

# Actividad de Evaluación Continua (AEC1)

Análisis Matemático

Alumno: Alexander Sebastian Kalis  
Profesor: Dr. Juan José Moreno García

5 de enero de 2025

## Índice

1. Problema 1	3
2. Problema 2	4
3. Problema 3	6
4. Problema 4	8
5. Problema 5	9
6. Problema 6	10
7. Problema 7	12
8. Problema 8	13
9. Problema 9	15
10. Problema 10	17
11. Problema 11	19
12. Problema 12	20

# 1. Problema 1

**Enunciado:** Hallar los tres puntos críticos, y determinar su naturaleza, de la función:

$$f(x, y) = x^2y - x^2 - 2y^2 + 2.$$

## Solución

Para determinar los puntos críticos, seguimos estos pasos:

### Paso 1: Cálculo de las derivadas parciales

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2x, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4y.$$

Los puntos críticos se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

### Paso 2: Resolución del sistema

$$\begin{aligned} f_x &= 2x(y - 1) = 0, \\ f_y &= x^2 - 4y = 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad y = 1.$$

**Caso 1:** Si  $x = 0$ , sustituimos en  $f_y = x^2 - 4y = 0$ :

$$0^2 - 4y = 0 \implies y = 0.$$

Por lo tanto, un punto crítico es  $(0, 0)$ .

**Caso 2:** Si  $y = 1$ , sustituimos en  $f_y = x^2 - 4y = 0$ :

$$x^2 - 4(1) = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Por lo tanto, los puntos críticos adicionales son  $(2, 1)$  y  $(-2, 1)$ .

### Paso 3: Determinación de la naturaleza de los puntos críticos

Calculamos las segundas derivadas:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - 2, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x.$$

El determinante de la matriz hessiana es:

$$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

**En**  $(0, 0)$ :

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -4, \quad f_{xy} = 0.$$

$$H = (-2)(-4) - (0)^2 = 8 > 0.$$

Dado que  $f_{xx} < 0$ ,  $(0, 0)$  es un **máximo relativo**.

**En**  $(2, 1)$  y  $(-2, 1)$ :

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = -4, \quad f_{xy} = 4 \text{ para } (2, 1), \text{ y } f_{xy} = -4 \text{ para } (-2, 1).$$

$$H = (0)(-4) - (4)^2 = -16 < 0.$$

En ambos casos,  $(2, 1)$  y  $(-2, 1)$  son **sillas**.

## Conclusión

Los puntos críticos son:

$$(0, 0) : \text{máximo relativo}, \quad (2, 1) : \text{silla}, \quad (-2, 1) : \text{silla}.$$

## 2. Problema 2

**Enunciado:** Hallar los máximos y mínimos (hay cuatro en total) que alcanza la función:

$$f(x, y) = 3xy,$$

cuando  $(x, y)$  recorre la elipse:

$$x^2 + y^2 + xy = 3.$$

## Solución

Para resolver el problema, seguimos estos pasos:

### Paso 1: Aplicación del método de Lagrange

Queremos encontrar los extremos de  $f(x, y)$  sujetos a la restricción  $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ . Utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3xy + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3).$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 3y + \lambda(2x + y) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 3x + \lambda(2y + x) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0.$$

## Paso 2: Resolución del sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones es:

$$3y + \lambda(2x + y) = 0, \quad 3x + \lambda(2y + x) = 0, \quad x^2 + y^2 + xy = 3.$$

De la primera ecuación:

$$\lambda = -\frac{3y}{2x + y} \quad (\text{si } 2x + y \neq 0).$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$3x - \frac{3y(2y + x)}{2x + y} = 0 \implies 3x(2x + y) - 3y(2y + x) = 0,$$

$$6x^2 + 3xy - 6y^2 - 3xy = 0 \implies 6x^2 - 6y^2 = 0 \implies x^2 = y^2.$$

Por lo tanto,  $x = y$  o  $x = -y$ .

**Caso 1:**  $x = y$  Sustituyendo en  $x^2 + y^2 + xy = 3$ :

$$x^2 + x^2 + x^2 = 3 \implies 3x^2 = 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Esto da los puntos  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$ .

**Caso 2:**  $x = -y$  Sustituyendo en  $x^2 + y^2 + xy = 3$ :

$$x^2 + x^2 - x^2 = 3 \implies x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}.$$

Esto da los puntos  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  y  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

## Paso 3: Evaluación de $f(x, y)$ en los puntos críticos

Calculamos  $f(x, y) = 3xy$  en los puntos críticos:

- En  $(1, 1)$ :  $f(1, 1) = 3(1)(1) = 3$ .
- En  $(-1, -1)$ :  $f(-1, -1) = 3(-1)(-1) = 3$ .
- En  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ :  $f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -9$ .
- En  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ :  $f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 3(-\sqrt{3})(\sqrt{3}) = -9$ .

## Conclusión

Los máximos de  $f(x, y)$  son:

$$f(1, 1) = 3 \quad \text{y} \quad f(-1, -1) = 3.$$

Los mínimos de  $f(x, y)$  son:

$$f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -9 \quad \text{y} \quad f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -9.$$

### 3. Problema 3

**Enunciado:** Calcular la siguiente integral:

$$I = \int \int_S \frac{1}{4} xy \, dy \, dx,$$

donde  $S$  es la región limitada por las rectas  $y = x + 1$ ,  $y = 3x - 1$  y el eje  $y$ .

#### Solución

##### Paso 1: Identificación de la región $S$

La región  $S$  está limitada por:

- La recta  $y = x + 1$ ,
- La recta  $y = 3x - 1$ ,
- El eje  $y$ , es decir,  $x = 0$ .

Los puntos de intersección son:

1. Intersección entre  $y = x + 1$  y  $y = 3x - 1$ :

$$x + 1 = 3x - 1 \implies 2x = 2 \implies x = 1.$$

Sustituyendo  $x = 1$  en  $y = x + 1$ , obtenemos  $y = 2$ . Punto:  $(1, 2)$ .

2. Intersección de  $y = x + 1$  con el eje  $y$  ( $x = 0$ ):

$$y = 0 + 1 = 1. \quad \text{Punto: } (0, 1).$$

3. Intersección de  $y = 3x - 1$  con el eje  $y$  ( $x = 0$ ):

$$y = 3(0) - 1 = -1. \quad \text{Punto: } (0, -1).$$

La región es un triángulo con vértices en  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 2)$ .

##### Paso 2: Determinación de los límites de integración

El triángulo se divide según las rectas  $y = x + 1$  y  $y = 3x - 1$ :

- Para  $x \in [0, 1]$ ,  $y$  varía entre  $y = 3x - 1$  (curva inferior) y  $y = x + 1$  (curva superior).

##### Paso 3: Escritura de la integral

La integral es:

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_{3x-1}^{x+1} xy \, dy \, dx.$$

#### Paso 4: Resolución de la integral interna

Primero resolvemos la integral respecto a  $y$ :

$$\int_{3x-1}^{x+1} xy \, dy = x \int_{3x-1}^{x+1} y \, dy.$$

La integral de  $y$  es:

$$\int y \, dy = \frac{y^2}{2}.$$

Evaluando en los límites  $y = x + 1$  y  $y = 3x - 1$ :

$$\int_{3x-1}^{x+1} y \, dy = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(3x-1)^2}{2}.$$

Expandiendo:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1.$$

Sustituyendo:

$$\int_{3x-1}^{x+1} y \, dy = \frac{1}{2} [(x^2 + 2x + 1) - (9x^2 - 6x + 1)].$$

Simplificando:

$$\int_{3x-1}^{x+1} y \, dy = \frac{1}{2} (-8x^2 + 8x) = 4x - 4x^2.$$

Multiplicamos por  $x$ :

$$x \int_{3x-1}^{x+1} y \, dy = x(4x - 4x^2) = 4x^2 - 4x^3.$$

#### Paso 5: Resolución de la integral externa

La integral externa es:

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 (4x^2 - 4x^3) \, dx.$$

Separando términos:

$$I = \frac{1}{4} \left[ \int_0^1 4x^2 \, dx - \int_0^1 4x^3 \, dx \right].$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^1 4x^2 \, dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 4x^3 \, dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 1.$$

Sustituyendo y concluyendo:

$$I = \frac{1}{4} \left( \frac{4}{3} - 1 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

## 4. Problema 4

**Enunciado:** Calcular la integral:

$$I = \int \int_D (4x + 2) dA,$$

donde  $D$  es la región encerrada por las curvas  $y = x^2$  y  $y = 2x$ .

### Solución

#### Paso 1: Identificación de la región $D$

La región  $D$  está limitada por:

- La parábola  $y = x^2$ ,
- La recta  $y = 2x$ .

Determinamos los puntos de intersección resolviendo  $x^2 = 2x$ :

$$x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 2.$$

Por lo tanto, los límites de integración en  $x$  son  $x \in [0, 2]$ .

#### Paso 2: Escritura de la integral

Para cada  $x \in [0, 2]$ , el límite inferior de  $y$  es  $y = x^2$  y el límite superior es  $y = 2x$ . La integral se escribe como:

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx.$$

#### Paso 3: Resolución de la integral interna

La integral respecto a  $y$  es:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy = (4x + 2) \int_{x^2}^{2x} 1 dy = (4x + 2) [y]_{y=x^2}^{y=2x}.$$

Evalúamos:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy = (4x + 2) [2x - x^2] = (4x + 2)(2x - x^2).$$

Expandiendo:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy = (4x + 2)(2x) - (4x + 2)(x^2) = 8x^2 + 4x - 4x^3 - 2x^2.$$

Simplificando:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy = 6x^2 - 4x^3 + 4x.$$



### Paso 4: Resolución de la integral externa

La integral respecto a  $x$  es:

$$I = \int_0^2 (6x^2 - 4x^3 + 4x) dx.$$

Separando términos:

$$I = \int_0^2 6x^2 dx - \int_0^2 4x^3 dx + \int_0^2 4x dx.$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^2 6x^2 dx = 6 \int_0^2 x^2 dx = 6 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16,$$

$$\int_0^2 4x^3 dx = 4 \int_0^2 x^3 dx = 4 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4 \cdot \frac{16}{4} = 16,$$

$$\int_0^2 4x dx = 4 \int_0^2 x dx = 4 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 4 \cdot 2 = 8.$$

Sustituyendo:

$$I = 16 - 16 + 8 = 8.$$

## 5. Problema 5

**Enunciado:** Usando el cambio a coordenadas esféricas, calcular la integral:

$$I = \iiint_{\Omega} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz,$$

donde  $\Omega$  es todo  $\mathbb{R}^3$ .

### Solución

#### Paso 1: Cambio a coordenadas esféricas

Recordemos las expresiones en coordenadas esféricas:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

donde:

- $\rho \geq 0$  es la distancia radial,
- $\phi \in [0, \pi]$  es el ángulo polar,
- $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo azimutal.

El elemento de volumen en coordenadas esféricas es:

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

La integral se convierte en:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

## Paso 2: Separación de variables

Debido a la simetría del integrando, la integral se puede separar:

$$I = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \right) \left( \int_0^\infty e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho \right).$$

Calculamos cada término por separado:

**1. Integral respecto a  $\theta$ :**

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

**2. Integral respecto a  $\phi$ :**

$$\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = [-\cos \phi]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

**3. Integral respecto a  $\rho$ :** Sea  $u = \rho^3$ , entonces  $du = 3\rho^2 \, d\rho$ . Esto implica:

$$\int_0^\infty e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-u} \, du.$$

La integral de  $e^{-u}$  es:

$$\int_0^\infty e^{-u} \, du = 1.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^\infty e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3}.$$

## Paso 3: Resultado final

Combinando los resultados:

$$I = (2\pi)(2) \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}.$$

## 6. Problema 6

**Enunciado:** Sea  $\Omega$  la región limitada por el plano  $z = 2$  y por el paraboloide cuya superficie es descrita por:

$$2z = x^2 + y^2.$$

Calcular:

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

## Solución

### Paso 1: Descripción de la región

La región  $\Omega$  está limitada por:

- El paraboloide  $2z = x^2 + y^2$ , que reescribimos como  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,
- El plano  $z = 2$ .

La intersección entre el paraboloide y el plano  $z = 2$  ocurre cuando:

$$z = 2 \implies 2z = x^2 + y^2 \implies x^2 + y^2 = 4.$$

Por lo tanto, la proyección en el plano  $xy$  es un círculo de radio 2 centrado en el origen.

### Paso 2: Cambio a coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

La ecuación del paraboloide es:

$$z = \frac{1}{2}r^2.$$

La integral en coordenadas cilíndricas se convierte en:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^2 \cdot r \, dz \, dr \, d\theta.$$

### Paso 3: Resolución de la integral

1. Integral respecto a  $z$ :

$$\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3 \, dz = r^3 \int_{\frac{1}{2}r^2}^2 dz = r^3 [z]_{\frac{1}{2}r^2}^2 = r^3 \left( 2 - \frac{1}{2}r^2 \right).$$

Expandiendo:

$$\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3 \, dz = 2r^3 - \frac{1}{2}r^5.$$

2. Integral respecto a  $r$ :

$$\int_0^2 \left( 2r^3 - \frac{1}{2}r^5 \right) dr = 2 \int_0^2 r^3 \, dr - \frac{1}{2} \int_0^2 r^5 \, dr.$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^2 r^3 \, dr = \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4,$$

$$\int_0^2 r^5 dr = \left[ \frac{r^6}{6} \right]_0^2 = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^2 \left( 2r^3 - \frac{1}{2}r^5 \right) dr = 2(4) - \frac{1}{2} \left( \frac{32}{3} \right) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24}{3} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

3. Integral respecto a  $\theta$ :

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

4. Combinación de resultados:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^2 \cdot r dz dr d\theta = \left( \frac{8}{3} \right) (2\pi) = \frac{16\pi}{3}.$$

## 7. Problema 7

**Enunciado:** Hallar la integral curvilínea:

$$I = \int (x^2 + y^2) ds$$

sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = ax$  para  $a > 0$ .

### Solución

#### Paso 1: Ecuación de la circunferencia

La ecuación de la circunferencia dada es:

$$x^2 + y^2 = ax.$$

Reorganizando términos:

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \implies \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Por lo tanto, es una circunferencia con centro en  $\left( \frac{a}{2}, 0 \right)$  y radio  $r = \frac{a}{2}$ .

#### Paso 2: Representación paramétrica

Usamos la representación paramétrica de la circunferencia:

$$x(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \quad y(t) = \frac{a}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

El diferencial de arco  $ds$  se calcula como:

$$ds = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt.$$

Derivando  $x(t)$  e  $y(t)$  respecto a  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{2} \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{a}{2} \cos t.$$

Por lo tanto:

$$ds = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2} dt = \sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \frac{a}{2} dt.$$

### Paso 3: Evaluación de la integral

El integrando es  $x^2 + y^2$ . Sustituyendo  $x(t)$  e  $y(t)$ :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \sin t\right)^2.$$

Expandiendo:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \cos t + \frac{a^2}{4} \cos^2 t + \frac{a^2}{4} \sin^2 t.$$

Usamos  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ :

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \cos t = \frac{a^2}{2}(1 + \cos t).$$

Sustituimos en la integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}(1 + \cos t) \cdot \frac{a}{2} dt = \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt.$$

Dividimos la integral:

$$I = \frac{a^3}{4} \left( \int_0^{2\pi} 1 dt + \int_0^{2\pi} \cos t dt \right).$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos t dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0.$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{a^3}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi a^3}{2}.$$

## 8. Problema 8

**Enunciado:** Estudiemos el problema de una placa fina homogénea de longitud  $L$  y sección rectangular constante hecha de un material determinado, por ejemplo acero. La coordenada  $x$  se considera a lo largo de la lámina, mientras que  $y(x)$  representa el desplazamiento respecto a la horizontal debido a una fuerza aplicada en un extremo de la placa.

La teoría de elasticidad establece que el momento de deformación  $M(x)$  es proporcional a la curvatura  $k(x)$  de la curva elástica  $C$ . Bajo la aproximación de pequeñas deformaciones, la curvatura se puede aproximar como:

$$k(x) \approx y''(x).$$

Además, bajo las condiciones de Euler-Bernoulli:

$$M(x) = k(x)EI,$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material y  $I$  es el momento de inercia de la sección rectangular. Se cumple la ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x).$$

Si el momento es causado únicamente por una fuerza  $F$  aplicada en el extremo libre, el momento será:

$$M(x) = F(L - x).$$

Finalmente, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x).$$

## Solución

### Paso 1: Resolución de la ecuación diferencial

Integramos dos veces la ecuación diferencial para hallar  $y(x)$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x).$$

Primera integración:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{F}{EI}(L - x) dx = \frac{F}{EI} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1,$$

donde  $C_1$  es una constante de integración.

Segunda integración:

$$y(x) = \int \left[ \frac{F}{EI} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right] dx = \frac{F}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2,$$

donde  $C_2$  es otra constante de integración.

**Paso 2: Condiciones de contorno**

Las condiciones de contorno son:

- En el extremo fijo ( $x = 0$ ):  $y(0) = 0$  y  $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0$ .

Usando  $y(0) = 0$ :

$$y(0) = \frac{F}{EI} \left( \frac{L \cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{6} \right) + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \implies C_2 = 0.$$

Usando  $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F}{EI} \left( L \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) + C_1 = 0 \implies C_1 = 0.$$

**Paso 3: Solución final**

Sustituyendo las constantes  $C_1 = 0$  y  $C_2 = 0$ , la solución es:

$$y(x) = \frac{F}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

**Desplazamiento en el extremo libre**

Para  $x = L$ , el desplazamiento  $y(L)$  es:

$$y(L) = \frac{F}{EI} \left( \frac{L \cdot L^2}{2} - \frac{L^3}{6} \right) = \frac{F}{EI} \left( \frac{L^3}{3} \right).$$

Por lo tanto, el desplazamiento máximo en el extremo libre es:

$$y(L) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

**Conclusión**

La curva elástica que describe la deformación está dada por:

$$y(x) = \frac{F}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right),$$

y el desplazamiento máximo en el extremo libre es:

$$y(L) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

**9. Problema 9**

**Enunciado:** Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

## Solución

### Paso 1: Ecuación característica

Planteamos la solución general para la ecuación diferencial homogénea:

$$y(t) = e^{rt}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$r^2 e^{rt} + 4r e^{rt} - 5e^{rt} = 0.$$

Factorizamos  $e^{rt}$  (que nunca es cero):

$$r^2 + 4r - 5 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}.$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -5.$$

### Paso 2: Solución general de la ecuación diferencial

La solución general es:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^t + C_2 e^{-5t}.$$

### Paso 3: Aplicación de las condiciones iniciales

Usamos las condiciones iniciales para encontrar  $C_1$  y  $C_2$ .

**Primera condición:**  $y(0) = 0$

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0.$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -C_2.$$

**Segunda condición:**  $y'(0) = 6$  Primero derivamos  $y(t)$ :

$$y'(t) = C_1 e^t - 5C_2 e^{-5t}.$$

Sustituimos  $t = 0$ :

$$y'(0) = C_1 e^0 - 5C_2 e^0 = C_1 - 5C_2.$$

Sustituyendo  $C_1 = -C_2$ :

$$-C_2 - 5C_2 = 6 \implies -6C_2 = 6 \implies C_2 = -1.$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -C_2 = 1.$$



#### Paso 4: Solución particular

Sustituimos  $C_1 = 1$  y  $C_2 = -1$  en la solución general:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} = e^t - e^{-5t}.$$

## 10. Problema 10

**Enunciado:** Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y''(t) - 3y'(t) - 18y(t) = 18t + 6, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

### Solución

#### Paso 1: Solución general de la ecuación homogénea asociada

La ecuación homogénea asociada es:

$$y''(t) - 3y'(t) - 18y(t) = 0.$$

Planteamos la solución en la forma  $y_h(t) = e^{rt}$ , y sustituimos en la ecuación:

$$r^2 e^{rt} - 3r e^{rt} - 18e^{rt} = 0.$$

Factorizamos  $e^{rt}$  (que nunca es cero):

$$r^2 - 3r - 18 = 0.$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$r = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}.$$

Las raíces son:

$$r_1 = 6, \quad r_2 = -3.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-3t}.$$

#### Paso 2: Solución particular de la ecuación completa

Buscamos una solución particular  $y_p(t)$  de la forma:

$$y_p(t) = At + B.$$

Calculamos sus derivadas:

$$y_p'(t) = A, \quad y_p''(t) = 0.$$

Sustituimos en la ecuación completa:

$$0 - 3A - 18(At + B) = 18t + 6.$$

Expandiendo y agrupando términos:

$$-18At - 18B - 3A = 18t + 6.$$

Comparando coeficientes de  $t$  y los términos constantes:

$$-18A = 18 \implies A = -1,$$

$$-18B - 3(-1) = 6 \implies -18B + 3 = 6 \implies -18B = 3 \implies B = -\frac{1}{6}.$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p(t) = -t - \frac{1}{6}.$$

### Paso 3: Solución general

La solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y la particular:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-3t} - t - \frac{1}{6}.$$

### Paso 4: Aplicación de las condiciones iniciales

Usamos  $y(0) = 0$ :

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 - 0 - \frac{1}{6} = C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 0.$$

Por lo tanto:

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{6}.$$

Usamos  $y'(0) = 6$ . Derivamos  $y(t)$ :

$$y'(t) = 6C_1 e^{6t} - 3C_2 e^{-3t} - 1.$$

Sustituimos  $t = 0$ :

$$y'(0) = 6C_1 - 3C_2 - 1 = 6.$$

Por lo tanto:

$$6C_1 - 3C_2 = 7.$$

Resolviendo el sistema:

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{6}, \quad 6C_1 - 3C_2 = 7.$$

De la primera ecuación:

$$C_2 = \frac{1}{6} - C_1.$$

Sustituimos en la segunda:

$$6C_1 - 3\left(\frac{1}{6} - C_1\right) = 7 \implies 6C_1 - \frac{1}{2} + 3C_1 = 7.$$

$$9C_1 = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \implies C_1 = \frac{5}{6}.$$

$$C_2 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}.$$

### Paso 5: Solución final

Sustituimos  $C_1$  y  $C_2$  en la solución general:

$$y(t) = \frac{5}{6}e^{6t} - \frac{2}{3}e^{-3t} - t - \frac{1}{6}.$$

## 11. Problema 11

**Enunciado:** Resolver, usando transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + 25y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

### Solución

#### Paso 1: Transformada de Laplace de la ecuación diferencial

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 25\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}.$$

Usamos las propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 25Y(s) = 0.$$

Sustituimos las condiciones iniciales  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 5$ :

$$s^2Y(s) - s(1) - 5 + 25Y(s) = 0.$$

Simplificamos:

$$(s^2 + 25)Y(s) = s + 5.$$

Despejamos  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 25}.$$

#### Paso 2: Transformada inversa de Laplace

Para calcular la solución  $y(t)$ , aplicamos la transformada inversa de Laplace a  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 25} + \frac{5}{s^2 + 25}.$$

Separando los términos: 1.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} = \cos(5t)$ . 2.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\} = \sin(5t)$ .

Por lo tanto:

$$y(t) = \cos(5t) + \sin(5t).$$

## 12. Problema 12

**Enunciado:** Resolver, usando transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 4e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

### Solución

#### Paso 1: Aplicación de la transformada de Laplace

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 7\mathcal{L}\{y'(t)\} + 10\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{4e^t\}.$$

Usamos las propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0), \quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

Sustituyendo las condiciones iniciales  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 3$ :

$$s^2Y(s) - s(1) - 3 - 7[sY(s) - 1] + 10Y(s) = \frac{4}{s-1}.$$

Simplificamos:

$$s^2Y(s) - s - 3 - 7sY(s) + 7 + 10Y(s) = \frac{4}{s-1}.$$

Agrupamos los términos en  $Y(s)$ :

$$(s^2 - 7s + 10)Y(s) = \frac{4}{s-1} + s - 4.$$

Simplificamos el lado derecho:

$$(s^2 - 7s + 10)Y(s) = \frac{4}{s-1} + s - 4.$$

Finalmente, despejamos  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{s^2 - 5s + 8}{(s-5)(s-2)(s-1)}.$$

#### Paso 2: Descomposición en fracciones parciales

Descomponemos la fracción:

$$Y(s) = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}.$$

Multiplicamos por el denominador común  $(s-5)(s-2)(s-1)$ :

$$s^2 - 5s + 8 = A(s-2)(s-1) + B(s-5)(s-1) + C(s-5)(s-2).$$

Expandiendo cada término y comparando coeficientes, resolvemos para  $A$ ,  $B$ , y  $C$ :

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad C = 1.$$

Por lo tanto, la descomposición es:

$$Y(s) = \frac{2}{3(s-5)} - \frac{2}{3(s-2)} + \frac{1}{s-1}.$$

**Paso 3: Transformada inversa de Laplace**

Aplicamos la transformada inversa a cada término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3(s-5)}\right\} = \frac{2}{3}e^{5t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{3(s-2)}\right\} = -\frac{2}{3}e^{2t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t} + e^t.$$