UNIDAD DIDÁCTICA

5

CIRCUITOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

La unidad 5 tiene como objetivo que comprendas la física básica de los circuitos lineales en régimen transitorio, es decir, cuando se producen cambios en las condiciones que los excitan. En particular, al finalizar esta unidad deberás:

- Comprender el concepto de «régimen transitorio».
- Comprender las diferentes posibilidades de generación de un régimen transitorio.
- Entender el concepto de «dispositivos que disipan potencia» frente a «dispositivos que la almacenan».
- Entender cómo se comportan los condensadores y bobinas cuando se alteran sus condiciones.
- Entender el circuito de primer orden *R*-*C* tanto en conexión como en desconexión.
- Entender el circuito de primer orden *R*-*L* tanto en conexión como en desconexión.
- Comprender los aspectos de potencia y energía que influyen en los transitorios de los circuitos *R*-*C* y *R*-*L*.

1. INTRODUCCIÓN

En la unidad 4 hemos visto el análisis detallado de los circuitos lineales cuando los hacíamos funcionar en corriente continua. En esta unidad, que será más corta que las anteriores, vamos a analizar qué ocurre cuando uno de estos circuitos es sometido a un cambio brusco en sus condiciones.

Imagínate lo que sucede al encender una luz, cuando el motor de la lavadora arranca o cuando giras la llave del contacto del coche y el motor de arranque se conecta a la batería. Antes de esto, los circuitos estaban en condiciones estáticas, sin ningún tipo de excitación. En un instante, al girar la llave del coche o al apretar el botón de la lavadora, conectamos los circuitos a su fuente de tensión. ¿Qué es lo que ocurre? ¿Lo que pasa en el circuito en esos momentos se parece a lo que ocurre en un circuito de corriente continua? Ya te imaginarás que la respuesta es que no se parece, que ocurren fenómenos transitorios y que, seguramente, tiendan a durar poco tiempo hasta llegar a una nueva estabilidad.

En esta unidad vamos a analizar de forma matemática cómo ocurren algunos de estos fenómenos transitorios e intentaremos explicar, al menos de forma introductoria, por qué son importantes en el diseño de sistemas eléctricos y electrónicos.

2. ¿EN QUÉ REGÍMENES PUEDE FUNCIONAR UN CIRCUITO?

A estas alturas del manual ya manejamos bastante bien el concepto de «circuito lineal». Sabemos que representan de una forma realista los sistemas eléctricos y electrónicos que nos encontraremos en el mundo y que se usan para casi todo: controlar un motor, comunicar dos procesadores o iluminar las calles.

Dedicamos toda la unidad 4 a presentarlos y, además, los estudiamos en profundidad cuando tuvimos nuestros circuitos sometidos a corriente continua. De manera que la primera pregunta que se nos puede ocurrir es la siguiente: ¿podemos hacer funcionar los circuitos lineales en otros tipos de modos? Es decir, además de en corriente continua, ¿existen otros regímenes? Por supuesto que existen.

En general, en electricidad y electrónica se suelen diferenciar tres tipos de regímenes o formas de excitar un circuito:

- Régimen permanente en continua (RPC).
- Régimen permanente sinusoidal (RPS).
- Régimen transitorio.

2.1. RÉGIMEN PERMANENTE EN CONTINUA

Dicho de forma rápida, el RPC es el análisis de un circuito en corriente continua, de la misma forma que lo hicimos en la unidad 4.

De una manera más formal, podemos decir que un circuito está en RPC cuando:

- Todas las fuentes del circuito, de tensión y corriente, son constantes en el tiempo.
- El circuito lleva una gran cantidad de tiempo excitado por las fuentes, es decir, hace mucho tiempo que se encendieron las fuentes del circuito.

¿Por qué es necesario que las fuentes se hayan encendido hace mucho tiempo? Es necesario para que, como veremos en esta unidad, cualquier variación temporal debida a encender o apagar estas fuentes haya desaparecido, es decir, para que se hayan disipado todos los transitorios.

2.2. RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

De forma muy breve: el RPS es el análisis de circuitos en corriente alterna. Aún no hemos estudiado este análisis, lo haremos en la unidad siguiente, pero, desde un punto de vista matemático, el tratamiento es muy similar al análisis en continua.

De una manera más formal, podemos decir que un circuito está en RPS cuando:

- Todas las fuentes del circuito, de tensión y corriente, tienen forma de señal sinusoidal.

- El circuito lleva una gran cantidad de tiempo excitado por las fuentes, o, lo que es lo mismo, hace mucho que se encendieron todas las fuentes del circuito.

De nuevo es necesario que las fuentes lleven gran cantidad de tiempo excitando el circuito para que cualquier régimen transitorio se haya disipado y podamos hacer el análisis del régimen permanente.

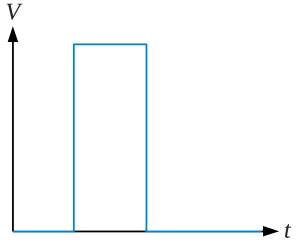
2.3. RÉGIMEN TRANSITORIO

> El **régimen transitorio** es, en realidad, cualquier otro régimen de funcionamiento. Un régimen transitorio ocurre en el tiempo en el que un circuito pasa de un régimen permanente a otro.

Una manera muy sencilla de generar un régimen transitorio en un circuito es simplemente encendiendo las fuentes o apagándolas. Cuando esto ocurre, y lo veremos con más detalle, las corrientes empiezan a fluir (o dejar de fluir) y las tensiones se elevan (o empiezan a caer) hasta llegar a un nuevo régimen permanente.

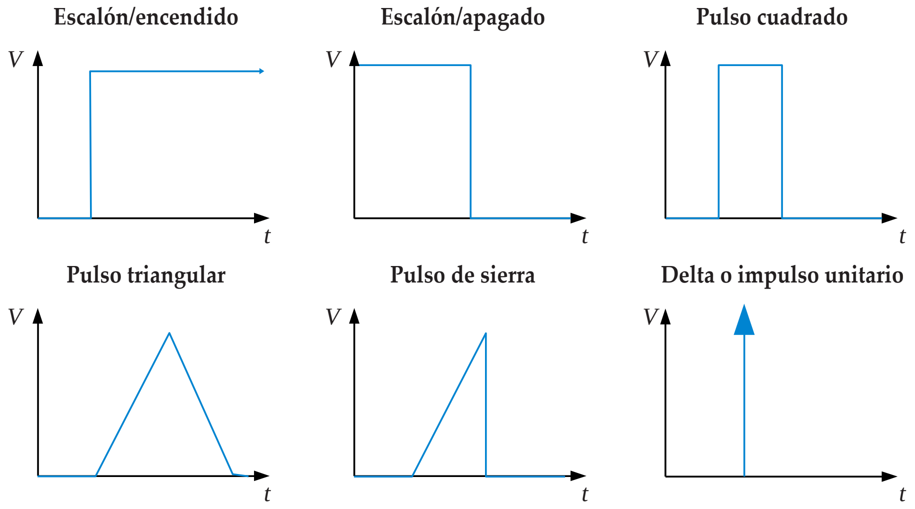
¿De qué formas podemos generar un régimen transitorio en un circuito? Además de los **transitorios de encendido** y **transitorios de apagado** que acabamos de describir, en general, podemos generar transitorios en un circuito si usamos fuentes de tensión o corriente que generen excitaciones que no sean continuas en el tiempo y que tampoco tengan forma sinusoidal.

Por ejemplo, podríamos diseñar una fuente de tensión que tenga la particularidad de generar un pulso como el que dibujo aquí:



Si esta fuente está en un circuito, es equivalente a generar un encendido y un apagado seguidos, y, por lo tanto, nos generará regímenes transitorios en los circuitos.

Aunque no vamos a usarlos a lo largo de esta unidad, en un análisis transitorio más profundo que el nuestro es muy habitual analizar cómo se comporta un circuito (y, en general, un sistema lineal) ante determinados tipos de excitaciones de entrada, como, por ejemplo, estos que están dibujados a continuación:



Nota. Cuando más adelante resolvamos circuitos en régimen transitorio, intentaremos buscar expresiones de la corriente y de la tensión como funciones del tiempo. En la unidad 4, las corrientes y las tensiones que buscábamos en un circuito eran constantes en el tiempo y las denotábamos con las letras mayúsculas I y V. Ahora siempre vamos a hablar de ambas como magnitudes que varían en el tiempo. En general, las expresaremos así:

$$v(t) \quad \text{e} \quad i(t)$$

Esta forma de escribir la tensión y la corriente nos indica que tanto la tensión como la corriente varían o dependen del tiempo.

3. COMPONENTES DE UN CIRCUITO EN RÉGIMEN TRANSITORIO

Si dibujáramos un circuito en régimen transitorio, esperaríamos que los componentes que lo componen fueran los mismos que ya hemos visto en un circuito de corriente continua. Al fin y al cabo, las resistencias, los condensadores, las fuentes o los cables representaban de forma simbólica componentes reales de los circuitos.

Y así es. Los componentes de un circuito en régimen transitorio son los mismos, y, además, vamos a añadir un nuevo componente en esta unidad del que estudiaremos su física más adelante. Pero, aunque los componentes sean los mismos que en régimen permanente en continua, su comportamiento, en general, será diferente. Vamos a analizar el comportamiento dinámico de las resistencias, de los condensadores y de un nuevo componente: las bobinas o inductancias.

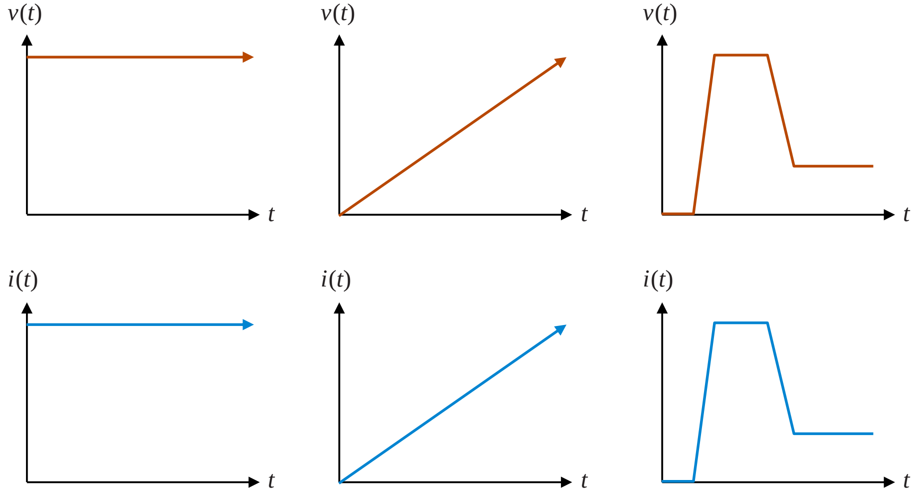
3.1. RESISTENCIAS

3.1.1. Comportamiento dinámico de las resistencias

Las resistencias en régimen transitorio se comportan de la misma manera que lo hacen en régimen estacionario. Al fin y al cabo, la relación entre la tensión y la corriente es simplemente una relación multiplicativa que nos da la ley de Ohm. Así pues, podemos escribir matemáticamente: $v(t) = Ri(t)$

Las resistencias, como ya vimos, son dispositivos que disipan o consumen energía. Es importante comprender que una resistencia no es capaz de almacenar energía en régimen estacionario y, por lo tanto, tampoco lo va a hacer en régimen transitorio. **Una resistencia solo disipa la potencia** que se le entrega.

3.1.2. Ejemplos de variaciones temporales de tensión y corriente



Para hacernos una idea comparativa, anteriormente hemos dibujado unas gráficas que representan tensiones y corrientes en una resistencia en función del tiempo. De nuevo, tenemos que recordar que en una resistencia la tensión es igual que la corriente multiplicada por el valor de la resistencia.

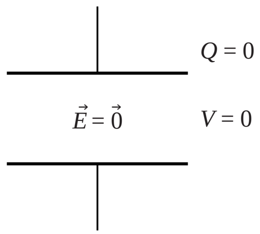
3.2. CONDENSADORES

3.2.1. Comportamiento dinámico de los condensadores

En el análisis en corriente continua dedujimos que un condensador se comporta como un circuito abierto, es decir, no circula corriente a través de él. Esto es así porque entre ambas placas de un condensador hay un material aislante, que es el dieléctrico, y que no permite circular corriente.

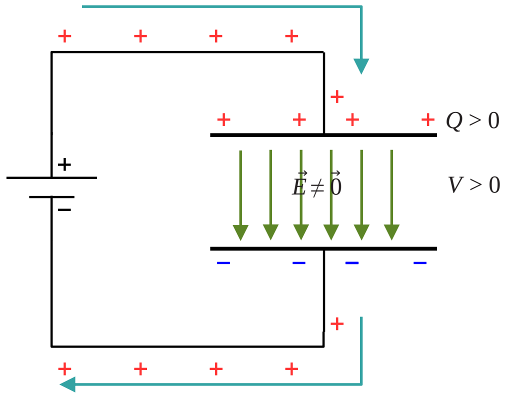
¿Ocurre lo mismo en régimen transitorio? Seguramente intuyas que no es así. Lo vamos a demostrar de dos maneras diferentes. La primera de ellas es puramente cualitativa, pero nos va a dar una muy buena idea de cómo se comportan los condensadores cuando los sometemos a variaciones de tensión.

Imagínate un condensador de placas paralelas como el que dibujo más abajo. Este condensador lo tenemos totalmente descargado y, por tanto, sin ninguna tensión entre sus placas:



En un momento determinado, este condensador lo conectamos a una fuente de tensión y vamos, poco a poco, subiendo la tensión a la que el condensador está sometido.

Fíjate en la figura siguiente. Cuando conectamos la fuente de tensión, el condensador empieza a acumular carga Q en la placa superior. Esta carga Q va a inducir una carga $-Q$ en la placa inferior. ¿De dónde viene la carga Q positiva de la placa superior? Lógicamente, de la fuente de tensión, es decir, la fuente de tensión va a inyectar carga en la placa superior para cargar el condensador y ponerlo a un potencial. A su vez, la carga $-Q$, inducida en la placa inferior, expulsa carga Q positiva que vuelve, por la parte inferior, a la fuente de tensión:



Este proceso de entrada y salida de carga se para en un momento dado. ¿En cuál? Cuando el condensador se carga a la tensión de la fuente, deja de intercambiar carga con la fuente y el sistema entra en régimen permanente en continua.

Pero ¿qué es lo que ha pasado en realidad? Ha ocurrido que al menos durante un tiempo ha estado entrando corriente al condensador. Para poder elevar el potencial de la placa superior, la fuente ha estado inyectándole carga durante un tiempo. Recuerda que la corriente es la cantidad de carga intercambiada por unidad de tiempo y, por tanto, podemos decir lo siguiente:

> Cuando a un condensador se le cambia la tensión a la que está sometido, se produce una carga (o descarga) del condensador y durante este tiempo circula una corriente que permite que el condensador se cargue (o se descargue).

Este mismo análisis lo podemos hacer de una forma cuantitativa, recurriendo a las matemáticas, y obtener una expresión para la relación entre la tensión y la corriente. Vamos a verlo. Si recordamos, en un condensador hay una relación entre la carga que almacena una de sus placas y la tensión que hay entre sus placas:

$$Q = C \cdot V$$

Esta expresión es válida para cualquier condensador y es aplicable en condiciones dinámicas. Sabiendo esto, ¿qué es lo que ocurre cuando sometemos un condensador a una tensión $v(t)$ que varía con el tiempo? Lo que ocurre es que la carga que almacena también varía con el tiempo. Así:

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

Si derivamos en ambos lados de la expresión, obtenemos una nueva expresión muy interesante:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

Nota. Recuerda que, como vimos en la unidad 3, la capacidad del condensador, en general, no depende de la tensión a la que se somete y, por lo tanto, la capacidad C sale de la derivada.

Según vimos en la unidad anterior, la corriente se definía como la derivada de la carga que atravesaba una superficie o circulaba por un conductor con respecto al tiempo; por tanto:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

Y acabamos de obtener la relación que hay entre la corriente y la tensión en un condensador. Leyendo la expresión anterior, podemos decir lo siguiente:

> En un condensador, la corriente que lo atraviesa es la derivada (o variación con respecto al tiempo) de la tensión a la que está sometido, multiplicada por su capacidad.

Dicho de otra forma:

- Si la tensión es continua (y constante), $i(t) = 0$, ya que la derivada de una constante es 0. Esto ya lo sabíamos. En corriente continua, un condensador es un circuito abierto y por él no circula corriente.
- Si la tensión varía de forma brusca, la corriente será muy elevada, ya que si dv/dt es muy grande, también lo será la corriente.
- Si la tensión varía de forma muy lenta, muy despacio, la corriente será muy pequeña, ya que dv/dt tendrá un valor muy bajo.

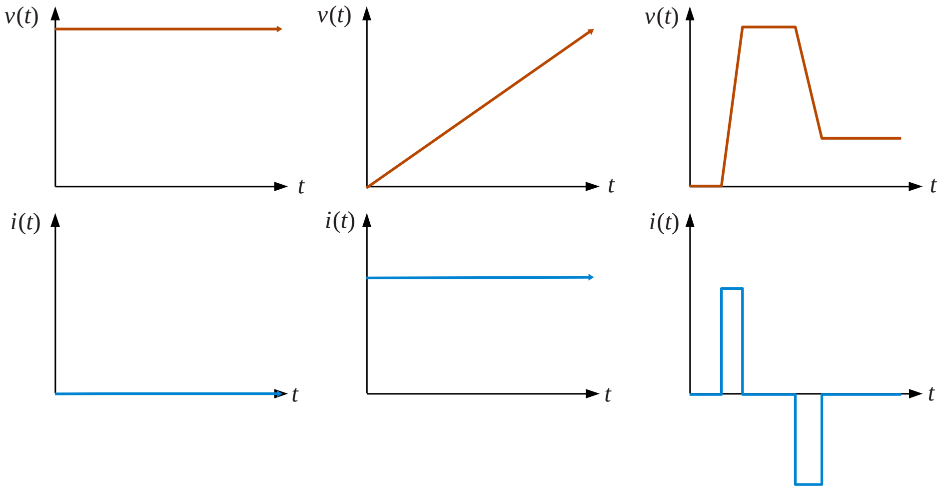
Un condensador es un componente de un circuito al que no le gustan los cambios bruscos en la tensión entre sus placas. Si se producen estos cambios bruscos, el condensador responde con grandes variaciones de la corriente, es decir:

> Un condensador se opone a las variaciones bruscas o rápidas en la tensión, intentando mantener siempre sin cambios la tensión entre sus terminales.

Esto es así, además de por la expresión matemática que acabamos de ver, por un motivo físico: **un condensador**, ya lo sabemos, **almacena energía** en su interior, y lo hace en forma de energía electrostática. Es, por tanto, una forma de energía potencial. Sabemos que cambiar la energía potencial de un sistema electrostático requiere de trabajo y, por tanto, cambiar la diferencia de potencial en los bornes de un condensador requiere realizar este trabajo.

3.2.2. Ejemplos de variaciones temporales de tensión y corriente

Fíjate en las siguientes gráficas que he dibujado más abajo. Son la corriente y la tensión en un condensador como función del tiempo. Recuerda que la corriente en un condensador es la derivada de la tensión (multiplicada por C, la capacidad):



Compara estas gráficas con las que dibujamos para la resistencia.

3.3. BOBINAS O INDUCTANCIAS

Vamos a aprovechar este apartado de la unidad para introducir un nuevo componente de los circuitos: las bobinas o inductancias. A diferencia de los condensadores, aún no hemos visto los fundamentos físicos que nos permitan explicar el comportamiento de estos componentes, pero los veremos dentro de pocas unidades. Por lo tanto, tendrás que asumir como ciertas las expresiones matemáticas que vamos a usar en este apartado.

Para que te hagas una idea de lo que es una bobina, fíjate en la imagen de la derecha.

Bobina

Fuente: Peripitus, Creative Commons-Share Alike. Disponible en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Toroidal_inductor.jpg.

En realidad, aunque no sepamos nada de su física interna, un inductor es, por así decirlo, el componte dual de un condensador. Una bobina almacena energía en forma de campo magnetostático en su interior y, al igual que el condensador, no es capaz de disipar potencia.

3.3.1. Comparación entre una bobina y un condensador

Este cuadro compara las bobinas con los condensadores.

	Condensador	**Bobina**
Parámetro característico	Capacidad (C)	Inductancia (L)
Unidades	Faradios	Henrios
Símbolo circuital		
Relación entre *V* e *I*	$i(t) = C \cdot \dfrac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt}$

…/…

	Condensador	Bobina
.../...		
Energía almacenada	$U = \frac{1}{2} C V^2$	$U = \frac{1}{2} L I^2$

3.3.2. Comportamiento dinámico de las bobinas

Aunque no podamos aún explicar de forma física lo que ocurre en el interior de una bobina, sí que podemos recurrir a la expresión matemática de la relación entre la corriente y la tensión para poder describir cuál es su comportamiento dinámico.

De forma «dual» o «complementaria» a un condensador, en una bobina la tensión que hay entre sus bornes es proporcional a la derivada de la corriente que la atraviesa, según esta expresión:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Leyendo la expresión anterior, podemos decir lo siguiente:

> En una bobina, la tensión entre sus contactos es la derivada (o variación con respecto al tiempo) de la corriente que la atraviesa multiplicada por su inductancia.

Dicho de otra forma:

- Si la corriente es continua (y constante), $v(t) = 0$, ya que la derivada de una constante es 0. Esto es nuevo: en un circuito de corriente continua, una bobina se comporta como un cortocircuito, es decir, como un cable.
- Si la corriente varía de forma brusca, la tensión será muy elevada, ya que si di/dt es muy grande, también lo será la tensión.
- Si la corriente varía de forma muy lenta, muy despacio, la tensión será muy pequeña, ya que di/dt tendrá un valor muy bajo.

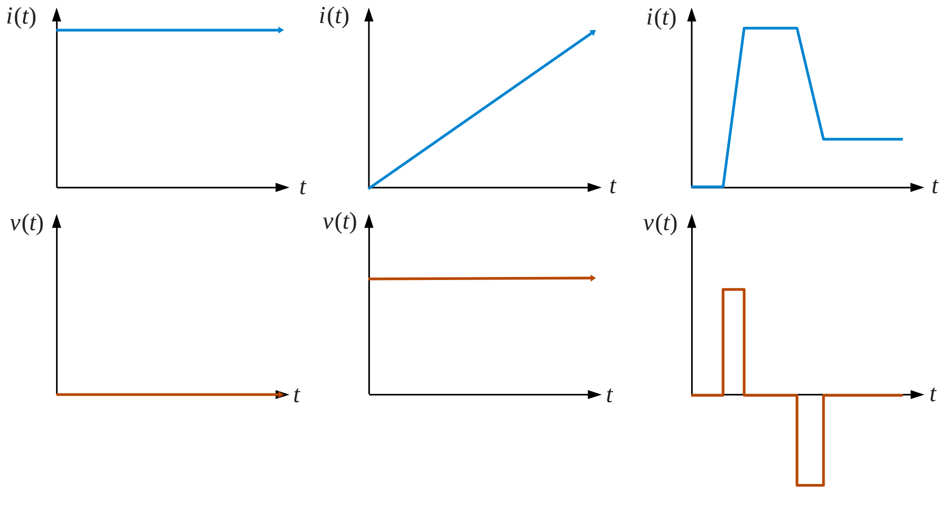
Una bobina es un componente de un circuito al que no le gustan los cambios bruscos en la corriente que la atraviesa. Si se producen estos cambios bruscos, la bobina responde con grandes tensiones, es decir:

> Una bobina se opone a las variaciones bruscas o rápidas en la corriente, es decir, intenta mantener la corriente que la atraviesa constante en el tiempo.

Esto es así porque una bobina, al igual que un condensador, **almacena energía**, solo que, en este caso, lo hace en forma de campo magnetostático (en lugar de electrostático), y hacer variar esa energía almacenada requiere un trabajo.

3.3.3. Ejemplos de variaciones temporales de tensión y corriente

En las siguiente gráficas tenemos la corriente y la tensión en una bobina como función del tiempo. Hay que recordar que la tensión en una bobina es la derivada de la corriente, multiplicada por L, la inductancia:



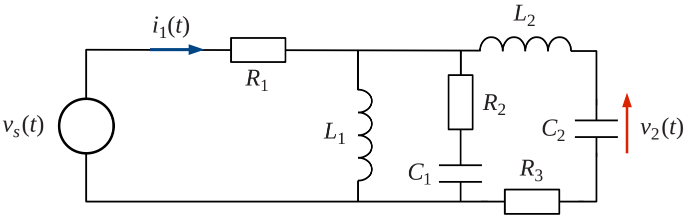
Te sugiero que retrocedas hasta el análisis que hicimos del condensador y que te fijes en las gráficas que dibujamos entonces. Verás que son iguales, solo que intercambiando tensión por corriente (e inductancia por capacidad).

4. ANÁLISIS DE REGÍMENES TRANSITORIOS

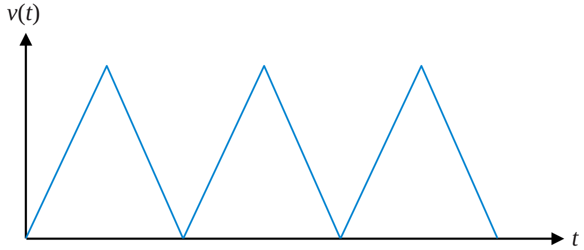
Puesto que ya conocemos cómo se comportan los componentes de los circuitos en condiciones dinámicas, podemos plantearnos la resolución de circuitos cuando las condiciones del mismo varían. Contamos con las siguientes herramientas:

- Leyes de Kirchoff. Son leyes que funcionan bien en régimen transitorio, ya que, al fin y al cabo, son aplicables a los circuitos en general.
- Expresiones matemáticas de los componentes.

Con estas dos herramientas podríamos plantearnos resolver la tensión y la corriente que nos piden en un circuito como el de la figura:



Donde la fuente genera una tensión que tiene esta forma cuando la medimos en el tiempo:



El problema que tiene este análisis es que, como veremos en los siguientes apartados, requiere resolver ecuaciones diferenciales que se vuelven muy complejas en cuanto empezamos a añadir mallas al circuito.

La estrategia habitual en ingeniería para resolver este tipo de circuitos complejos en régimen transitorio es usar la transformada de Laplace. Nosotros, en este manual, nos que-

Sumario

daremos en un análisis de casos particulares de transitorios: encendidos y apagados de circuitos simples *R-C* y *L-C*. Resolver estos casos simples nos permitirá tener una idea de la complejidad del problema, al mismo tiempo que nos permitirá hacernos una idea analítica de la forma que tienen los transitorios de primer orden.

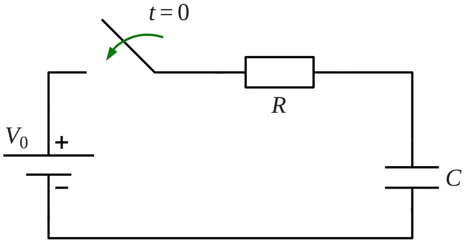
5. ANÁLISIS DEL TRANSITORIO EN UN CIRCUITO *R-C*

Para empezar a analizar regímenes transitorios de primer orden vamos a estudiar el circuito *R-C*. Un circuito *R-C* es un circuito que solo tiene una resistencia y un condensador. Analizaremos su transitorio de encendido y su transitorio de apagado.

5.1. TRANSITORIO DE ENCENDIDO EN UN CIRCUITO *R-C*

5.1.1. Presentación del circuito

Este es el circuito que vamos a resolver para analizar el transitorio de encendido *R-C*:



Es un circuito relativamente simple; solo tiene tres componentes: una fuente de tensión continua, de valor V_0 voltios, una resistencia de valor R y un condensador de valor C. Además, hemos situado un pequeño interruptor que está abierto antes de $t = 0$.

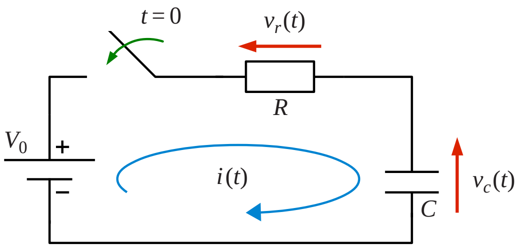
Esto significa que el circuito, antes de cerrar el interruptor, no está conectado a la fuente. Podemos asumir que lleva en ese estado mucho tiempo, es decir, que antes de cerrar el interruptor está en un régimen permanente en continua de 0 *V*.

En $t = 0$, como indica el dibujo, se cierra el interruptor y el circuito *R-C* se conecta a la fuente, y es aquí donde empezamos a resolver el circuito.

5.1.2. Aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito

Como dijimos en el apartado anterior, las leyes de Kirchhoff siguen siendo válidas en un régimen transitorio y, en general, en cualquier circuito de parámetros concentrados, ya que están basadas en fundamentos físicos de continuidad de la carga y del campo eléctrico conservativo. Dicho esto, podemos aplicar la ley de Kirchhoff de las tensiones al circuito.

Veamos esta figura:



Aquí tenemos dibujadas las tensiones que aparecerán en el circuito al cerrar el interruptor en el instante t = 0. Al circuito le aplicamos la ley de Kirchhoff para las mallas:

$$V_0 = v_r(t) + v_c(t) = R \cdot i(t) + v_c(t)$$

Además, sabemos cuál es la expresión de la corriente en un condensador en función de la tensión en sus placas:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

Como la corriente que circula por el condensador es la misma que circula por todo el circuito, podemos reescribir la ecuación de la malla así:

$$V_0 = R \cdot C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

5.1.3. Resolución de la ecuación diferencial

Vamos a volver a escribir la ecuación que describe el comportamiento dinámico del circuito *R-C* cuando lo encendemos:

$$V_0 = R \cdot C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

Esta expresión es una ecuación diferencial de primer orden, lineal, no homogénea. Si podemos resolver esta ecuación, podremos calcular la tensión del condensador en función del tiempo; con ella, la corriente del circuito en función del tiempo, y, por último, la tensión en la resistencia, también como una función del tiempo.

Antes de resolver esta ecuación vamos a hacer un cambio de notación para evitar arrastrar la expresión de la derivada.

Expresaremos la derivada temporal de esta manera:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = v_c'$$

Usando esta notación podemos reescribir la ecuación diferencial del circuito así:

$$V_0 = RC \cdot v_c' + v_c$$

Aunque no es el objetivo de este manual resolver ecuaciones diferenciales, en este caso la resolveremos paso a paso para que tengas una idea del método de resolución.

El método para resolver la ecuación diferencial de primer orden no homogénea consiste en buscar solución a la versión homogénea de la ecuación y otra solución a la no homogénea, y después combinarlas. Vamos a verlo paso a paso.

En primer lugar, vamos a resolver la ecuación diferencial homogénea, es decir, aquella en la que el término constante es 0. Llamaremos a esta solución de la ecuación homogénea v_{ch}:

$$RC \cdot v_{ch}' + v_{ch} = 0$$

Vamos a aislar las funciones a un lado, y, para ello, operamos así:

$$RC \cdot v'_{ch} = -v_{ch} \rightarrow \frac{v'_{ch}}{v_{ch}} = \frac{-1}{RC}$$

Si integramos con respecto al tiempo en ambos lados de la ecuación, tendremos:

$$\int \frac{v'_{ch}}{v_{ch}} dt = \int \frac{-1}{RC} dt$$

Y estamos a un paso de resolver la ecuación homogénea. Lo que está a la derecha es una integral inmediata que no tiene mayor problema. A la izquierda tenemos la derivada de una función partida por la misma función. Esta es la derivada del logaritmo neperiano. La integral de la derivada del logaritmo neperiano es el logaritmo neperiano; por tanto:

$$\ln(v_{ch}) = \frac{-t}{RC} + C$$

Fíjate que solo está escrita una constante de integración *C*. En realidad, podríamos haber puesto dos, una a cada lado, y luego pasar una al otro lado restando y agrupándolas en una sola, pero el resultado sería el mismo.

Así pues, para despejar v_{ch} solo tenemos que hacer la exponencial de ambos miembros de la expresión, y así:

$$v_{ch}(t) = e^{\frac{-t}{RC}+C} = e^{C} \cdot e^{\frac{-t}{RC}} = M \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

En la expresión anterior hemos operado para evitar dejar la constante *C* en el exponente y la hemos convertido en una constante *M* multiplicativa, aplicando las propiedades de la exponencial.

Con el paso anterior ya tenemos resuelta la ecuación homogénea. Ahora nos falta por encontrar una función particular para la no homogénea, v_{cp}, que cumpla la ecuación. Para ello, vamos a suponer que v_{cp} es constante. Bajo esta suposición, la ecuación queda muy sencilla, ya que la derivada de una constante es 0; por tanto:

$$V_0 = RC \cdot v'_{cp} + v_{cp} \rightarrow V_0 = v_{cp}$$

Sumando ambas soluciones, tendremos una solución general de la ecuación diferencial:

$$v_c(t) = M \cdot e^{\frac{-t}{RC}} + V_0$$

5.1.4. Cálculo de la constante de integración

Para acabar de resolver la ecuación y obtener la expresión de la tensión en el condensador como una función del tiempo, solo nos queda calcular el valor de la constante M. Para ello usaremos las condiciones iniciales del problema.

Sabemos el valor que tiene que tener la tensión en el condensador cuando $t = 0$, ¿verdad? Así es. Antes de cerrar el interruptor sabemos que el condensador está descargado y que, por tanto, $v_c(0) = 0$.

Por consiguiente, si evaluamos en $t = 0$ la expresión anterior, tendremos que:

$$v_c(0) = M \cdot e^{\frac{-0}{RC}} + V_0 = 0 \quad \rightarrow \quad M + V_0 = 0 \quad \rightarrow \quad M = - V_0$$

5.1.5. Tensión y corriente en función del tiempo

Una vez que hemos resuelto el problema de la constante M, podemos escribir la función que describe la tensión del condensador en función del tiempo:

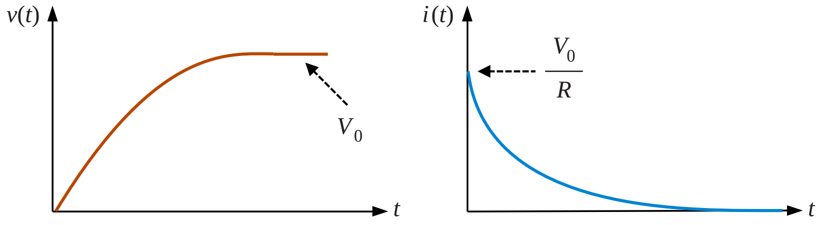
$$v_c(t) = V_0 - V_0 \cdot e^{\frac{-t}{RC}} = V_0(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

Y también podemos deducir cuál es la corriente del condensador, y, por tanto, la del circuito, simplemente derivando y multiplicando por C. Así:

$$i_c(t) = i(t) = \frac{V_0}{R} \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Dicho esto, acabamos de calcular la expresión de carga de un condensador. Es decir, acabamos de deducir qué es lo que pasa en un condensador según se va cargando.

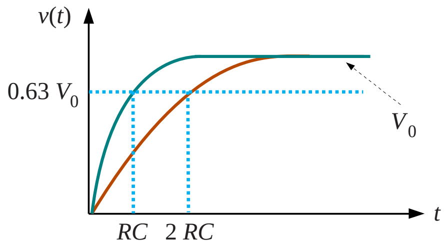
Vamos a dibujar cómo es, en el tiempo, la tensión y la corriente en el condensador:



Si analizamos con cuidado las gráficas, podemos ver cómo, una vez que pasa suficiente tiempo, el régimen transitorio va desapareciendo, la corriente en el condensador se hace cero y toda la tensión de la fuente cae sobre el condensador. Este resultado, una vez transcurrido una gran cantidad de tiempo, es exactamente igual que si hubiéramos analizado el circuito en corriente continua: el condensador en régimen permanente en continua se comporta como un circuito abierto.

5.1.6. Constante de tiempo

En análisis transitorio, al valor $\tau = RC$ se le llama «constante de tiempo del circuito». Este valor afecta directamente al tiempo que tarda un circuito en llegar al régimen permanente. En la siguiente figura hemos dibujado la tensión en dos circuitos *R*-*C* en transitorio de encendido, uno de ellos con una constante de tiempo el doble de la del otro:



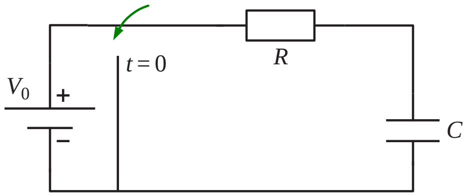
Si te fijas en el gráfico, podrás ver que la constante de tiempo es justo el tiempo que el circuito tarda en cargar el condensador hasta el valor de $v_c \simeq 0.63\ V_0$, o, lo que es lo mismo, ha llegado a un 63 % de su valor final. Matemáticamente es fácil de deducir. Solo hay que evaluar la tensión del condensador en $t = \tau = RC$. Así:

$$v_c(\tau) = V_0\left(1 - e^{\frac{-RC}{RC}}\right) = V_0(1 - e^{-1}) \simeq 0.63\ V_0$$

5.2. TRANSITORIO DE APAGADO EN UN CIRCUITO *R*-*C*

5.2.1. Presentación del circuito

Este es el circuito que vamos a resolver para analizar el transitorio de apagado *R*-*C*:

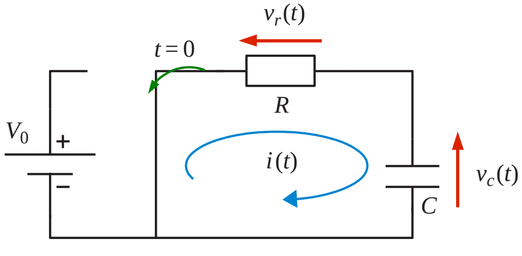


Es el mismo circuito que hemos visto en el caso anterior, solo que, en lugar de tener el interruptor abierto, este está inicialmente cerrado. Esto significa que el circuito, antes de abrir el interruptor, está conectado a la fuente. Podemos asumir que lleva en ese estado mucho tiempo, es decir, que, antes de cerrar el interruptor, está en un régimen permanente en continua de V_0 voltios.

En $t = 0$, como indica el dibujo, se abre el interruptor y el circuito *R*-*C* se desconecta de la fuente y se cierra sobre sí mismo, y es aquí donde empezamos a resolver el circuito.

5.2.2. Aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito

En la siguiente figura he dibujado el circuito una vez que se cierra el interruptor y comienza el régimen transitorio:



Como verás, están dibujadas las tensiones que hay en el circuito al cerrar el interruptor en el instante $t = 0$. El sentido de la corriente que hemos dibujado es una apuesta al sentido que tendrá una vez resolvamos el circuito. Si el valor nos sale negativo, significa que, en el transitorio de apagado, la corriente circula en el sentido contrario al que está aquí dibujado.

Al igual que en el caso anterior, podemos aplicar la ley de Kirchhoff para las mallas y nos queda una ecuación con esta forma:

$$0 = v_r(t) + v_c(t) = R \cdot i(t) + v_c(t)$$

De nuevo, aplicamos la expresión de la corriente en un condensador en función de la tensión en sus placas:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

Por tanto, podemos reescribir la ecuación de la malla, ya que la corriente que circula por el condensador es la misma que la que circula por todo el circuito. Así:

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = 0$$

5.2.3. Resolución de la ecuación diferencial

Como acabamos de ver, la ecuación diferencial que rige la dinámica del apagado en un circuito *R*-*C* es esta:

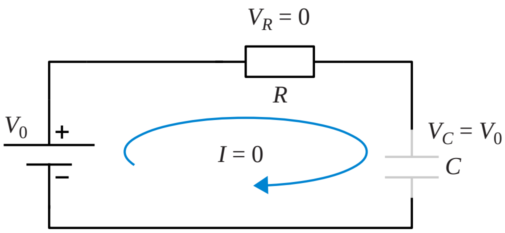
$$R \cdot C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = 0$$

Esta ecuación diferencial se parece mucho a la que obtuvimos en el caso anterior, con la diferencia de que, en esta ocasión, la ecuación es ya homogénea. Esta ecuación homogénea ya la resolvimos como un paso intermedio en el análisis del transitorio de encendido, y el resultado que obtuvimos fue:

$$v_c(t) = M \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

5.2.4. Cálculo de la constante de integración

Aún nos queda calcular el valor de la constante M. Para ello, usamos las condiciones iniciales del problema, y es que sabemos el valor que tiene que tener la tensión en el condensador cuando $t = 0$, ¿verdad? Antes de cerrar el interruptor tenemos claro que el circuito está en régimen permanente en continua y, por tanto, el condensador es un circuito abierto, y toda la tensión V_0 cae sobre él, como en esta figura en la que se ve que la corriente, antes de cerrar el interruptor, es 0:



Así pues, en el instante $t = 0$ tenemos que $v_c(0) = V_0$ y, por tanto, la solución ha de cumplir esta condición inicial. Si evaluamos $v_c(t)$ en $t = 0$, tendremos que:

$$v_c(0) = V_0 = M \cdot e^0 \quad \longrightarrow \quad M = V_0$$

5.2.5. Tensión y corriente en función del tiempo

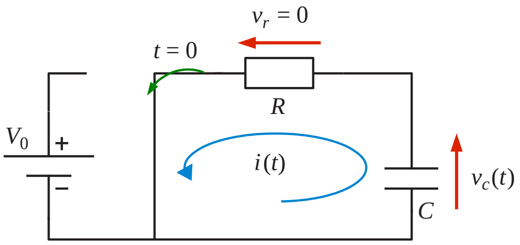
Ahora ya podemos escribir la tensión del condensador en función del tiempo así:

$$v_c(t) = V_0 \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Y también podemos deducir cuál es la corriente del condensador, y del circuito, simplemente derivando y multiplicando por C. Así:

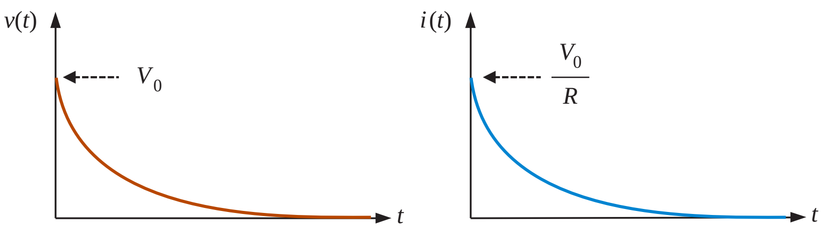
$$i_c(t) = i(t) = \frac{-V_0}{R} \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

En realidad, el signo menos de la corriente del circuito indica que la corriente circula en el sentido contrario al que hemos dibujado en nuestra suposición. Si la dibujamos en sentido contrario, podemos cambiarla de signo así:



$$i_c(t) = i(t) = \frac{V_0}{R} \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Dicho esto, acabamos de calcular la ecuación que rige el proceso de descarga de un condensador y que nos permite entender cómo es la tensión en sus bornes según va perdiendo carga. Vamos a dibujar cómo es, en el tiempo, la tensión y la corriente en el condensador:



Si nos fijamos bien en las gráficas, veremos cómo, una vez que pasa suficiente tiempo, el régimen transitorio va desapareciendo y la corriente y la tensión en el condensador se hacen 0. Exactamente igual que si hubiéramos analizado el circuito en corriente continua.

5.2.6. Constante de tiempo

Al igual que en el proceso de carga, en el análisis de apagado, al valor $\tau = RC$ se le llama «constante de tiempo del circuito». En este caso, la constante de tiempo indica el tiempo que tarda el condensador de pasar desde su tensión máxima de carga hasta $v_c \simeq 0.36\ V_0$, o, lo que es lo mismo, la tensión ha caído un 63 %. Es fácil de calcular evaluando la expresión de la tensión del condensador en $t = \tau = RC$:

$$v_c(\tau) = V_0 \cdot e^{\frac{-RC}{RC}} = V_0 \cdot e^{-1} \simeq 0.36\ V_0$$

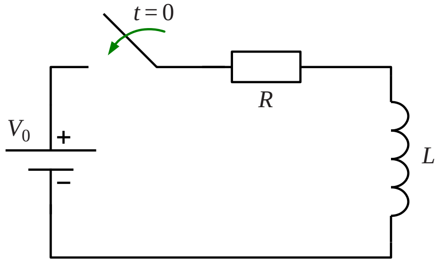
6. ANÁLISIS DEL TRANSITORIO EN UN CIRCUITO *R-L*

En este apartado vamos a analizar regímenes transitorios de primer orden de un circuito *R-L*. Un circuito *R-L* es un circuito que solo tiene una resistencia y una bobina. Analizaremos su transitorio de encendido y su transitorio de apagado.

6.1. TRANSITORIO DE ENCENDIDO EN UN CIRCUITO *R-L*

6.1.1. Presentación del circuito

Este es el circuito que vamos a resolver para analizar el transitorio de encendido en un circuito *R-L*:

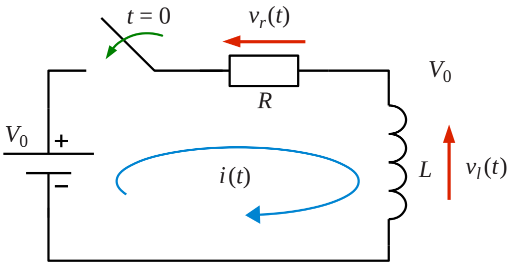


Es un circuito relativamente simple y que solo tiene tres componentes: una fuente de tensión continua, de valor V_0 voltios, una resistencia de valor *R* y una inductancia de valor *L* henrios. Además, de nuevo, tenemos un pequeño interruptor que está abierto. Esto significa que el circuito, antes de cerrar el interruptor, no está conectado a la fuente. Podemos asumir que lleva en ese estado mucho tiempo, es decir, que, antes de cerrar el interruptor, está en un régimen permanente en continua de 0 *V*.

En $t = 0$ (como indica el dibujo), se cierra el interruptor y el circuito *R-L* se conecta a la fuente, y es aquí donde empezamos a resolver el circuito.

6.1.2. Aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito

Para resolver el circuito vamos a aplicar la ley de Kirchhoff de las mallas (o tensiones) al circuito. En la siguiente figura están dibujadas las tensiones en función del tiempo y la corriente que va a circular por todo el circuito:



La ecuación de malla que nos va a quedar es la habitual en un circuito que solo tiene una malla:

$$V_0 = v_r(t) + v_l(t) = R \cdot i(t) + v_l(t)$$

Además, sabemos cuál es la expresión de la tensión en una bobina en función de la corriente que la atraviesa:

$$v_l(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Por tanto, podemos reescribir la ecuación de la malla, ya que la corriente que circula por la bobina es la misma que la que circula por todo el circuito. Así:

$$V_0 = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

6.1.3. Resolución de la ecuación diferencial

Ya sabemos que la expresión que acabamos de escribir es una ecuación diferencial de primer orden (de coeficientes constantes y no homogénea, para más señas) y que para resolverla hemos seguido anteriormente el método de buscar dos soluciones: una a la ecuación homogénea y una particular a la completa con $i(t)$ constante.

Vamos, de nuevo, paso a paso. En primer lugar, vamos a reescribir la ecuación para evitar los diferenciales usando esta notación:

$$i = i(t) \qquad \frac{di(t)}{dt} = i'$$

Así, la ecuación nos quedará escrita como:

$$V_0 = R \cdot i + L \cdot i'$$

Ahora vamos a buscar la solución a la ecuación homogénea. La ecuación homogénea es la que se resuelve con el término independiente hecho 0. He llamado a la corriente *i*, en este caso, i_h, para indicar que es la solución de la homogénea:

$$R \cdot i_h + L \cdot i_h' = 0$$

Operando, podemos escribir:

$$\frac{i_h'}{i_h} = \frac{-R}{L}$$

Si integramos con respecto al tiempo en ambos lados, obtendremos lo siguiente:

$$\int \frac{i_h'}{i_h}\,dt = \int \frac{-R}{L}\,dt$$

A la izquierda tenemos una función derivada dividida por la propia función: eso es directamente la derivada del logaritmo neperiano. En la parte de la derecha tenemos una integral inmediata. El resultado será, por tanto:

$$\ln(i_h) = \frac{-R}{L}t + C$$

Hacemos la exponencial en ambos miembros de la igualdad y obtenemos que:

$$i_h(t) = e^{\frac{-R}{L}t+C} = e^C \cdot e^{\frac{-R}{L}t} = M \cdot e^{\frac{-R}{L}t}$$

En este caso, hemos seguido los mismos pasos que en el apartado del encendido del circuito *R-C* para sacar la constante *C* del exponente. La constante *M* la resolveremos después con las condiciones iniciales del circuito, al igual que hicimos con el condensador.

Ahora vamos a buscar una solución particular para la ecuación completa. Podemos suponer que la corriente es constante en el tiempo y, así, obtener una solución sencilla. Llamaremos a esta solución i_p:

$$V_0 = R \cdot i_p + L \cdot i'_p \quad \rightarrow \quad i'_p = 0 \quad \rightarrow \quad V_0 = R \cdot i_p \quad \rightarrow \quad i_p = \frac{V_0}{R}$$

Ahora, la solución a la ecuación diferencial será la suma de ambas soluciones parciales. Así:

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{V_0}{R} + M \cdot e^{\frac{-R}{L}t}$$

6.1.4. Cálculo de la constante de integración

Para encontrar la expresión final de la corriente tenemos que calcular el valor de la constante M. Para ello, tenemos que usar las condiciones iniciales del circuito. Sabemos que el circuito en $t = 0$ no tenía ninguna corriente circulando por él mismo, ya que tenía el interruptor abierto. Así pues, podemos evaluar la corriente en $t = 0$ y forzar a que tome valor 0. Vamos a hacerlo:

$$i(0) = 0 = \frac{V_0}{R} + M \cdot e^{\frac{-R}{L}0} = \frac{V_0}{R} + M$$

De esta expresión, podemos despejar el valor de M:

$$M = \frac{-V_0}{R}$$

6.1.5. Tensión y corriente en función del tiempo

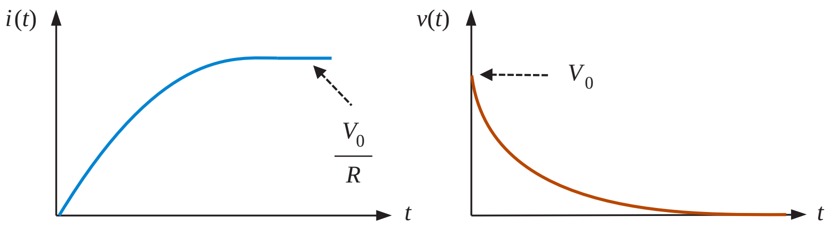
Por fin, podemos escribir la función de la corriente en función del tiempo:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{\frac{-R}{L}t})$$

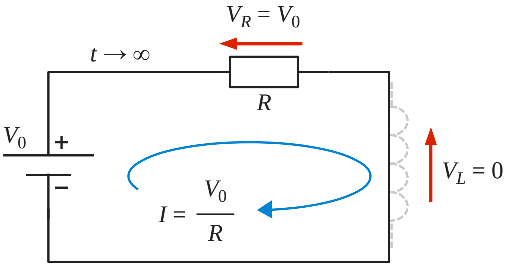
Además, podemos calcular la tensión en la bobina simplemente teniendo en cuenta la relación entre la corriente y la tensión en este componente:

$$v_l(t) = L\,\frac{di}{dt} = V_0 \cdot e^{\frac{-R}{L}t}$$

Con esto acabamos de calcular la expresión de carga de una bobina. Vamos a dibujar cómo es, en el tiempo, la tensión y la corriente en la bobina:



En las gráficas podemos ver cómo, una vez que pasa suficiente tiempo, el régimen transitorio va desapareciendo y la tensión en la bobina se hace 0 y toda la tensión de la fuente cae sobre la resistencia. Exactamente igual que si hubiéramos analizado el circuito en corriente continua y hubiéramos sustituido la bobina por un cortocircuito o un cable, como en esta figura:

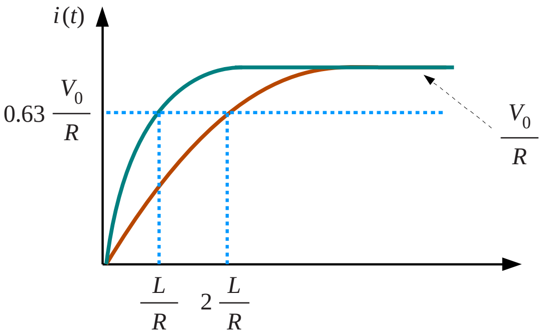


6.1.6. Constante de tiempo

De la misma manera que en un circuito *R-C* definimos la constante de tiempo, en un circuito *R-L* también podemos definir este valor, que en este caso tiene esta forma:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

De nuevo, este valor afecta directamente al tiempo que tarda un circuito en llegar al régimen permanente. En la siguiente figura aparece dibujada la corriente en la bobina en dos circuitos diferentes, uno de ellos con una constante de tiempo el doble de la del otro:



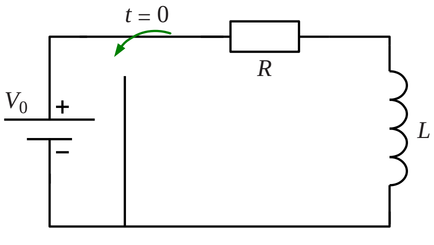
Al igual que en los circuitos *R*-*C* (y, en general, siempre que se analizan transitorios), verás que la constante de tiempo en el encendido de un circuito *R*-*L* es el momento del tiempo en el que la corriente pasa a ser aproximadamente el 63 % de la corriente final. Es fácil de deducir; solo hay que evaluar la corriente en $t = \tau = L/R$. Así:

$$i(\tau) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{\frac{-R}{L}\frac{L}{R}}\right) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-1}\right) \simeq 0.63\,\frac{V_0}{R}$$

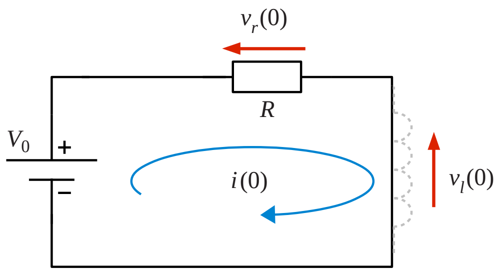
6.2. TRANSITORIO DE APAGADO EN UN CIRCUITO *R*-*L*

6.2.1. Presentación del circuito

Este es el circuito que vamos a resolver para analizar el transitorio de apagado en un circuito *R*-*L*:



Es el mismo circuito que en el caso anterior, solo que en el origen del tiempo está conectado a la fuente de tensión. Podemos asumir que lleva en ese estado mucho tiempo, es decir, que, antes de cerrar el interruptor, está en un régimen permanente en continua. Si resolvemos este circuito en continua, podemos calcular la corriente y la tensión antes de que el interruptor cambie de posición. Para ello, vamos a sustituir la bobina por un cortocircuito, que es como se comportan estos componentes en corriente continua:



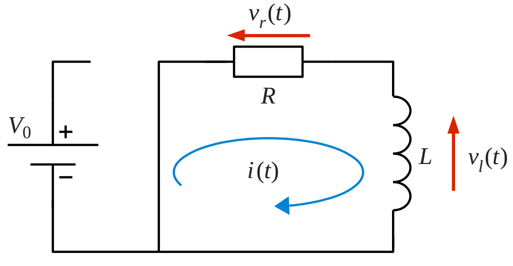
La bobina está marcada ligeramente en gris clarito, simplemente para no olvidarnos de que está ahí. En este circuito tan simple podemos calcular directamente la tensión en la resistencia, la corriente en la malla y la tensión en la bobina, que como es un «cable» será de 0 *V*:

$$i(0) = \frac{V_0}{R} \qquad v_r(0) = V_0 \qquad v_l(0) = 0$$

En $t = 0$, se cierra el interruptor y el circuito *R*-*L* se desconecta de la fuente y se cierra sobre sí mismo, y es aquí donde empezamos a resolver el circuito.

6.2.2. Aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito

Para ello, lo que vamos a hacer es aplicar la ley de Kirchhoff de las mallas (o tensiones) al circuito. En la figura he dibujado las tensiones en función del tiempo y la corriente que va a circular por todo el circuito:



La ecuación de malla que nos va a quedar es la habitual en un circuito que solo tiene una malla y, además, en el que no hay generadores o fuentes:

$$0 = v_r(t) + v_l(t) = R \cdot i(t) + v_l(t)$$

Además, sabemos cuál es la expresión de la tensión en una bobina en función de la corriente que la atraviesa:

$$v_l(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Por tanto, podemos reescribir la ecuación de la malla, ya que la corriente que circula por la bobina es la misma que la que circula por todo el circuito. Así:

$$0 = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

6.2.3. Resolución de la ecuación diferencial

Esta ecuación la acabamos de resolver en el apartado donde estudiamos el transitorio de encendido *R-L* y la solución es la de la ecuación homogénea:

$$i(t) = e^{\frac{-R}{L}t+C} = M \cdot e^{\frac{-R}{L}t}$$

6.2.4. Cálculo de la constante de integración

La constante *M* de la solución de la ecuación diferencial la vamos a calcular con las condiciones iniciales del circuito, al igual que hicimos con el condensador. Cuando presentamos el circuito, calculamos el valor de la corriente de la bobina y de toda la malla, que es la misma, en el instante $t = 0$, y el valor era:

$$i(0) = \frac{V_0}{R}$$

Por tanto, si evaluamos la expresión de la corriente en $t = 0$ y la igualamos a este valor, nos permitirá calcular el valor de M. Así:

$$i(0) = \frac{V_0}{R} = M \cdot e^{\frac{-R}{L}0} \qquad \text{y despejando} \qquad M = \frac{V_0}{R}$$

6.2.5. Tensión y corriente en función del tiempo

Por fin, podemos escribir la función de la corriente en función del tiempo:

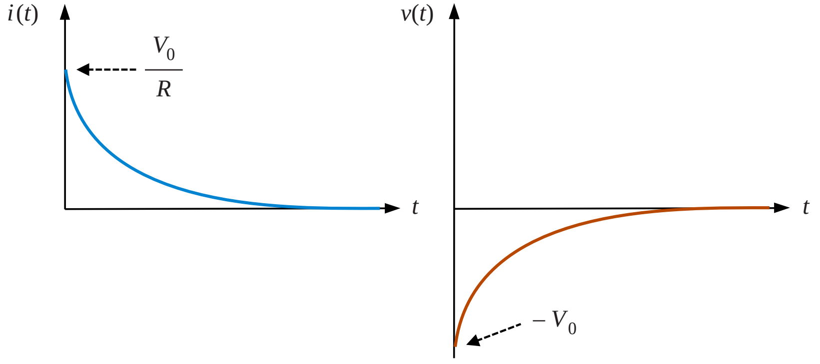
$$i(t) = \frac{V_0}{R} \cdot e^{\frac{-R}{L}t}$$

Además, podemos calcular la tensión en la bobina simplemente teniendo en cuenta la relación entre la corriente y la tensión. Así:

$$v_l(t) = L\frac{di}{dt} = -V_0 \cdot e^{\frac{-R}{L}t}$$

¿Por qué tiene un signo negativo la tensión en la bobina? Simplemente porque es contraria al valor que le hemos dado en el circuito.

Con esto acabamos de calcular la expresión de descarga de una bobina. Vamos a dibujar cómo es, en el tiempo, la tensión y la corriente en la bobina:



De nuevo, fijándonos en las gráficas, podemos ver que, una vez que pasa suficiente tiempo, el régimen transitorio va desapareciendo y la tensión y la corriente en la bobina se hacen 0. Exactamente igual que si hubiéramos analizado el circuito en corriente continua y hubiéramos sustituido la bobina por un cortocircuito o un cable.

6.2.6. Constante de tiempo

Al igual que en el análisis del encendido, en el análisis del transitorio de apagado, podemos definir la constante de tiempo del circuito como:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

En este caso, el tiempo τ es el tiempo en el que la tensión y la corriente en la bobina han caído (aproximadamente) un 63 % con respecto al valor inicial. Simplemente, hemos de evaluar la expresión de la corriente en ese tiempo y verlo:

$$i(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot e^{\frac{-R}{L}\frac{L}{R}} = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-1} \simeq \frac{0.36 \cdot V_0}{R}$$

7. ENERGÍA Y POTENCIA EN LOS TRANSITORIOS

7.1. POTENCIA EN RÉGIMEN DINÁMICO

En la unidad anterior calculamos cuál era la expresión de la potencia instantánea en función de la tensión y la corriente en un componente cualquiera. Podemos generalizar esta expresión y decir que la potencia instantánea, como una función del tiempo, es el producto de las funciones de tensión y corriente. Así:

$$p(t) = v(t)\, i(t)$$

De esta manera, por ejemplo, en un transitorio de encendido de un condensador, podemos calcular la potencia instantánea disipada en una resistencia simplemente teniendo en cuenta las expresiones de tensión y corriente, que tienen esta forma:

$$v_R(t) = V_0\, e^{\frac{-t}{RC}} \qquad \text{e} \qquad i_R(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{\frac{-t}{RC}}$$

Por tanto, la potencia que se disipa en la resistencia será:

$$p_R(t) = v_R(t)\, i_R(t) = \frac{V_0^2}{R}\, e^{\frac{-2t}{RC}} \; [W]$$

7.2. ENERGÍA ALMACENADA Y ENERGÍA DISIPADA: CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

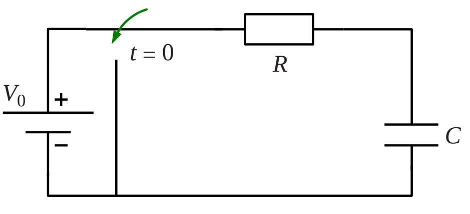
Ya sabemos que en un circuito lineal, además de las fuentes que son componentes activos, existen dos tipos de componentes pasivos:

- Los que disipan potencia: las resistencias.
- Los que almacenan energía: las bobinas y los condensadores.

Cuando analizamos un transitorio de encendido hay una parte de la energía que entregará la fuente que se va a almacenar en la bobina o en el condensador. Aún más interesante es analizar los transitorios de apagado de estos circuitos. En ambos casos nos vamos a encontrar que la bobina o el condensador tienen una energía almacenada inicialmente. Cuando se cierra el circuito, esta energía se va a entregar y se disipará en la resistencia.

7.2.1. Transitorio de apagado *R*-*C*

Vamos a hacer un análisis muy rápido del transitorio de apagado de un circuito *R*-*C* como el de esta figura:



En las condiciones iniciales, el condensador se comporta como un circuito abierto, y la tensión del condensador es:

$$V_C = V_0$$

Por tanto, el condensador almacena una energía que es igual a:

$$U_C = \frac{1}{2} C\, V_0^2$$

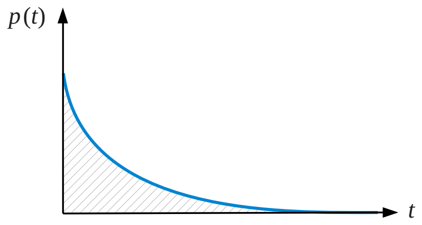
Cuando se cierra el circuito, la tensión en la resistencia tiene la forma:

$$v_r(t) = V_0\, e^{\frac{-t}{RC}}$$

Y, por lo tanto, la potencia disipada en la resistencia será:

$$p_R(t) = v_r^2 \frac{(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R}\, e^{\frac{-2t}{RC}}$$

Para calcular la energía que se disipa en la resistencia tenemos que calcular la integral de la potencia desde $t = 0$ hasta infinito, justo el área rallada bajo la curva:



$$U_R = \int_0^\infty p_R(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R}\, e^{\frac{-2t}{RC}}\, dt$$

Resolviendo la integral:

$$U_R = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R}\, e^{\frac{-2t}{RC}} dt = \frac{-C\, V_0^2}{2}\, e^{\frac{-2t}{RC}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} C\, V_0^2\, [J]$$

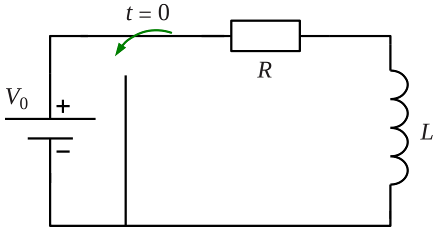
Si retomamos el valor de la energía que tenía almacenada el condensador en el momento inicial, tendremos:

$$U_C = \frac{1}{2} C\, V_0^2$$

Esto nos demuestra lo que intuitivamente podríamos ya saber: la energía total que se va a disipar en la resistencia en el transitorio de apagado solo podía estar almacenada en un lugar, en el condensador. Puesto que no hay otro sitio por donde la energía almacenada en el condensador se pueda escapar, toda se ha de disipar en la resistencia.

7.2.2. Transitorio de apagado *R-L*

Vamos ahora a repetir la experiencia, pero analizando el transitorio de apagado de un circuito *R-L*:



En las condiciones iniciales, la bobina se comporta como un cortocircuito, y la corriente a través de la bobina vale:

$$I_L = \frac{V_0}{R}$$

Por tanto, la bobina almacena una energía que es igual a:

$$U_L = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{R}\right)^2$$

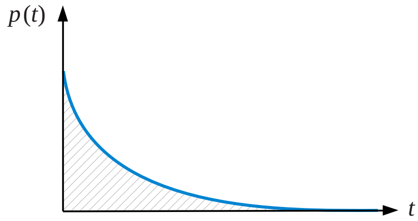
Cuando se cierra el circuito, la tensión en la resistencia tiene la forma:

$$v_r(t) = V_0 \, e^{\frac{-R}{L} t}$$

Y, por lo tanto, la potencia disipada en la resistencia será:

$$p_R(t) = v_r^2 \frac{(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R} \, e^{\frac{-2t}{RC}}$$

Para calcular la energía que se disipa en la resistencia tenemos que calcular la integral de la potencia desde $t = 0$ hasta infinito, justo el área rallada bajo la curva:



$$U_R = \int_0^{\infty} p_R(t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{V_0^2}{R}\, e^{\frac{-2R}{L}t}\, dt$$

Resolviendo la integral:

$$U_R = \int_0^{\infty} \frac{V_0^2}{R}\, e^{\frac{-2R}{L}t} dt = \frac{-L\, V_0^2}{2R^2}\, e^{\frac{-2R}{L}t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 [J]$$

Si retomamos el valor de la energía que tenía almacenada la bobina en el momento inicial, tendremos:

$$U_L = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{R}\right)^2$$

De nuevo, al igual que en el caso de la descarga del condensador, esto nos demuestra que la energía total que se va a disipar en la resistencia en el transitorio de apagado solo podía estar almacenada en un lugar, la bobina.

8. IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS TRANSITORIO

Aunque solo hayamos estudiado casos básicos de comportamientos en régimen transitorio, casos de primer orden, tenemos la suficiente información como para entender la importancia de este tipo de análisis.

Imaginémonos que tenemos que diseñar un circuito en el que, al actuar sobre un interruptor, se activa un motor que, en esencia, se comporta como una bobina. Ya sabemos la importancia que tiene el valor de la resistencia R equivalente del circuito para determinar cuánto tiempo tardará el motor en tener una corriente óptima de funcionamiento.

Podríamos estar diseñando un sistema en el que se emplee un condensador de grandes dimensiones para almacenar energía, de forma que, si hubiera pequeños microcortes en la red eléctrica, el condensador liberara parte de su energía y alimentara los circuitos del resto del sistema. El análisis transitorio nos permitirá calcular la capacidad necesaria para poder cubrir determinados tiempos manteniendo el nivel de tensión mínima necesaria.

Podríamos generalizar este análisis a sistemas mucho más complejos. En todos los casos, nos encontramos que entender el funcionamiento de los transitorios en los circuitos tiene mucha importancia, pues impone limitaciones o requerimientos a los diseños que, si los hubiéramos analizado solamente en régimen permanente, no seríamos capaces de ver.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

Enunciado 1

Un circuito lineal formado por resistencias y condensadores hace un gran tiempo se conectó a sus fuentes de tensión constante. En general, ¿cuánto valen todas las derivadas temporales de tensiones y corrientes en todo el circuito?

Enunciado 2

Un circuito *R*-*C* está formado por una resistencia de 3 *k*Ω y un condensador de 1200 *uF*. Se conecta a una fuente de tensión de 30 *V*. ¿Cuánto tiempo tarda el condensador en llegar a una tensión de 18.96 *V*?

Enunciado 3

En un circuito *R*-*C*, si dividimos la capacidad y la resistencia entre 4, ¿cómo varía el tiempo que tarda en cargarse el condensador?

Enunciado 4

¿Cuál es la corriente máxima que va a circular por un circuito *R*-*C* conectado a una fuente de 12 *V* en el que el condensador tiene una capacidad de 30 *uF* y la resistencia de 3 Ω?

Enunciado 5

Por una bobina circula una corriente de 3 *A* y tiene una inductancia de 12 *mH*. En un momento determinado se conecta esta bobina con una resistencia de 1 *k*Ω sin ninguna fuente que proporcione potencia al circuito. ¿Cuánta energía se va a disipar en la bobina?

Enunciado 6

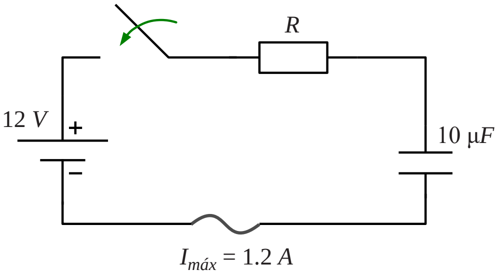
En las mismas condiciones que la pregunta anterior, ¿podemos calcular la energía que se disipará en la resistencia?

Enunciado 7

Un circuito *R*-*L* tiene una fuente de 10 *V* y una resistencia de 2 Ω, y lleva gran tiempo conectado. Cuando se provoca un transitorio de apagado en el que la bobina se cierra sobre la resistencia, ¿qué corriente circula en el instante $t = 0$?

Enunciado 8

En el siguiente circuito tenemos un fusible de 1.2 *A* conectado como en la figura:



¿Cuál es el valor mínimo de *R* que hace que el fusible no se funda al cerrar el interruptor?

Enunciado 9

En un circuito *L*-*C*, si multiplicamos por 4 el valor de la inductancia *L*, ¿cómo varía la corriente máxima que circulará por el circuito?

Enunciado 10

En un circuito *R*-*C* con un condensador de 3 *uF*, ¿cuál ha de ser el valor máximo de la resistencia que nos garantiza que el transitorio se ha disipado al 63 % en 100 *ms* o menos?

Solución 1

0.

Solución 2

$\tau = RC = 3.6\ [s]$.

Solución 3

Se divide entre 16.

Solución 4

$$I_{máx} = \frac{V_0}{R} = 4\ [A].$$

Solución 5

$$U_R = U_L = \frac{1}{2} L\, I^2 = 0.054\ [J].$$

Solución 6

No. Es necesario conocer el valor de la inductancia.

Solución 7

$I = 5\ [A]$.

Solución 8

$R \geq 10\ \Omega$.

Solución 9

No varía. Es independiente del valor de L.

Solución 10

$R \leq 33.3\ k\Omega$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básica

Magro Andrade, R.; Abad Toribio, L.; Serrano Pérez, M.; Velasco Fernández, A. I.; Sánchez Sánchez, S. y Tejedor de las Muelas, J. *Fundamentos de electricidad y magnetismo*. Madrid: García Maroto, 2009. 318 pp.

Avanzada

López Ferreras, F.; Maldonado Bascón, S. y Rosa Zurera, M. *Análisis de circuitos lineales*, 3.ª ed. Madrid: Ra-Ma, 2010. 763 pp.