal equivalencia no se establece biunívocamente. El siguiente teorema nos dice cómo.

### Teorema

Si el origen es un nodo, punto silla o foco en el sistema lineal aproximado, entonces  $\mathbf{x}_0$  del sistema no lineal es un punto crítico del mismo tipo y la misma estabilidad.

Si el origen es un nodo estelar o de una tangente en el lineal aproximado y las funciones  $f$  y  $g$  tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces  $\mathbf{x}_0$  es un nodo del mismo tipo con la misma estabilidad en el sistema no lineal.

Las órbitas rectas que en nodos o puntos silla del lineal salen o entran del origen se deforman en el no lineal pero mantienen la misma tangencia dada por los autovectores.

Finalmente, si el origen es un centro de la aproximación lineal y las funciones  $f$  y  $g$  son analíticas, entonces  $\mathbf{x}_0$  es o bien un centro, o bien un foco estable o bien un foco inestable del sistema no lineal.

Como se puede observar, la situación más complicada es cuando tenemos un centro en la aproximación lineal, ya que cualquier perturbación no lineal puede hacer que las órbitas no se cierren sobre sí mismas y que se convierta en foco.

Para distinguir un caso de otro nos podemos valer de la simetría. Si las ecuaciones del sistema no lineal son simétricas, lo será el campo vectorial. Los focos no tienen simetría especular, mientras que los centros sí (con respecto a alguna recta del mapa de fases). Pero si queremos hacer algo más riguroso, nos podemos valer del siguiente teorema.

#### Teorema

Si  $\mathbf{x}_0$  es un punto crítico del sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

que en la aproximación lineal corresponde a un centro y o bien

- $\mathbf{x}_0$  está sobre el eje  $x$  y cumple  $f(x, -y) = -f(x, y)$ ,  $g(x, -y) = g(x, y)$ , es decir, que las órbitas son simétricas respecto al eje  $y = 0$ , o bien
- $\mathbf{x}_0$  está sobre el eje  $y$  y cumple  $f(x, -y) = f(x, y)$ ,  $g(x, -y) = -g(x, y)$ , es decir, que las órbitas son simétricas respecto al eje  $x = 0$ .

Entonces  $\mathbf{x}_0$  es también un centro del sistema no lineal.

Digamos que si hay simetría y las órbitas se recorren en sentido contrario, que es lo que sucede para un centro, tenemos efectivamente un centro y no un foco.

Además, conocer la simetría de un sistema no solo nos sirve para este caso de distinguir entre centro o foco, sino que nos puede servir para obtener información extra sobre el mapa de fases en cualquier otro caso.

## 4.4. METODOLOGÍA

Para dibujar el mapa de fases de sistemas no lineales seguiremos una metodología muy similar a la que hemos seguido para el caso lineal:

- Averiguamos los puntos críticos del sistema no lineal igualando a cero tanto  $f$  como  $g$ .



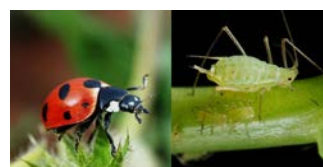
- Averiguamos la matriz  $M$  mediante las oportunas derivaciones y la evaluamos para los puntos críticos obtenidos en el paso anterior.
- Calculamos autovalores y autovectores de  $M$  para cada punto crítico.
- Vemos la naturaleza de esos puntos críticos que le corresponden al sistema no lineal y dibujamos grosso modo su ubicación, separatrices y órbitas en torno a cada punto crítico.
- Buscamos curvas en las que el campo vectorial es horizontal o vertical, es decir, tomando  $g = 0$  y  $f = 0$  respectivamente.
- Evaluamos el campo vectorial en los ejes  $x$  e  $y$  igualando  $y = 0$  y  $x = 0$  respectivamente.
- Hacemos lo anterior en rectas que pasen por los puntos críticos, pues a veces adoptan formas sencillas.
- La deformación de las separatrices según estas se alejan del entorno del punto crítico se averiguará gracias al campo vectorial sobre la recta de su aproximación lineal.
- En las zonas en las que no tengamos mucha información distribuimos vectores sueltos del campo vectorial.

### EJEMPLO 6

Sea un sistema ecológico muy simple en el que están implicadas las mariquitas y los pulgones sobre un campo de cultivo. En este sistema hay una relación depredadora, pues las mariquitas se alimentan de pulgones. Tal sistema lo podemos describir mediante el modelo siguiente en el que  $x$  representa la población de pulgones y  $y$  la población de mariquitas.

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) \\ y' = y(-1 + x) \end{cases}$$

Digamos que la variación en la población de pulgones depende proporcionalmente de cuántos pulgones hay y disminuye proporcionalmente a la cantidad de mariquitas que hay.



Fuente: Wikimedia Commons, PLoS.

.../...

.../...

Dibujar e interpretar el mapa de fases del sistema y comprobar que según este modelo es contraproducente emplear un insecticida contra los pulgones si también mata a una proporción fija de las mariquitas existentes.

### Solución

Los puntos críticos son  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  y la matriz  $M$  es

$$M = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-y) & -x \\ y & (x-1) \end{pmatrix},$$

que para esos dos puntos críticos es respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el primer caso tendremos como autovalores  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 1$  y autovectores  $v_1 = [0, 1]^T$  y  $v_2 = [1, 0]^T$ . Se trata de un punto silla cuyas separatrices coinciden con los ejes.

En el segundo caso los autovalores son complejos sin parte real  $\lambda_1 = \pm i$ , así que se trata de un centro en el sistema lineal que en el no lineal puede ser o bien centro o bien foco.

El campo vectorial será vertical cuando

$$x' = x(1-y) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1$$

y horizontal para

$$y' = y(-1+x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

Ambas rectas pasan por el punto crítico  $(1, 1)$ .

Por otro lado, las órbitas obedecen la ecuación siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$$

Podemos obtener la isoclina para la pendiente  $-1$ :

$$\frac{y(x-1)}{x(1-y)} = -1 \quad \rightarrow \quad y = x,$$

que es una recta que pasa por los dos puntos críticos.

.../...

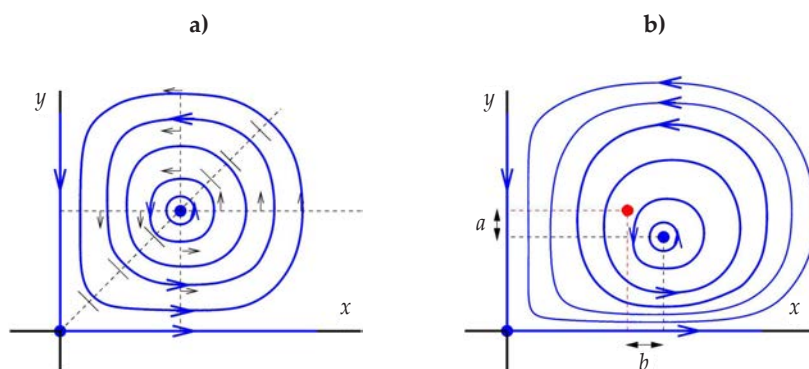
.../...

Además podemos incluso resolver la ecuación anterior, cuya solución es

$$H(x, y) = \ln y - y + \ln x - x = C,$$

que es una superficie cerrada y, por tanto, el punto crítico (1, 1) es también centro en el no lineal.

Podemos ya intentar dibujar el mapa de fases ignorando la parte negativa, pues no hay poblaciones negativas de insectos. Así que solo nos fijaremos en el primer cuadrante. El mapa de fases correspondiente es lo que aparece en la figura a).



Vemos que lo que ocurre es que las poblaciones de ambos insectos oscilan alrededor del punto de equilibrio (el centro). De este modo, según aumenta la población de pulgones [lado de abajo de la figura a)], hay más presas disponibles para las mariquitas y estas empiezan a reproducirse (lado de la derecha) más eficazmente aumentando su población, con lo que empieza a disminuir la población de pulgones al ser devorados por tanta mariquita (lado de arriba). Pero llega un momento en que no hay suficientes pulgones para alimentar a tanta mariquita y la población de estas cae en picado (lado izquierdo).

Cómo de amplias serán esas oscilaciones dependerá de la condición inicial. Si esta está alejada del punto de equilibrio, las variaciones (y oscilaciones) en las poblaciones serán mayores que si está cerca del punto de equilibrio. Lo ideal es esta última situación.

Si usamos insecticida, hay que modificar el modelo, pues este mata proporcionalmente tanto a los pulgones como a las mariquitas. En términos de poblaciones de ambos quedará:

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) - ax \\ y' = y(-1 + x) - by \end{cases}$$

En este caso habrá un nuevo centro:

$$\begin{pmatrix} 1 & +b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

.../...

.../...

que estará desplazado respecto al anterior [en rojo tal y como se ven en la figura b)]. Vemos que en este nuevo centro los parámetros  $a$  y  $b$ , es decir, la proporción de muertes causadas por el insecticida en pulgones y mariquitas respectivamente están cruzados. Por muy pequeño que sea  $b$  (la proporción de muertes en mariquitas), desplazará el nuevo centro hacia la derecha (más pulgones) y hacia abajo (menos mariquitas). La única manera de librarse de los pulgones es usar tanto insecticida que los elimine a todos y con ellos también a las mariquitas.

Este resultado nos da una pequeña lección de ecologismo.

### EJEMPLO 7

Supongamos que tenemos dos especies animales que compiten sin depredarse la una a la otra, pero que comparten un recurso común en la misma área. Digamos que compiten por los mismos recursos, como, por ejemplo, por unos recursos alimenticios que se encuentran disponibles en una cantidad limitada. En la sabana africana, los grandes felinos, como los leopardos y las chitas (guepardos), se alimentan de especies similares y ambas especies conviven en el mismo ecosistema.

Podemos modelizar este sistema con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = x(2 - x - y) \\ y' = y(3 - y - 2x) \end{cases}$$



Fuente: Wikimedia Commons.

La población de una de las especies, en ausencia de la otra, se describe por una ecuación logística. Además, la presencia de una especie influye negativamente sobre la población de la otra. Los términos de competición  $-xy$  y  $-2xy$  son los que modifican el comportamiento logístico.

### Solución

De nuevo, al tratarse de poblaciones animales, nos vamos a restringir al primer cuadrante en el que ambas poblaciones son positivas, pues nadie ha visto leopardos negativos por la sabana africana.

.../...

.../...

Igualando a cero, extraemos los puntos críticos:

$$x(2-x-y) \rightarrow \begin{cases} x=0 & \rightarrow y=0, 3 \\ y=2-x & \rightarrow x=2, 1 \end{cases} \rightarrow y=0, 1$$

es decir, los puntos críticos en cuestión son cuatro:  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(2, 0)$  y  $(1, 1)$ . La aproximación lineal en cualquier punto es

$$M = \begin{pmatrix} 2-2x-2y & -x \\ -2y & 3-2y-2x \end{pmatrix}$$

Veamos qué ocurre para cada punto crítico:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1=2, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2=3, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se trata de nodo inestable, así que las órbitas parten de él en lugar de llegar.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1=-1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2=-3, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de nodo estable, así que las órbitas mueren al llegar a él.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1=-1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2=-2, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de nodo estable, así que las órbitas mueren al llegar a él.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1=-1+\sqrt{2}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \lambda_2=-1-\sqrt{2}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

En este caso se trata de un punto silla.

Podemos ver que el campo vectorial es vertical si  $y=2-x$  o  $x=0$ , además  $x=0$  es órbita. Por otro lado, será horizontal cuando  $y=3-2x$ ; además  $y=0$  es órbita.

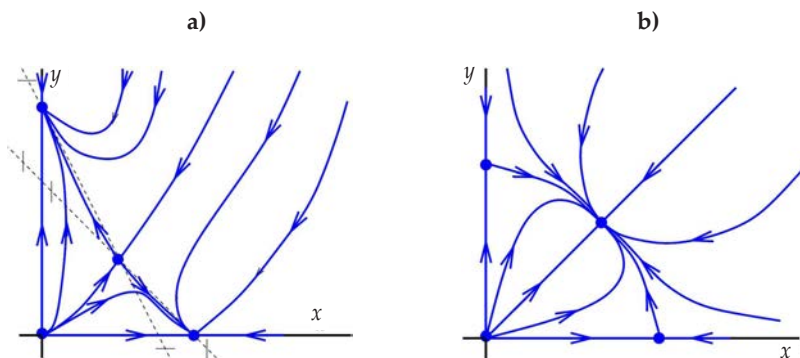
Para recavar un poco más de información podemos calcular el campo vectorial sobre rectas que pasen por los puntos críticos:

$$v(x, 3) = -x \begin{pmatrix} x+1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v(2, y) = -y \begin{pmatrix} 2 \\ y+1 \end{pmatrix}, \quad v(x, 1) = (1-x) \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v(1, y) = (1-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 3y \end{pmatrix}$$

.../...

.../...

Ya podemos intentar dibujar el mapa de fases que aparece en la figura a):



Para rellenar hemos calculado el campo en  $(3, 1)$  y  $(1, 3)$ .

Como se puede apreciar, las dos especies compiten terriblemente y cada una de las poblaciones tiende a sus máximos estables (los nodos estables), pero siempre a costa de la otra especie, cuya población se reduce a cero. Aunque el punto silla parece un punto equilibrio, esa situación es inestable, pues cualquier pequeña variación hará que el sistema se decante hacia uno u otro lado.

Esto se debe a los términos de competición  $-xy$  y  $-2xy$ , pues si por ejemplo tuvieran un valor absoluto más pequeño, entonces el punto silla se transformaría en un nodo estable y ambas especies podrían coexistir. Cambiar solo esos términos implica reubicar los puntos críticos, pero si compensamos en otros términos, podemos tener un punto crítico justo en  $(1, 1)$  y comparar. Por ejemplo con el modelo siguiente:

$$\begin{cases} x' = x(3 - 2x - y) \\ y' = y(3 - 2y - x) \end{cases}$$

Para este caso los puntos críticos serán  $(0, 0)$ , que es nodo estelar inestable,  $(3/2, 0)$  y  $(0, 3/2)$ , que son puntos silla, y  $(1, 1)$ , que es nodo estable. El mapa de fases correspondiente aparece en la figura b). Este es el caso que correspondería a la realidad de la sabana africana en la que hay leopardos y chitas coexistiendo en un mismo ecosistema.

## 4.5. ECUACIONES AUTÓNOMAS DE SEGUNDO ORDEN

Todo lo que hemos visto sobre sistemas autónomos se puede aplicar a ecuaciones autónomas de segundo orden. De este modo, si tenemos la ecuación  $x'' = g(x, x')$ , se puede

escribir como un sistema de dos ecuaciones sin más necesidad que usar el cambio de  $x' = v$ , que nos lleva a lo siguiente:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = g(x, v) \end{cases}$$

La matriz  $M$  de la aproximación lineal quedará en este caso:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_v \end{pmatrix}$$

Esto nos restringe las propiedades que habíamos visto para sistemas autónomos en general a las siguientes particularidades:

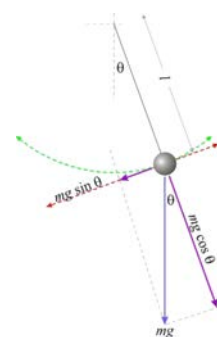
- Los puntos críticos de la ecuación autónoma están sobre el eje  $v = 0$ .
- Las órbitas están orientadas hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior.
- Las órbitas cortan perpendicularmente el eje  $v = 0$ .
- No hay nodos estelares.
- Un vector propio asociado al autovalor  $\lambda$  es  $[1, \lambda]^T$ .

### EJEMPLO 8

Sea un péndulo como el de la figura de al lado. Si nos fijamos un poco, vemos que la fuerza longitudinal a la barra (que se supone que no tiene masa) es compensada por la tensión en dicha barra, así que solo nos queda la fuerza tangencial. Como siempre, la suma de fuerzas será igual a la masa por la aceleración:

$$F_t = -mg \sin \theta = ma_t$$

en donde el signo menos tiene en cuenta que  $F_t$  tiene dirección opuesta a la del desplazamiento angular positivo,  $\theta$  es el ángulo respecto a la vertical y el subíndice  $t$  hace refe-



Fuente: Wikimedia Commons.

.../...

.../...

rencia a la componente tangencial. La aceleración tangencial será igual a la longitud por la segunda derivada del ángulo, es decir,  $a_t = l\ddot{\theta}$ , como es habitual. Así que

$$-m g \sin \theta = m l \ddot{\theta}$$

Naturalmente podemos eliminar la masa a ambos lados y reordenar los términos, entonces nos queda la ecuación del péndulo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Si introducimos un rozamiento proporcional a la velocidad angular, tendremos entonces la ecuación del péndulo amortiguado:

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k \sin \theta = 0,$$

en donde  $k = g/l$  y el término de amortiguamiento es  $c\theta'$ . Tomando la variable  $\theta = x$ , asumiendo un valor para  $c = 1$  y una longitud  $l = 9,8$  metros tal que  $k = 1$ , obtenemos una expresión muy sencilla para ambos casos.

$$x'' + \sin x = 0, \quad x'' + x' + \sin x = 0$$

Dibujar el mapa de fases tanto del caso amortiguado como sin amortiguar y comparar el resultado.

### Solución

Si no hay amortiguamiento, el sistema y  $M$  serán:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\sin x \end{cases} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

Los puntos singulares estarán todos sobre el eje  $x$ , pues  $v = 0$ , y serán en este caso todos aquellos para los que el seno se anula, es decir,  $(\pm n\pi, 0)$ . Aquí distinguiremos entre dos casos posibles, para los valores de  $n$  pares y para los valores impares.

Si  $n$  es par, entonces

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.../...



.../...

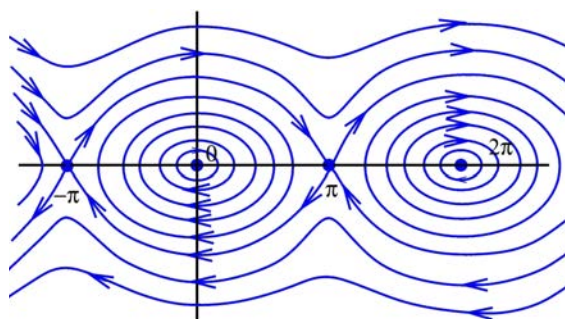
y los autovalores son  $\lambda = \pm i$ , que corresponderán a un centro. Mientras que para los impares tendremos que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que serán puntos silla con

$$\lambda_1 = -1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1 \quad \rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El mapa de fases queda de esta manera:



Podemos resumir diciendo que sin rozamiento el péndulo oscila alrededor de un punto crítico en el mapa de fases con órbitas cerradas. Esto se corresponde con oscilaciones de la misma amplitud (la amplitud es proporcional al tamaño de su órbita) que se suceden sin parar. Si la amplitud es muy grande, el péndulo da la vuelta.

Si hay amortiguamiento, entonces podemos escribir el sistema así:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -v - \sin x \end{cases}$$

Para este caso

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -1 \end{pmatrix}$$

.../...

.../...

Los puntos singulares estarán otra vez todos sobre el eje  $x$  y serán los mismos, es decir,  $(\pm n\pi, 0)$ . Aquí también distinguiremos entre dos casos posibles para los valores de  $n$  pares y para los valores impares.

Si  $n$  es par, entonces

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

que corresponderá a focos estables. Mientras que para los impares tendremos que

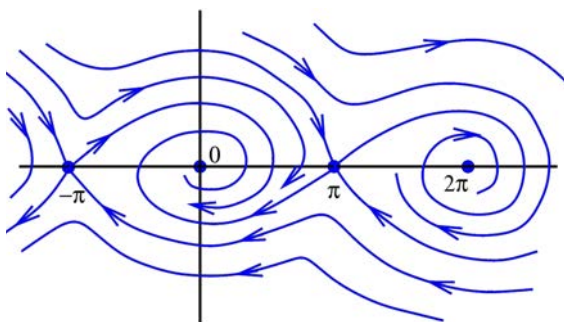
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que serán puntos silla, ya que se corresponde a los siguientes autovalores y vectores propios:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{5}) = -1,618 \quad \rightarrow \quad v_1 = \left[ 1 + \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{5}), 1 \right]^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) = 0,618 \quad \rightarrow \quad v_2 = \left[ 1 + \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{5}), 1 \right]^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Y el mapa de fases quedará de la siguiente manera esta vez:



En este caso en el que hay amortiguamiento, los centros de antes pasan a ser focos estables. Todas las órbitas terminan por caer en los focos estables. Las órbitas tienden hacia esos puntos, que es cuando el movimiento cesa. En la realidad lo que ocurre es que el péndulo oscila con una amplitud cada vez más pequeña hasta que se detiene. Si la amplitud es muy grande, puede incluso dar vueltas sobre sí mismo (órbitas más exteriores), pero finalmente termina oscilado con cada vez menor amplitud hasta que se para.

## 4.6. ECUACIONES Y SISTEMAS EXACTOS

Se dice que un sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

es exacto si

$$f_x(x, y) + g_y(x, y) = 0$$

Si esto ocurre, entonces la ecuación diferencial de sus órbitas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

también es exacta y por tanto resoluble, es decir que

$$-g(x, y) + f(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

y por tanto existe una función  $H(x, y)$  tal que  $f = H_y$  y  $g = -H_x$  y las órbitas vienen dadas por  $H(x, y) = C$ . Así que es fácil deducir el siguiente teorema:

### Teorema

Los puntos críticos de un sistema exacto solo pueden ser centros o puntos silla.

Para el caso particular en el que tengamos la ecuación exacta

$$x'' = g(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x' = v \\ v' = g(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad v \frac{dv}{dx} = g(x),$$

sus órbitas vienen dadas por:

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} - \int g(x) dx = C$$

Es decir:

$$\frac{v^2}{2} + V(x) = C, \quad \text{si} \quad V(x) = - \int g(x) dx$$

Esto describiría el movimiento en ausencia de rozamiento sobre el eje  $x$  de una partícula sometida a una fuerza que solo depende de la posición y en donde  $H$  es la energía total,  $v^2/2$  es la energía cinética y  $V(x)$ , la energía potencial. Normalmente, a la expresión suma de la energía cinética y potencia se le denomina hamiltoniano y de ahí el empleo de la letra  $H$ . La elección de la letra  $v$  tampoco es caprichosa, pues suele corresponder a una velocidad en un sistema físico.

Para este caso tan simple tendremos el siguiente teorema:

#### Teorema

Los mínimos de la función  $V(x)$  corresponderán a centros en el mapa de fases y sus máximos a puntos silla.

Incluso podemos calcular las funciones que definen las órbitas, pero sin su orientación, que tendremos que averiguar por otro método. En concreto

$$v = \pm \sqrt{2(C - V(x))} = \frac{dx}{dy} \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{C - V(x)}} = t + K$$

Lamentablemente las posibilidades de resolver la integral suelen ser más bien escasas.

**EJEMPLO 9**

Dibujar el mapa de fases de la ecuación exacta siguiente:

$$x'' = 1 - x^2$$

**Solución**

Como es una ecuación exacta, podemos extraer la función de la energía potencial, que será

$$V(x) = -x + \frac{1}{3} x^3$$

Si derivamos e igualamos a cero:

$$0 = -1 + \frac{1}{3} 3x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1$$

vemos que esta función tiene un máximo en  $x = -1$  y un mínimo en  $x = 1$ , que se corresponderán con un punto silla y un centro respectivamente. Cada órbita viene dada por cada valor de  $C$ , es decir, para cada nivel de energía del que se parte y en el que permanece (no hay rozamiento).

$$\frac{v^2}{2} + V(x) = C \quad \rightarrow \quad \frac{v^2}{2} - x + \frac{1}{3} x^3 = C$$

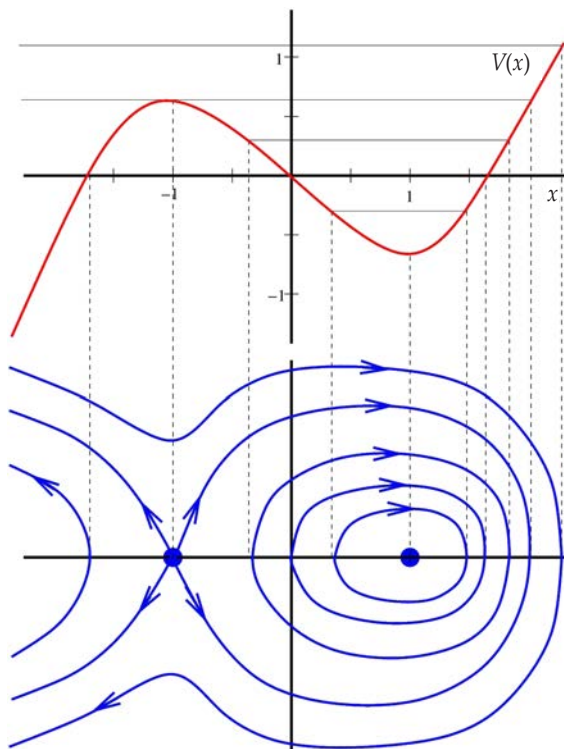
Para  $C = 0$ ,  $V(x) \leq 0$  si  $0 \leq x \leq \sqrt{3}$  y se trata de una curva cerrada simétrica que corta a  $v = 0$  en sus extremos y que rodea al mínimo situado en  $x = 1$ . Si  $x \leq -\sqrt{3}$ , la órbita solo corta a  $v = 0$  (eje horizontal del mapa de fases) en  $x = -\sqrt{3}$  y es una curva abierta. Paso algo muy similar cuando  $C < 0$ .

Si  $C = V$ , la energía corresponde al máximo de  $V$  y tenemos una curva que corta a  $v = 0$  en dos puntos, de tal modo que uno de ellos es un punto silla (el correspondiente al máximo de  $V$ ).

Además, la orientación de las órbitas es hacia la derecha en el lado de arriba y hacia la izquierda en el lado de abajo. Podríamos usar las técnicas ya vistas para sistemas autónomos en general, pero ya podemos atrevernos a dibujar el mapa de fases ayudándonos de la representación de la función  $V(x)$ .

.../...

.../...



Si nos fijamos un poco mejor y tratamos de darle una interpretación física, vemos que para niveles bajos de energía, pero por encima del mínimo de potencial, las órbitas corresponden a movimientos periódicos y el sistema está atrapado en el pozo de potencial que está definido por el mínimo de  $V(x)$  y delimitado por la derecha por la rama derecha del potencial y por la izquierda por el punto silla. Si vamos aumentando la energía, se producen órbitas cerradas más grandes que se corresponden a movimientos periódicos más amplios, hasta que superada la energía por encima del máximo de  $V(x)$ , la partícula escapa del pozo de potencial y se va al infinito.



## CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Diagonalización, autovalores y autovectores.
- Sistemas de ecuaciones autónomas.
- Mapas de fases.
- Uso de métodos aproximados para dibujar las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.
- Aplicación de métodos aproximados a problemas realistas.



## ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

### Enunciado 1

Resolver:

$$x' = 3x + 2y$$

$$y' = -6x - 4y + t \cos t$$

$$x(0) = y(0) = 0$$

### Enunciado 2

Resolver:

$$x' = x - 2y - t$$

$$y' = 2x - 3y - t$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

### Enunciado 3

Resolver:

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y \\y' &= 3x + 4te^{3t} \\x(0) &= y(0) = 1\end{aligned}$$

### Enunciado 4

Hallar la solución general del sistema homogéneo:

$$\begin{aligned}x' &= y + z \\y' &= x + z \\z' &= x + y\end{aligned}$$

### Enunciado 5

Dibujar el mapa de fases y hallar la solución general de:

$$\begin{aligned}x' &= 1 - x + 3y \\y' &= x + y - 1\end{aligned}$$

### Enunciado 6

Dibujar el mapa de fases de:

$$\begin{aligned}x' &= y - 2xy \\y' &= -2x + y^2\end{aligned}$$

### Enunciado 7

Dibujar el mapa de fases de:

$$\begin{aligned}x' &= y - y^2 \\y' &= x - x^2\end{aligned}$$



## Solución 1

Escrito en forma matricial el sistema es:

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \cos t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son  $\lambda = 0$  y  $\lambda = -1$  y la matriz  $P$ :

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

La solución será:

$$x = P \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{s-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \cos s \\ -2s \cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \sin t - t \cos t + 2 \cos t + \sin t - 2 \\ -t \sin t + 2t \cos t - 3 \cos t - 2 \sin t + 3 \end{pmatrix}$$

## Solución 2

Escrito en forma matricial el sistema es:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El autovalor  $\lambda = -1$  es doble. Las matrices  $P$  y  $P^{-1}$  son:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la solución:

$$x = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -te^t + e^t - 1 \\ -te^t + e^t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 - t \end{pmatrix}$$

### Solución 3

Escrito en forma matricial el sistema es:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4te^{3t} \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovalores  $\lambda = 3$ ,  $\lambda = -1$  y la matriz  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la solución:

$$x' = \begin{pmatrix} e^{3t} - [e^{3t}(-t^2/2 + t/4 - 1/16)] + \frac{e^{-t}}{16} \\ e^{3t} - [e^{3t}(-t^2/2 - 3t/4 + 3/16)] - \frac{3e^{-t}}{16} \end{pmatrix}$$

### Solución 4

Matricialmente:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Los autovalores son  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$  (doble) y vectores asociados  $v_1 = [1, 1, 1]^T$  y  $v_2 = [1, -1, 0]^T$ ,  $v_3 = [1, 0, -1]^T$ . La solución general será por tanto:

$$x = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Solución 5

El sistema es lineal, así que no hay que hacer aproximaciones.

El punto singular es el  $(1, 0)$  y la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son  $\lambda = \pm 2$ , por lo que es un punto silla. Los autovectores son  $[1, 1]^T$  y  $[3, -1]^T$ . Y la solución general de la homogénea más una solución particular como  $[1, 0]^T$  será:

$$x = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Solución 6

Los puntos son  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

Para  $(0, 0)$  tenemos:

$$\lambda = \pm 1, \quad v_1 = [1, 1]^T, \quad v_2 = [1, -1]^T$$

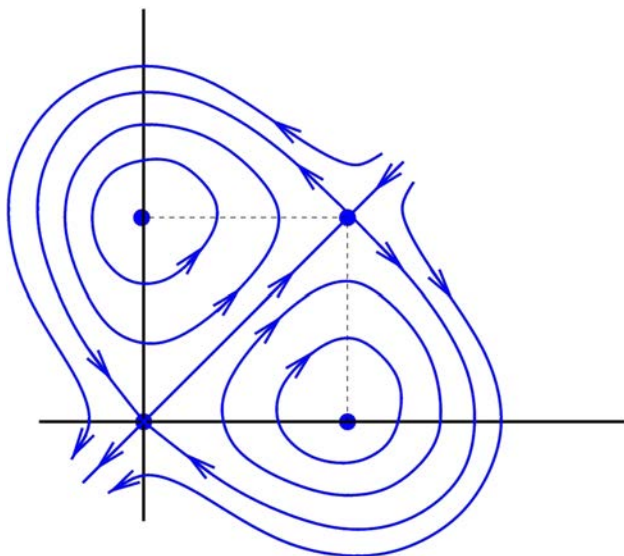
se trata de un punto silla.

Para  $(1, 1)$  tenemos:

$$\lambda = \pm 1, \quad v_1 = [1, -1]^T, \quad v_2 = [1, 1]^T$$

se trata de un punto silla.

Tanto  $(1, 0)$  como  $(0, 1)$  son centros. Y dando unos pocos valores al campo vectorial finalmente nos queda:



## Solución 7

Los puntos singulares serán  $x = 0, 2$  y  $5$ .

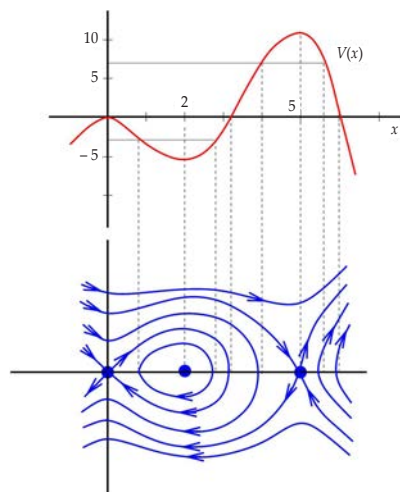
El mapa de fases se deduce de la función potencial siguiente:

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 5x^2$$

Además:

$$\begin{aligned} V(x) = 0 & \rightarrow x = 0 \\ & x = 10/3 \\ & x = 6 \end{aligned}$$

$$V(0) = 0, V(2) = -16/3, V(5) = 125/12$$



Y dando unos pocos valores al campo vectorial, finalmente nos queda lo que muestra la figura de la derecha.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa.
- Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Belmont: Interamericana.
- Elsigoltz, L. (1992). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Moscú: Mir.
- Fernández, C., Vázquez, F. J. y Vegas, J. M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Madrid: Paraninfo
- Guzmán, M. de. (1980). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de estabilidad y control*. Madrid: Alhambra.
- Hirsch, M. W. y Smale, S. (1983). *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Madrid: Alianza.
- Kreyszig, E. (2006). *Advanced engineering mathematics*. Nueva York: John Wiley and Sons.
- Milovanov, V. P. (2007). *Sinérgica y autoorganización. Modelización matemática del comportamiento humano*. Moscú: URSS.
- Milovanov, V. P. (2011). *Sinérgica y autoorganización. Sistemas socioeconómicos*. Moscú: URSS.
- Plaat, O. (1974). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Barcelona: Reverté.
- Ross, S. L. (1992). *Ecuaciones diferenciales*. Barcelona: Reverté.

