

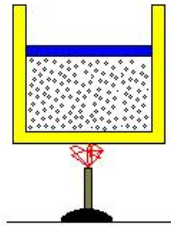
Termodinámica

INTRODUCCION.

Sistemas Termodinámicos

Variables termodinámicas macroscópicas.

Consideremos un gas encerrado en un tubo cilíndrico cerrado a uno de sus extremos y provisto de una tapa deslizante (pistón) en el otro. Como se muestra en la figura.



El sistema descrito ocupa determinado **volumen** el cual puede conocerse en determinado momento por la posición del pistón, otra cantidad indispensable para la descripción del sistema es la **presión** del gas en el cilindro, que también se puede conocer, mediante un manómetro. Finalmente, para tener una idea completa de lo que sucede en el cilindro hay que conocer la **temperatura**, la cual puede medirse en forma simple al igual que las otras dos cantidades. Estas cantidades obtenidas por medición directa, que describen al sistema, nos proporcionarán lo que se conoce como la **Descripción microscópica** del sistema.

Otro punto de vista de describir el sistema es asumiendo que el gas está formado por un gran número de partículas, moléculas o átomos, todos de igual masa y cada uno moviéndose con una velocidad independiente de las otras es imposible aplicar las leyes de Newton del movimiento a cada molécula por separado e incluso tabular las coordenadas de cada molécula, en este caso es necesario usar métodos estadísticos las cantidades que lo especifican no están directamente asociadas, con nuestro sentido de percepción, esta descripción es conocida como **Descripción microscópica del Sistema**.

La descripción macroscópica o sea las propiedades apreciadas por nuestros sentidos son el punto de partida para todas las investigaciones y aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en la mecánica de un cuerpo rígido, considerando los aspectos, externos, especificamos su centro de masa con referencia a un eje de coordenadas en un tiempo particular. La posición y el tiempo y la combinación de ambos, tal como la. Velocidad, constituyen algunas de las cantidades macroscópicas usadas en mecánica y son llamadas coordenadas mecánicas y estas sirven para determinar la energía potencial y cinética del cuerpo rígido. Estos dos tipos de energía, constituyen la energía mecánica o externa del cuerpo rígido. El propósito de la mecánica es encontrar relaciones entre las coordenadas de posición y el tiempo

consistentes con las leyes de Newton del movimiento.

En la termodinámica la atención se dirige al exterior del sistema. Se determinan experimentalmente: las cantidades macroscópicas que son necesarias y suficientes para describir el estado interno del sistema, estas son llamadas coordenadas termodinámicas.

El propósito de la termodinámica es encontrar las relaciones entre las coordenadas termodinámicas consistentes con las leyes fundamentales de la termodinámica.

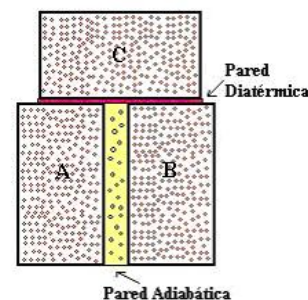
Finalmente, puntualizaremos que dentro de la física, las leyes que relacionan las cantidades macroscópicas, se denomina termodinámica clásica o simplemente termodinámica y, las fórmulas matemáticas que relacionan las cantidades microscópicas, constituyen la Mecánica Estadística, o Teoría atómica del calor, o bien, cuando se usan técnicas simples estadístico-matemáticas se le llama teoría cinética.

LEY CERO DE LA TERMODINÁMICA Y EQUILIBRIO TÉRMICO.

Supongamos que tenemos dos sistemas A y B, separados cada uno y definidos por las coordenadas (presión y temperatura) p, T y p', T' respectivamente.

El estado de un sistema en el cual las velocidades macroscópicas tienen valores que permanecen constantes mientras que las condiciones externas no se cambian, se conoce como estado de equilibrio térmico.

Equilibrio térmico. Los experimentos demuestran que la existencia de un estado de equilibrio depende de la proximidad de otros sistemas y de la naturaleza de la pared que los separa. Si cuando un sistema está en un estado de equilibrio y este no cambia con cualquier cambio en el ambiente, el sistema se dice que está "Aislado" o rodeado por una pared "Pared Adiabática". Cuando las variables macroscópicas de dos sistemas que se encuentran conectadas por una pared diatérmica no varían, se dice que se encuentran equilibrios térmicos entre ellas. Imaginemos a los sistemas A y B separados en contacto, o separados por una pared diatérmica, con un sistema C.



El sistema A estará en equilibrio con el sistema C y el sistema B también estará en equilibrio con el sistema C, luego los sistemas A y B estarán en equilibrio térmico uno con el otro.

Esto se conoce como la **Ley cero de la termodinámica**,

"Si dos sistemas se encuentran en equilibrio térmico con un tercer sistema, los dos sistemas se encuentran en equilibrio entre sí".

Esta ley está de acuerdo a nuestra experiencia diaria de nuestros sentidos, es sencilla pero no obvia, es un hecho que sucede pero podría no haber sido así. Nos expresa la idea fundamental de temperatura. Cuando decimos que las variables macroscópicas no varían, nos hace falta definir una propiedad que asegure esto.

Esta propiedad la llamaremos **Temperatura**.

Nosotros queremos asignar un número de cada estado de equilibrio de un sistema que tenga la propiedad que dos sistemas con el mismo número estén en equilibrio térmico entre ellos.

"La temperatura de un sistema es una propiedad que determina si un sistema está en equilibrio o no con otros sistemas".

TEMPERATURA Y ESCALAS

La temperatura se determina por la medición de alguna cantidad mecánica, eléctrica u óptica cuyo valor se correlaciona con la temperatura.

Generalmente la temperatura de una sustancia, sino en el termómetro el cual, se pone en contacto íntimo con la instancia y adquiere la misma temperatura. Se llama TERMOMETRO, a un aparato que permite medir la temperatura por medio de su propiedad termométrica o variable macroscópica que es sensible al estado térmico de la sustancia. Los principales termómetros y sus propiedades termométricas se muestran en la tabla.

TERMOMETRO	PROPIEDAD TERMOMETRICA
Gas a volumen constante	Presión
Gas a presión constante	Volumen
Resistencia eléctrica	Resistencia eléctrica
Termocupla	Fuerza electromotriz
Columna líquida en un tubo capilar	Longitud

Construyamos una escala de temperatura, para esto tomemos como termómetro una columna líquida de mercurio en un tubo capilar de vidrio, observamos que la columna de mercurio aumentará cuando aumenta la temperatura, como la compresibilidad del mercurio es tan pequeña podemos considerar como si fuera a presión constante. La relación más simple entre temperatura y longitud de la columna que podemos elegir, es una relación lineal de y .

$$t_{(y)} = ay + b$$

Donde las constantes a y b se evalúan de acuerdo a un conjunto definido de reglas. Asignemos números arbitrarios a dos puntos fijos.

Escala Celsius o centígrada.

En la escala Celsius o centígrada uno de ellos el punto de congelación del agua, es decir el punto en que el agua y el hielo están en equilibrio a la presión atmosférica, a esta temperatura le damos el valor cero grados Celsius o grados centígrados (0°C).

$$t = ay_c + b = 0^{\circ}\text{C}$$

El otro punto, el de ebullición del agua a presión atmosférica, a este le llamamos Cien grados (100°C).

$$t = ay_e + b = 100^{\circ}\text{C}$$

Al resolver las dos ecuaciones simultáneamente encontramos los valores de a y b .

$$a = \frac{100^{\circ}\text{C}}{y_e - y_c} \quad \text{y} \quad b = -\frac{100^{\circ}\text{C}}{y_e - y_c} y_c$$

Sustituyendo la expresión original

$$t = 100^{\circ}\text{C} \frac{(y - y_c)}{(y_e - y_c)}$$

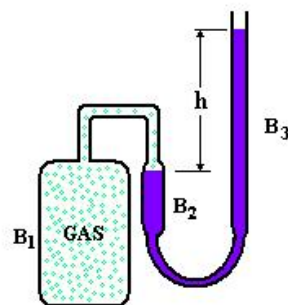
Para un termómetro a gas a Volumen Constante la expresión sería

$$t = 100^{\circ}\text{C} \frac{(p - p_c)}{(p_e - p_c)}$$

y para un termómetro a gas a presión constante la expresión sería

$$t = 100^{\circ}\text{C} \frac{(V - V_c)}{(V_e - V_c)}$$

El termómetro a gas a volumen constante consiste en un balón B_1 lleno de gas (hidrógeno por ejemplo) ligado a un tubo en forma de U lleno de mercurio, el volumen de gas en el balón se mantiene constante subiendo o bajando B_3 hasta que el mercurio en B_2 se encuentra en la marca cero.



La presión p que equilibra la presión del gas es $p = 76 \text{ cm} + h$

La experiencia muestra que la dependencia de la presión con relación a la temperatura es lineal con esto se obtiene la escala de un termómetro colocando el balón en un baño de hielo en fusión, marcando p_c y después repitiendo la operación con vapor de agua, marcando p_e .

La distancia entre esos dos puntos se toma, por convención igual a 100° .
Medidas usando el gas hidrógeno como sustancia termométrica muestra que

$$\frac{p_e}{p_c} = 1,366$$

o sea que la relación con la temperatura, sería:

$$t = 100^\circ \text{C} \frac{\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)}{\left(\frac{p_e}{p_c} - 1\right)} = \frac{100^\circ \text{C}}{(1,366 - 1)} \left(\frac{p}{p_c} - 1\right)$$

$$t = 273,15 \left(\frac{p}{p_c} - 1\right)^\circ \text{C}$$

En esta expresión se ve que cuando la temperatura es $-273,15$ la presión es Cero. Como no es posible para la presión tomar valores menores que cero, a este valor de la temperatura se le torna como origen de una nueva escala de temperatura, escala ABSOLUTA de Temperaturas en grados KELVIN.

$$T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15^\circ \text{C}$$

En realidad para calibrar el termómetro, no se toma como referencia el punto de fusión del hielo, sino que se especifica como "punto fijo patrón" al llamado "Punto triple de agua", único punto en el que coexisten en equilibrio hielo, líquido y vapor de agua, dándose solamente a la presión de 4,58 mm Hg.

Obteniéndose:

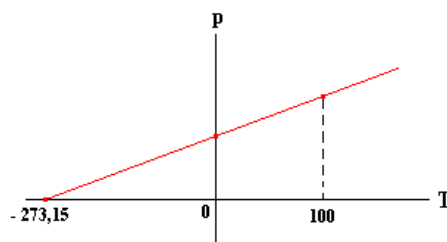
$$t = 0,01^\circ \text{C}$$

$$T = 273,16 \text{ K}$$

$$T = 273,16 \frac{p}{p_c} \text{ K}$$

El termómetro de gas a volumen constante se toma como standard porque es el que experimentalmente mas nos conviene, pues es el que nos da las variaciones más pequeñas y también porque cuando el termómetro contiene gas a baja presión, la diferencia de lectura en temperatura usando diferentes gases es reducida.

Ejemplo 1. Cuando el bulbo de un termómetro de gas a volumen constante se coloca en un recipiente con agua a 100°C , la presión del gas es 227 mm de Hg. Cuando el bulbo se mueve a una mezcla de hielo - sal la presión del gas cae a 162 mm de Hg. Asumiendo el comportamiento ideal, como en la figura, ¿cuál es la temperatura Celsius de la mezcla de hielo - sal?



Solución.

Considerando el comportamiento del termómetro con la linealidad mostrada en la figura.

Para la presión del gas es 227 mm de Hg corresponde una temperatura $100 + 273,5 = 373,15 \text{ K}$
Para la presión 162 mm de Hg corresponde

$$x = \frac{373,15}{227} 162 = 266,30 \text{ K o } -6,85^\circ \text{C}$$

Ejemplo 2. En un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm de mercurio introducimos un termómetro centígrado en hielo fundente y luego en vapor de agua hirviendo. El termómetro, mal graduado, marca 2° para el primero y $102,5^\circ$ para el segundo

- ¿Qué fórmula de reducción deberemos emplear para calcular la temperatura real en todos los casos? Si el termómetro marca 50° ,
- ¿cuál es la verdadera temperatura?
- ¿A qué temperatura sería correcta la lectura del termómetro?

Solución.

- El cero de un termómetro correcto corresponde al 2 del mal graduado, y el 100 corresponde $102,5^\circ$.

El intervalo fundamental está, por tanto, dividido en: $102,5 - 2 = 100,5$

Llamando A a la temperatura marcada por el incorrecto y C a la del centígrado perfecto, la fórmula será:

$$\frac{C}{100} = \frac{A - 2}{100,5}$$

$$\text{b) } \frac{C}{100} = \frac{50 - 2}{100,5} \Rightarrow$$

$$C = \frac{48 \times 100}{100,5} = 47,76^\circ \text{C}$$

- Si la indicación fuese correcta, se verificaría:

$$\frac{C}{100} = \frac{C - 2}{100,5} \Rightarrow 100,5C = 100C - 200$$

$$\Rightarrow C = \frac{-200}{0,5} = -400^\circ \text{C}$$

Lo cual es imposible, puesto que el cero absoluto es $-273,16^\circ \text{C}$, menor temperatura a la que puede aproximar un sistema.

Ejemplo 3. Un termómetro centígrado mal graduado marca 8° en el punto de fusión del hielo y 99° en el de ebullición del agua, en un lugar en que la presión

atmosférica es 760 mm. Resolver para este termómetro las preguntas del problema anterior.

Solución.

1) El intervalo fundamental será: $99 - 8 = 91$
Luego la fórmula de reducción es:

$$\frac{C}{100} = \frac{A - 8}{91}$$

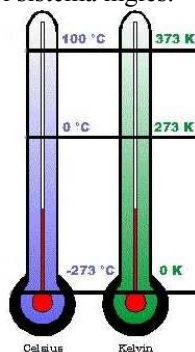
$$2) \frac{C}{100} = \frac{50 - 8}{91} \Rightarrow C = \frac{4200}{91} = 46,15^\circ \text{C}$$

$$3) \frac{C}{100} = \frac{C - 8}{91} \Rightarrow 91C - 800 = 100C$$

$$\Rightarrow C = \frac{800}{9} = 88,9^\circ \text{C}$$

Otras escalas de temperatura.

Así como la escala Celsius (Centígrado) y su correspondiente en la escala absoluta Kelvin, existen otras escalas en el sistema inglés.



La escala FAHRENHEIT, al cero de la escala Celsius corresponde a 32°F y los 100°C corresponden a 9 divisiones de $^\circ \text{F}$, la relación de equilibrio es:

$$t(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} t(^{\circ}\text{C}) + 32^{\circ}\text{F}$$

y

$$t(^{\circ}\text{C}) = \frac{5}{9} t(^{\circ}\text{F}) - 32^{\circ}\text{F}$$

La escala absoluta correspondiente a la escala Fahrenheit es la escala RANKINE.

$$T(\text{R}) = t(^{\circ}\text{F}) + 459,67(\text{R})$$

$$T(\text{R}) = \frac{9}{5} T(\text{K})$$

Ejemplo 4. a) La temperatura de la superficie del Sol es de unos 600°C . Exprésese esa temperatura en la escala Fahrenheit.

b) Exprese la temperatura normal del cuerpo humano $98,6^\circ \text{F}$, en la escala Celsius.

c) exprese la temperatura de pasteurización, 165°F , en la escala Celsius.

d) Exprese el punto normal de ebullición del Oxígeno -183°C , en la escala Fahrenheit.

Solución.

$$a) \text{ Como } T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32) \text{ y}$$

$T_C = T_K - 273,15$, igualando ambas expresiones, encontramos para la temperatura Fahrenheit:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot (T_K - 255,37) = 10340,33^\circ \text{F}.$$

$$b) T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32) = 37^\circ \text{C}$$

$$c) T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32) = 73,89^\circ \text{C}.$$

$$d) T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 = -297,4^\circ \text{C}.$$

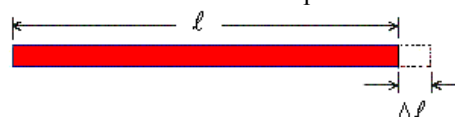
DILATACION TERMICA.

Efectos frecuentes en los materiales al presentarse cambios de temperatura, son variaciones en sus dimensiones y cambios de estado. En primer lugar consideraremos aquí, las variaciones de dimensiones que ocurren sin cambios de estado.

Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta, este por lo general se dilata. Una excepción es el agua que se contrae entre 0°C y 4°C , este comportamiento es crítico en la manera como los lagos y los océanos polares se congelan de la superficie hacia abajo, en lugar de hacerlo del fondo hacia la superficie, ya que el agua mas fría que 4°C se eleva en lugar de hundirse y el agua a 0°C está en la superficie en lugar de estar en el fondo. (La densidad del agua a 4°C es máxima, $= 1 \text{ g/cm}^3$).

Expansión lineal.

El cambio de una dimensión lineal de un sólido tal como el largo, el ancho, alto o una distancia entre dos marcas se conoce como la expansión lineal.



Experimentalmente se encuentra, para un amplio rango de temperaturas, que el cambio de longitudes $\Delta \ell$, es proporcional al cambio de temperatura Δt y a la longitud ℓ , de tal manera que podemos escribir: $\Delta \ell = \alpha \ell \Delta t$, donde α es el coeficiente de expansión lineal. Este coeficiente tiene diferentes valores para los diferentes materiales y tiene por unidad $1/\text{grado}$.

O bien,

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \alpha \Delta t$$

Para encontrar la longitud final después de un

cambio de temperatura Δt , escribimos $\frac{d\ell}{\ell} = \alpha dt$,

e integramos considerando la longitud ℓ para $t = t_1$,

y ℓ' para $t = t_2$, siendo $t_2 - t_1 = \Delta t$

$$\int_{\ell}^{\ell'} \frac{d\ell}{\ell} = \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow \ln \ell \Big|_{\ell}^{\ell'} = \alpha t \Big|_{t_1}^{t_2} \Rightarrow$$

$$\ln \frac{\ell'}{\ell} = \alpha(t_2 - t_1) \Rightarrow \ln \frac{\ell'}{\ell} = \alpha \Delta t$$

$$\frac{\ell'}{\ell} = e^{\alpha \Delta t} \Rightarrow \ell' = \ell e^{\alpha \Delta t}$$

Desarrollando $e^{\alpha \Delta t}$ en series de Taylor

$$\left[e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - \infty < x < \infty \right]$$

Obtenemos:

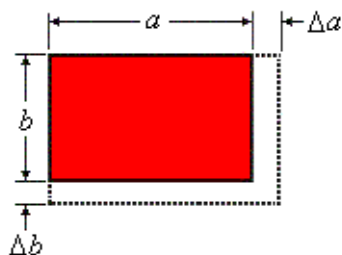
$$\ell' = \ell e^{\alpha \Delta t} = \ell \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{1!} + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\alpha \Delta t)^3}{3!} + \dots \right]$$

Como α es una cantidad muy pequeña podemos no considerar los términos con α^2 , α^3 , y finalmente

$$\ell' = \ell (1 + \alpha \Delta t) = \ell + \Delta \ell$$

Expansión de superficie.

Consideremos ahora el área al elevar la temperatura Δt , para esto tomamos una superficie como se muestra en la figura, antes de la expansión su área es $A = ab$.



a se expande en $\Delta a = \alpha_1 a \Delta t$

b se expande en $\Delta b = \alpha_2 b \Delta t$

Luego $a' = a + \Delta a = a(1 + \alpha_1 \Delta t)$ y

$b' = b + \Delta b = b(1 + \alpha_2 \Delta t)$

$A' = a'b' = a(1 + \alpha_1 \Delta t)b(1 + \alpha_2 \Delta t)$

$A' = a'b' = ab[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t + \alpha_1\alpha_2\Delta t^2]$

En esta expresión el último término se puede despreciar ya que α_1 y α_2 son valores muy pequeños, y $A = ab$ tenemos

$A' = A[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t]$

En el caso de ser un cuerpo isotrópico, los coeficientes de expansión lineal α_1 y α_2 son iguales a α , luego

$A' = A(1 + 2\alpha \Delta t)$

Como $A' = A + \Delta A$, tenemos:

$\Delta A = 2\alpha A \Delta t = \gamma A \Delta t$

Donde $\gamma = 2\alpha$ es el coeficiente de expansión de área.

Expansión de volumen.

Usando el mismo argumento se demuestra que el cambio de volumen de un sólido de volumen V , al elevarse la temperatura Δt es

$$\Delta V = 3\alpha V \Delta t = \beta V \Delta t$$

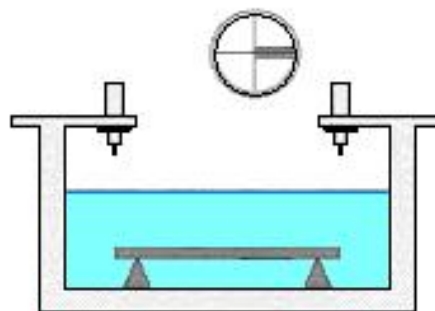
Donde $\beta = 3\alpha$ es el coeficiente de expansión de volumen.

Coeficiente de dilatación lineal de algunos de los materiales más usuales.

Sólidos	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
Concreto	$0,7 - 1,2 \times 10^{-5}$
Plata	$2,0 \times 10^{-5}$
Oro	$1,5 \times 10^{-5}$
Invar	$0,04 \times 10^{-5}$
Plomo	$3,0 \times 10^{-5}$
Zinc	$2,6 \times 10^{-5}$
Hielo	$5,1 \times 10^{-5}$
Aluminio	$2,4 \times 10^{-5}$
Latón	$1,8 \times 10^{-5}$
Cobre	$1,7 \times 10^{-5}$
Vidrio	$0,4 - 0,9 \times 10^{-5}$
Hierro	$1,2 \times 10^{-5}$
Cuarzo	$0,04 \times 10^{-5}$
Acero	$1,2 \times 10^{-5}$

Líquidos	β ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
Glicerina	$5,1 \times 10^{-5}$
Alcohol etílico	$7,5 \times 10^{-5}$
Mercurio	$1,8 \times 10^{-5}$
Bisulfuro de carbono	$11,5 \times 10^{-5}$
Agua (20°C)	$2,0 \times 10^{-5}$

Ejemplo 5. En el comparador de la figura se mide la dilatación de una barra de hierro, de 1 m de longitud a 0°C , obteniéndose para los 50°C una dilatación de 0,06 cm.



Calcular:

- El coeficiente de dilatación lineal del hierro.
- Si tiene una sección de 10 cm^2 a 0°C , ¿cuáles son su sección y su volumen a 100°C ?

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha &= \frac{L' - L_0}{L_0 \times \Delta T} = \frac{0,060}{100 \times 50} \\ &= 12 \times 10^{-6} ^{\circ}\text{C}^{-1} \end{aligned}$$

$$b) \gamma = 2\alpha = 24 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Como

$$A' = A_0(1 + \gamma \Delta T) = 10(1 + 24 \times 10^{-6} \times 100) \\ = 10,024 \text{ cm}^2$$

$$\text{Siendo } \beta = 3\alpha = 36 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Obtenemos:

$$V' = V_0(1 + \beta \Delta T) = 10 \times 100(1 + 36 \times 10^{-6} \times 100) \\ = 1003,6 \text{ cm}^3$$

Ejemplo 6. Un herrero ha de colocar una llanta circular de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20°C y su coeficiente de dilatación lineal es $12,2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, calcular la temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.

Solución.

$$\ell' = \ell(1 + \alpha \Delta T) = 2\pi r'(1 + \alpha \Delta T)$$

$$d' = d(1 + \alpha \Delta T)$$

Luego

$$\Delta T = \frac{d' - d}{\alpha d} = \frac{4 \times 10^{-3}}{12,2 \times 10^{-6} \times 1} = 327^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow T = 20 + \Delta T = 347^\circ\text{C}$$

Ejemplo 7. Un anillo de acero, de 75 mm de diámetro interior a 20°C , ha de ser calentado e introducido en un eje de latón de 75,05 mm de diámetro a 20°C .

- a) ¿A qué temperatura ha de calentarse el anillo?
 b) ¿A qué temperatura tendríamos que enfriar el conjunto para que el anillo saliera él solo del eje?
 (Coeficiente de dilatación del acero: $12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; coeficiente de dilatación del latón: $20 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)

Solución.

$$a) D' = D(1 + \alpha \Delta T)$$

$$\Rightarrow 75,05 = 75(1 + 12 \times 10^{-6} \Delta T)$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{75,05 - 75}{75 \times 12 \times 10^{-6}} = 55^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow T' = T + \Delta T = 20 + 55 = 75^\circ\text{C}$$

- b) Los diámetros a la temperatura que nos piden deberán ser iguales:

$$D(1 + \alpha_a \Delta T') = D''(1 + \alpha_l \Delta T')$$

D = diámetro del anillo a 20°C ;

D'' = diámetro del eje a 20°C ;

α_a y α_l , coeficiente de dilatación del acero y del latón, respectivamente). Luego:

$$\Delta T' = \frac{D - D''}{D'' \times 20 \times 10^{-6} - 75 \times 12 \times 10^{-6}}$$

$$= -83,2^\circ\text{C}$$

$$T'' = T + \Delta T' = 20 - 83,2 = -63,2^\circ\text{C}$$

Ejemplo 8. La varilla de un reloj de lenteja sin compensar, que bate segundos a 0°C , es de latón. Averiguar cuánto se retrasa el reloj en un día si se introduce en un ambiente a 200°C . Coeficiente de dilatación del latón: $\alpha = 17 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. (Considerar el péndulo como simple, de longitud la misma que la varilla.)

Solución.

$$\text{A } 0^\circ \text{ el semiperíodo (1 s) será: } 1 = \pi \sqrt{\frac{\ell_0}{g}}$$

$$\text{A } 200^\circ: \tau = \pi \sqrt{\frac{\ell_0(1 + \alpha \Delta T)}{g}}$$

Dividiendo:

$$\tau = \sqrt{1 + \alpha \Delta T} = \sqrt{1 + 17 \times 10^{-6} \times 200} \\ = \sqrt{1,0034} \text{ s} = 1,0017 \text{ s}$$

$$\text{Como un día dura 86400 segundos el péndulo dará} \\ \frac{86400}{1,0017} = 86253 \text{ semioscilaciones}$$

El péndulo da en 1 día $86\,400 - 86\,253 = 147$ semioscilaciones menos que en su marcha correcta:
 El reloj se retrasará en $147 \text{ s} = 2 \text{ min } 27 \text{ s}$

Ejemplo 9. Una varilla de cobre de densidad uniforme y de sección constante oscila como un péndulo colgada de uno de sus extremos, con un periodo de 1,6 s cuando se encuentra a una determinada temperatura ambiente. Siendo el coeficiente de dilatación lineal del cobre $19 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, determínese el incremento de temperatura que habría que darle al ambiente para que el período aumente en 3 milésimas de s.

Solución.

El período a la temperatura inicial T es:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} M \ell^2}{Mg \frac{\ell}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

y a la temperatura $T + \Delta T$ será:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell(1 + \alpha \Delta T)}{3g}}$$

dividiendo los dos:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 + \alpha \Delta T} \Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1}{\alpha} = \frac{\left(\frac{1,603}{1,6}\right)^2 - 1}{19 \times 10^{-6}} = 197^\circ\text{C}$$

Ejemplo 10. La densidad del mercurio a 0°C es $13,6 \text{ g/cm}^3$; su coeficiente de dilatación, $182 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Calcular la densidad del mercurio a 100°C .

Solución.

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + \beta \Delta T} = \frac{13,6}{1 + 182 \times 10^{-6} \times 100} = 13,36 \text{ g/cm}^3$$

Ejemplo 11. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: $29 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) está llena de mercurio a 100°C , teniendo entonces una capacidad de $10 \text{ } \ell$. Se enfría hasta 0°C . Calcular la masa de mercurio, medida a 0°C , que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena. Coeficiente de dilatación del mercurio, $182 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Densidad del mercurio a 0°C , $13,6 \text{ g/cm}^3$.

Solución.

El volumen de la vasija a 0° quedará determinado por la ecuación:

$$V' = V(1 - \beta \Delta T)$$

$$\Rightarrow V = \frac{V'}{(1 - \beta \Delta T)},$$

en la que: $\beta = 3 \times 29 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} = 87 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

$$V' = 1000 \text{ cm}^3 \quad \Delta T = (0 - 100) = -100^\circ\text{C}$$

$$\text{Por tanto: } V = \frac{1000}{1 + 87 \times 10^{-6} \times 100} = 991,38 \text{ cm}^3$$

El volumen del mercurio a 0° quedará determinado por la misma ecuación en la que

$$\beta_{\text{Hg}} = 182 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1};$$

$$V_{\text{Hg}} = \frac{V'}{1 + \beta_{\text{Hg}} \Delta T} = \frac{1000}{1 + 182 \times 10^{-6} \times 100} = 982,13 \text{ cm}^3$$

La diferencia es el volumen que queda por llenar:

$$V - V_{\text{Hg}} = 991,38 - 982,13 = 9,25 \text{ cm}^3$$

La masa del mercurio que hay que agregar es:

$$\Delta M = \rho_{\text{Hg}} \Delta V = 13,6 \times 9,25 = 125,8 \text{ g}$$

Ejemplo 12. Una vasija de Zn está llena de mercurio a 0°C , teniendo una capacidad de $5 \text{ } \ell$. Calcular el volumen de mercurio que se derrama a 100°C por efecto de la mayor dilatación de este último. (Tomar los datos necesarios del problema anterior.)

Solución.

$$\beta = 87 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\text{Vasija: } V' = V(1 + \beta \Delta T) = 5000(1 + 87 \times 10^{-6} \times 100) = 5043,5 \text{ cm}^3$$

El volumen del mercurio a 100°C es:

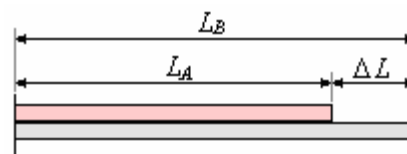
$$V'_{\text{Hg}} = 5000(1 + 182 \times 10^{-6} \times 100) = 5091 \text{ cm}^3$$

El volumen del mercurio que se derrama 100°C es:

$$V_x = V' - V'_{\text{Hg}} = 5091 - 5043,5 = 47,5 \text{ cm}^3$$

Ejemplo 13. Dos barras de longitudes L_A , L_B coeficientes de dilatación lineal α_A y α_B respectivamente se sujetan en un extremo, existiendo en el extremo libre una diferencia de longitud ΔL . Qué relación debe existir entre sus coeficientes de dilatación lineal tal que dicha diferencia de longitud se mantenga constante cuando el conjunto se somete a una variación de temperatura.

Solución.



Como $\Delta L = \text{constante}$

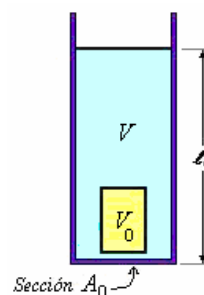
$$L_B - L_A = L'_B - L'_A,$$

$$L_B - L_A = L_B(1 + \alpha_B \Delta T) - L_A(1 + \alpha_A \Delta T)$$

$$\text{De aquí: } L_B \alpha_B \Delta T = L_A \alpha_A \Delta T$$

$$\text{Finalmente: } \frac{\alpha_B}{\alpha_A} = \frac{L_A}{L_B}$$

Ejemplo 14. Un tubo de acero, cuyo coeficiente de expansión lineal es $\alpha = 18 \times 10^{-6}$, contiene mercurio, cuyo coeficiente de expansión de volumen es $\beta = 180 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; el volumen de mercurio contenido en el tubo es 10^{-5} m^3 a 0°C , se desea que la columna de mercurio permanezca constante para un rango normal de temperaturas. Esto se logra insertando en la columna de mercurio una varilla de silicio, cuyo coeficiente de dilatación es despreciable. Calcular el volumen de la varilla de silicio.



Solución.

A 0°C , sea V_0 el volumen de la varilla de silicio y V el volumen de mercurio, a esta condición tenemos

$$l_0 A_0 = V + V_0$$

A una temperatura t la sección A_0 se incrementa a $A_0(1 + 2\alpha)$.

Similarmente el volumen de mercurio cambia de V a $V(1 + \beta t)$.

Como se requiere que l_0 permanezca constante, se tiene

$$l_0 A_0(1 + 2\alpha) = (V + V_0)(1 + 2\alpha)$$

Por otro lado este volumen es: $V(1 + \beta t) + V_0$
igualando ambas expresiones

$$(V + V_0)(1 + 2\alpha t) = V(1 + \beta t) + V_0$$

$$\Rightarrow V_0(1 + 2\alpha t - 1) = V(1 + \beta t - 2\alpha t)$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V(\beta - 2\alpha)t}{2\alpha t} = \frac{V(\beta - 2\alpha)}{2\alpha}$$

$$= \frac{V(180 - 36)10^{-6}}{36 \times 10^{-6}} = 4V$$

$$= 4 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

La varilla de silicio ocupa los 4/5 del volumen total a 0°C.

Ejemplo 15.

Una barra de acero, $\alpha_{ACERO} = 11 \times 10^{-6} / ^\circ C$, tiene un diámetro de 3 cm a la temperatura de 25 °C.

Un anillo de bronce, $\alpha_{BRONCE} = 17,10^{-6} / ^\circ C$, tiene un diámetro interior de 2,992 cm a la misma temperatura. ¿A qué temperatura común entrará justamente el anillo en la varilla?

Solución.

Puesto que los diámetros son cantidades lineales, éstas se dilatarán con la temperatura. Como la temperatura inicial es de 25 °C y la final T donde los diámetros deben coincidir, se tiene:

$$d_A = d_{0A} [1 + \alpha_{ACERO}(T - 25)]$$

$$d_B = d_{0B} [1 + \alpha_{BRONCE}(T - 25)]$$

Despejando T , encontramos:

$$T = \frac{d_{0A}(1 - 25\alpha_A) + d_{0B}(25\alpha_B - 1)}{(d_{0B}\alpha_B - d_{0A}\alpha_A)}$$

$$= 472,83 \text{ } ^\circ C.$$

Ejemplo 16. Un vaso de vidrio de 75 cm³ se llena completamente de mercurio a la temperatura ambiente de 25 °C. A la temperatura de 20 °C, ¿Cuál será el volumen de mercurio derramado?

$$\beta_{Hg} = 18,21 \times 10^{-5} / ^\circ C,$$

$$\alpha_V = 9,6 \times 10^{-6} / ^\circ C.$$

Solución.

El volumen derramado V_D corresponde a la diferencia entre el volumen de mercurio V_{Hg} menos

el volumen del vaso V_V , es decir:

$$V_D = V_{Hg} - V_V$$

$$= V_0(1 + \beta_{Hg}\Delta T) - V_0(1 + 3\alpha_V\Delta T)$$

$$= V_0\Delta T(\beta_{Hg} - 3\alpha_V)$$

$$= (75)(-5)(18,21 - 2,88) \times 10^{-5}$$

$$= -0,058 \text{ cm}^3$$

Se derraman 0,058 cm³ de mercurio

Ejemplo 17. En el centro de un disco de acero hay un orificio de diámetro

$d = 4,99 \text{ mm}$ (a 0 °C). ¿Hasta que temperatura hay que calentar al disco para que por el orificio empiece a pasar una bola de diámetro $D = 5,00 \text{ mm}$? El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha = 1,1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Solución.

$d(1 + \alpha\Delta T) = D$, reemplazando valores:

$$4,99(1 + 1,1 \times 10^{-5} \Delta T) = 5,00$$

Resolviendo encontramos $\Delta T = 182$, como la temperatura inicial es 0°C, es necesario elevar la temperatura hasta 182°C.

Ejemplo 18. Una bola de vidrio de coeficiente de dilatación cúbica es β , se pesa tres veces en el aire y en un líquido a las temperaturas t_1 y t_2 . Las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas son: P , P_1 y P_2 . Determinar el coeficiente de dilatación cúbica del líquido.

Solución.

Supongamos que el volumen de la bola a la temperatura t_1 es igual a V , entonces a la temperatura t_2 será igual a $V(1 + \beta\Delta t)$, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Escribamos las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas:

$$P = \rho Vg,$$

$$P_1 = P - \rho_1 Vg,$$

$$P_2 = P - \rho_1 Vg \frac{(1 + \beta\Delta t)}{(1 + \beta_1\Delta t)}.$$

Donde ρ es la densidad del vidrio y ρ_1 la densidad del líquido (ambas a la temperatura t_1).

En la fórmula de P despreciamos la fuerza de empuje por ser pequeña la densidad del aire. Por eso no tiene importancia la temperatura a que hizo esta pesada.

De las tres ecuaciones se obtiene β_1 en función de P , P_1 , P_2 , t_1 , t_2 y β que son conocidos:

$$\beta_1 = \frac{P_2 - P_1 + (P - P_1)\beta(t_2 - t_1)}{(P - P_2)(t_2 - t_1)}$$

En la práctica se suele utilizar una bola de vidrio de cuarzo cuyo coeficiente de dilatación cúbica es mucho menor que el coeficiente de dilatación cúbica de la inmensa mayoría de los líquidos. En este caso la respuesta se puede simplificar:

$$\beta_1 = \frac{(P_2 - P_1)}{(P - P_2)(t_2 - t_1)}$$

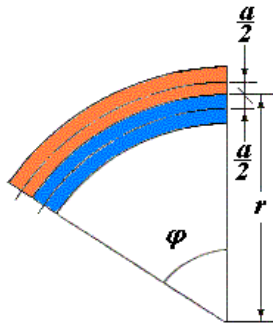
Ejemplo 19. Dos láminas, una de acero y otra de bronce, de igual espesor $a = 0,2 \text{ mm}$, están remachadas entre sí por sus extremos de manera que a la temperatura $T_1 = 293 \text{ K}$ forman una lámina bimetalica plana. ¿Cuál será el radio de flexión de esta lámina a la temperatura $T_2 = 393 \text{ K}$?

El coeficiente de dilatación lineal:

Acero es $\alpha_1 = 1,1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ y del

Bronce es $\alpha_1 = 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Solución.



Vamos a suponer que la línea media de cada lámina conserva la longitud que tendría en estado no curvado. El radio r se determina por las condiciones

$$\varphi(r - \frac{a}{2}) = \ell + \Delta\ell_1, \quad \Delta\ell_1 = \ell\alpha_1\Delta T,$$

$$\varphi(r + \frac{a}{2}) = \ell + \Delta\ell_2, \quad \Delta\ell_2 = \ell\alpha_2\Delta T,$$

$$(1 + \alpha_1\Delta T)(r + \frac{a}{2}) = (1 + \alpha_2\Delta T)(r - \frac{a}{2}),$$

Por consiguiente

$$r = \frac{a[2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T]}{2(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T} = 22,5\text{cm}$$

FATIGA DE ORIGEN TÉRMICO.

Consideremos una barra de sección A sujeta en ambos extremos



Al aumentar la temperatura Δt , debería producirse un cambio de longitud

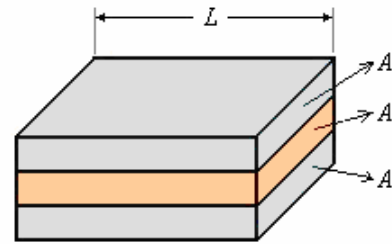
$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\Delta t$$

pero como no se puede dilatar por estar sujeta, la tensión debe aumentar hasta un valor suficiente para producir el mismo cambio pero de sentido inverso, este esfuerzo es:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell}, \text{ reemplazando obtenemos:}$$

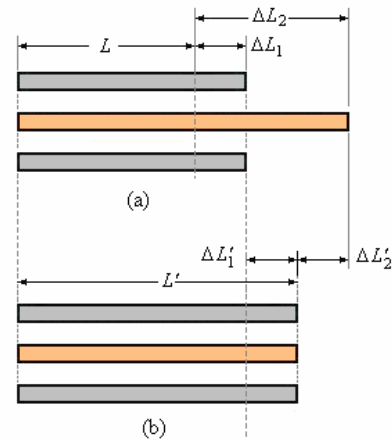
$$\frac{F}{A} = Y\alpha\Delta t$$

Ejemplo 20. Una platina de cobre se suelda con dos platinas de acero, como se muestra en la figura. Las tres platinas son iguales, teniendo exactamente la misma longitud a temperatura ambiente. Calcular las fatigas que se producirán al aumentar la temperatura en Δt grados.



Solución.

En el esquema se muestran las dilataciones que se producirían en cada barra si no estuvieran soldadas (a) y las deformaciones por estarlo (b).



También se tiene que la distribución de fuerzas elásticas que igualan la longitud del sistema, por simetría se puede considerar de la siguiente forma siguiente:

$$F_2 = 2F_1$$



De este esquema tenemos las siguientes relaciones geométricas entre las deformaciones:

Dividiendo esta expresión entre L_0 , tenemos una relación entre las deformaciones unitarias

$$\frac{\Delta L_2}{L} - \frac{\Delta L'_2}{L} = \frac{\Delta L_1}{L} + \frac{\Delta L'_1}{L}$$

Como:

$$\frac{\Delta L_1}{L} = \alpha_1\Delta t \text{ y } \frac{\Delta L'_1}{L} = \frac{F_1}{AY_1}$$

$$\frac{\Delta L_2}{L} = \alpha_2\Delta t \text{ y } \frac{\Delta L'_2}{L} = \frac{F_2}{AY_2}$$

Reemplazando se tiene:

$$\alpha_1\Delta t - \frac{F_1}{AY_1} = \alpha_2\Delta t + \frac{F_2}{AY_2}$$

Con $F_2 = 2F_1$

$$\alpha_1\Delta t - \frac{F_1}{AY_1} = \alpha_2\Delta t + \frac{2F_1}{AY_2}$$

Despejando F_1/A

$$\frac{F_1}{A} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{2}{Y_2}\right)}$$

Y las fatigas serán:

$$S_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{2}{Y_2}\right)} y$$

$$S_2 = \frac{F_2}{A} = \frac{2F_1}{A} = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{2}{Y_2}\right)}$$

Nota: Por sencillez de exposición, se ha omitido precisar que al determinar las deformaciones

unitarias $\frac{\Delta L'_1}{L}$ y $\frac{\Delta L'_2}{L}$ se han despreciado los términos de segundo orden.

$$\frac{\Delta L'_1}{L + \Delta L_1} \approx \frac{\Delta L'_1}{L} = \frac{F_1}{AY_1} y$$

$$\frac{\Delta L'_2}{L + \Delta L_2} \approx \frac{\Delta L'_2}{L} = \frac{F_2}{AY_2}$$

Debido a $L \gg \Delta L_1$ y $L \gg \Delta L_2$.

Ejemplo 21. Dos varillas del mismo diámetro, una de bronce de 25 cm. de longitud, y la otra de acero de 50 cm. De longitud se colocan extremo a extremo y aseguradas entre dos soportes rígidos.

La temperatura de las varillas se eleva 40°C.

¿Cuál es el esfuerzo en cada varilla?

Módulo de Young del acero 20×10^{11} dina cm⁻²

Módulo de Young del bronce: 10×10^{11} dina cm⁻²

Coefficiente de dilatación térmica acero $1,2 \times 10^{-5}$ por °C

Coefficiente de dilatación térmica bronce $1,8 \times 10^{-5}$ por °C

Solución.

Al elevarse la temperatura las varillas deberían expandirse si les fuera permitido, pero al no ser así sufren esfuerzo de compresión, las fuerzas en las dos varillas debe ser la misma. Por lo tanto, la unión debe desplazarse hasta alcanzar el equilibrio. Entonces los esfuerzos son iguales.

$$\frac{F}{A} = \frac{Y_A \Delta \ell_A}{\ell_A} = \frac{Y_B \Delta \ell_B}{\ell_B} \quad (1)$$

Pero la longitud $(\Delta \ell_A + \Delta \ell_B)$ es igual a la cantidad que no se deje expandir por dilatación

$$\Delta \ell'_A + \Delta \ell'_B = \ell_A \alpha_A \Delta t + \ell_B \alpha_B \Delta t$$

Luego:

$$\Delta \ell_A + \Delta \ell_B = (\ell_A \alpha_A + \ell_B \alpha_B) 40 \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos

$$\Delta \ell_A = \frac{(\ell_A \alpha_A + \ell_B \alpha_B) 40}{\left(1 + \frac{\ell_B Y_A}{\ell_A Y_B}\right)}$$

$$\Delta \ell_B = \frac{(\ell_A \alpha_A + \ell_B \alpha_B) 40}{\left(1 + \frac{\ell_A Y_B}{\ell_B Y_A}\right)}$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\Delta \ell_A = 2,1 \times 10^{-2} \text{ cm } y$$

$$\Delta \ell_B = 2,1 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

y el esfuerzo en cada varilla

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= \frac{Y_A \Delta \ell_A}{\ell_A} = \frac{Y_B \Delta \ell_B}{\ell_B} \\ &= 10 \times 10^{11} \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \times \frac{2,1 \times 10^{-2} \text{ cm}}{25 \text{ cm}} \\ &= 0,84 \times 10^9 \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 22. Una barra de bronce se enfría en nitrógeno líquido hasta la temperatura $T_1 = 72$ K. Así enfriada, esta barra se introduce ajustadamente en la abertura rectangular de una abrazadera rígida, que está a la temperatura $T_2 = 293$ K, de manera que la holgura entre los extremos de la barra y los planos correspondientes de la abertura de la abrazadera puede considerarse nula. ¿Qué presión ejercerá la barra sobre la abrazadera cuando se caliente hasta la temperatura $T_2 = 293$ K? El coeficiente de dilatación lineal del bronce es $\alpha = 1,75 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ y el módulo de Young $Y = 1,04 \times 10^{11} \text{ Pa}$.

Solución.

Al enfriarse, la barra se contrae. Su longitud se hace igual a $\ell = \ell_0 [1 - \alpha(T_2 - T_1)]$, de donde

$$\frac{(\ell_0 - \ell)}{\ell_0} = \alpha(T_2 - T_1), \text{ Después de calentar la}$$

barra, apretada en la abrazadera, su longitud sigue siendo ℓ , y la compresión $(\ell - \ell_0)$ estará ahora motivada por las fuerzas elásticas.

Escribamos la ley de Hooke: $\frac{(\ell_0 - \ell)}{\ell_0} = \frac{p}{Y}$, donde

p es la presión que ejerce la abrazadera sobre la barra en la dirección del eje de ésta.

Comparando las expresiones de $\frac{(\ell_0 - \ell)}{\ell_0}$ hallamos

que la presión que buscábamos:

$$p = Y\alpha(T_2 - T_1) = 4 \times 10^8 \text{ Pa.}$$

Conviene advertir que la presión no depende de la longitud de la barra.

Ejemplo 23. Entre dos paredes se encuentra una barra, de sección A, compuesta de dos partes de

igual longitud $\ell/2$ que tienen los coeficientes de dilatación lineal α_1 y α_2 y los módulos de Young Y_1 y Y_2 . A la temperatura T_1 los extremos de la barra apenas tocan las paredes.

¿Con qué fuerza presionará dicha barra sobre las paredes si se calienta hasta la temperatura T_2 . Desprecie la deformación de las paredes. ¿Cuánto se desplazará la junta de las partes de la barra?

Solución.

Cuando la barra se calienta desde la temperatura T_1 hasta la temperatura T_2 , sin paredes que la limiten, se alarga en la magnitud

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)(\alpha_1 + \alpha_2)(T_2 - T_1).$$

Con las paredes limitadoras la barra calentada resulta comprimida en esta misma magnitud. Por la ley de Hooke (la fuerza compresora F es la misma en ambas partes de la barra)

$$\Delta\ell = \frac{\ell_1 F}{Y_1 S} + \frac{\ell_2 F}{Y_2 S} \approx \frac{\ell}{2} \left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} \right) \frac{F}{A}$$

Esta relación, en términos generales, es aproximada, ya que las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 de las partes de la barra a la temperatura T_2 las hemos sustituido por su longitud $\ell/2$ a la temperatura T_1 . No obstante, se comprende fácilmente que el error relativo que se comete al determinar $\Delta\ell$ por esta fórmula será del orden de $\Delta\ell/\ell$ y, por lo tanto, nuestra aproximación es muy buena ($\Delta\ell \ll \ell$). De las relaciones antes escritas hallamos.

$$F = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{(Y_1 + Y_2)} Y_1 Y_2 A (T_2 - T_1).$$

El desplazamiento $\Delta\ell$ de la junta de las partes de la barra se puede determinar tomando en consideración que éste se compone del desplazamiento debido a la dilatación (por ejemplo, de la primera parte de la barra) y del desplazamiento inverso causado por compresión:

$$\begin{aligned} \Delta\ell &= \frac{\ell}{2} \left[\alpha_1 (T_2 - T_1) - \frac{F}{Y_1 A} \right] \\ &= \frac{\ell}{2} \frac{(\alpha_1 Y_1 - \alpha_2 Y_2)}{(Y_1 + Y_2)} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 24. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura $T_1 = 573$ K y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es $T_2 = 291$ K. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta 291 K? El coeficiente de dilatación lineal del latón es $\alpha = 1,84 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ y su módulo de Young $Y = 6,47 \times 10^{10}$ Pa. Las dimensiones de la sección del anillo son $2 \times 5 \text{ mm}^2$.

Solución.

Al ser calentada, la longitud de la circunferencia interna del anillo aumentó:

$$\ell_1 = \ell_2 [1 + \alpha(T_1 - T_2)], \quad \frac{(\ell_1 - \ell_2)}{\ell_2} = \alpha(T_1 - T_2),$$

Donde ℓ_1 y ℓ_2 son las longitudes de la circunferencia interna a las temperaturas $T_1 = 573$ K y $T_2 = 291$ K. Despreciando la disminución del diámetro del cilindro de acero bajo la acción de los esfuerzos compresores por parte del anillo, consideraremos que, después de enfriarse el anillo, la longitud de su circunferencia interna sigue siendo igual a ℓ_1 y el anillo resulta estirado por las fuerzas elásticas. Como en nuestro caso el grosor del anillo es pequeño en comparación con su diámetro se puede suponer que el alargamiento relativo de todas

sus capas es el mismo e igual a $\frac{(\ell_1 - \ell_2)}{\ell_2}$.

Entonces la extensión del anillo se puede relacionar con el esfuerzo de tracción por medio de la ley de

$$\text{Hooke: } \frac{(\ell_1 - \ell_2)}{\ell_2} = \frac{F}{YA}, \text{ donde } F \text{ es el esfuerzo de}$$

tracción; A , la sección del anillo, y Y , el módulo de Young. En definitiva se obtiene que $F = Y\alpha(T_1 - T_2) = 3360$ N.

Esta solución no es exacta totalmente debido a sólo a que hemos sustituido la deformación no homogénea del anillo por su alargamiento uniforme, sino también a que las tensiones radiales provocan en el anillo la variación de la longitud de su circunferencia. Cuanto menor sea el espesor del anillo en comparación con su diámetro, tanto menores serán las correcciones a introducir por estas circunstancias.

Ejemplo 25. Un tubo de acero de 28,0 m de longitud, se instaló cuando la temperatura era de 15° C, se usa para transportar vapor sobrecalentado a la temperatura de 110° C. El coeficiente de expansión lineal del acero es $1,2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, el módulo de Young es $2,0 \times 10^{11}$ Pa, y el esfuerzo de ruptura es $5,0 \times 10^8$ Pa.

a) El tubo puede expandirse libremente cuando transporta vapor. ¿En cuánto incrementa su longitud?

b) A la temperatura de 15° C la tubería se aseguró al piso de concreto tal que se impide la expansión lineal. ¿Cuál es la relación entre el esfuerzo térmico en el tubo y el esfuerzo de ruptura del acero, cuando se transporta el vapor?

Solución.

a)

$$\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad L = 28,0 \text{ m}$$

$$\Delta\theta = 110 - 15 = 95^\circ \text{ C}$$

$$\Delta L = \alpha L \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta L = (1,2 \times 10^{-5})(28)(95) = 3,192 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{b) } \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{YA} = \frac{S}{Y}$$

$$\Rightarrow S = Y \frac{\Delta L}{L} = Y \left(\frac{\alpha L \Delta \theta}{L} \right) = Y \alpha \Delta \theta$$

Este es el esfuerzo térmico

$$S = 2,0 \times 10^{11} (1,2 \times 10^{-5}) (95) = 2,28 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$\frac{\text{esfuerzo térmico}}{\text{esfuerzo de ruptura}} = \frac{2,28 \times 10^8}{5,0 \times 10^8} = 0,456$$

Ejemplo 26. Una esfera hueca del metal está flotando en el agua a 0 °C. Si la temperatura del agua se eleva a θ °C, la esfera se sumerge completamente en el agua sin hundirse. Desprecie la expansión de la esfera. Encuentre la expresión para determinar coeficiente de dilatación cúbica del agua.

Solución.

Dados:

ρ_e , la densidad de la esfera,

ρ_0 , la densidad del líquido

β , Coeficiente de dilatación cúbica del líquido

$$(\rho_\theta)_{\text{agua}} = (\rho_e)_{\text{esfera}}$$

$$\text{Como } V_{a\theta} = V_{a0}(1 + \beta\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{m_a}{\rho_\theta} = \frac{m_a}{\rho_0}(1 + \beta\theta) \Rightarrow \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{\rho_0}(1 + \beta\theta) \Rightarrow$$

$$\rho_\theta = \rho_0(1 - \beta\theta)$$

$$\text{Igualando } \rho_0(1 - \beta\theta) = \rho_e$$

$$\text{Finalmente } \beta = \frac{\rho_0 - \rho_e}{\theta \rho_e}$$

CALOR Y TRABAJO

Cuando dos sistemas a diferente temperatura se hallan en contacto térmico, el calor fluye del sistema mas caliente al más frío, hasta que alcanzan el equilibrio a una temperatura común, la cantidad de calor que sale de un cuerpo es igual a la cantidad de calor que entra en el otro. Inicialmente se elaboró la teoría del calórico, para explicar este flujo, esta sustancia no podía ser creada ni destruida, pero si transferida de un cuerpo a otro. La teoría del calórico servía para describir la transferencia de calor, pero se descartó al observar que el calórico se creaba por fricción y no habría una desaparición correspondiente de calórico en ningún otro sitio.

En 1778 el Conde Rumford, como punto de sus observaciones en el taladro de cañones propuso que el calor debe estar asociado con el movimiento. Pero no se estableció sino hasta medio siglo después de esta observación que había una relación definida

entre la cantidad de trabajo hecho contra la fricción y el calor producido.

En 1843 James Prescott Joule empleó un aparato en el cual el agua se agitaba por un conjunto de paletas giratorias y la energía mecánica suministrada para rotar las paletas podía medirse con aproximación. El efecto térmico del trabajo mecánico hecho sobre el agua, era la elevación de la temperatura. El experimento de Joule demostró que la elevación de la temperatura era proporcional a la cantidad de trabajo hecho sobre el agua. Por consiguiente el trabajo realizado en agitar el agua es equivalente al calor añadido al agua.

A pesar de que no necesitamos unidades especiales para el calor, una vez reconocido que es una forma de energía medible en Joules, o cualquier otra unidad de energía, se sigue utilizando la unidad histórica del calor, es decir la CALORIA. La caloría se define cuantitativamente como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C. La cantidad de energía para elevar la temperatura de un kilogramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C es la kilocaloría. La “caloría” utilizada para medir el equivalente energético de los alimentos es realmente la kilocaloría. En el sistema ingles la unidad es el British thermal unit (BTU)

$$1 \text{ BTU} = 252 \text{ calorías}$$

El equivalente exacto entre el trabajo realizado y el calor añadido está dado por la relación experimental.

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ Joules}$$

$$1 \text{ BTU} = 778 \text{ libra pie}$$

Esta relación es conocida como el EQUIVALENTE MECANICO DE CALOR

CAPACIDAD CALORIFICA. CALOR ESPECÍFICO

La cantidad de calor necesario para producir un aumento de temperatura en una cierta masa depende de la sustancia. Definamos primero:

La CAPACIDAD CALORIFICA. (C) de un cuerpo es la cantidad de calor requerido para elevar la temperatura de un cuerpo en un grado,

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

Sus unidades son: Caloría/°C, BTU/°F.

Luego, definamos:

El CALOR ESPECIFICO (c) es la capacidad calorífica por unidad de masa:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{dQ/dT}{m} = \frac{dQ}{mdT}$$

Sus unidades son cal/gr x °C ó BTU/libra x °F

$$\text{Observe que: } 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

Y que:

$$\frac{1 \text{ BTU}}{1 \text{ libra}^\circ\text{F}} = \frac{250 \text{ cal}}{453,6 \text{ g } 5/9^\circ\text{C}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

O sea que el valor numérico del calor específico es el mismo en esas tres unidades.

A pesar que el calor específico de las sustancias varía ligeramente con la temperatura, será adecuado para nuestra discusión, asumir que el calor específico es constante independiente de la temperatura. Luego podemos determinar el calor Q necesario para elevar la temperatura de la masa m de una sustancia Δt grados, de la siguiente manera:

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c dt = mc(T_f - T_i) = mc\Delta T$$

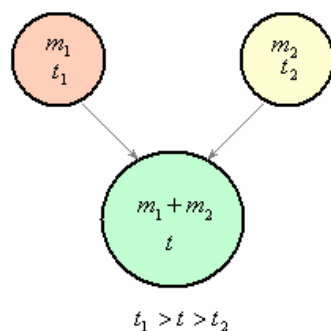
CALOR ESPECÍFICO			
Aluminio	0,212	Hielo	0,48
Acero	0,11	Carbón	0,3
Bronce	0,090	Concreto	0,16
Cobre	0,094	Vidrio	0,12 - 0,20
Oro	0,031	Parafina	0,69
Plata	0,056	Caucho	0,48
Platino	0,032	Madera	0,3 - 0,7
Plomo	0,031	Agua	1,00
Tungsteno	0,032	Alcohol	0,6
Zinc	0,094	Petróleo	0,51
		Agua de mar	0,93

La capacidad calorífica depende del tipo de proceso que se realiza durante la transferencia de calor. Tiene valores definidos solamente para procesos definidos.

En particular manteniendo la presión constante se denomina capacidad calorífica a presión constante C_p y si se mantiene el volumen constante se denomina capacidad calorífica a volumen constante C_v . En general C_p y C_v son diferentes y se analizarán con algún detalle más adelante.

Ejemplo 27. Dos sustancias m_1 y m_2 de calores específicos c_1 y c_2 están a temperatura t_1 y t_2 respectivamente ($t_1 > t_2$). Calcular la temperatura final que alcanzan al ponerlos en contacto, sabiendo que no se presentan cambios de estado.

Solución.



Por conservación de energía:

$$\sum Q = 0$$

$$\text{Como: } Q = mc(t_f - t_i)$$

Se tiene:

$$m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t - t_2)$$

o bien

$$-m_1 c_1 (t - t_1) + m_2 c_2 (t - t_2) = 0$$

o sea: Calor perdido = calor ganado

$$m_1 c_1 t_1 - m_1 c_1 t = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2$$

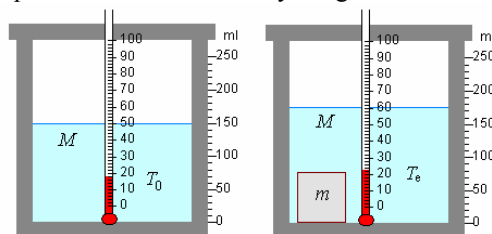
$$m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = (m_1 c_1 + m_2 c_2) t$$

Despejando el valor de la temperatura final t :

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Determinación del calor específico de un sólido

La experiencia se realiza en un calorímetro consistente en un vaso (Dewar) o en su defecto convenientemente aislado. El vaso se cierra con una tapa hecha de material aislante, con dos orificios por los que salen un termómetro y el agitador.



Se pesa una pieza de material sólido de calor específico c desconocido, resultando m su masa. Se pone la pieza en agua casi hirviendo a la temperatura T .

Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0 . A continuación, se deposita la pieza de sólido rápidamente en el calorímetro. Se agita, y después de un cierto tiempo se alcanza la temperatura de equilibrio T_e .

m_c es la masa del vaso del calorímetro y c_c su calor específico.

m_t la masa de la parte sumergida del termómetro y

c_t su calor específico

m_a la masa de la parte sumergida del agitador y c_a su calor específico

M la masa de agua que contiene el vaso, su calor específico es la unidad

Por otra parte:

Sean m y c la masa y el calor específico del cuerpo problema a la temperatura inicial T .

En el equilibrio a la temperatura T_e se tendrá la siguiente relación.

$$(M + k)(T_e - T_0) + mc(T_e - T) = 0$$

La capacidad del calorímetro dada por

$$k = m_c c_c + m_t c_t + m_a c_a, \text{ se le denomina}$$

equivalente en agua del calorímetro, y se expresa en gramos de agua, y es una constante para cada calorímetro.

El calor específico desconocido del será por tanto

$$c = \frac{(M + k)(T_e - T_0)}{m(T - T_e)}$$

En esta fórmula tenemos una cantidad desconocida k , que debemos determinar experimentalmente.

Determinación del equivalente en agua del calorímetro

Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0 . A continuación se vierten m gramos de agua a la temperatura T . Se agita la mezcla y después de un poco de tiempo, se mide la temperatura de equilibrio T_e .

Como el calorímetro es un sistema aislado tendremos que

$$(M + k)(T_e - T_0) + m(T_e - T) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{(T - T_e)}{(T_e - T_0)} m - M$$

Ejemplo 28. Calcule el calor específico de un metal con los siguientes datos. Un recipiente ("calorímetro") hecho de metal cuya masa es 3,64 kg contiene 13,6 kg de agua. Un pedazo de metal de 1,82 kg de masa, del mismo material del recipiente y con temperatura de 176,7 °C se echa en el agua. El agua y el recipiente tienen inicialmente una temperatura de 15,5 °C y la temperatura final de todo el sistema llega a ser de 18,33 °C.

Solución.

Debido a que se trata de un problema de intercambio de calor, el calor entregado por el metal = calor recibido por el (agua y recipiente). Llamando Q_1 al calor liberado por el metal, Q_2 , Q_3 a los recibidos por el agua y recipiente respectivamente:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

Considerando que el metal y recipiente tienen un calor específico c_m , reemplazando en la expresión anterior:

$$Q_1 = m_{\text{metal}} c_m (T_{\text{final}} - T_{\text{metal}}),$$

$$Q_2 = m_{\text{agua}} c_{\text{agua}} (T_{\text{final}} - T_{\text{agua}}) \text{ y}$$

$$Q_3 = m_{\text{recipiente}} c_m (T_{\text{final}} - T_{\text{recipiente}})$$

$$m_m c_m (T_f - T_m) + m_a c_a (T_f - T_a) + m_r c_m (T_f - T_r) = 0,$$

Es decir:

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T_f - T_a)}{m_m (T_f - T_m) + m_r (T_f - T_r)}$$

$$= 1,38 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{cal}}{\text{g } ^\circ\text{C}} \right].$$

Ejemplo 29. ¿Cuántas calorías se requieren para elevar la temperatura de 3 kg de aluminio de 20°C a 50°C?

Solución.

Tomemos como calor específico del aluminio $c = 0,215 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$, entonces

$$Q = mc\Delta t = 3000 \times 0,215 \times (50 - 20) = 1,935 \times 10^4 \text{ cal}$$

Ejemplo 30. Un trozo de 300 g de cobre se calienta en un horno y en seguida se deja caer en un calorímetro de 500 g de aluminio que contiene 300 g de agua. Si la temperatura del agua se eleva de 15°C a 30°C ¿cuál era la temperatura inicial del cobre? (Suponga que no se pierde calor.) ¿Cuánto calor se debe agregar a 20 g de aluminio a 20°C para fundirlo completamente?

Solución.

$$c_{Al} = 0,215 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$$

$$c_{H_2O} = 1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$$

$$c_{Cu} = 0,0924 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$$

$$Q_{\text{absorbido}} = 300 \times 1 \times (30 - 15) + 500 \times 0,215 \times (30 - 15)$$

$$Q_{\text{cedido}} = 300 \times 0,0924 \times (t_i - 30)$$

Entonces

$$300 \times 1 \times (30 - 15) + 500 \times 0,215 \times (30 - 15) = 300 \times 0,0924 \times (t_i - 30), \text{ de donde la temperatura inicial del Cobre resulta ser } t_i = 250,51 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Para saber las calorías necesarias para fundir 20 gramos de aluminio a 20 °C, de las tablas obtenemos para el calor de fusión:

$$L_f(Al) = 3,97 \times 10^5 \text{ J/kg a } t = 660 \text{ } ^\circ\text{C}, \text{ de modo que el calor necesario será}$$

Como 1 J = 0,24 cal de modo que

$$L_f(Al) = 3,97 \times 10^2 \times 0,24 = 95,28 \text{ cal/g}$$

$$\text{Entonces } Q = mc\Delta t + mL_f$$

$$Q = 20 \times 0,215(660 - 20) + 20 \times 95,28 = 4657,6 \text{ cal}$$

Ejemplo 31. Una moneda de cobre de 3 g a 25°C, cae al piso desde una altura de 50 m.

a) Si 60% de su energía potencial inicial se gasta en aumentar su energía interna, determine su temperatura final.

b) ¿Depende el resultado de la masa del centavo? Explique.

Solución.

$$c_{Cu} = 0,0924 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$$

$$m_{Cu} = 3 \text{ g}$$

a) La energía potencial será

$$U = mgh = 0,003 \times 9,8 \times 50 = 1,47 \text{ J} = 0,35 \text{ cal}$$

Entonces

$$t_f = t_i + \frac{Q}{mc_{Cu}} = 25 + \frac{0,6 \times 0,35}{3 \times 0,0924} = 25,76 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) No depende de m : porque Q es proporcional m y el aumento de temperatura es inversamente proporcional a m .

Ejemplo 32. Para medir el calor específico de un líquido se emplea un calorímetro de flujo. Se añade calor en una cantidad conocida a una corriente del líquido que pasa por el calorímetro con un volumen conocido. Entonces, una medición de la diferencia de temperatura resultante entre los puntos de entrada y salida de la corriente de líquido nos permite

calcular el calor específico del líquido. Un líquido de $0,85 \text{ g/cm}^3$ de densidad fluye a través de un calorímetro a razón de $8,2 \text{ cm}^3/\text{s}$. Se añade calor por medio de un calentador eléctrico en espiral de 250 W , y se establece una diferencia de temperatura de 15°C en condiciones de estado estacionario entre los puntos de entrada y salida del flujo. Halle el calor específico (c) del líquido.

Solución.

El flujo de calor $\dot{Q} = 250 \text{ W}$ que se pone produce una elevación de temperatura $\Delta T = 15^\circ\text{C}$.

El calor absorbido por una masa m es $Q = mc\Delta T$,

Como es masa que fluye y la entrada de calor es estacionariamente

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \frac{dm}{dt} c \Delta T.$$

De aquí

$$c = \frac{\dot{Q}}{\Delta T \frac{dm}{dt}}, \text{ como } m = \rho V,$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = 0,85 \times 8,2 = 6,97 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

Reemplazando valores, tenemos:

$$c = \frac{250}{15^\circ\text{C} \times 6,97 \times 10^{-3}} = 2391 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

FASES DE LA MATERIA

Otro de los efectos comunes de los cambios de temperatura son los cambios de estado de los materiales (sólido, líquido, gaseoso, plasma y CBE).

SÓLIDO. Manteniendo constante la presión, a baja temperatura los cuerpos se presentan en forma sólida tal que los átomos se encuentran entrelazados formando generalmente estructuras cristalinas, lo que confiere al cuerpo la capacidad de soportar fuerzas sin deformación aparente. Son, por tanto, agregados generalmente rígidos, duros y resistentes. El estado sólido presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión (atracción).

Vibración.

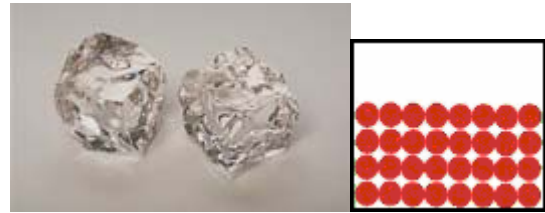
Tiene forma propia.

Los sólidos no se pueden comprimir.

Resistentes a fragmentarse.

Volumen definido.

Puede ser orgánico o inorgánico



LÍQUIDO. Incrementando la temperatura el sólido se va "descomponiendo" hasta desaparecer la estructura cristalina alcanzándose el estado líquido, cuya característica principal es la capacidad de fluir y adaptarse a la forma del recipiente que lo contiene. En este caso, aún existe una cierta ligazón entre los átomos del cuerpo, aunque de mucha menor intensidad que en el caso de los sólidos. El estado líquido presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión menor (regular)

Movimiento-energía cinética.

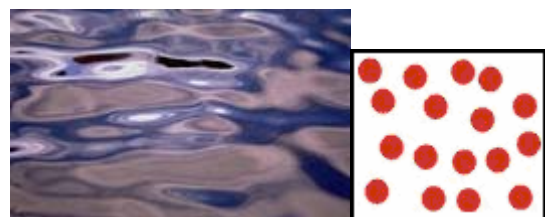
Sin forma definida.

Toma el volumen del envase que lo contiene.

En frío se comprime.

Posee fluidez.

Puede presentar fenómeno de difusión.



Gaseoso. Por último, incrementando aún más la temperatura se alcanza el estado gaseoso. Los átomos o moléculas del gas se encuentran virtualmente libres de modo que son capaces de ocupar todo el espacio del recipiente que lo contiene, aunque con mayor propiedad debería decirse que se distribuye o reparte por todo el espacio disponible. El estado gaseoso presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión casi nula.

Sin forma definida.

Sin volumen definido.

Se puede comprimir fácilmente.

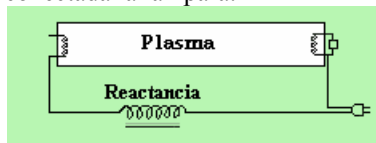
Ejerce presión sobre las paredes del recipiente que los contiene.

Los gases se mueven con libertad.



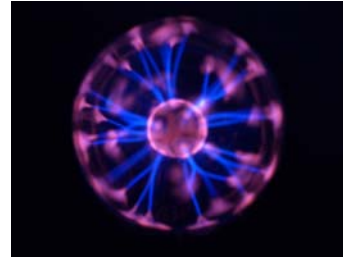
PLASMA. Al plasma se le llama a veces "el cuarto estado de la materia", además de los tres "clásicos", sólido, líquido y gas. Es un gas en el que los átomos se han roto, que está formado por electrones negativos y por iones positivos, átomos que han perdido electrones y han quedado con una carga eléctrica positiva y que están moviéndose libremente.

La lámpara fluorescente, muy usada en el hogar y en el trabajo, contiene plasma (su componente principal es el vapor de mercurio) que calienta y agita la electricidad, mediante la línea de fuerza a la que está conectada la lámpara.



La línea hace positivo eléctricamente a un extremo y el otro negativo causa que los iones (+) se aceleren hacia el extremo (-), y que los electrones (-) vayan hacia el extremo (+). Las partículas aceleradas ganan energía, colisionan con los átomos, expulsan electrones adicionales y así mantienen el plasma, incluso aunque se recombinen partículas. Las colisiones también hacen que los átomos emitan luz y, de hecho, esta forma de luz es más eficiente que las lámparas tradicionales. Los letreros de neón y las luces urbanas funcionan por un principio similar y también se usan (o usaron) en electrónica.

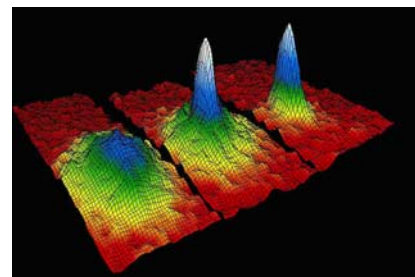
La lámpara de plasma (también llamada "globo de plasma" o "esfera de plasma") es un objeto novedoso, que alcanzó su popularidad en los años 1980. Fue inventada por Nikola Tesla tras su experimentación con corrientes de alta frecuencia en un tubo de cristal vacío con el propósito de investigar el fenómeno del alto voltaje.



CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN (CBE).

Otro estado de la materia es el condensado de Bose-Einstein (CBE), predicho en 1924 por Satyendra Nath Bose y Albert Einstein, y obtenido en 1995 (los físicos Eric A. Cornell, Carl E. Wieman y Wolfgang Ketterle compartieron el Premio Nobel de Física de 2001 por este hecho). Este estado se consigue a temperaturas cercanas al cero absoluto y se caracteriza porque los átomos se encuentran todos en el mismo lugar, formando un superátomo.

La figura siguiente muestra la Condensación de Bose-Einstein a 400, 200, y 50 nano-Kelvins



El Condensado de Bose-Einstein se ve como una pequeña masa en el fondo de una trampa magnética. Esta masa de condensado es como una gota de agua que se condensa del aire cuando éste es enfriado. Cuando se forma inicialmente, el condensado está rodeado todavía de átomos normales de gas, así que parece la semilla dentro de una cereza.



¿Para qué sirve la Condensación de Bose-Einstein? Es muy reciente y sabemos muy poco a cerca de ella para dar una respuesta. Es algo así como si viviéramos en una isla tropical hace 400 años y un pedazo de iceberg llegara a la costa. Sin que nadie hubiera visto hielo antes, pasaría algún tiempo antes de que alguien se diera cuenta de que puede usarse para hacer helados.



También hay ciertos problemas de ingeniería que deben ser resueltos antes de que la CBE pueda usarse para mucho.

Sin embargo las similitudes entre CBE y la luz de láser sugieren que probablemente lo sea.



CAMBIOS DE ESTADO - CALOR LATENTE

Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta por causa de un calor suministrado, se origina un aumento de la energía cinética del movimiento de las moléculas. Cuando un material pasa de la forma líquida a la fase gaseosa, las moléculas, que, por causa de sus atracciones naturales se mantenían originalmente en contacto, se alejan más de las otras. Esto requiere se realice un trabajo en contra de las fuerzas de atracción, es decir hace falta que se suministre una energía a las moléculas para separarlas. De este modelo podemos deducir que un cambio de fase de líquido a gas requiere calor aún cuando no se produzca elevación de la temperatura, lo mismo sucede para sólido a líquido.

Para sustancias puras, los cambios de fase se producen a cualquier presión, pero a determinadas temperaturas. Se requiere una determinada cantidad de calor para cambios de fase de una cantidad de sustancia dada.

Esto es, el calor es proporcional a la masa de la sustancia.

$$Q = mL$$

Donde L es una constante característica de la sustancia y de cambio de fase que se produce.

Si el cambio es de sólido a líquido, será L_f (calor latente de fusión) y si el cambio es de líquido a gas, será L_v (calor latente de vaporización).

En el caso del agua a presión atmosférica la fusión se produce a 0°C y L_f vale $79,7 \text{ cal/gr}$. Y la

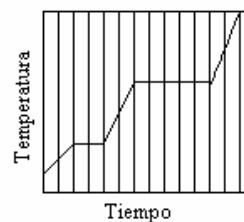
vaporización se produce a 100°C y L_v vale $539,2 \text{ cal/gr}$.

Similarmente ocurre para los procesos inversos de solidificación y condensación.

Sublimación.

También bajo ciertas condiciones de temperatura y presión se puede pasar directamente de sólido a gas sin pasar por líquido y se denomina sublimación, L_s (calor de sublimación).

Ejemplo 33. Se añade calor a una sustancia pura en un recipiente cerrado a una razón constante. El gráfico muestra la temperatura de la sustancia como una función del tiempo. Si L_f es el calor latente de fusión y L_v es el calor latente de vaporización. ¿Cuál es el valor de la relación L_v/L_f para esta sustancia?



Solución.

La relación de los tiempos empleados en absorber calor para la vaporización y la fusión es $5/2$, como se trata de la misma masa en ambos casos, esta relación será igual a la relación de los calores latentes; esto

$$\text{es: } \frac{L_v}{L_f} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 34. Determinar el calor necesario para vaporizar 200 gr. De hielo que se encuentra a la temperatura de -5°C .

Solución.

Como ocurren cambios de estado debemos calcular las calorías requeridas en cada proceso.

Utilicemos los siguientes valores:

Calor específico del hielo: $0,5 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$

Calor específico del agua: $1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$

Calor de fusión del agua: 80 cal/g

Calor de vaporización del agua: 540 cal/g

Calor para elevar la temperatura del hielo de -5°C a 0°C

$$Q_1 = m \times c \times \Delta t = m \times 0,5 \times [0 - (-5)] \\ = m \times 2,5 \text{ cal}$$

Calor para pasar de hielo a agua (fusión)

$$Q_2 = m \times L = m \times 80 \text{ cal}$$

Calor para elevar la temperatura del Agua de 0°C a 100°C

$$Q_3 = m \times c \times \Delta t = m \times 1 \times (100-0) \\ = m \times 100 \text{ cal}$$

Calor para pasar de Agua a Vapor (vaporización)

$$Q_4 = m \times 540 \text{ cal}$$

Finalmente,

$$Q = \sum Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \\ = m(2,5+80+100+540) = 200 \times 722,5 \\ = 144500 \text{ cal.}$$

Ejemplo 35. Calcular la temperatura final cuando se mezclan 2 kg. de hielo a -20°C con 10 kg. de agua a 60°C .

Solución.

Como ocurren cambios de estados es preciso primero, hacer un balance de energía para determinar si el agua se convierte en hielo o el hielo en agua, u ocurre una conversión parcial. Trabajemos en Kilocalorías utilizando los siguientes valores:

Calor específico del hielo : $0,55 \text{ kcal/kg } ^{\circ}\text{C}$
 Calor específico del agua : $1 \text{ kcal/kg } ^{\circ}\text{C}$
 Calor de fusión del agua : 80 kcal/kg

Calor necesario para convertir el hielo en agua a 0°C .

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_H \times c_H \times \Delta t = 2 \times 20 = 22 \text{ kcal} \\ Q_2 &= m_H \times L = 2 \times 80 = 160 \text{ kcal} \\ Q_H &= \sum Q = Q_1 + Q_2 = 182 \text{ kcal} \quad (1) \end{aligned}$$

Calor liberado al llevar el agua de 60°C a 0°C .

$$\begin{aligned} Q'_1 &= m_a \times c_H \Delta t = 10 \times 1 \times 60 = 600 \text{ kcal} \\ Q_a &= \sum Q' = Q'_1 = 600 \text{ kcal} \quad (2) \end{aligned}$$

Comparando (1) y (2), como $Q_a > Q_H$, nos indica que el agua dispone de las calorías necesarias para convertir todo el hielo en agua y más aún elevar su temperatura a más de 0°C . Esto es, la temperatura final t estará entre, $0^{\circ}\text{C} < t < 60^{\circ}\text{C}$ y se determinará igualando el calor ganado al calor perdido.

Calor ganado

$$\begin{aligned} Q_1 &= 22 \text{ (valor ya determinado)} \\ Q_2 &= 160 \text{ (valor ya determinado)} \\ Q_3 &= m \times c \times \Delta t = 2 \times 1 \times (t-0) = 2t \\ Q_G &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 22 + 160 + 2t = 182 + 2t \quad (3) \end{aligned}$$

Calor perdido

$$\begin{aligned} Q_P &= m \times c \times \Delta t \\ &= 10 \times 1 \times (60-t) = 10(60-t) \quad (4) \end{aligned}$$

Finalmente, igualando (3) y (4)

$$\begin{aligned} Q_G &= Q_P \\ 182 + 2t &= 10(60-t) \end{aligned}$$

Despejando t , se obtiene la temperatura final de la mezcla (agua)

$$T = 34,8^{\circ}\text{C}$$

Ejemplo 36. Determinar la temperatura final cuando se mezclan $1/2 \text{ kg}$ de hielo a -16°C con 1 kg de agua a 20°C que se encuentra contenida en un recipiente o calorímetro de cobre de $1/2 \text{ kg}$.

Solución.

Como en el ejemplo anterior es necesario hacer un balance de energía.

Nuevamente trabajando en kilocalorías y con Calor específico del cobre = $0,09 \text{ kcal/kg } ^{\circ}\text{C}$

Calor necesario para convertir el Hielo en Agua a 0°C .

$$Q_1 = m_H \times c_H \times \Delta t = 0,55 \times 16 = 4,4 \text{ kcal}$$

$$Q_2 = m_H \times L = 0,5 \times 80 = 40,0 \text{ kcal}$$

$$Q_H = \sum Q = Q_1 + Q_2 = 44,4 \text{ kcal} \quad (1)$$

Calor liberado para llevar el Agua a 0°C (incluyendo el recipiente)

$$Q'_1 = m_a \times c_a \times \Delta t = 1 \times 1 \times 20 = 20,0 \text{ kcal}$$

$$Q'_2 = m_c \times c_c \times \Delta t = 0,5 \times 0,09 \times 20 = 0,9 \text{ kcal}$$

$$Q_{ac} = \sum Q' = Q'_1 + Q'_2 = 20,9 \text{ kcal} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), como $Q_{ac} < Q_H$, nos indica que no se dispone de las calorías necesarias para convertir el hielo en agua a 0°C . Pero, como $Q_{ac} >$

Q_1 si se elevara la temperatura del hielo a 0°C y solo parte del hielo se podrá convertir en agua.

Luego, la temperatura final es 0°C , $t = 0^{\circ}\text{C}$

¿Cuáles serán las masas finales de hielo y Agua?

La energía que resta después de elevar la temperatura del hielo a 0°C es:

$$Q_{ac} - Q_1 = 20,9 - 4,4 = 16,5 \text{ kcal.}$$

Con estas calorías se convertirá en agua:

$$Q = M \times L$$

$$\Rightarrow 16,5 = M \times 80 \Rightarrow M = 0,21 \text{ Kg.}$$

y se quedarán como hielo a 0°C :

$$(0,50 - 0,21) = 0,29 \text{ kg.}$$

Por lo tanto, se tendrá finalmente,

$1,21 \text{ kg.}$ de Agua y $0,29 \text{ kg.}$ de Hielo

Por supuesto todo a 0°C , incluyendo el calorímetro.

Ejemplo 37. Un trozo de hielo de 10 g y temperatura -10°C se introducen en $1,5 \text{ kg}$ de agua a 75°C . Determine la temperatura final de la mezcla.

$$c_{\text{hielo}} = 0,45 \text{ cal/g } ^{\circ}\text{C},$$

$$L_{\text{fusión, hielo}} = 80 \text{ cal/g}$$

Solución.

El calor cedido por el agua es igual al ganado por el hielo. El hielo gana una porción calor desde la temperatura -10°C hasta 0°C , otra para cambiar de estado manteniendo la temperatura constante de 0°C y otra cuando se ha convertido en agua al cambiar la temperatura de 0°C hasta la temperatura de

equilibrio T_e . De este modo:

$$\begin{aligned} m_h c_h [0 - (-10)] + m_h L_f \\ + m_h c_a (T_e - 0) + m_a c_a (T_e - 75) = 0. \end{aligned}$$

Despejando T_e encontramos:

$$T_e = 73,94^{\circ}\text{C}$$

Ejemplo 38. Un recipiente de cobre de masa $0,5 \text{ kg}$ contiene 1 kg de agua a 20°C se le añade $0,5 \text{ kg}$ de hielo a -16°C

a) encontrar la temperatura de equilibrio

b) Cuanto hielo y cuanto agua quedan.

$$c_{\text{cobre}} = 390 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}, c_{\text{agua}} = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_{\text{hielo}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}, L_{\text{fusión hielo}} = 334 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Solución.

Calor cedido por el agua y el calorímetro al llevarlo de 20°C a 0°C

$$Q_1 = (m_c c_c + m_a c_a) \Delta \theta$$

$$= (0,5 \times 390 + 1,0 \times 4190) 20 = 87700 \text{ J}$$

Calor para llevar el hielo -18°C a 0°C

$$Q_2 = m_h c_h \Delta \theta = 0,5 \times 2100 \times 18 = 16800 \text{ J}$$

Calor para fundir el hielo

$$Q_3 = L_f m_h = 334 \times 10^3 \times 0,5 = 167 \times 10^3 \text{ J}$$

Análisis:

Tenemos 87700 J, esa cantidad puede elevar la temperatura del hielo hasta los 0°C

Nos quedan 87700 - 16800 = 70900 J

Esto no puede fundir todo el hielo, solamente

$$\text{alcanza para fundir } \frac{70,900 \times 10^3 \text{ J}}{334 \times 10^3 \text{ J/kg}} = 0,212 \text{ kg}$$

a) Temperatura de equilibrio 0°C

b) Finalmente quedan 1 + 0,212 = 1,212 kg de agua y 0,5 - 0,212 = 0,288 kg de hielo

Ejemplo 39. Un recipiente metálico de masa 200 g, aislado del exterior, contiene 100 g de agua en equilibrio térmico a 22° C. Un cubo de hielo de 10 g, en el punto de fusión, se suelta en el agua, cuando se alcanza el equilibrio térmico la temperatura es 15° C. Asumir que no hay intercambio de calor con el exterior.

Para el agua el calor específico es 4190 J/kg K y el calor de fusión es $3,34 \times 10^5 \text{ J/kg}$.

¿Cuál es el calor específico del metal?

Solución.

Calor cedido = Calor ganado

$$c_x (0,2)(22 - 15) + 4190(0,1)(22 - 15)$$

$$= 0,01(3,34 \times 10^5) + 4190(0,01)(15 - 0)$$

$$\Rightarrow c_x = 739,64 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Ejemplo 40. Determine el estado final cuando se mezclan 20 g de hielo a 0 °C con 10 g de vapor a 100 °C.

Solución.

$$C_{\text{agua}} = 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$L_f = 3,33 \times 10^5 \text{ J/kg} = 80 \text{ cal/g}$$

$$L_v = 2,26 \times 10^6 \text{ J/kg} = 542,4 \text{ cal/g}$$

$$M_{\text{hielo}} = 20 \text{ g}$$

$$M_{\text{vapor}} = 10 \text{ g}$$

Si se condensa todo el vapor cede 5424 cal.

Si se funde todo el Hielo absorbe $80 \times 20 = 1600 \text{ cal}$ quedando agua que para ser llevada a 100 °C absorbería a lo más $20 \times 100 = 2000 \text{ cal}$.

De aquí se concluye que no puede condensarse todo el vapor, pero sí fundirse todo el Hielo. De modo que la temperatura final, en presencia de vapor debe ser $t_F = 100 \text{ }^\circ\text{C}$: Supongamos entonces que condensa m gramos de vapor

$$Q_{\text{cedido}} = 542,4 \times m \text{ cal}$$

$$Q_{\text{absorbido}} = 20 \times 80 + 20 \times 1 \times 100 = 3600 \text{ cal}$$

$$542,4 \times m = 3600 \Rightarrow m = \frac{3600}{542,4} = 6,6 \text{ g}$$

Luego el estado final consiste en una mezcla a 100 °C de 4,4 g de vapor y 26,6 g de agua líquida.

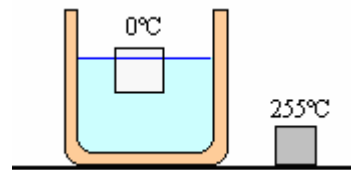
Ejemplo 41. Un recipiente de cobre de 0,1 kg contiene 0,16 kg de agua y 0,018 kg de hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. Si se introduce un trozo de plomo de 0,75 kg de masa a 255°C, ¿qué temperatura final de equilibrio se alcanza? (Considere que no hay intercambio de calor con el entorno)

$$c_{\text{Pb}} = 130 \text{ J/kgK}$$

$$c_{\text{Cu}} = 390 \text{ J/kgK}$$

$$c_{\text{agua}} = 4190 \text{ J/kgK}$$

$$c_{\text{fusión agua}} = 334 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

Solución.

$$\text{Cobre} \begin{cases} m_{\text{cu}} = 0,1 \text{ kg} \\ t_{\text{cu}} = 0^\circ \text{C} \end{cases}, \text{ Agua} \begin{cases} m_{\text{agua}} = 0,16 \text{ kg} \\ t_{\text{cu}} = 0^\circ \text{C} \end{cases},$$

$$\text{Hielo} \begin{cases} m_{\text{hielo}} = 0,018 \text{ kg} \\ t_{\text{cu}} = 0^\circ \text{C} \end{cases}$$

$$\text{Plomo} \begin{cases} m_{\text{pb}} = 0,75 \text{ kg} \\ t_{\text{pb}} = 255^\circ \text{C} \end{cases}$$

Para fundir el hielo $= 334 \times 10^3 (0,018) = 6012 \text{ J}$

$$m_{\text{agua}} = 0,16 + 0,018 = 0,178 \text{ kg}$$

El plomo puesto a 0°C nos proporciona = 130

$$(0,75)(255) = 24862,5 \text{ J}$$

Nos quedarían $24862,5 - 6012 = 18850,5 \text{ J}$

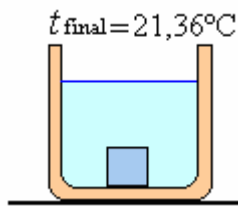
Los que se emplearía para elevar la temperatura del sistema:

$$(mc + mc + mc) \Delta t = Q_{\text{disponible}}$$

$$(0,178 \times 4190 + 0,1 \times 390 + 0,75 \times 130) \Delta t = 18850,5$$

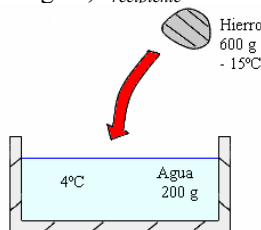
$$\Delta t = \frac{18850,5}{(745,82 + 39 + 97,5)}$$

$$= \frac{18850,5}{882,32} = 21,36^\circ \text{C}$$



Ejemplo 42. Un trozo de hierro se deja caer en agua tal como se muestra en la figura. Determine la temperatura y fase del agua en el equilibrio. En caso de coexistir 2 fases del agua determine la masa final en cada fase.

$c_{\text{hierro}} = 0,107 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$, $c_{\text{recipiente}} \approx 0$



Solución.

Agua de 4°C a $0^\circ\text{C} \Rightarrow$

$$Q_1 = 200 \times 1 \times 4 = 800 \text{ calorías}$$

Hierro de -15°C a $0^\circ\text{C} \Rightarrow$

$$Q_2 = 600 \times 0,107 \times 15 = 963 \text{ calorías}$$

En el balance $963 - 800 = 163$ calorías, las que convertirán en hielo a una parte del agua

$$m = \frac{163}{80} = 2,04 \text{ gramos}$$

La temperatura de equilibrio es 0°C , 2,04 gramos de hielo y 197,6 gramos de agua.

Ejemplo 43. Dilatación térmica y equilibrio térmico.

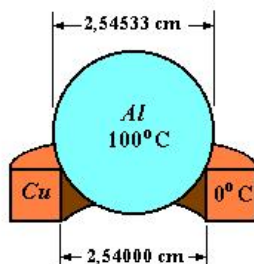
Un anillo de cobre de 21,6 g tiene un diámetro de 2,54000 cm a la temperatura de 0°C . Una esfera de aluminio tiene un diámetro de 2,54533 cm a la temperatura de 100°C . La esfera se sitúa sobre el anillo, y se deja que ambos lleguen al equilibrio térmico, sin que se disipe calor alguno al entorno. La esfera pasa justamente a través del anillo a la temperatura de equilibrio. Halle la masa de la esfera.

Calor específico del aluminio: $0,212 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$

Calor específico del cobre: $0,094 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$

Coeficiente de dilatación del aluminio: $24 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Coeficiente de dilatación del cobre: $17 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$



Solución.

La temperatura final de equilibrio del sistema es t .
Calor cedido por el aluminio = Calor ganado por el cobre

$$m_{\text{aluminio}} \times c_{\text{aluminio}} (100 - t) = m_{\text{cobre}} \times c_{\text{cobre}} (t - 0)$$

Poniendo valores

$$m_{\text{aluminio}} \times 0,212 (100 - t) = 21,6 \times 0,094 t$$

Diámetro final de la esfera de aluminio = diámetro final del anillo de cobre

$$D_{\text{aluminio}} [1 - \alpha_{\text{aluminio}} (100 - t)] = D_{\text{cobre}} [1 + \alpha_{\text{cobre}} (t - 0)]$$

Poniendo valores

$$\begin{aligned} 2,5433 [1 - 24 \times 10^{-6} (100 - t)] &= 2,54 [1 + 17 \times 10^{-6} t] \\ \Rightarrow \frac{2,5433}{2,54} &= \frac{[1 + 17 \times 10^{-6} t]}{[1 - 24 \times 10^{-6} (100 - t)]} \end{aligned}$$

El primer término por el binomio de Newton se puede escribir como:

$$\frac{2,5433}{2,54} = \frac{2,54}{2,54} + \frac{0,0033}{2,54} = 1 + 2,1 \times 10^{-3}$$

El segundo término por el binomio de Newton se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{[1 + 17 \times 10^{-6} t]}{[1 + 24 \times 10^{-6} (100 - t)]} &= 1 + 2,4 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-6} t \end{aligned}$$

Luego:

$$1 + 2,1 \times 10^{-3} = 1 + 2,4 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-6} t$$

Resolviendo t :

$$t = \frac{0,3 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-6}} = 42,2^\circ\text{C}$$

Finalmente la masa de la esfera de aluminio será

$$m_{\text{aluminio}} = \frac{21,6 \times 0,094 t}{0,212 \times (100 - 42,8)} = 7,17 \text{ gramos}$$

Es una esfera hueca.

Los gases reales no siguen exactamente este comportamiento, pero es una buena forma para comenzar.

El comportamiento de las masas encerradas de gases ideales se determina por las relaciones entre p , V o p , T , o V , T cuando la tercera cantidad T o V o p respectivamente, es mantenida constante; estas relaciones fueron obtenidas experimental por Boyle, Gay-Lussac y Charles respectivamente.

LEY DE BOYLE. La presión (p) de un gas ideal varía inversamente a su volumen (V) si la temperatura (T) se mantiene constante.

$$p \propto \frac{1}{V} \text{ con } T \text{ constante} \Rightarrow pV = \text{Constante}$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

LEY DE GAY-LUSSAC. La presión (p) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si el volumen (V) se mantiene constante.

$$p \propto T \text{ con } V \text{ constante} \Rightarrow \frac{p}{T} = \text{Constante}$$

DEFINICIÓN DE UN GAS IDEAL.

Los gases juegan un rol muy importante en muchos procesos termodinámicos, y antes de ir más allá, es importante considerar una forma ingeniosa de comprender las propiedades de los gases. Esta idea es llamada la teoría cinética de los gases, trata de explicar las propiedades macroscópicas de un gas examinando el comportamiento de los átomos y moléculas que forman un gas. A simple vista esto parece ser imposible porque el número de átomos involucrados es demasiado grande, alrededor de 10^{27} átomos llenan una habitación. Sin embargo utilizando la estadística, se puede predecir con mucha precisión las características de un gas. En lo siguiente asumiremos que estamos trabajando con un **gas ideal** con las propiedades siguientes:

Un gas está formado por partículas llamadas moléculas.

Las moléculas se mueven irregularmente y obedecen las leyes de Newton del movimiento.

El número total de moléculas es grande.

El volumen de las moléculas mismas es una fracción inapreciablemente pequeña del volumen ocupado por el gas.

Entre moléculas no obran fuerzas de consideración, salvo durante los choques.

Los choques son perfectamente elásticos y de duración insignificante.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a volumen constante

$$t = 273,15 \left(\frac{p}{p_c} - 1 \right) ^\circ C \Rightarrow \frac{t}{273,15} + 1 = \frac{p}{p_c} \\ \Rightarrow \frac{t + 273,15}{273,15} = \frac{p}{p_c} \Rightarrow \frac{T}{T_c} = \frac{p}{p_c}$$

$$\text{o } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

LEY DE CHARLES. El volumen (V) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si la presión (p) se mantiene constante.

$$V \propto T \text{ con } p \text{ constante} \Rightarrow \frac{V}{T} = \text{Constante}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a presión constante

$$t = 273,15 \left(\frac{V}{V_C} - 1 \right) ^\circ C \Rightarrow \frac{t}{273,15} + 1 = \frac{V}{V_C}$$

$$\Rightarrow \frac{t + 273,15}{273,15} = \frac{V}{V_C} \Rightarrow \frac{T}{T_C} = \frac{V}{V_C}$$

$$\text{o } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL.

El comportamiento de gases ideales se caracteriza en términos de p , V y T . Tal ecuación se llama la ecuación del gas ideal. El comportamiento de cualquier estado de la materia se puede caracterizar generalmente por una cierta relación entre la presión (p) y la densidad (ρ) que por supuesto corresponde al volumen (V). La ecuación de los gases ideales puede obtenerse por la combinación de dos de las tres leyes de los gases indicadas anteriormente.

Sea el gas encerrado con condiciones iniciales p_1 , V_1 y T_1 , llevado a un estado final p_2 , V_2 y T_2 como sigue:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\text{o } \frac{pV}{T} = \text{Constante}$$

Nota: Se encontró que el valor de la constante es dependiente en la masa del gas dado y también se encontró que no es igual para una unidad de masa de diferentes gases. Sin embargo, se encuentra que si lo es para 1 mol de masa (la masa numéricamente equivalente en gramos al peso molecular, ejemplo, 2 g para H_2 , 32 g para el O_2 , 28 g para el N_2 , etc.) de cualquier gas ideal entonces el valor de la constante es igual para todos los gases. Esta constante igual para todos los gases es denotada generalmente por “ R ” y llamada la constante universal de los gases.

$$R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1,986 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

La ecuación del gas ideal por lo tanto se escribe normalmente como

$$pV = nRT$$

Donde n = número de moles.

El número de moles se define como, el cociente de la masa de gas M a su peso molecular (M_0)

$$n = \frac{M}{M_0}$$

Si es m la masa de cada molécula de un gas y N es el número de las moléculas que hacen la masa total M .

N_A = número de Avogadro = número de moléculas en 1 mol de gas (cualquier gas).

Entonces $M = mN$ y $M_0 = mN_A$.

$$\text{Por lo tanto } n = \frac{N}{N_A}$$

$$\text{Luego } pV = nRT = \frac{M}{M_0} RT = \frac{N}{N_A} RT$$

$$\text{Ahora, } pV = \frac{M}{M_0} RT \Rightarrow pV = \frac{mN}{mN_A} RT$$

$$\Rightarrow pV = N \frac{R}{N_A} T$$

El cociente entre las dos constantes R y N_A es la constante que designamos por k_B , la constante de Boltzmann.

$$k_B = \frac{8,314 \text{ J/mol K}}{6,022 \times 10^{23} / \text{mol}} = 1,38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Ejemplo 64. Un conductor inicia su viaje en una mañana fría cuando la temperatura es 4°C , y mide la presión de la llanta y ve que el manómetro lee 32 psi ($2,2 \times 10^5 \text{ Pa}$). Después de manejar todo el día, las llantas se han calentado, y por la tarde la temperatura de las llantas se ha elevado a 50°C . Asumiendo que el volumen es constante, ¿a qué presión se habrá elevado el aire en las llantas?

$$1 \text{ atm} = 1,013 \text{ Pa} = 14,7 \text{ psi}$$

Solución.

Tomar en cuenta que un manómetro mide la presión manométrica ($p_m = p - p_a$). Luego la presión inicial es

$$p_1 = p_m + p_a \Rightarrow p_1 = 32 + 14,7 = 46,7 \text{ psi}$$

$$T_1 = 4 + 273,15 = 277,15 \text{ K}$$

$$T_2 = 50 + 273,15 = 323,15 \text{ K}$$

$$p_1 V_1 = nRT_1 \text{ y } p_2 V_2 = nRT_2, V_1 = V_2$$

Dividiendo estas ecuaciones:

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{n R T_1}{n R T_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \left(\frac{323,15}{277,15} \right) (46,7) = 54,5 \text{ psi}$$

absoluta

o $54,5 - 14,7 = 39,8$ psi, presión manométrica.

Ejemplo 65. Un gas ideal ocupa un volumen de 100 cm^3 a 20°C y a una presión de 100 Pa . Determine el número de moles de gas en el recipiente.

Solución.

$$p = 100 \text{ Pa} = 9,8692 \times 10^{-4} \text{ atm}$$

$$V = 100 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 0,1 \text{ litros}$$

$$t = 20^\circ\text{C}$$

$$T = 293,15 \text{ K}$$

$$R = 0,082 \text{ litro atm/mol K} = 8,31 \text{ J/mol K}$$

Se puede hacer el cálculo en los dos sistemas de unidades usando

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{9,8692 \times 10^{-4} \times 0,1}{0,082 \times 293,15} = 4,11 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

$$n = \frac{100 \times 100 \times 10^{-6}}{8,31 \times 293,15} = 4,11 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

Ejemplo 66. Se mantiene un gas ideal en un recipiente a volumen constante. Inicialmente, su temperatura es 10°C y su presión es $2,5 \text{ atm}$. ¿Cuál será la presión cuando la temperatura sea de 80°C ?

Solución.

$$p_1 = 2,5 \text{ atm}, t_1 = 10^\circ\text{C}, T_1 = 283,15 \text{ K},$$

$$t_2 = 80^\circ\text{C}, T_2 = 353,15 \text{ K}$$

$$n = \frac{p_1 V}{RT_1} = \frac{p_2 V}{RT_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1} = \frac{2,5 \times 353,15}{283,15} = 3,118 \text{ atm}$$

Ejemplo 64. Un cilindro con un émbolo móvil contiene un gas a una temperatura de 127°C , una presión de 30 kPa y un volumen de 4 m^3 . ¿Cuál será su temperatura final si el gas se comprime a $2,5 \text{ m}^3$ la presión aumenta a 90 kPa ?

Solución.

$$p_1 = 30 \times 10^3 \text{ Pa}, V_1 = 4 \text{ m}^3, t_1 = 127^\circ\text{C},$$

$$T_1 = 400,15 \text{ K}$$

$$p_2 = 90 \times 10^3 \text{ Pa}, V_2 = 2,5 \text{ m}^3$$

$$\text{De } n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2}$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \frac{90 \times 10^3 \times 2,5}{30 \times 10^3 \times 4} 400,15$$

$$= 750,28 \text{ K} = 477,13^\circ\text{C}$$

Ejemplo 67. Se encuentra contenido un gas en una vasija de 8 L , a una temperatura de 20°C y a una presión de 9 atm . Determine el número de moles en la vasija.

a) Determine el número de moles en la vasija.
b) ¿Cuántas moléculas hay en la vasija?

Solución.

$$p = 9 \text{ atm}, V = 8 \text{ litros}, t = 20^\circ\text{C}, T = 293,15 \text{ K}$$

$$a) n = \frac{pV}{RT} = \frac{9 \times 8}{0,082 \times 293,15}$$

$$= 3,0 \text{ mol}$$

$$b) N_A = 6,0221367 \times 10^{23} / \text{mol}$$

$$N = n N_A = 3 \times 6,0221367 \times 10^{23}$$

$$= 1,81 \times 10^{24} \text{ moléculas}$$

Ejemplo 68. Se infla la llanta de un automóvil con aire inicialmente a 10°C y a presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime a 28% de su volumen inicial y su temperatura aumenta a 40°C . ¿Cuál es la presión del aire?

Después de manejar el automóvil a altas velocidades, la temperatura del aire de las ruedas aumenta a 85°C y el volumen interior de la rueda aumenta 2% . ¿Cuál es la nueva presión en la rueda? Expresar su respuesta en Pa (absoluta) y en psi (lb/pulg^2) (manométrica).

($1 \text{ atm} = 14,70 \text{ psi}$)

Solución.

Primera parte

$$p_1 = 1 \text{ atm}, V_1 = V, t_1 = 10^\circ\text{C}, T_1 = 283,15 \text{ K}$$

$$V_2 = 0,28V, t_2 = 40^\circ\text{C}, T_2 = 313,15 \text{ K}$$

De $pV = nRT$ como la masa no varía

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = 1 \times \frac{V \times 313,15}{0,28V \times 283,15}$$

$$= 3,95 \text{ atm} = 4,0 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Nota la presión manométrica p'_2 , es la presión relativa a la atmosférica, es decir

$$p'_2 = 3,95 - 1 = 2,95 \text{ atm}$$

$$= 2,95 \times 14,7 = 43,365 \text{ psi}$$

Segunda parte

$$t_2 = 85^\circ\text{C}, T_2 = 358,15 \text{ K}, V_2 = 1,02 \times 0,28V$$

$$p_2 = p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = 1 \times \frac{V \times 358,15}{1,02 \times 0,28V \times 283,15}$$

$$= 4,43 \text{ atm} = 4,42884 \times 10^5 \text{ Pa}$$

y la manométrica será

$$p'_2 = 4,43 - 1 = 3,43 \text{ atm} = 3,43 \times 14,7 = 50,42 \text{ psi}$$

Ejemplo 69. Una caja cúbica metálica de 20 cm de lado, contiene aire a la presión de 1 atm y a 300 K

de temperatura. Se cierra herméticamente, de forma que el volumen sea constante y se calienta hasta 400 K. Hallar la fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja.

Solución.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_a}{300} = \frac{p_2}{400} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{400}{300} p_a = \frac{4}{3} (1,013 \times 10^5) = 1,35 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja} \\ (p_1 - p_a)A = (1,35 \times 10^5 - 1,013 \times 10^5) (0,2)^2 \\ = 1,348 \times 10^3 = 1348 \text{ N}$$

Ejemplo 70. Una campana de buzo cilíndrica de 3 m de diámetro y 4 m de altura con el fondo abierto se sumerge a una profundidad de 220 m en el océano. La temperatura en la superficie es de 25 °C y en el fondo, a los 220 m, es de 5 °C. La densidad del agua de mar es de 1025 kg/m³. ¿Cuánto subirá el nivel del agua adentro de la campana cuando se sumerge?

Solución.

Sea h esa altura.

$$p_1 = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa},$$

$$V_1 = \pi r^2 H, r = 1,5 \text{ m}, H = 4 \text{ m}$$

$$t_1 = 25 \text{ °C}, T_1 = 298,15 \text{ K}$$

$$t_2 = 5 \text{ °C}, T_2 = 278,15 \text{ K}$$

$$V_2 = \pi r^2 (H - h)$$

La campana está a una profundidad $h' = 220 \text{ m}$

El nivel del agua en la campana está a profundidad $h' - h$

$$\text{La presión es } p_2 = p_1 + \rho g(h' - h)$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Donde tenemos } \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2}$$

o sea

$$\frac{p_1 H}{T_1} = \frac{(p_1 + \rho g)(h' - h)(H - h)}{T_2}$$

Poniendo los valores:

$$\frac{101325 \times 4}{298,15} = \frac{[101325 + 1025 \times 9,8(220 - h)](4 - h)}{278,15}$$

Ecuación que tiene por solución

$$h = 3,834 \text{ m}$$

Ejemplo 71. Sube una burbuja de gas desde el fondo en un lago con agua limpia a una profundidad de 4,2 m y a una temperatura de 5 °C hasta la superficie donde la temperatura del agua es de 12 °C. ¿Cuál es el cociente de los diámetros de la burbuja en los dos puntos?

(Suponga que la burbuja de gas está en equilibrio térmico con el agua en los dos puntos.)

Solución.

si p_a indica la presión atmosférica

$$h = 4,2 \text{ m}$$

$$p_1 = p_a + \rho g h$$

$$t_1 = 5 \text{ °C}, T_1 = 278,15 \text{ K}$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3$$

$$p_2 = p_a$$

$$t_2 = 12 \text{ °C}, T_2 = 285,15 \text{ K}$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{(p_a + \rho g h) d_1^2}{T_1} = \frac{p_a d_2^2}{T_2}$$

Supondremos que

$$p_a = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Entonces

$$\frac{(101325 + 1025 \times 9,8 \times 4,2) d_1^2}{278,15} = \frac{101325 d_2^2}{285,15}$$

$$\text{o bien } \frac{d_2}{d_1} = 1,13$$

Ejemplo 72. Una campana de buzo en forma de cilindro con una altura de 2,50 m está cerrada en la parte superior y abierta en la parte inferior. La campana se baja desde el aire al agua de mar ($\rho = 1,025 \text{ gm/cm}^3$). El aire encerrado en la campana inicialmente está a 20 °C. La campana se baja a una profundidad (medida desde el nivel del agua dentro de la campana) de 82,3 m. A esta profundidad la temperatura del agua es de 4 °C, y la campana está en equilibrio térmico con el agua. (sugerencia: trate al aire como un gas ideal y al mar como un líquido en reposo)

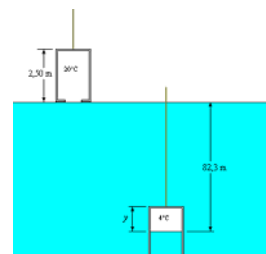
a) ¿Cuánto subirá el nivel del agua dentro de la campana?

b) ¿A qué presión se deberá someter el aire dentro de la campana para sacar el agua que entró?

Dato: la presión atmosférica es $1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Solución.

a)



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} V_1$$

$$p_1 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

$$p_2 = 1,013 \times 10^5 + 1025 \times 9,8 \times 82,3 = 9,28 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 20 + 273 = 293 \text{ K,}$$

$$T_2 = 4 + 273 = 277 \text{ K}$$

Con los datos:

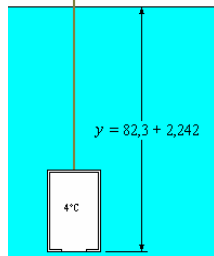
$$V_2 = \frac{(1,013 \times 10^5)(277)}{(9,28 \times 10^5)(293)} V_1 = 0,103 V_1$$

Como también $V_2 = Ay$:

$$Ay = 0,103 A(2,5) \Rightarrow y = 0,258 \text{ m}$$

El nivel del agua dentro de la campana subirá
 $(2,50 - 0,258) = 2,242 \text{ m}$

b)



Para que el volumen sea igual que en la superficie la presión interior debe de igualar a la presión en esa profundidad

$$p = 1,013 \times 10^5 + 1025 \times 9,8 \times (82,3 + 2,242) = 9,505 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Ejemplo 73. Un globo poroso tiene un volumen de 2 m^3 a una temperatura de 10°C y a una presión de $1,1 \text{ atm}$. Cuando se calienta a 150°C el volumen se expande a $2,3 \text{ m}^3$ y se observa que se escapa el 5% del gas.

- a) ¿Cuánto gas había en el globo a 10°C ?
 b) ¿Cuál es la presión en el globo a 150°C ?

$$R = 0,082 \frac{\text{atmlitro}}{\text{molK}}$$

Solución.

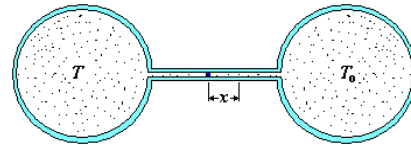
$$p_1 = 1,1 \text{ atm}, V_1 = 2 \text{ m}^3, \\ t_1 = 10^\circ\text{C}, T_1 = 283,15 \text{ K}, n_1 = ? \\ p_2 = ?, V_2 = 2,3 \text{ m}^3, \\ t_2 = 150^\circ\text{C}, T_2 = 423,15 \text{ K}, n_2 = 0,95 n_1.$$

$$a) n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{1,1 \times 2000}{0,082 \times 283,15} = 94,8 \text{ mol}$$

$$b) p_2 = \frac{n_2 RT_2}{V_2} = \frac{0,95 \times 94,8 \times 0,082 \times 423,15}{2300} = 1,387 \text{ atm}$$

Ejemplo 74. El termómetro de gases consta de dos recipientes idénticos con gas de volumen V_0 cada uno, unidos por un tubo de longitud ℓ y sección A . Una gota de mercurio obstruye el tubo. Si las temperaturas de los gases en los volúmenes son iguales, el mercurio se encontrará en el centro del tubo. El volumen derecho se coloca un termostato con temperatura T_0 . Gradúese el termómetro, buscando la dependencia entre la temperatura del

gas en el volumen izquierdo y el desplazamiento x del mercurio con respecto a la posición de equilibrio.



Solución.

Como la cantidad de gas en los dos lados es igual, podemos escribir, cuando la temperatura del lado izquierdo sea T . La gota de mercurio se desplaza x , hasta que las presiones en ambos depósitos sea igual (p_0).

$$\frac{p_0 \left[V_0 + A \left(\frac{\ell}{2} + x \right) \right]}{T} = \frac{p_0 \left[V_0 + A \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right]}{T_0}$$

$$\Rightarrow T = T_0 \frac{2V_0 + S(\ell + 2x)}{2V_0 + S(\ell - 2x)}$$

Ejemplo 75. Un pez que se encuentra a $63,25 \text{ m}$ de profundidad en el mar donde la temperatura es 2°C produce burbujas de aire de 1 cm de radio aproximadamente. Determine el radio de las burbujas al llegar estas a la superficie del mar donde la temperatura es de 27°C . Considere que la densidad del agua de mar no varía con la profundidad y tiene un valor de $1,035 \text{ g/cm}^3$.

Solución.

$$h = 63,25 \text{ m} \\ p_1 = p_a + \rho gh \\ t_1 = 2^\circ\text{C}, T_1 = 275,15 \text{ K}$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3$$

$$p_2 = p_a \\ t_2 = 27^\circ\text{C}, T_2 = 300,15 \text{ K}$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T} \Rightarrow \frac{(b + \rho gh) r_1^3}{T_1} = \frac{b r_2^3}{T}$$

Supondremos que

$$p_a = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$\rho = 1035 \text{ kg/m}^3$$

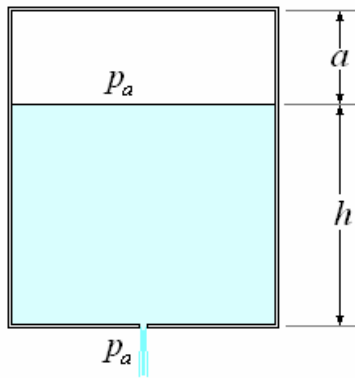
$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Entonces

$$\frac{(101325 + 1035 \times 9,8 \times 63,25) r_1^3}{275,15} = \frac{101325 r_2^3}{300,15}$$

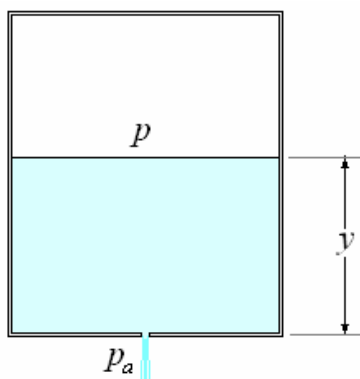
$$\text{o bien } \frac{r_2}{r_1} = 2 \Rightarrow r_2 = 2 \text{ cm}$$

Ejemplo 76. Un depósito cerrado contiene agua hasta una altura $h = 2,24 \text{ m}$, y por encima $a = 1 \text{ m}$, aire a la presión del exterior $p_a = 1 \text{ atm}$. Por un pequeño orificio de fondo se deja salir el agua. Calcular el descenso de nivel, suponiendo invariable la temperatura del agua.



Solución.

Sea y la distancia desde la superficie de nivel al fondo y p la presión del aire; se tiene:



$$p_a a = p(a + h - y)$$

Transformación isotérmica

El equilibrio se establecerá cuando

$$p + \rho g y = p_a \Rightarrow p = p_a - \rho g y$$

De aquí resulta

$$p_a a = (p_a - \rho g y)(a + h - y)$$

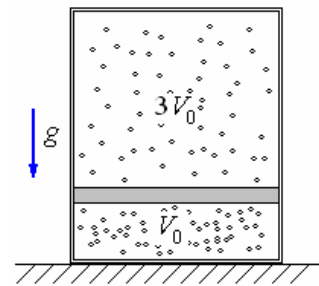
Reemplazando valores:

$$(1,033 \times 10^4)(1) = (1,033 \times 10^4 - 0,98 \times 10^4 y)(3,24 - y)$$

$$y = \begin{cases} 0,64 \\ 3,64 \end{cases}$$

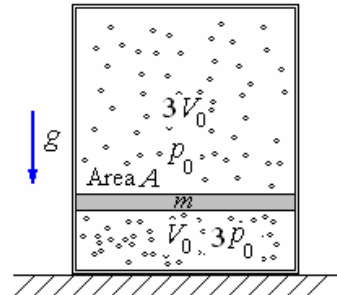
La respuesta posible es $y = 0,64$ m.

Ejemplo 77. En un recipiente cilíndrico se encuentra en equilibrio un émbolo pesado. Por encima del émbolo y por debajo de él se hallan masas iguales de gas a temperatura idéntica. La relación entre el volumen superior y el inferior es igual a 3. ¿Cuál será la relación de los volúmenes si aumentamos la temperatura del gas al doble?



Solución.

Inicialmente



Arriba : $3V_0, T_0, p_0$

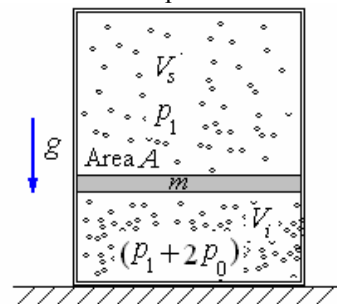
Abajo : $V_0, T_0, p_0 + \frac{mg}{A}$

Como las masas son iguales

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)V_0}{T_0} \Rightarrow \frac{mg}{A} = 2p_0$$

Luego $p_0 + \frac{mg}{A} = 3p_0$

Después de doblar la temperatura



Arriba : $V_s, 2T_0, p_1$

Abajo : $V_i, 2T_0, p_1 + 2p_0$

El volumen total es el mismo

$$V_i + V_s = 3V_0 + V_0 = 4V_0$$

En la parte superior

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_s}{2T_0} \Rightarrow p_1 = \frac{6p_0 V_0}{V_s}$$

En la parte inferior

$$\frac{3p_0 V_0}{T_0} = \frac{(p_1 + 2p_0)V_i}{2T_0} \Rightarrow V_i = \frac{6p_0 V_0}{(p_1 + 2p_0)}$$

$$V_i = \frac{6p_0V_0}{\left(\frac{6p_0V_0}{V_s} + 2p_0\right)} = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

Como $V_i = 4V_0 - V_s$

Tenemos:

$$4V_0 - V_s = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

$$\Rightarrow (4V_0 - V_s)(3V_0 + V_s) = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 + 4V_0V_s - 3V_0V_s - V_s^2 = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 - 2V_0V_s - V_s^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_s^2 + 2V_0V_s - 12V_0^2 = 0$$

Resolviendo:

$$V_s = -V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + 12V_0^2} =$$

$$-V_0 \pm 3,6V_0 = \begin{cases} -4,6V_0 \\ 2,6V_0 \end{cases}$$

La respuesta posible es $V_s = 2,6V_0$, luego

$$V_i = 4V_0 - 2,6V_0 = 1,4V_0$$

Finalmente:

$$\frac{V_s}{V_i} = \frac{2,6V_0}{1,4V_0} = 1,86$$

Ejemplo 78. Una esfera de 20 cm de diámetro contiene un gas ideal a una presión de 1 atm y a 20 °C. A medida que se calienta la esfera hasta 100 °C se permite el escape de gas. Se cierra la válvula y se coloca la esfera en un baño de hielo a 0 °C.

- a) ¿cuántos moles de gas se escapan de la esfera al calentarse?
b) ¿Cuál es la presión en la esfera cuando está en el hielo?

Constante de los gases $R = 0,082$ litro atm/mol K

Respuesta. a) 0,04 moles; b) 0,695 atm

Solución.

a) 0,04 moles

$$V = \frac{4}{3}\pi(0,10)^3 = 4,19 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$p_1 = 1 \text{ atm} = 1,033 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 20 \text{ °C} + 273,15 \text{ °C} = 293,15 \text{ K}$$

$$n_1 = \frac{p_1V}{RT_1} = \frac{(1,033 \times 10^5)(4,19 \times 10^{-3})}{(8,314)(293,15)} = 0,178$$

moles

$$p_2 = p_1 = 1 \text{ atm} = 1,033 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 100 \text{ °C} + 273,15 \text{ °C} = 373,15 \text{ K}$$

$$n_2 = \frac{p_1V}{RT_2} = \frac{(1,033 \times 10^5)(4,19 \times 10^{-3})}{(8,314)(373,15)} =$$

0,139 moles

Escapan $0,178 - 0,139 = 0,04$ moles.

b) 0,695 atm

$$T_3 = 0 \text{ °C} + 273,15 \text{ °C} = 273,15 \text{ K}$$

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \Rightarrow p_3 = \frac{T_3}{T_2} p_2 =$$

$$\frac{273,15}{373,15} 1,033 \times 10^5 = 0,756 \times 10^5 = 0,756 \text{ atm}$$

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES IDEALES.

El concepto de los átomos y de las moléculas que eran los últimos bloques de edificio de la materia fue restablecido por Dalton para explicar las tres leyes de combinaciones químicas. En mediados del siglo diecinueve, estos conceptos, junto con ciertas asunciones con respecto la naturaleza, el tamaño, la distribución y a los movimientos de las moléculas y de los átomos, fueron sintetizados con la mecánica Newtoniana, para explicar el comportamiento de los gases ideales. Este trabajo realizado por Maxwell, Boltzman y otros, condujo al desarrollo de lo que se conoce como la teoría cinética de gases.

Las asunciones de la teoría cinética son:

Cualquier gas se compone de un número muy grande de moléculas.

Las moléculas de un gas son idénticas, con respecto a la forma, tamaño y masa.

Las moléculas son esferas perfectamente rígidas del radio insignificante.

Las moléculas están en un estado incesante del movimiento caótico en todas las velocidades y direcciones posibles.

La distribución de moléculas es homogénea e isotrópica en cualquier envase que encierre el gas.

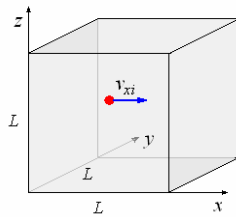
Las moléculas ejercen fuerzas una sobre otra solamente cuando chocan entre ellas o con las paredes del envase.

La colisión entre las moléculas o las moléculas y las paredes del envase son colisiones perfectamente elásticas, es decir, sólo tales colisiones pueden cambiar las direcciones del movimiento pero no de sus velocidades.

Entre las colisiones sucesivas las moléculas viajan libremente con velocidades constantes; la distancia viajada libremente se llama trayectoria libre. En promedio, la trayectoria libre media de todas las moléculas es igual.

La energía cinética media de una molécula es proporcional a la temperatura absoluta del gas.

Expresión para la presión ejercida por un gas.



Sea N el número de moléculas del gas ideal de masa M , encerrado en un cubo de lado L . La molécula i se mueve con velocidad v_i , con v_{xi} , v_{yi} y v_{zi} son sus componentes x , y y z respectivamente.

$$\text{Luego } v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$$

Consideremos solamente la componente en x de la molécula i .

La fuerza ejercida por esta molécula a causa de sus colisiones periódicas con la pared cada $\Delta t = \frac{2L}{v_{xi}}$, y el cambio de cantidad de movimiento $-2mv_{xi}$ es:

$$f_{xi} = \frac{2mv_{xi}}{\Delta t} = \frac{2mv_{xi}}{2L/v_{xi}} = \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La fuerza sobre la pared debido a las N moléculas es:

$$F_x = \sum_{i=1}^N f_{xi} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La presión sobre la pared es:

$$p_x = \frac{F_x}{L^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{mv_{xi}^2}{L}}{L^2} = \left(\frac{m}{L^3}\right) \sum_{i=1}^N v_{xi}^2$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right) \sum_{i=1}^N v_{xi}^2, \quad (V = L^3 = \text{volumen del gas}).$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right) N \overline{v_x^2}, \quad \text{con } \begin{cases} V = L^3 \\ N \overline{v_x^2} = \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \end{cases}$$

$$\text{Siendo } v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$$

Podemos promediar esta relación para todas las moléculas:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

y como en nuestro modelo no hay una diferencia real entre las direcciones x , y y z debido a que las rapidezces son muy altas en un gas típico, así que los efectos de la gravedad son despreciables. Se sigue que $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Por lo tanto:

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$$

Con esta relación obtenemos:

$$p = \frac{1}{3} \left(\frac{m}{V} \right) N \overline{v^2}$$

Ecuación del gas Ideal gas de la Teoría Cinética.

$$\text{Considerando } p = \frac{1}{3} \frac{mN}{V} \overline{v^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right)$$

Pero

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \text{Energía Cinética promedio de una}$$

molécula $\propto T$

$$\text{Por consiguiente } \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

La elección de la constante como $\frac{3}{2} k_B$ es

mandataria para obtener la ecuación del gas ideal similar a la ya encontrada.

$$p = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{3}{2} k_B T \right) = \frac{N k_B T}{V}$$

$$\Rightarrow pV = N k_B T$$

Y también:

$$pV = N k_B T = N \left(\frac{R}{N_A} \right) T = nRT$$

$$pV = nRT$$

La asunción $\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$ implica la

interpretación de la energía térmica como energía mecánica de las moléculas, no obstante como concepto estadístico solamente; es decir, la temperatura es la manifestación del movimiento medio de una gran cantidad de moléculas; es

absurdo decir $\frac{1}{2} m \overline{v_i^2} = \frac{3}{2} k_B T$ para cualesquier i .

ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

Cuando añadimos calor a un cuerpo poniéndolo en contacto térmico con un cuerpo a mayor temperatura puede elevar su temperatura, fundirse o vaporizarse. Se pueden efectuar estos mismos cambios realizando trabajo que resulta en la disipación de energía mecánica por fricción.

Añadir calor y realizar trabajo sobre el cuerpo en tal forma de disipar energía son equivalentes en lo que concierne a efectos térmicos. Ambos, involucran una transferencia de energía.

La energía mecánica que se añade no desaparece, permanece dentro del cuerpo en forma de energía potencial y cinética asociada con los movimientos al azar de los átomos del cuerpo.

A esta energía térmica se le conoce como ENERGÍA INTERNA, a la que vamos a denotar con la letra U .

Como vimos anteriormente $\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$ indica

que la energía cinética traslacional media por molécula depende solo de la temperatura; no de la presión, el volumen ni el tipo de molécula. Podemos obtener la energía cinética por mol multiplicando la ecuación por el número de Avogadro y usando la relación $M = N_A m$:

$$N_A \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} M \overline{v^2} = \frac{3}{2} RT \quad (\text{energía cinética media por mol de gas})$$

Esta ecuación ilustra un resultado general llamado el teorema del equipartición de la energía que dice que cada "grado de libertad" de un gas contribuye una cantidad de $\frac{1}{2} k_B T$ a la energía interna total. Un grado de libertad es un movimiento independiente que puede contribuir a la energía total. Por ejemplo, una molécula tal como O_2 tiene, en principio, 7 grados de libertad. Tres se asocian a la traslación a lo largo de los ejes x , y , y z , tres se asocian a rotaciones sobre los ejes x , y , y z , y uno se asocia a las vibraciones de la molécula a lo largo del eje de O-O (como las masas que vibran en los extremos de un resorte). Sin embargo, desde el momento de la inercia I para las rotaciones sobre el eje O-O es aproximadamente cero, las rotaciones sobre este eje no agrega casi nada a la energía ($K = \frac{1}{2} I \omega^2$).

Además, la mecánica cuántica demuestra que los modos vibratorios no están excitados apreciablemente sino hasta que la temperatura del gas es alta, así que para la mayoría de los propósitos asumimos que una molécula diatómica tiene 5 grados de libertad. Un gas monoatómico como el helio tiene 3 grados de libertad.

La energía interna total de n moles de un gas monoatómico (con tres grados de libertad) es:

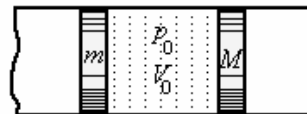
$$U = \frac{3}{2} nRT$$

La energía interna total de n moles de un gas diatómico (con cinco grados de libertad) es:

$$U = \frac{5}{2} nRT$$

Ejemplo 79. En un tubo termo aislado liso e infinito se encuentran dos émbolos con masas M y m , entre los cuales hay un gas monoatómico de volumen V_0 a

presión p_0 . Los émbolos se dejan libres. Estímese sus velocidades máximas. Menospréciase la masa del gas en comparación con las masas de los émbolos.



Solución.

La energía interna del gas es

$$U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} p_0 V_0$$

Cuando se expande se convierte en energía cinética de los émbolos



$$K = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 \quad (1)$$

Cantidad de movimiento inicial: 0

Cantidad de movimiento final: $M v_M - m v_m$

Cantidad de movimiento inicial = Cantidad de movimiento final.

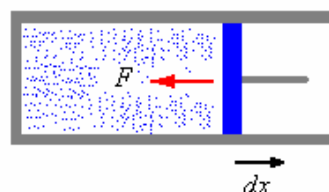
$$0 = M v_M - m v_m \Rightarrow M v_M = m v_m \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$v_M = \sqrt{\frac{3 p_0 V_0 m}{M(M+m)}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{3 p_0 V_0 M}{m(M+m)}}$$

TRABAJO REALIZADO POR UN GAS

Consideremos, por ejemplo, un gas dentro de un cilindro. Las moléculas del gas chocan contra las paredes cambiando la dirección de su velocidad, o de su momento lineal. El efecto del gran número de colisiones que tienen lugar en la unidad de tiempo, se puede representar por una fuerza F que actúa sobre toda la superficie de la pared



Si una de las paredes es un pistón móvil de área A , y éste se desplaza dx , el intercambio de energía del sistema con el mundo exterior puede expresarse como el trabajo realizado

$$dW = F dx \quad \text{y} \quad F = pA$$

Se tiene:

$$dW = (pA) dx = p(A dx) \Rightarrow dW = p dV$$

Siendo dV el cambio del volumen del gas.

Expresión que nos permite al integrarla, calcular el trabajo entre dos estados, conociendo la relación entre la presión y el volumen.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B p dV$$

Ejemplo 76. En cierto cilindro un émbolo móvil encierra un volumen V_0 con presión p_0 . El émbolo se deja libre. ¿Qué trabajo ejecutará el gas sobre el émbolo?, si el volumen del gas, al desplazarse el émbolo, aumenta al doble, en tanto que la presión del gas en este caso:

- permanece constante;
- crece linealmente hasta la presión $2p_0$ a medida que aumenta el volumen.

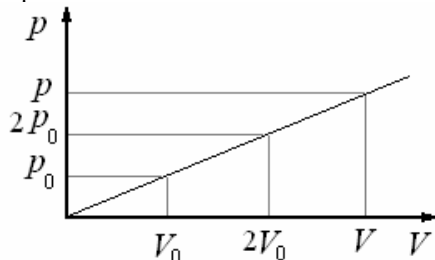


Solución.

- $p = \text{constante}$

$$\begin{aligned} W &= \int p dV \Rightarrow W = p_0 \int_{V_0}^{2V_0} dV = p_0 V \Big|_{V_0}^{2V_0} \\ &= W = p_0 (2V_0 - V_0) = p_0 V_0 \end{aligned}$$

- El gráfico muestra la relación lineal de la presión y la temperatura.



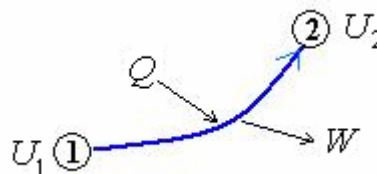
$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \frac{2p_0 - p_0}{2V_0 - V_0} = \frac{p_0}{V_0} \Rightarrow p = \frac{p_0}{V_0} V$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{2V_0} \frac{p_0}{V_0} V dV \\ &= \frac{p_0}{V_0} \frac{V^2}{2} \Big|_{V_0}^{2V_0} = \frac{p_0}{2V_0} (4V_0^2 - V_0^2) \\ &= \frac{3}{2} p_0 V_0 \end{aligned}$$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

Como ya hemos dicho la transferencia de calor y la realización de trabajo constituyen dos formas o métodos de transferir, suministrar o quitar, energía a una sustancia, o sea, representa energía en tránsito y son los términos utilizados cuando la energía está en movimiento. Una vez que la transferencia de

energía termina se dice que el sistema ha experimentado un cambio de energía interna. Supongamos un sistema al que se hace pasar del estado de equilibrio 1 al 2, mediante un determinado proceso termodinámico y durante el cual medimos el calor absorbido Q y el trabajo realizado W .



Estas cantidades dependen no solamente de las características de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios del camino en particular seguido en el proceso. Sin embargo, si calculamos la diferencia $Q - W$ para ir del estado de equilibrio y al 2 por diferentes caminos, encontramos siempre el mismo valor.

Por consiguiente la diferencia $Q - W$ representa la variación de energía interna del sistema, si asociamos un número con cada estado de equilibrio de tal modo que sirva como medida de esta cantidad, podemos escribir

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

Expresión que constituye el primer principio de la termodinámica.

$$\text{o } Q = (U_2 - U_1) + W$$

Tenga en cuenta que Q y W deben expresarse en las mismas unidades, ya sean de calor o trabajo.

También que Q es positivo cuando el sistema recibe (entra) calor y W es positivo cuando el sistema realiza (sale) trabajo.

Note que la convención de signos que estamos utilizando aquí en este capítulo para el trabajo es opuesta a la utilizada en la Mecánica, donde W es positivo cuando es hecho sobre el sistema. Este cambio obedece a la costumbre o tradición, dado que el propósito de las máquinas es hacer trabajo y a este lo llamamos en la vida diaria trabajo útil o positivo. Por otro lado la convención de signos de: Q es consistente con este hecho, cuando una máquina disipa o pierde calor es indeseable o negativo.

La forma descrita se aplica cuando los valores de la presión, volumen y temperatura correspondientes a los estados 1 y 2 difieren en cantidades finitas. Si los estados 1 y 2 varían infinitesimalmente, el primer principio toma la forma

$$dQ = dU + dW$$

Si el sistema es de tal naturaleza que el único trabajo se realiza mediante una expansión o compresión

$$dQ = dU + p dV$$

Dado que: $dW = p dV$

CALOR ESPECÍFICO DEL GAS IDEAL

Antes de ver las principales transformaciones de los gases veamos el calor específico de un gas ideal a volumen constante y a presión constante.

Las capacidades caloríficas mas importantes son las que se determinan cuando los procesos se realizan a volumen constante (C_V) o a presión constante (C_p)

Calor específico a volumen constante.

Sea $(dQ)_V$ una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a volumen constante ($dV = 0$). Por lo tanto no se realiza trabajo ($dW = 0$), aplicando el primer principio de la termodinámica,

$$dQ = dU + dW, \text{ obtenemos:}$$

$$(dQ)_V = dU$$

$$\text{Como: } C_V = \frac{(dQ)_V}{dT}$$

De aquí la capacidad calorífica a volumen constante,

$$C_V = \frac{(dQ)_V}{dT} = \frac{dU}{dT}$$

Para un gas ideal monoatómico:

$$U = \frac{3}{2} nRT, \text{ luego,}$$

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} nR$$

Calor específico a presión constante.

De igual modo si $(dQ)_p$ es una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a presión constante, aplicando el primer principio de la termodinámica

$$(dQ)_p = dU + (dW)_p$$

$$\text{Donde } (dW)_p = pdV \Rightarrow$$

$$(dQ)_p = dU + pdV$$

$$\text{Como } C_p = \frac{(dQ)_p}{dT}$$

$$\text{De esto obtenemos: } C_p = \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT}$$

$$\text{y como } C_V = \frac{dU}{dT}, C_p = C_V + p \frac{dV}{dT}$$

$$\text{para un gas ideal } pV = nRT$$

A presión constante, $dp = 0$, luego

$$pdV = nRdT \Rightarrow p \frac{dV}{dT} = nR$$

$$\text{Luego, } C_p = C_V + nR$$

Para un gas monoatómico:

$$C_p = \frac{3}{2} nR + nR = \frac{5}{2} nR$$

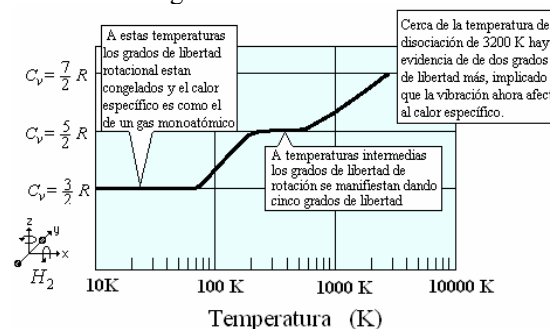
$$\text{También como } C_p = C_V + nR,$$

La capacidad calorífica por mol

$$c_p = c_v + R$$

Calor específico del hidrógeno

El comportamiento del calor específico del hidrógeno con el cambio de temperatura es sumamente desconcertante a inicios del siglo XX. En bajas temperaturas que se comporta como un gas monoatómico, pero a temperaturas más altas su calor específico asume un valor similar a otras moléculas diatómicas. Tomó el desarrollo de la teoría cuántica para demostrar que el hidrógeno diatómico, con su pequeña inercia de rotación, requiere una gran cantidad de energía para excitar su primera rotación molecular de estado cuántico. Dado que no puede obtener esa cantidad de energía a bajas temperaturas, actúa como un gas monoatómico



PROCESOS TERMODINÁMICOS.

El estado de un gas cualquiera o una mezcla de gases está determinado por su temperatura, su presión y su volumen. En el caso del gas ideal estas variables se unen por la relación para un mol de gas.

$$pV = RT$$

La especificación del estado de un gas presupone:

- Equilibrio térmico. La temperatura es uniforme en todo el sistema e igual a la del recipiente;
- Equilibrio mecánico. La fuerza ejercida por el sistema sobre el recipiente es uniforme en toda su superficie y es contrabalanceada por fuerzas externas;
- Equilibrio químico. La estructura interna del sistema y su composición química no varían de un punto a otro.

Un estado que satisfaga estas condiciones se denomina estado de equilibrio termodinámico y sus variables satisfacen la ecuación anterior. Si queremos usar la ecuación de estado durante una transformación, es necesario que el sistema no se aleje mucho de las condiciones de equilibrio; esto se consigue procurando que la transformación se realice en una sucesión de estados de equilibrio poco diferentes entre sí; este proceso se llama cuasi estático; durante la transformación, el sistema está en todos los instantes en una proximidad infinita al estado de equilibrio. Esto se consigue, en general, haciendo los cambios en forma suficientemente lenta para que el sistema entre en equilibrio después de cada modificación (en rigor, una transformación exigiría un tiempo infinito para su realización).

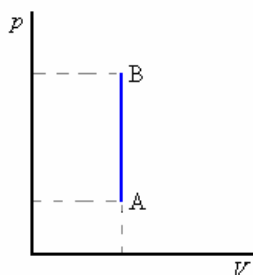
La energía interna U del sistema depende únicamente del estado del sistema, en un gas ideal depende solamente de su temperatura. Mientras que la transferencia de calor o el trabajo mecánico dependen del tipo de transformación o camino seguido para ir del estado inicial al final.

Isocórico o a volumen constante

No hay variación de volumen del gas, luego

$$W = 0, \quad Q = nc_V(T_B - T_A)$$

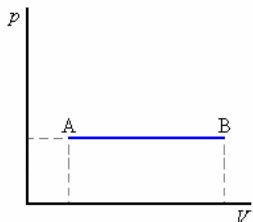
Donde c_V es el calor específico a volumen constante



Isobárico o a presión constante

$$W = p(V_B - V_A), \quad Q = nc_p(T_B - T_A)$$

Donde c_p es el calor específico a presión constante



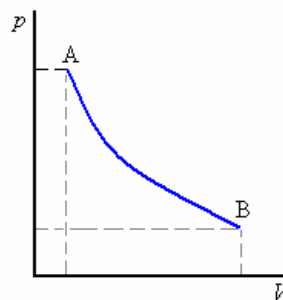
Isotérmico o a temperatura constante

$$pV = nRT$$

La curva $p = \frac{\text{constante}}{V}$, representa la transformación en un diagrama $p-V$ es una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes coordenados

$$W = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta U = 0, \quad Q = W$$



Ejemplo 80. Expansión libre de un gas.

Un recipiente de paredes rígidas y completamente aisladas está dividido en dos por medio de una pared. Una parte contiene gas y la otra está evacuada. Si la pared que los separa se rompe súbitamente, mostrar que la energía interna final y la inicial son iguales.

Solución.

Según el primer principio de la termodinámica:

$$Q = (U_2 - U_1) + W$$

Como el sistema está aislado Q es cero, o sea

$$(U_2 - U_1) + W = 0$$

el trabajo W realizado sobre el sistema también es cero. Note que el gas inicialmente tenía un volumen V y una presión p y finalmente un volumen V y una presión $p/2$.

Luego:

$$(U_2 - U_1) = 0 \Rightarrow U_2 = U_1$$

Ejemplo 81. Una cámara al vacío hecha de materiales aislantes se conecta a través de una válvula a la atmósfera, donde la presión es p_o . Se abre la válvula y el aire fluye a la cámara hasta que la presión es p_o . Probar que $u_f = u_o + p_o V_o$,

donde u_o y V_o es la energía interna molar y volumen molar de temperatura y presión de la atmósfera.

u_f es la energía interna molar del aire en la cámara.

Solución.

Inicialmente la cámara tenía un volumen cero de aire, al final se encuentra llena de aire y el trabajo por mol realizado sobre el sistema sería $-p_o V_o$.

Como está aislado no ha habido pérdida ni ganancia de calor.

Aplicando el primer principio de la termodinámica:

$$Q = (U_2 - U_1) + W$$

Obtenemos por mol

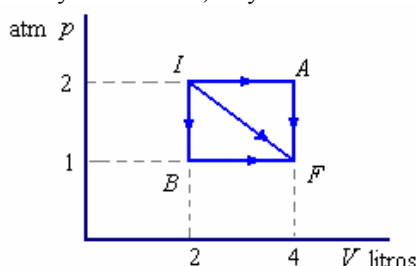
$$0 = (u_f - u_o) - p_o V_o$$

Finalmente:

$$u_f = u_o + p_o V_o$$

Ejemplo 82. Un gas se expande desde I a F por tres posibles trayectorias como se indica en la figura.

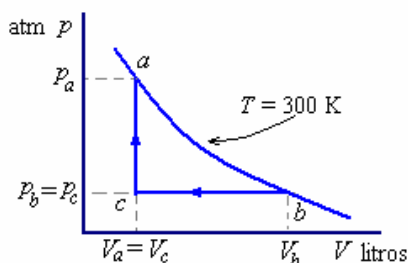
Calcule el trabajo realizado por el gas a lo largo de las trayectorias IAF, IF y IBF.



Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } W_{IAF} &= \int_i^f p dV = 2 \times (4 - 2) \\ &= 4 \text{ litro atm} = 4 \times 101,33 \text{ J} = 405,32 \text{ J} \\ \text{b) } W_{IF} &= \int_i^f p dV = 2 \times 1 + \frac{1}{2}(1 \times 2) \\ &= 3 \text{ litro atm} = 3 \times 101,33 \text{ J} = 304 \text{ J} \\ \text{c) } W_{IBF} &= \int_i^f p dV = 2 \times 1 \\ &= 2 \text{ litro atm} = 2 \times 101,33 \text{ J} = 202,7 \text{ J} \end{aligned}$$

Ejemplo 83. Una muestra de un gas ideal de 1 mol se lleva a través de un proceso termodinámico cíclico, como se muestra en la figura. El ciclo consta de tres partes, una expansión isotérmica ($a \rightarrow b$), una compresión isobárica ($b \rightarrow c$) y un aumento de la presión a volumen constante ($c \rightarrow d$). Si $T = 300 \text{ K}$, $p_a = 5 \text{ atm}$, $p_b = p_c = 1 \text{ atm}$, determine el trabajo realizado por el gas durante el ciclo.



Solución.

$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca}$$

Para una expansión isotérmica ab

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b p dV = \int_a^b nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_b}{V_a} \\ &= nRT \ln \frac{p_a}{p_b} \end{aligned}$$

Para la compresión isobárica bc

$$W_{bc} = p_b(V_c - V_a)$$

Para la compresión isocórica ca no hay trabajo.

$$W_{ca} = 0$$

De tal manera:

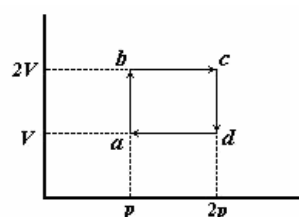
$$W = nRT \ln \frac{p_a}{p_b} + p_b(V_c - V_a)$$

$$\begin{aligned} &= nRT \ln \frac{p_a}{p_b} + p_b \left(\frac{nRT}{p_a} - \frac{nRT}{p_b} \right) \\ &= nRT \left[\ln \frac{p_a}{p_b} + \left(\frac{p_b}{p_a} - 1 \right) \right] \\ &= RT \left[\ln 5 + \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \right] \\ &= 19,9 \text{ l atm} = 2017,5 \text{ J} \end{aligned}$$

Ejemplo 84. La figura muestra un ciclo donde a es el estado inicial del sistema.

Las energías internas de los estados son: $U_a = 10 \text{ J}$, $U_b = 35 \text{ J}$, $U_d = 39 \text{ J}$.

En el proceso $b \rightarrow c$, el trabajo realizado por el gas es $+91 \text{ J}$.



Encontrar:

a) El calor añadido al sistema durante el proceso $b \rightarrow c$.

b) El calor removido en el proceso $d \rightarrow a$.

Solución.

Usando la ley del gas ideal $\frac{pV}{T} = \text{constante}$,

podemos encontrar una relación entre las temperaturas en a , b , c y d .

Si $T_a = T$, $T_b = 2T$, $T_c = 4T$ y $T_d = 2T$

$$\begin{aligned} \text{a) } Q_{bc} &= C_p(T_c - T_b) \\ &= C_p(4T - 2T) = 2C_p T \end{aligned}$$

Por la segunda ley de la termodinámica:

$$U_c - U_b = Q_{bc} - W_{bc} \Rightarrow$$

$$U_c - 35 = Q_{bc} - 91$$

Por otra parte en el proceso $a \rightarrow b$:

$$U_b - U_a = Q_{ab} - W_{ab}$$

$$\Rightarrow 35 - 10 = Q_{ab} - 0$$

y $Q_{ab} = 25 \text{ J}$ y también

$$Q_{ab} = C_V(T_b - T_a) = C_V(2T - T) = C_V T$$

luego $C_V T = 25 \text{ J}$

En el proceso $c \rightarrow d$:

$$U_d - U_c = Q_{cd} - W_{cd} \Rightarrow 39 - U_c = Q_{cd} - 0$$

Como

$$Q_{cd} = C_V(T_d - T_c) \Rightarrow$$

$$Q_{cd} = C_V(2T - 4T) = -2C_V T$$

$$\text{y } Q_{cd} = -2 \times 25 = -50 \text{ J}$$

con lo que encontramos

$$U_c = 39 - Q_{cd} = 39 + 50 = 89 \text{ J}$$

Finalmente:

$$Q_{bc} = U_c - 35 + 91 = 89 - 35 + 91 = 145 \text{ J}$$

$$Q_{bc} = 145 \text{ J}$$

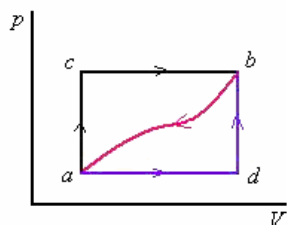
$$b) Q_{da} = U_a - U_d + W_{da}$$

$$Q_{da} = C_p (T_a - T_d) = C_p (T - 2T) = -C_p T$$

$$\text{Como } Q_{bc} = 145 \text{ J} = 2C_p T$$

$$\text{Luego } Q_{da} = -C_p T = -\frac{145}{2} = -72,5 \text{ J}$$

Ejemplo 85. En la figura se muestran diversas trayectorias entre los estados de equilibrio a , b , c y d , en un diagrama p - V .



a) Cuando el sistema pasa del estado a al b a lo largo de la trayectoria a, c, b recibe 20000 calorías y realiza 7500 cal de trabajo. Calcular el cambio de energía interna $(U_b - U_a)$.

b) ¿Cuánto calor recibe el sistema a lo largo de la trayectoria adb , si el trabajo realizado es 2500 cal?

c) Cuando el sistema vuelve de b hacia a , a lo largo de la trayectoria curva ba , el trabajo realizado es 5000 cal. ¿Cuánto calor absorbe o libera el sistema?

d) Si $U_a = 0$ y $U_d = 10000$ cal., hállese el calor absorbido en los procesos ad y db .

Solución.

a) Por la trayectoria acb , se tiene:

$$Q = 20000 \text{ cal.}$$

$$W = 7500 \text{ cal.}$$

Luego,

$$U_b - U_a = Q - W \Rightarrow$$

$$U_b - U_a = 20000 - 7500 = 12500 \text{ cal.}$$

b) Por la trayectoria adb , $W = 2500$ cal.

$$Q = (U_b - U_a) + W$$

$$Q = 12500 + 2500$$

$$Q_{adb} = 15000 \text{ cal. (absorbido)}$$

c) Para la trayectoria ba ,

$$W = + 5000 \text{ cal.}$$

Luego,

$$Q = (U_a - U_b) + W$$

$$Q = - 12500 + 5000$$

$$Q_{ba} = - 7,500 \text{ cal. (libera)}$$

d) Si $U_a = 0$ y $U_d = 10,000$ cal,

$U_d - U_a = 10000$ cal. Además, observe que al ir por la trayectoria adb solo se hace trabajo en ad y no en db , o sea, se tiene que:

$$W_{ad} = W_{adb} = 2500 \text{ cal.}$$

Luego

$$Q_{ad} = (U_d - U_a) + W_{ad}$$

$$Q_{ad} = 10000 + 2500 = 12500 \text{ cal. (absorbido)}$$

Como encontramos que

$$Q_{adb} = 15000 \text{ y } Q_{adb} = Q_{ad} + Q_{db}$$

Obtenemos

$$Q_{db} = 15000 - 12500 = 2500 \text{ cal. (Absorbido)}$$

Esta última cantidad también podría encontrarse teniendo en cuenta que:

$$W_{db} = 0$$

Y como en (a) hemos determinado que

$$U_b - U_a = 12,500 \text{ cal.}$$

Si $U_a = 0$, se tiene que $U_b = 12500$, luego

$$U_b - U_d = 12500 - 10000 = 2500 \text{ cal.}$$

Finalmente

$$Q_{db} = (U_b - U_d) + W_{db} = 2500 \text{ cal.}$$

Ejemplo 86. Un mol de un gas ideal se encuentra en un estado inicial $p = 2$ atm y $V = 10$ litros indicado por el punto a en el diagrama p - V de la figura. El gas se expande a presión constante hasta el punto b , cuyo volumen es 30 litros y luego se enfría a volumen constante hasta que su presión es de 1 atm en el punto c .

Entonces se comprime a presión constante hasta alcanza su volumen original en el punto d y finalmente se calienta a volumen constante hasta que vuelve a su estado original.

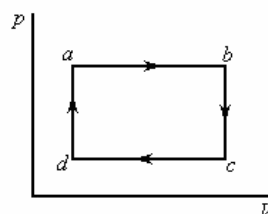
a) Determinar la temperatura de cada estado a , b , c y d .

b) Determinar el calor añadido a lo largo de cada una de las etapas del ciclo.

c) Calcular el trabajo realizado a lo largo de cada trayectoria.

d) Determinar la energía de cada estado a , b , c y d .

e) ¿Cuál es el trabajo neto realizado por el gas en el ciclo completo?



Solución.

a) Por la ley del gas ideal: $pV = nRT \Rightarrow$

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$$n = 1, R = 0,0821 \frac{\text{litro.atm}}{\text{mol.K}}$$

$$\text{En } a \begin{cases} p_a = 2 \text{ atm} \\ V_a = 10 \text{ litros} \end{cases} \text{ Luego } T = \frac{2 \times 10}{0,0821} = 243,6 \text{ K}$$

$$\text{En } b \begin{cases} p_b = 2 \text{ atm} \\ V_b = 30 \text{ litros} \end{cases} \text{ Luego } T = \frac{2 \times 30}{0,0821} = 730,8 \text{ K}$$

$$\text{En } c \begin{cases} p_c = 1 \text{ atm} \\ V_c = 30 \text{ litros} \end{cases} \text{ Luego } T = \frac{1 \times 30}{0,0821} = 365,4 \text{ K}$$

$$\text{En } d \begin{cases} p_d = 1 \text{ atm} \\ V_d = 10 \text{ litros} \end{cases} \text{ Luego } T = \frac{1 \times 10}{0,0821} = 121,8 \text{ K}$$

b)

De $a \rightarrow b$ (presión constante)El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{5}{2} nR$$

$$\text{Como } n = 1, \text{ y } R = 2 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \Rightarrow C_p = 5 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

$$\Delta T = 730,8 - 243,6 = 487,2 \text{ K}$$

$$Q = (5)(487,2) = 2436 \text{ calorías}$$

De $b \rightarrow c$ (volumen constante)El calor suministrado es $Q = C_v \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{3}{2} nR$$

$$\text{Como } n = 1, \text{ y } R = 2 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

$$\Rightarrow C_p = 3 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

$$\Delta T = 365,4 - 730,8 = -365,4 \text{ K}$$

$$Q = (3)(-365,4) = -1096,2 \text{ calorías}$$

De $c \rightarrow d$ (presión constante)El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

$$\Delta T = 121,8 - 365,4 = -243,6 \text{ K}$$

$$Q = (5)(-243,6) = -1218 \text{ calorías}$$

De $d \rightarrow a$ (volumen constante)El calor suministrado es $Q = C_v \Delta T$

$$\Delta T = 243,6 - 121,8 = 121,8 \text{ K}$$

$$Q = (3)(121,8) = 365,4 \text{ calorías}$$

c)

De $a \rightarrow b$ (presión constante)El trabajo es $W = p(V_b - V_a)$

$$W = 2(30 - 10) = 40 \text{ litro atm}$$

Como 1 litro-atm = 101,3 J = 24,2 cal:

$$W = 4052 \text{ J} = 968 \text{ calorías (trabajo del sistema)}$$

De $b \rightarrow c$ (volumen constante)El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).De $c \rightarrow d$ (presión constante)El trabajo es $W = p(V_d - V_c)$

$$W = 1(10 - 30) = -20 \text{ litro atm}$$

$$W = -2026 \text{ J} = -484 \text{ calorías (trabajo sobre el sistema)}$$

De $d \rightarrow a$ (volumen constante)El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).

d) Como

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

$$= \frac{3}{2} (1 \text{ mol}) \left(2 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \right) T$$

$$= 3T$$

$$U_a = 3T_a = 3(243,6 \text{ K}) = 730,8 \text{ cal}$$

$$U_b = 3T_b = 3(730,8 \text{ K}) = 2192,4 \text{ K}$$

$$U_c = 3T_c = 3(365,4 \text{ K}) = 1096,2 \text{ K}$$

$$U_d = 3T_d = 3(121,8 \text{ K}) = 365,4 \text{ K}$$

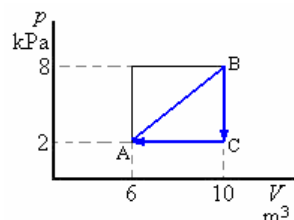
$$\begin{aligned} \text{e) Trabajo neto} &= W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da} \\ &= 4052 + 0 - 2026 + 0 = 2026 \text{ J} \\ &= 487 \text{ cal} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Calor absorbido} &= Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{cd} + Q_{da} \\ &= 2436 - 1096,2 - 1218 + 365,4 \\ &= 487 \text{ cal} \end{aligned}$$

Trabajo neto = calor absorbido

= Calor que entra - calor que sale.

Ejemplo 87. Considere el proceso cíclico descrito en la figura. Si Q es negativo para el proceso BC y ΔU es negativo para el proceso CA:

a) determine los signos de Q asociados a cada proceso.b) determine los signos de W asociados a cada proceso.**Solución.**a) Q_{AB} = positivo Q_{BC} = negativo (Dato) $(U_C - U_B) = Q_{BC} - W_{BC} = Q_{CA}$ = negativo

$$(U_A - U_B) = Q_{CA} - W_{CA} \Rightarrow Q_{CA} = (U_A - U_C) + W_{CA}$$

$$W_{CA} = (-) + (-) = \text{negativo}$$

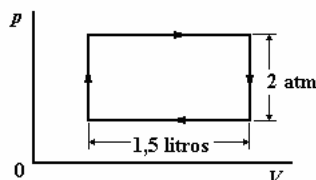
- b) $W_{AB} = \text{positivo}$
 $W_{BC} = 0$ (A volumen constante)
 $W_{CA} = 2(6-10) = -8 = \text{negativo}$

Ejemplo 88. Un cilindro contiene un gas ideal a una presión de 2 atmósferas, el volumen es de 5 litros a una temperatura del gas de 250 K. El gas se calienta a volumen constante hasta una presión de 4 atmósferas, y luego a presión constante hasta una temperatura de 650 K. Calcular el calor total recibido durante estos procesos. Para el gas el c_v es 21,0 J/mol K

Luego el gas entonces es enfriado a volumen constante hasta su presión original y después a presión constante se lleva el gas hasta su volumen original.

- a) Encuentre la salida de calor total durante estos procesos y
 b) el trabajo total hecho por el gas en el proceso cíclico del conjunto.

Solución.



La ecuación del gas ideal permite el cálculo del número de los moles originalmente presentes.

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{2\text{atm} \times 5\text{litro}}{0,0821 \text{ litro atm/mol.K}} = 0,487 \text{ mol}$$

También $C_p = C_v + nR$, la capacidad calorífica por mol $c_p = c_v + R$.

$$a) c_p = c_v + R = (21,0 + 8,317) \text{ J/mol K} = 29,317 \text{ J/mol K}$$

En el primer cambio p/T es constante y luego, como p se duplica, T se duplica también a 500 K. La entrada de calor por lo tanto es:

$$Q_1 = nc_v(T_2 - T_1) = 0,487 \text{ mol} \times 21,0 \text{ J/mol K} \times (500 - 250) \text{ K} = 2558 \text{ J.}$$

En el Segundo cambio V/T es constante y, como T se incrementa en la razón 650/500, entonces V se hace 6,5 litros. La entrada de calor por lo tanto es:

$$Q_2 = nc_p(T_3 - T_2) = 0,487 \text{ mol} \times 29,317 \text{ J/mol K} \times (650 - 500) \text{ K} = 2143 \text{ J.}$$

La entrada de calor total durante estos dos procesos es $Q = Q_1 + Q_2 = 4701 \text{ J}$.

Durante el primer proceso de enfriamiento p se hace la mitad, y T también se hace la mitad 325 K. La salida de calor es

$$Q'_1 = nc_v(T_3 - T_4) = 0,487 \text{ mol} \times 21,0 \text{ J/mol K} \times (650 - 325) \text{ K} = 3325 \text{ J.}$$

En el Segundo proceso de enfriamiento V se reduce en la razón de 5/6,5, y T se hace 250K, la

temperatura original, como se esperaba. La salida de calor es por lo tanto:

$$Q'_2 = nc_p(T_4 - T_1) = 0,487 \text{ mol} \times 29,317 \text{ J/mol K} (325 - 250) \text{ K} = 1072 \text{ J.}$$

La salida de calor total durante el proceso de enfriamiento es.

$$Q' = H'_1 + H'_2 = 4397 \text{ J.}$$

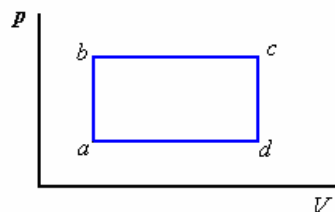
La diferencia entre el calor de entrada y el de salida es 304 J. Esto debe aparecer como trabajo hecho por el gas, puesto que la energía interna del gas debe ser igual al principio y en el final de un proceso de cíclico.

- b) La cantidad 304 J debería estar de acuerdo con el valor del área dentro de la curva del ciclo, que representa el trabajo hecho por el gas. Es un rectángulo de alto 2 atm y largo 1,5 litros. El área bajo ésta curva es:

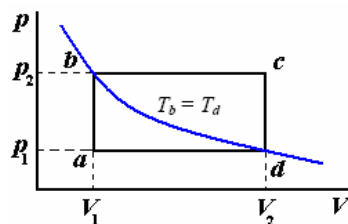
$$W = 2 \times 1,013 \times 10^6 \text{ dinas/cm} \times 1,5 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 3,04 \times 10^9 \text{ ergios} = 304 \text{ J,}$$

Lo que esta de acuerdo con el ingreso.

Ejemplo 89. Sobre un mol de gas se realiza un ciclo cerrado que consta de dos isócoras y dos isóbaras. Las temperaturas en los puntos a y c son T_a y T_c . Determine el trabajo que efectúa el gas durante dicho ciclo, si se sabe que los puntos b y d yacen en una isoterma



Solución.



$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$$

$$W_{ab} = 0, W_{bc} = p_2(V_2 - V_1), W_{cd} = 0,$$

$$W_{da} = -p_1(V_2 - V_1),$$

$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$

$$W = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1$$

Por la de los gases ideales $p_2V_2 = RT_c$.

$$p_2V_1 = RT_b, p_1V_2 = RT_d, p_1V_1 = RT_a$$

$$W = R(T_c - T_b - T_d + T_a)$$

Como $T_b = T_d$

$$W = R(T_c + T_a - 2T_b)$$

De las relaciones

$$\frac{p_1}{T_a} = \frac{p_2}{T_b} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_a}{T_b} \text{ y}$$

$$\frac{p_1}{T_d} = \frac{p_2}{T_c} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_d}{T_c}$$

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{T_d}{T_c} \rightarrow T_a T_c = T_b T_d$$

$$\text{Con } T_b = T_d \Rightarrow T_a T_c = T_b^2$$

$$\text{Finalmente } \sqrt{T_a T_c} = T_b$$

Con lo que obtenemos

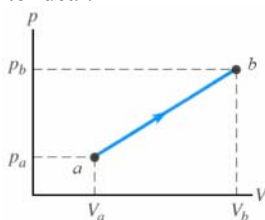
$$W = R(T_c + T_a - 2\sqrt{T_a T_c})$$

$$= R(\sqrt{T_c} - \sqrt{T_a})^2$$

Ejemplo 90. Una cantidad de aire se lleva del estado *a* al *b* siguiendo una trayectoria recta en una gráfica *pV*.

a) En este proceso ¿la temperatura del gas: aumenta, disminuye o no cambia? Explique.

b) Si $V = 0,0700 \text{ m}^3$, $V_b = 0,1100 \text{ m}^3$, $p_a = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $p_b = 1,40 \times 10^5 \text{ Pa}$, ¿cuánto trabajo efectúa el gas en este proceso. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal.



Solución.

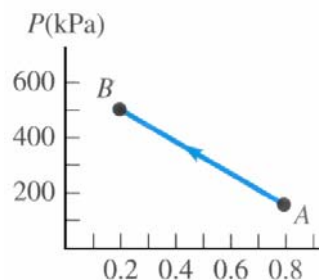
a) El producto pV se incrementa, y aun para un gas no ideal, esto indica un incremento de temperatura.

b) El trabajo es el área encerrada bajo la línea que representa el proceso y las verticales en V_a y V_b . El área del trapecio es:

$$\frac{1}{2}(p_b + p_a)(V_b - V_a)$$

$$= \frac{1}{2}(2,40 \times 10^5)(0,0400) = 400 \text{ J}$$

Ejemplo 91. Cuatro moles de O_2 se llevan de A a B con el proceso que muestra en una gráfica pV de la figura. Suponga que el tiene comportamiento ideal. Calcule el flujo de calor Q durante este proceso. ¿Entra calor en el gas o sale de él?



Solución.

El trabajo es el área bajo la trayectoria de A a B en el gráfico pV . El volumen disminuye, tal que $W < 0$.

$$W = -\frac{1}{2}(500 \times 10^3 + 150 \times 10^3)(0,60)$$

$$= -1,95 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

$$\text{Con } T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}, T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR}$$

$$\Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{nR}$$

$$\Delta U = \left(\frac{C_V}{R}\right)(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$\Delta U = \left(\frac{20,85}{8,315}\right)[(5 \times 10^5)(0,20) - (1,5 \times 10^5)(0,80)]$$

$$= -5,015 \times 10^4 \text{ J}$$

$$\text{Luego } \Delta U = Q - W$$

$$\Rightarrow Q = \Delta U + W = -0,5015 \times 10^5 - 1,95 \times 10^5$$

$$= -2,45 \times 10^5$$

Q es negativo, el calor fluye fuera del gas.

Ejemplo 92. Sea 20,9 J el calor añadido a determinado gas ideal. Como resultado, su volumen cambia de 63,0 a 113 cm^3 mientras que la presión permanece constante a 1,00 atm.

a) ¿En cuánto cambió la energía interna del gas?

b) Si la cantidad de gas presente es de $2,00 \times 10^{-3} \text{ mol}$, halle la capacidad calorífica molar a presión constante.

c) Halle la capacidad calorífica molar a volumen constante.

Solución.

$$\text{a) } \Delta U = Q - W$$

$$Q = 20,9 \text{ J},$$

$$W = p(V_2 - V_1) \Rightarrow$$

$$W = 1,013 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (113 - 63) \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W = 5,06 \text{ J}$$

$$\text{b) } Q = nC_p(T_2 - T_1)$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1,013 \times 10^5 \times 63 \times 10^{-6}}{2,00 \times 10^{-3} \times 8,31} = 384 \text{ K}$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1,013 \times 10^5 \times 113 \times 10^{-6}}{2,00 \times 10^{-3} \times 8,31} = 689 \text{ K}$$

$$20,9 = 2,00 \times 10^{-3} C_p (689 - 384)$$

$$C_p = \frac{20,9 \times 10^3}{2 \times 305} = 34,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

$$C_p = \frac{20,9 \times 10^3}{2 \times 305} = 34,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

c)

$$C_V = C_p - R \Rightarrow$$

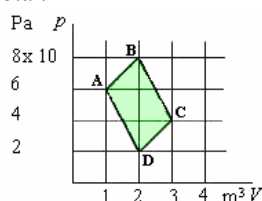
$$C_V = 34,3 - 8,31 = 26 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

Ejemplo 93. Una mol de un gas ideal monoatómico es llevado cuasiestáticamente desde el estado A recorriendo el ciclo ABCDA, tal como se muestra en la figura.

Hallar:

a) La temperatura en A

b) El trabajo total.

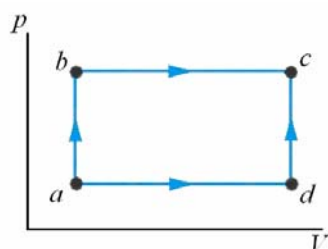
**Solución.**

a) $pV = nRT$, y $T = \frac{pV}{nR}$, en el punto A:

$$T_A = \frac{6 \times 10^3 \times 1}{1 \times 8,31} = 722 \text{ K}$$

b) Trabajo total = Área ABCDA
 $= (3,5 + 3 - 2 - 1,5)2 = 6,0 \text{ kJ}$

Ejemplo 94. Un sistema termodinámico se lleva del estado a al estado c de la figura siguiendo la trayectoria abc o bien la trayectoria adc. Por la trayectoria abc, el trabajo W efectuado por el sistema es de 450 J. Por la trayectoria adc, W es de 120 J. Las energías internas de los cuatro estados mostrados en la figura son: $U_a = 150 \text{ J}$, $U_b = 240 \text{ J}$, $U_c = 680 \text{ J}$ y $U_d = 330 \text{ J}$. Calcule el flujo de calor Q para cada uno de los cuatro procesos: ab , bc , ad y dc . En cada proceso, ¿el sistema absorbe o desprende calor?

**Solución.**

Para cada proceso, $Q = \Delta U + W$. No se realiza trabajo en los procesos ab y dc , también

$$W_{bc} = W_{abc} \text{ y } W_{ad} = W_{adc}.$$

El calor para cada proceso es,

$$\text{para } ab \quad Q_{ab} = 90 \text{ J},$$

$$\text{para } bc \quad Q_{bc} = 440 \text{ J} + 450 \text{ J} = 890 \text{ J},$$

$$\text{para } ad \quad Q_{ad} = 180 \text{ J} + 120 \text{ J} = 300 \text{ J},$$

para dc $Q_{dc} = 350 \text{ J}$, el calor es absorbido en cada proceso. Las flechas representadas en los procesos indican la dirección del incremento de la temperatura (incrementando U).

Ejemplo 95. La figura muestra cuatro estados de un sistema termodinámico: a , b , c y d . El volumen del sistema es V_a tanto en el estado a como en el b , y es V_c tanto en el estado c como en el d . La presión del sistema es p_a tanto en el estado a como en el d , y es p_c tanto en el estado b como en el c . Las

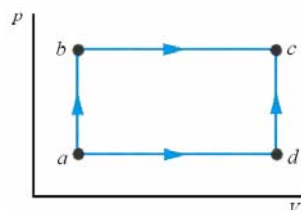
energías internas de los cuatro estados son: U_a , U_b , U_c y U_d . Para cada uno de los procesos: ab , bc , ad y dc , calcule:

a) el trabajo efectuado por el sistema;

b) el flujo de calor al sistema durante el proceso;

c) El sistema se puede llevar del estado al c siguiendo la trayectoria abc o bien la adc . Calcule el flujo neto de calor al sistema y el trabajo neto efectuado por el sistema en cada trayectoria. ¿Por cuál trayectoria es mayor el flujo neto de calor? ¿Por cuál es mayor el trabajo neto?

d) Un amigo le dice que las cantidades de flujo de calor deben ser iguales para la trayectoria abc y la trayectoria adc , porque el estado inicial (a) y el final (c) del sistema son los mismos por ambas trayectorias. ¿Cómo respondería a esta afirmación?

**Solución.**

Vamos a usar las ecuaciones, $W = p(V_2 - V_1)$ y $\Delta U = Q - W$.

a) El trabajo hecho por el sistema durante el proceso: A lo largo de ab o cd , $W = 0$. A lo largo de bc ,

$$W_{bc} = p_c(V_c - V_a)$$

$$W_{ad} = p_a(V_c - V_a).$$

b) El calor que ingresa al sistema durante el proceso: $Q = \Delta U + W$.

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a, \text{ tal que,}$$

$$Q_{ab} = U_b - U_a + 0.$$

$$\Delta U_{bc} = U_c - U_b, \text{ tal que}$$

$$Q_{bc} = (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a).$$

$$\Delta U_{ad} = U_d - U_a, \text{ tal que}$$

$$Q_{ad} = (U_d - U_a) + p_a(V_c - V_a).$$

$$\Delta U_{dc} = U_c - U_d, \text{ tal que}$$

$$Q_{dc} = (U_c - U_d) + 0.$$

c) Del estado a al estado c a lo largo de la trayectoria abc .

$$\begin{aligned} W_{abc} &= p_c(V_c - V_a) \cdot Q_{abc} \\ &= U_b - U_a + (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a) \\ &= (U_c - U_a) + p_c(V_c - V_a) \end{aligned}$$

Del estado a al estado c a lo largo de la trayectoria adc .

$$\begin{aligned} W_{adc} &= p_a(V_c - V_a) \cdot Q_{adc} \\ Q_{adc} &= (U_c - U_a) + p_a(V_c - V_a) \end{aligned}$$

Asumiendo $p_c > p_a$, $Q_{abc} > Q_{adc}$ y

$$W_{abc} > W_{adc}.$$

d) Para entender esta diferencia, comenzar por la relación $Q = W + \Delta U$. El cambio de la energía

Interna ΔU es independiente de la trayectoria de tal manera que es igual para la trayectoria abc y para la trayectoria adc . El trabajo hecho por el sistema es el área bajo los caminos en el diagrama pV - no es igual para las dos trayectorias. De hecho, es más grande para la trayectoria abc . Puesto que ΔU es igual y W es diferente, Q debe ser diferente para las dos trayectorias. El flujo del calor Q es dependiente de la trayectoria.

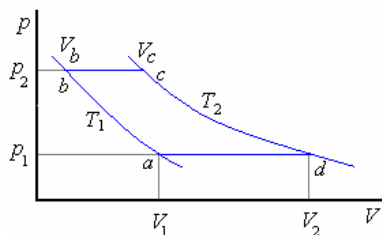
Ejemplo 96. Un motor térmico funciona con un gas ideal que se somete a un ciclo termodinámico que consta de dos etapas isotérmicas y dos etapas isobáricas de presiones p_1 y p_2 ($p_2 > p_1$). Si las dos isothermas cortan la isobárica de presión p_1 en los volúmenes V_1 y V_2 ($V_2 > V_1$)

a) Grafique el proceso en los ejes pV .

b) Determine el trabajo neto realizado en función de p_1, p_2, V_1 y V_2

Solución.

a)



$$b) W_{ab} = nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_b}{V_1}$$

$$W_{bc} = p_2(V_c - V_b) = p_1(V_2 - V_1)$$

$$W_{cd} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_c} = p_1 V_2 \ln \frac{V_2}{V_c}$$

$$W_{da} = p_1(V_1 - V_2)$$

$$W_{neto} = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$$

$$W_{bc} \text{ se anula con } W_{cd}$$

$$W_{neto} = p_1 V_1 \ln \frac{V_b}{V_1} + p_1 V_2 \ln \frac{V_2}{V_c}$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_b \Rightarrow V_b = \frac{p_1 V_1}{p_2}, p_1 V_2 = p_2 V_c$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{p_1 V_2}{p_2}$$

Reemplazando los valores de V_b y V_c respectivamente:

$$W_{neto} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1 V_1 / p_2}{V_1} + p_1 V_2 \ln \frac{V_2}{p_1 V_2 / p_2}$$

$$W_{neto} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + p_1 V_2 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= -p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} + p_1 V_2 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= p_1(V_2 - V_1) \ln \frac{p_2}{p_1}$$

PROCESO ADIABATICO:

Es un proceso termodinámico importante en el cual al cambiar, el sistema de estado de equilibrio no intercambia calor con el ambiente, $Q = 0$. En este caso, de acuerdo al primer principio, se tiene:

$$U_2 - U_1 = -W.$$

Es importante hacer notar que este trabajo, denominado TRABAJO ADIABATICO (W_{ad}), hecho para cambiar el sistema desde un estado inicial a un final, depende solo de los estados de equilibrio dados. Conociendo W_{ad} se puede determinar la trayectoria. Cuando se realiza un trabajo que no es adiabático, entre los dos estados dados, la cantidad en exceso o defecto comparado con el trabajo adiabático es calor y es lo que realmente lo define como otra forma de trabajo.

Ecuación del proceso adiabático

Cuando un gas ideal va en un proceso adiabático, la presión volumen y temperatura cambian de forma tal que es descrito solamente por una relación entre p y V , T y V , o p y T , en función de las capacidades caloríficas. Esta relación puede calcularse aplicando el primer principio de la termodinámica y utilizando la ecuación del gas ideal.

Según el primer principio tenemos:

$$dQ = dU + dW = dU + pdV$$

Como $dU = C_V dT$ (aunque este resultado se obtuvo considerando un proceso a volumen constante, relación solamente las variables U y T y por lo tanto, es válido independientemente del proceso considerado), luego podemos escribir:

$$dQ = C_V dT + p dV$$

Como $dQ = 0$ en un proceso adiabático, se tiene:

$$C_V dT + p dV = 0$$

$$dT = -\frac{p dV}{C_V} \quad (1)$$

De la ecuación del gas ideal

$$pV = nRT$$

$$p dV + V dp = nR dT \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2); para eliminar dT :

$$p dV + V dp = -nR \frac{p}{C_V} dV$$

$$p C_V dV + V C_V dp = -nR p dV$$

$$(C_V + nR) p dV + C_V V dp = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V}$$

Llamando a la relación $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$. Para gas ideal:

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1,67$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

Integrando

$$\ln p = -\gamma \ln V + \ln \text{const.}$$

$$pV^\gamma = \text{constante}$$

Utilizando la ecuación de los gases ideales

$$pV = nRT \text{ se pueden encontrar las siguientes}$$

relaciones:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}, \quad \frac{p^\gamma}{T} = \text{constante}$$

La curva de un proceso adiabático, en un diagrama pV cae más rápidamente con el aumento de V que la curva de un proceso isotérmico.

Ejemplo 97. Demostrar que el trabajo realizado por un gas ideal, con capacidades caloríficas constantes, durante una expansión adiabática es igual a:

$$a) W = C_V (T_1 - T_2)$$

$$b) W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$$

$$c) W = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Solución.

a) Por el principio de la termodinámica

$$dQ = dU + dW$$

Como el proceso es adiabático $dQ = 0$

$$\text{Luego } dW = -dU$$

$$\text{Pero } \frac{dU}{dT} = C_V \Rightarrow dU = C_V dT$$

$$\text{Y } dW = -C_V dT$$

Integrando de 1 a 2:

$$W_{1 \rightarrow 2} = -C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = -C_V (T_2 - T_1)$$

$$W = C_V (T_1 - T_2)$$

b) Tenemos que $dW = p dV$

Por ser proceso adiabático $pV^\gamma = C$

$$\Rightarrow p = \frac{C}{V^\gamma}$$

$$\text{Luego } dW = C \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$\text{Integrando: } W = C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = C \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_{V_1}^{V_2} =$$

$$\frac{C V_1^{-\gamma+1} - C V_2^{-\gamma+1}}{\gamma - 1}$$

$$\text{Como } p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma = C$$

Reemplazando C en la expresión de W en las formas arriba puestas, obtenemos finalmente:

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$$

c) De la expresión anterior

$$W = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \right]$$

$$\text{pero } V_1 = \left(\frac{C}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ y } V_2 = \left(\frac{C}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

de allí

$$W = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \frac{p_2 \left(\frac{C}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{p_1 \left(\frac{C}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \right]$$

$$= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Ejemplo 98. Encontrar el módulo de compresibilidad elástica en un proceso adiabático ($B_{\text{adiabático}}$).

Se conoce la relación de capacidades caloríficas

$$\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right).$$

Solución.

Tenemos:

$$B = - \frac{dp}{\frac{dV}{V}} \Rightarrow dp = -B \frac{dV}{V} \quad (1)$$

También, en un proceso adiabático:

$$pV^\gamma = \text{constante}$$

derivando

$$dpV^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

de aquí

$$dp = -\gamma p \frac{dV}{V} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$-B \frac{dV}{V} = -\gamma p \frac{dV}{V}$$

de aquí obtenemos:

$$B_{\text{adiabático}} = \gamma p$$

El sonido en el aire se propaga en un proceso adiabático

La velocidad de un gas está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Para el aire:

$$B_{\text{adiabático}} = \gamma p = 1,4(1,013 \times 10^5)$$

$$\rho_{\text{aire}} = 1,28 \text{ kg/m}^3$$

$$v = \sqrt{\frac{1,4(1,013 \times 10^5)}{1,28}} = 333 \text{ m/s}$$

Ejemplo 99. Dos moles de un gas ideal se expanden cuasiestática y adiabáticamente desde una presión de 5 atm y un volumen de 12 litros a un volumen final de 30 litros. ($\gamma = 1,40$)

(a) ¿Cuál es la presión final del gas?

(b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?

Solución.

$$n = 2 \text{ mol}, \gamma = 1,4, p_i = 5 \text{ atm}, V_i = 12 \text{ litros},$$

$$V_f = 30 \text{ litros}$$

a) Para una expansión adiabática

$$pV^\gamma = \text{cte}$$

$$\text{Entonces: } p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$$

$$\Rightarrow 5(12)^{1,4} = p_f (30)^{1,4}$$

De donde

$$p_f = 1,39 \text{ atm}$$

$$\text{b) } T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{5 \times 12}{2 \times 0,082} = 365,9 \text{ K}$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{1,39 \times 30}{2 \times 0,082} = 254,3 \text{ K}$$

Ejemplo 100. Un mol de un gas ideal monoatómico inicialmente a 300 K y a 1 atm se comprime cuasiestática y adiabáticamente a un cuarto de su volumen inicial. Encuentre la presión y temperatura final. ($\gamma = 1,67$)

Solución.

$$n = 1 \text{ mol}$$

$$\gamma = 1,67$$

$$T_i = 300 \text{ K}$$

$$p_i = 1 \text{ atm}$$

$$V_f = \frac{1}{4} V_i$$

$$pV^\gamma = \text{cte}, pV = nRT$$

Bien

$$\left. \begin{aligned} p_i V_i^\gamma &= p_f V_f^\gamma \\ \frac{p_i V_i}{T_i} &= \frac{p_f V_f}{T_f} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_i^{\gamma-1} T_i = V_f^{\gamma-1} T_f$$

De la última

$$T_f = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} T_i = (4)^{0,67} 300$$

$$= 459,15 \text{ K}$$

También

$$p_f = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma p_i = (4)^{1,67} \times 1 = 10,1 \text{ atm}$$

Ejemplo 101. Durante el tiempo de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1 a 20 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y el gas es ideal con $\gamma = 1,40$.

a) ¿en qué factor cambia el volumen?

b) ¿en qué factor cambia la temperatura?

Solución.

$$\gamma = 1,40, p_i = 1 \text{ atm}, p_f = 20 \text{ atm}$$

$$\text{a) } p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma \Rightarrow$$

$$\frac{V_f}{V_i} = \left(\frac{p_i}{p_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{20} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 0,12$$

$$b) \frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{0,12} \right)^{0,4} = 2,33$$

CICLOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Supongamos que ocurre un proceso en que el sistema va de un estado inicial (i) a otro final (f) en el que se realiza un trabajo W y se produce una transferencia de calor Q a una serie de reservorios de calor. Si al final de este proceso, el sistema puede ser restaurado a su estado inicial se dice que es REVERSIBLE. Un proceso que no llena este requisito se dice que es IRREVERSIBLE.

Las condiciones para un proceso reversible son:

1) No debe existir trabajo realizado por fricción, fuerzas debidas a la viscosidad u otros efectos disipativos.

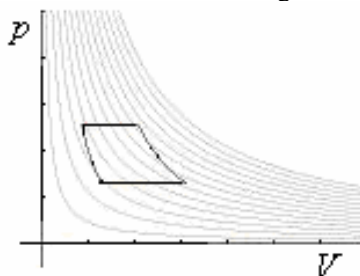
2) El proceso debe ser tal que el sistema se encuentre siempre en estado de equilibrio o infinitamente próximo a él (cuasiestático - por ejemplo, si el pistón de un cilindro se mueve lentamente dando tiempo para que el sistema pueda interactuar con el ambiente y alcanzar un estado de equilibrio en todo instante).

Cualquier proceso que viole una de estas condiciones es irreversible. La mayoría de los procesos en la naturaleza son irreversibles. Si queremos conseguir un proceso reversible debemos eliminar las fuerzas disipativas y el proceso sea cuasiestático, en la práctica esto es imposible. Sin embargo nos podemos aproximar mucho a un proceso reversible.

CICLOS TERMODINÁMICOS. MÁQUINAS TERMODINÁMICAS.

Una máquina que realiza esta conversión, lo hace mediante "PROCESOS" que llevan a la sustancia de trabajo nuevamente a su estado original, al conjunto de estos procesos se conoce como "CICLO" una vez completado el ciclo, los procesos se vuelven a repetir.

Una máquina térmica se puede representar en forma idealizada como se muestra en la siguiente figura.



Repetiendo el ciclo se puede obtener cualquier cantidad de trabajo.

Damos la siguiente notación, refiriéndonos a un ciclo completo.

Q_1 = calor absorbido por el sistema del reservorio a θ_1 .

Q_2 = calor liberado por el sistema al reservorio a θ_2 . Donde $\theta_1 > \theta_2$.

$W = Q_1 - Q_2$ trabajo neto hecho por el sistema.

Eficiencia térmica.

Observe que el enunciado que hemos dado del segundo principio de la termodinámica establece que la máquina térmica perfecta en la que todo calor suministrado se convierte en trabajo sin perder calor, **no existe**. Nos gustaría tenerla, pues no viola la primera ley, pero no se ha obtenido.

Dado que el trabajo neto en el ciclo es lo que obtenemos, y el calor absorbido por la sustancia de trabajo es lo que ponemos. Luego la eficiencia térmica de la máquina está definida por:

$$\text{Eficiencia térmica} = \frac{\text{Trabajo obtenido}}{\text{calor puesto}}$$

$$e = \frac{W}{Q_1}$$

Aplicando la primera ley a un ciclo completo.

Como los estados inicial y final son los mismos la energía interna final debe ser igual a la inicial, obteniéndose

$$Q_1 - Q_2 = W$$

de aquí

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Tenga en cuenta que en esta expresión Q_1 y Q_2 deben ser tomados en valor absoluto, como positivos, dado que al haber aplicado la primera ley ($W = Q_1 - Q_2$) ya se ha considerado su propio signo.

Observe que la eficiencia sería 100% ($e = 1$) si

$Q_2 = 0$ es decir sin ceder nada de calor, esto es completamente imposible en la práctica y lo establece el segundo principio que veremos más adelante ($e < 1$). En cambio, si $Q_2 = Q_1$ se tendrá $e = 0$ y $W = Q_1 - Q_2 = 0$.

Ejemplo 102. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:

- el calor absorbido en cada ciclo y
- el tiempo para cada ciclo.

Solución.

$$a) e = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow 0,25 = 1 - \frac{8000}{Q_1} \Rightarrow$$

$$Q_1 = 10666,67 J$$

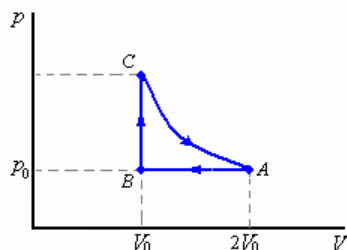
$$b) W = eQ_1 = 2666,67 J$$

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow t = \frac{W}{P} = \frac{2666,67}{5000} = 0,53 s$$

Ejemplo 103. En cierto proceso industrial se somete un gas al siguiente ciclo termodinámico:
1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,
2-calentamiento isocórico,
3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen inicial.

El control de calidad requiere que la eficiencia del proceso sea mayor al 11%. Determine la eficiencia del ciclo para un gas monoatómico y para un gas diatómico, y en cada caso indique si aprueba o no el control de calidad.

Solución.



1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,

$$Q_{AB} = C_p(T_B - T_A) = -\frac{C_p}{nR} p_0 V_0$$

2-calentamiento isocórico,

$$Q_{BC} = C_V(T_C - T_B) = C_V(T_A - T_B)$$

Por la ley del gas ideal:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{2p_0 V_0}{nR}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Luego

$$Q_{BC} = \frac{C_V}{nR} p_0 V_0$$

3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen iniciales.

$$Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A \ln \frac{2V_0}{V_0}, \text{ como}$$

$$T_A = \frac{2p_0 V_0}{nR} \Rightarrow Q_{CA} = 2p_0 V_0 \ln 2$$

De aquí deducimos que:

$$Q_1 = 2p_0 V_0 \ln 2 + \frac{C_V}{nR} p_0 V_0 \text{ y } Q_2 = C_p \frac{p_0 V_0}{nR}$$

La eficiencia del ciclo es:

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_p \frac{p_0 V_0}{nR}}{2p_0 V_0 \ln 2 + \frac{C_V}{nR} p_0 V_0}$$

$$= 1 - \frac{\frac{C_p}{nR}}{2 \ln 2 + \frac{C_V}{nR}}$$

Si es gas monoatómico

$$C_V = \frac{3}{2} nR \text{ y } C_p = \frac{5}{2} nR$$

$$e = 1 - \frac{\frac{5}{2}}{2 \ln 2 + \frac{3}{2}} = 0,1338 = 13,38\%$$

Si es gas diatómico

$$C_V = \frac{5}{2} nR \text{ y } C_p = \frac{7}{2} nR$$

$$e = 1 - \frac{\frac{7}{2}}{2 \ln 2 + \frac{5}{2}} = 0,09939 = 9,94\%$$

Se aprueba el control de calidad para gas monoatómico.

Ejemplo 104.

Un gas ideal monoatómico se somete a un ciclo termodinámico que consta de 3 procesos:

A → B Compresión adiabática desde (V_0, p_0) hasta cuadruplicar la presión.

B → C Expansión isotérmica hasta la presión inicial.

C → A Compresión isobárica hasta el volumen inicial.

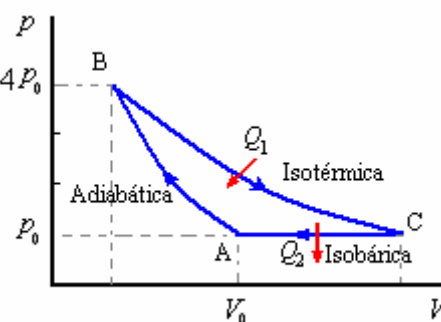
a) Presente un gráfico p versus V para el ciclo.

b) Determine las variables termodinámicas p , y , T para cada estado A, B, C.

c) Calcule la eficiencia del ciclo.

Solución:

a)



b)

Estado A: $p_A = p_0$, $T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR}$

Estado B: $p_B = 4p_0$,

$$T_B = \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A = (4)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{p_0 V_0}{nR} = 4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Estado C: $p_C = p_0$, $T_C = T_B = 4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}$

c)

Calor en A \rightarrow B: $Q_{AB} = 0$

Calor en B \rightarrow C: $Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B}$

Cálculo de V_B : $p_B V_B^\gamma = p_A V_A^\gamma \Rightarrow$

$$V_B = \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_A = \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{5}} V_0$$

Cálculo de V_C : $\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_A}{T_A} \Rightarrow$

$$V_C = \left(\frac{T_C}{T_A} \right) V_A = 4^{2/5} V_0$$

Luego

$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{4^{2/5} V_0}{(1/4)^{1/5} V_0} =$$

$$nR \left(4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR} \right) \ln(4^{2/5} \times 4^{3/5}) = 2,41 p_0 V_0$$

Calor en C \rightarrow A:

$$Q_{CA} = C_p (T_A - T_C) = \frac{5}{2} nR \left(\frac{p_A V_A}{nR} - \frac{p_C V_C}{nR} \right)$$

$$= \frac{5}{2} (p_0 V_0 - 4^{2/5} p_0 V_0) = -1,85 p_0 V_0$$

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad Q_1 = 2,41 p_0 V_0 \text{ y } Q_2 = 1,85 p_0 V_0$$

Luego:

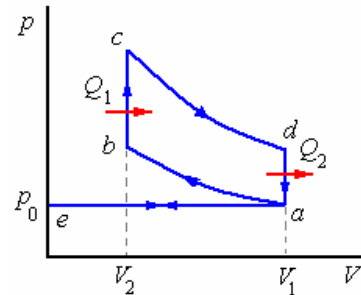
$$e = 1 - \frac{1,85 p_0 V_0}{2,41 p_0 V_0} = 1 - 0,7676 = 0,2324$$

$$e = 23,23\%$$

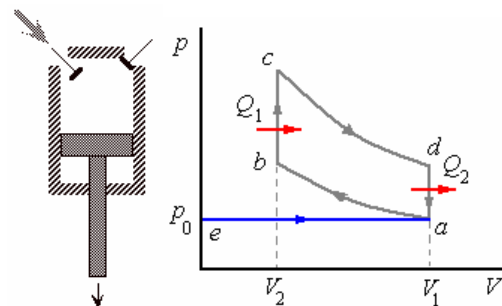
CICLO DE OTTO.

El funcionamiento de un motor a gasolina puede idealizarse considerando que la sustancia de trabajo es aire, el cual se comporta como un gas ideal y que no hay fricción. En base a esto el ciclo de Otto está

compuesto por seis procesos simples mostrado en el diagrama p - V de la figura.

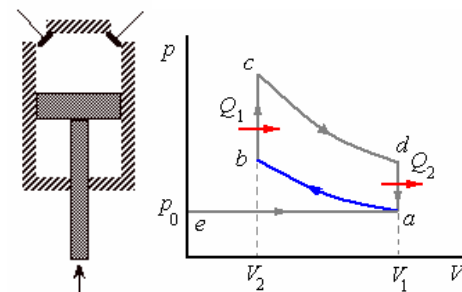


$e \rightarrow a$ Entrada isobárica (presión constante), el volumen varía de cero a V_1 , al igual que el número de moles de cero a n , de acuerdo a la ecuación $p_0 V = nRT_a$

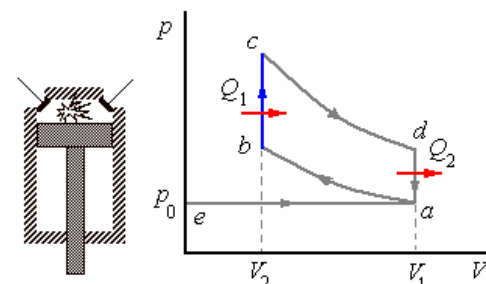


$a \rightarrow b$ Compresión adiabática, de acuerdo a la ecuación

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$$

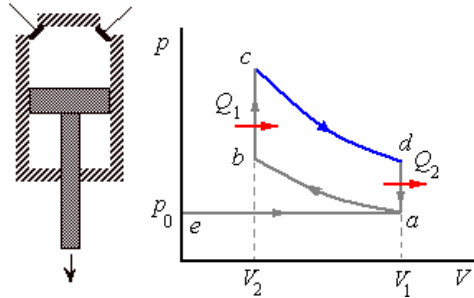


$b \rightarrow c$ Compresión isocórica (volumen constante) la temperatura cambia de T_b a T_c . Este proceso es aproximado a la explosión en el motor de gasolina.

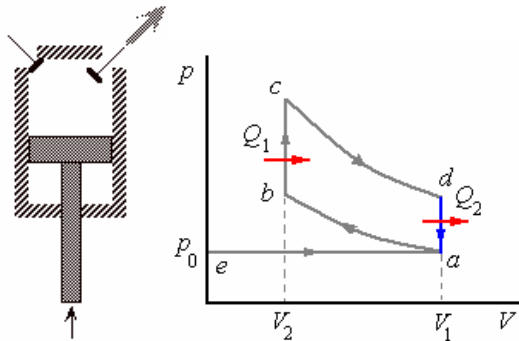


$c \rightarrow d$ Descompresión adiabática de acuerdo a la ecuación.

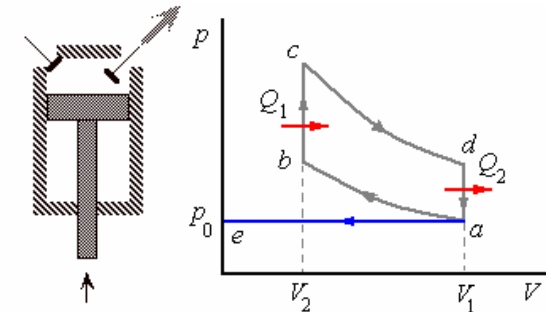
$$T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}$$



$d \rightarrow a$ Descompresión a volumen constante, la temperatura cambia de T_d a T_a . Este proceso es aproximado a la apertura de la válvula en el motor a gasolina.



$a \rightarrow e$ Proceso isobárico a presión atmosférica, el volumen varía de V_1 a cero, a temperatura constante.



$$Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_V dT = C_V (T_c - T_b)$$

El calor liberado Q_2 , a volumen constante

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_V dT = -C_V (T_d - T_a)$$

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

De los procesos adiabáticos tenemos

$$T_d V_1^{\gamma-1} = T_c V_2^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad T_a V_1^{\gamma-1} = T_b V_2^{\gamma-1}$$

restando

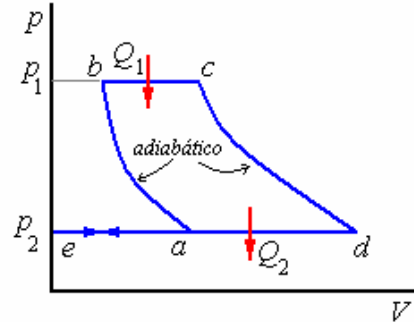
$$(T_d - T_a) V_1^{\gamma-1} = (T_c - T_b) V_2^{\gamma-1}$$

$$\text{o} \quad \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

finalmente

$$e = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

Ejemplo 105. La figura representa un diagrama p - V del ciclo Joule de gas ideal, C_p es constante. ¿Cuál es su eficiencia térmica?



Solución.

En este ciclo, el ingreso de calor se produce en el proceso adiabático $b \rightarrow c$ y la salida de calor en el proceso isobárico $d \rightarrow a$.

$$\text{Luego} \quad Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_p dT = C_p (T_c - T_b) \quad \text{y}$$

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_p dT = C_p (T_a - T_d)$$

Luego la eficiencia

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

Por la trayectoria adiabática $a \rightarrow b$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_a} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_b}$$

$$\text{o} \quad T_b p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_a p_1^{\gamma-1/\gamma} \quad (1)$$

Por la trayectoria adiabática $c \rightarrow d$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_d} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_c}$$

$$\text{o} \quad T_c p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_d p_1^{\gamma-1/\gamma} \quad (2)$$

Restando (1) de (2):

$$(T_c - T_b) p_2^{\gamma-1/\gamma} = (T_d - T_a) p_1^{\gamma-1/\gamma}$$

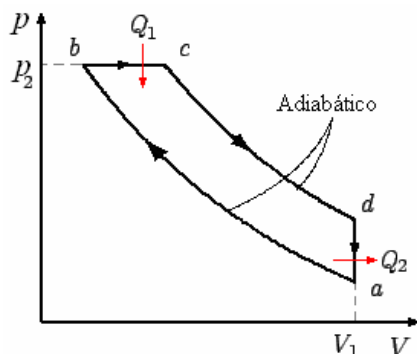
$$\text{De aquí:} \quad \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\text{Finalmente:} \quad e = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

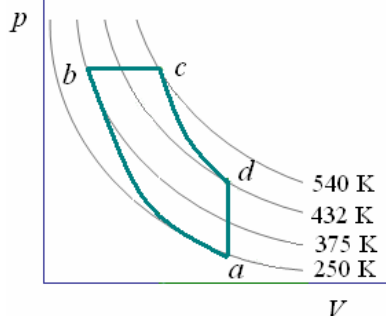
CICLO DIESEL

Este ciclo también se inicia con una compresión adiabática, ocurre la explosión manteniéndose constante la presión, aunque no es necesario introducir una chispa, ya que la combustión se produce de manera espontánea. Nuevamente la etapa

de trabajo se corresponde con una expansión adiabática y finalmente se realiza un enfriamiento isocórico del fluido en el motor.



Ejemplo 106. Un motor diesel opera en el ciclo reversible $abcda$, con 9,0 moles de un gas ideal. Los procesos ab y cd son adiabáticos. Las temperaturas de los puntos a , b , c y d del ciclo son 250 K, 375 K, 540 K, 432 K, respectivamente. La constante adiabática del gas es 1,50.



- Calcule el calor absorbido durante la expansión isobárica.
- Calcule el calor rechazado en el proceso de isocórico.
- Calcule el cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática.
- Calcule el trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática.
- Calcule la eficiencia térmica del motor, en porcentaje.

Solución.

- Cálculo previo de las capacidades caloríficas

$$C_p = C_v + nR \quad \gamma = 1 + \frac{nR}{C_v}$$

$$1,5 = 1 + \frac{9,0(8,31)}{C_v} \quad C_v = \frac{74,79}{0,5} = 149,58 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149,58 + 74,79 = 224,37 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149,58 + 74,79 = 224,37 \text{ J/K}$$

El calor absorbido (Q_1) durante la expansión isobárica

$$Q_1 = C_p(T_c - T_b) = 224,37(540 - 375) = 37469,79 \text{ J} = 37 \text{ kJ}$$

- El calor rechazado (Q_2) en el proceso de isocórico

$$Q_2 = C_v(T_d - T_c) = 149,58(250 - 432) = 27223,56 \text{ J} = 27 \text{ kJ}$$

- El cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática

$$\Delta U = U_b - U_a = C_v(T_b - T_a)$$

$$= 149,58(375 - 250)$$

$$= 18697,5 \text{ J} = 19 \text{ kJ}$$

- El trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática es igual al negativo del cambio de energía interna en el proceso.

$$W = -\Delta U = U_d - U_c = C_v(T_d - T_c)$$

$$= 149,58(432 - 540)$$

$$= -16154,64 \text{ J} = -16 \text{ kJ}$$

- La eficiencia térmica del motor.

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{27223,56}{37469,79} = 1 - 0,73 = 0,27$$

La eficiencia es el 27 por ciento.

Ejemplo 107. 10 moles de un gas diatómico ($C_v = 5R/2$) se encuentran inicialmente a una presión de $p_A = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$ y ocupando un volumen de $V_A = 249 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Se expande adiabáticamente (proceso AB) hasta ocupar un volumen $V_B = 479 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. A continuación el gas experimenta una transformación isoterma (proceso BC) hasta una presión $p_C = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$. Posteriormente se comprime isobáricamente (proceso CD) hasta un volumen $V_D = V_A = 249 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Por último, experimenta una transformación a volumen constante (proceso DA) que le devuelve al estado inicial.

- Representar gráficamente este ciclo en un diagrama p - V .

- Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices A, B, C y D.

- Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.

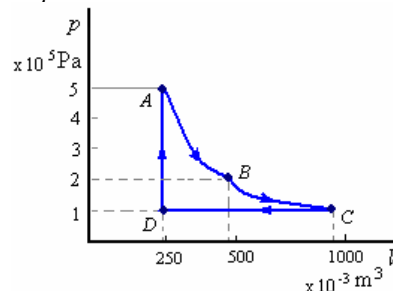
- Calcular el rendimiento.

$$R = 0,082 \text{ atm litro/mol K} = 8,314 \text{ J/mol K};$$

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}; 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Solución.

- Representar gráficamente este ciclo en un diagrama p - V .



- Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices A, B, C y D.

$$C_V = \frac{5}{2}R, C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R,$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\text{Vértice } A \quad p_A V_A = nRT_A \Rightarrow$$

$$T_A = 1447,5 \text{ K}$$

$$A \rightarrow B \quad p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \Rightarrow$$

$$p_B = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Vértice } B \quad p_B V_B = nRT_B \Rightarrow$$

$$T_B = 1152,7 \text{ K}$$

$$B \rightarrow C \quad p_B V_B = p_C V_C \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_C = 958,3 \times 10^{-3} \\ T_C = 1152,7 \text{ K} \end{cases}$$

$$\text{Vértice } D \quad p_D V_D = nRT_D \Rightarrow$$

$$T_D = 299,5 \text{ K}$$

c) Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.

Proceso $A \rightarrow B$ (adiabático)

$$Q = 0$$

$$\Delta U = nC_V (T_B - T_A) =$$

$$10 \left(\frac{5}{2} 8,314 \right) (1152,7 - 1447,5) = 71166,7 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_A}^{V_B} p dV = \text{cte} \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= \frac{(p_A V_A - p_B V_B)}{\gamma - 1} \\ &= \frac{(5 \times 10^5 \times 249 \times 10^{-3} - 2 \times 10^5 \times 479 \times 10^{-3})}{1,4 - 1} \\ &= 71750 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{Comprobación, } \Delta U \approx Q - W$$

Proceso $B \rightarrow C$ (Isotérmico)

$$\Delta = 0 \text{ (no hay cambio de temperatura)}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_B}^{V_C} p dV = nRT \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} \\ &= nRT \ln \frac{V_C}{V_B} = nR(1152,7) \ln \frac{958 \times 10^{-3}}{479 \times 10^{-3}} \\ &= 66458,1 \text{ J} \end{aligned}$$

$$Q = W = 66458,1 \text{ J}$$

Proceso $C \rightarrow D$ (Isobárico)

$$\begin{aligned} \Delta U &= nC_V (T_D - T_C) \\ &= 10 \left(\frac{5}{2} 8,314 \right) (299,5 - 1152,7) \\ &= -177337,6 \text{ J} \\ Q &= nC_p (T_D - T_C) \end{aligned}$$

$$= 10 \left(\frac{7}{2} 8,314 \right) (299,5 - 1152,7)$$

$$= -248272,7 \text{ J}$$

$$W = p(V_D - V_C)$$

$$= 10^5 (249 \times 10^{-3} - 958 \times 10^{-3})$$

$$= -70930 \text{ J}$$

$$\text{Comprobación, } \Delta U \approx Q - W$$

Proceso $D \rightarrow A$ (Isocórico)

$$W = 0 \text{ no hay cambio de volumen}$$

$$Q = nC_V (T_A - T_D)$$

$$\begin{aligned} &= 10 \left(\frac{5}{2} 8,314 \right) (1447,5 - 299,5) \\ &= 249004,3 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\Delta U = Q = 249004,3 \text{ J}$$

En el ciclo completo

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ W = 67278,1 \text{ J} \\ Q_{\text{absorbido}} = 315462,4 \text{ J (+)} \\ Q_{\text{cedido}} = 248272,7 \text{ J (-)} \end{cases}$$

Podemos ver que $W \approx Q_{\text{abs}} + Q_{\text{ced}}$

	ΔU (J)	Q (J)	W (J)
$A \rightarrow B$	-71666,7	0	71750
$B \rightarrow C$	0	66438,1	66458,1
$C \rightarrow D$	-177337,6	-248272,7	-70930
$D \rightarrow A$	249004,3	249004,3	0
	0		67278,1

d) Calcular el rendimiento.

$$e = \frac{W}{Q_{\text{abs}}} = 0,21 = 21\%$$

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

La experiencia nos dice que a pesar de que es muy fácil convertir energía mecánica completamente en energía térmica (como en la fricción), hay muchas restricciones para efectuar la transformación inversa. La única forma en que somos capaces de efectuar la transformación continua de energía térmica en energía mecánica es teniendo "reservorios de calor" a dos temperaturas diferentes, e interactuando entre ellas una máquina que transforme una parte del calor que fluye del reservorio caliente al frío en trabajo (máquina térmica). El segundo principio de la termodinámica: se refiere a este hecho y se establece cualitativamente como sigue:

"Es imposible construir una máquina de funcionamiento continuo que produzca trabajo mecánico derivado de la extracción de calor de un

reservorio simple, sin dar calor, a un reservorio a temperatura más baja”

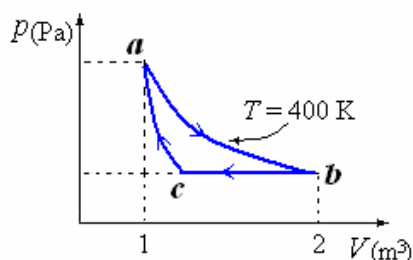
En resumen, la segunda ley establece los procesos que sin violar la primera ley no ocurren en la naturaleza. La primera Ley establece simplemente la conservación de energía.

Reservorio de calor. Se define como un cuerpo de masa tal que es capaz de absorber o liberar calor en cantidad ilimitada sin sufrir apreciable cambio de su estado, temperatura u otra variable termodinámica.

Ejemplo 108. Una mol de un gas monoatómico se lleva por un ciclo *abca* como se muestra en la figura.

El proceso $a \rightarrow b$ es un proceso isotérmico a 400 K y el proceso $c \rightarrow a$ es un proceso adiabático.

- Hallar la presión, el volumen y la temperatura para los puntos *a*, *b* y *c*.
- Hallar el trabajo total en el ciclo.
- Hallar los calores en cada uno de los procesos (Q_{ab} , Q_{bc} y Q_{ca}).
- Hallar la eficiencia del ciclo.



Solución.

- a) Cálculo de las presiones:

$$p_a V_a = p_b V_b = nRT = 1 \times 8,31 \times 400$$

$$p_a = \frac{3324}{1} = 3324 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$p_b = \frac{3324}{2} = 1662 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$p_c = p_a = 1662 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Cálculo de los volúmenes:

$$V_a = 1 \text{ m}^3, V_b = 2 \text{ m}^3,$$

$$\text{Como } p_a V_a^\gamma = p_b V_b^\gamma,$$

$$\text{con } \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$3324(1)^{5/3} = 1662(V_c)^{5/3}$$

$$\therefore V_c = (2)^{3/5} = 1,51 \text{ m}^3$$

Cálculo de las temperaturas:

$$T_a = T_b = 400 \text{ K},$$

$$\text{Como } p_c V_c = nRT_c \Rightarrow$$

$$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{1662 \times 1,51}{1 \times 8,31} = 302 \text{ K}$$

	$p \text{ (N/m}^2\text{)}$	$V \text{ (m}^3\text{)}$	$T \text{ (K)}$
<i>a</i>	3324	1	400
<i>b</i>	1662	2	400
<i>c</i>	1662	1,51	302

b)

$$W_{ab} = nRT \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right) = (8,31)(400) \ln 2 = 2304 \text{ J}$$

$$W_{bc} = p(V_c - V_b) = (1662)(1,51 - 2) = -814 \text{ J}$$

$$W_{ca} = -\Delta U = -nC_V \Delta T = -1222 \text{ J}$$

$$W_{\text{Total}} = 268 \text{ J}$$

c)

$$Q_{ab} = W_{ab} = 2304 \text{ J}$$

$$Q_{bc} = nC_p \Delta T = -2036 \text{ J}$$

$$Q_{ca} = 0$$

$$e) \quad e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{2036}{2304} = 0,11$$

Ejemplo 109. Una máquina tiene una potencia de salida de 2 kW, si su eficiencia es del 40% y cede un calor de 3000 calorías por ciclo.

- Determine el trabajo realizado por ciclo.
- El tiempo de duración de cada ciclo.

Solución.

- a) Determine el trabajo realizado por ciclo.

$$e = 40\%, Q_2 = 3000 \text{ calorías}$$

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1}$$

$$Q_1 = \frac{Q_2}{1 - e} = \frac{3000}{0,6} = 5000 \text{ calorías}$$

Y el trabajo es:

$$W = Q_1 - Q_2 = 5000 - 3000 = 2000 \text{ calorías.}$$

- b) 1 cal = 4,186 Joules

Como la potencia es 2000 J/s

$$2000 \text{ J (1 caloría/4,186 J)} = 477,78 \text{ calorías}$$

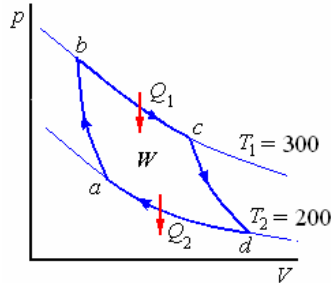
El tiempo de duración de cada ciclo es:

$$t = \frac{2000}{477,78} = 4,2 \text{ s}$$

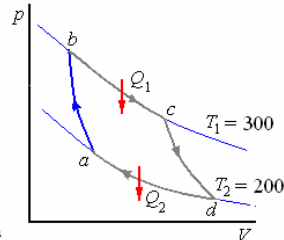
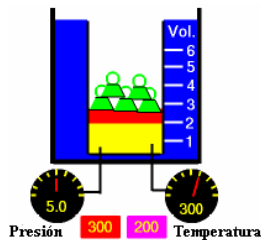
EL CICLO CARNOT

Vamos a estudiar ahora una máquina térmica altamente idealizada conocida como la máquina de Carnot. Nos muestra como es posible obtener trabajo por medio de una sustancia de trabajo que es llevada a través de un proceso cíclico y también nos permitirá establecer la escala absoluta termodinámica de temperatura.

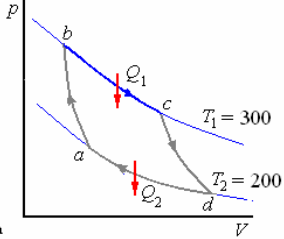
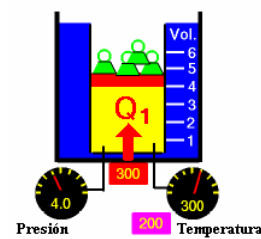
Un ciclo de Carnot es un conjunto de procesos, la sustancia de trabajo se imagina primero en equilibrio térmico con un reservorio frío a la temperatura T_2 . Se realiza cuatro procesos, por ejemplo sobre un gas, como se muestra en el diagrama p - V de la figura..



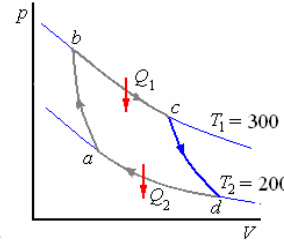
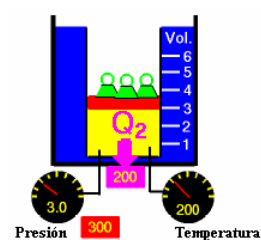
$a \rightarrow b$ Compresión adiabática reversible hasta que la temperatura se eleve a T_1 .



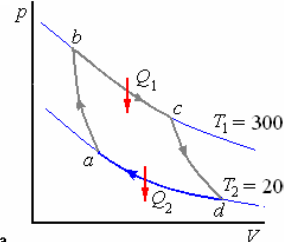
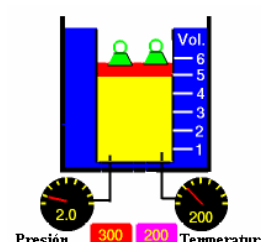
$b \rightarrow c$ Expansión isotérmica reversible hasta un punto c.



$c \rightarrow d$ Expansión adiabática reversible hasta que la temperatura baje a T_2 .



$d \rightarrow a$ Compresión isotérmica reversible hasta que se alcanza el estado original.



En este ciclo se tendrá:
 $\Delta U = 0$

(Por ser un ciclo en que estado final = estado inicial)

$W = Q_2 - Q_1 = \Delta Q$ (Calor total absorbido por el sistema enunciado)

W = Trabajo neto entregado

Durante la expansión isotérmica $b \rightarrow c$ ingresa calor Q_1 .

Como la energía interna de un gas ideal depende solo de su temperatura

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_b}^{V_c} p dV = RT_1 \int_{V_b}^{V_c} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_c}{V_b}$$

Del mismo modo durante la compresión isotérmica $d \rightarrow a$ en que se realiza calor Q_2 .

$$Q_2 = W_2 = \int_{V_d}^{V_a} p dV = RT_2 \int_{V_d}^{V_a} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{V_a}{V_d}$$

Siendo $V_d > V_a$ $\ln \frac{V_a}{V_d}$ es una cantidad negativa,

como debemos de poner como cantidad positiva

$$\text{escribimos } Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_d}{V_a}$$

En la expansión adiabática $c \rightarrow d$

$$T_1 V_c^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_d}{V_c} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1)$$

En la compresión adiabática $a \rightarrow b$

$$T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_b^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_a}{V_b} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \quad (2)$$

de (1) y (2)

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c} \Rightarrow \frac{V_d}{V_a} = \frac{V_c}{V_b} \quad (3)$$

$$\text{Entonces } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2 \ln \frac{V_d}{V_a}}{T_1 \ln \frac{V_c}{V_b}} = \frac{T_2}{T_1}$$

La relación entre las temperaturas absolutas de reservorios de calor en los que trabaja la máquina de Carnot tiene la misma relación que los calores rechazado y absorbido.

La eficiencia térmica es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Reemplazando $\frac{Q_2}{Q_1}$ por su valor, obtenemos:

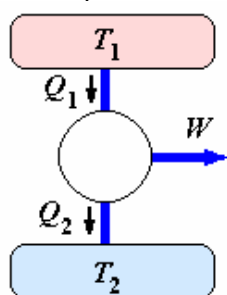
$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Para que una máquina Carnot tenga una eficiencia de 100 por ciento es claro que e debería ser cero. Como en la práctica no es posible tener $e = 1$, es imposible obtener el cero absoluto de temperatura. Estos resultados que se han obtenido usando un gas ideal como sustancia de trabajo, sin embargo, son independientes de este hecho y en general la eficiencia de una máquina térmica reversible es independiente del material usado como sistema, dependiendo únicamente de las temperaturas de los reservorios.

MOTOR Y REFRIGERADOR

Un motor de Carnot es un dispositivo ideal que describe un ciclo de Carnot. Trabaja entre dos focos, tomando calor Q_1 del foco caliente a la temperatura T_1 , produciendo un trabajo W , y cediendo un calor Q_2 al foco frío a la temperatura T_2 .

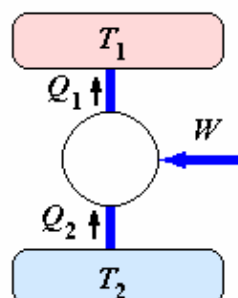
En un motor real, el foco caliente está representado por la caldera de vapor que suministra el calor, el sistema cilindro-émbolo produce el trabajo, y se cede calor al foco frío que es la atmósfera.



Motor

La máquina de Carnot también puede funcionar en sentido inverso, denominándose entonces refrigerador o frigorífico. Se extraería calor Q_2 del foco frío aplicando un trabajo W , y cedería Q_1 al foco caliente.

En un refrigerador real, el motor conectado a la red eléctrica produce un trabajo que se emplea en extraer un calor del foco frío (la cavidad del refrigerador) y se cede calor al foco caliente, que es la atmósfera



Refrigerador

La segunda Ley establecería que no existe el Refrigerador perfecto. No es posible transportar calor de un cuerpo a otro de más alta temperatura, sin efectuar trabajo sobre el sistema. También, nos

gustaría tenerla, puesto viola la primera Ley, pero tampoco se ha obtenido nunca.

Coefficiente de rendimiento de un refrigerador:

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q_2}{W}$$

Ejemplo 110. La eficiencia de una máquina de Carnot es de 30%. La máquina absorbe 800 J de calor por ciclo de una fuente caliente a 500 K.

Determine

- el calor liberado por ciclo y
- la temperatura de la fuente fría.

Solución.

$$T_2 = 500 \text{ K}$$

$$Q_2 = 800 \text{ J}$$

$$e = 0,3$$

$$a) \quad e = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$0,3 = 1 - \frac{Q_2}{800} \Rightarrow Q_2 = 560 \text{ J}$$

$$b) \quad e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$0,3 = 1 - \frac{T_2}{500} \Rightarrow T_2 = 350 \text{ K}$$

Ejemplo 111. Una máquina de Carnot opera con 2 moles de un gas ideal. En el proceso cíclico, la temperatura máxima que alcanza el gas es de 527°C y la presión máxima es de 5 atm. En un ciclo, el calor suministrado es de 400 J y el trabajo realizado por dicha máquina es de 300 J.

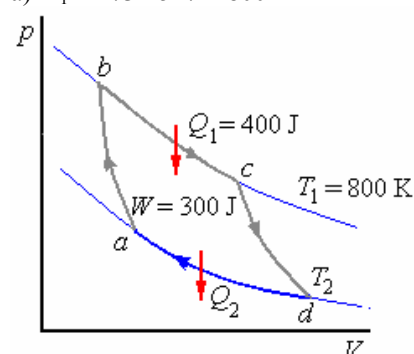
- Calcular la temperatura del depósito frío y la eficiencia porcentual.
- Si empleando únicamente el calor expulsado por la máquina se logra derretir totalmente un bloque de hielo de 10 kg a 0°C, ¿Durante cuántos ciclos debe operar esta máquina?

$$c_{\text{fusión agua}} = 334 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

- ¿Cual debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?

Solución.

$$a) \quad T_1 = 273 + 527 = 800 \text{ K}$$



$$W = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$$

$$Q_2 = Q_1 - W = 400 - 300 = 100 \text{ J}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \frac{Q_2}{Q_1} = 800 \frac{100}{400} = 200 \text{ K}$$

$$T_2 = 200 - 273 = -73 \text{ °C}$$

La eficiencia es:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{200}{800} = 0,75 = 75 \%$$

b) Para derretir los 10 kg de hielo se necesitan $10 (334 \times 10^3) = 334 \times 10^4 \text{ J}$

Si en cada ciclo el calor expulsado por la máquina es 100 J

Esta máquina debe operar

$$\frac{334 \times 10^4}{100} = 33400 \text{ ciclos.}$$

c) ¿Cuál debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?

$$e' = 1 - \frac{T_2}{T'_1} \Rightarrow$$

$$T'_1 = \frac{T_2}{1 - e'} = \frac{200}{1 - 0,8} = \frac{200}{0,2} = 1000 \text{ K}$$

$$t'_1 = 1000 - 273 = 727 \text{ °C.}$$

Ejemplo 112. Se ha propuesto una planta de potencia que haga uso del gradiente de temperatura en el océano. El sistema se diseñó para operar entre 20 °C (temperatura de la superficie del agua) y 5 °C (temperatura del agua a una profundidad de casi 1 km).

a) ¿Cuál es la máxima eficiencia de dicho sistema?

b) Si la potencia de salida de la planta es de 7,5 MW, ¿cuánta energía térmica se absorbe por hora?

c) En vista de los resultados de la parte (a), ¿piensa que se deba tomar en cuenta dicho sistema?

Solución.

$$t_1 = 5 \text{ °C}, T_1 = 278,15 \text{ K}$$

$$t_2 = 20 \text{ °C}, T_2 = 293,15 \text{ K}$$

$$P = 7,5 \text{ MW}$$

$$a) e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{278,15}{293,15} = 0,051 = 5,1\%$$

$$b) e = \frac{W}{Q_1} = \frac{P}{P_1} \Rightarrow P_1 = \frac{P}{e}$$

o sea la potencia absorbida será

$$P_1 = \frac{7,5}{0,051} = 147 \text{ MW}$$

En una hora

$$Q_2 = 147 \times 3600 \times 10^6 \text{ J} = 5,292 \times 10^{11} \text{ J}$$

c) Se recomienda que no.

Ejemplo 113. Un aparato de aire acondicionado absorbe calor de su embobinado de enfriamiento a 13 °C y libera calor al exterior a 30 °C.

a) ¿Cuál es el máximo rendimiento del aparato?

b) Si el rendimiento real es de la tercera parte del valor máximo y si el aparato remueve $8 \times 10^4 \text{ J}$ de energía calórica cada segundo, ¿qué potencia debe desarrollar su motor?

Solución.

Q_1 calor transferido a la fuente caliente

Q_2 calor absorbido de la fuente fría

W trabajo gastado por la bomba

$$\eta = \frac{Q_2}{W}$$

a) Si el refrigerador es una máquina de Carnot funcionando a la inversa

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{273,15 + 13}{273,15 + 30} = 0,943922$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273,15 + 30}{273,15 + 13} = 1,06$$

entonces

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = 16,7$$

$$b) \text{ Si } \eta_{real} = \frac{16,7}{3} = 5,56 \text{ y } P_1 = 8 \times 10^4 \text{ J/s,}$$

entonces.

$$\eta_{real} = \frac{Q_2}{W} = \frac{P_2}{P_1 - P_2} \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta_{real}} + P_2$$

$$P_1 = P_2 \left(\frac{1}{\eta_{real}} + 1 \right) = 8 \times 10^4 \left(\frac{5,56 + 1}{5,56} \right)$$

$$= 8 \times 10^4 (1,18) = 9,44 \times 10^4 \text{ W.}$$

Ejemplo 114. Se dan dos máquinas de Carnot acopladas, la máquina A opera entre los reservorios

$T_1 = 1000 \text{ K}$ y $T_2 = 800 \text{ K}$ y la máquina B entre

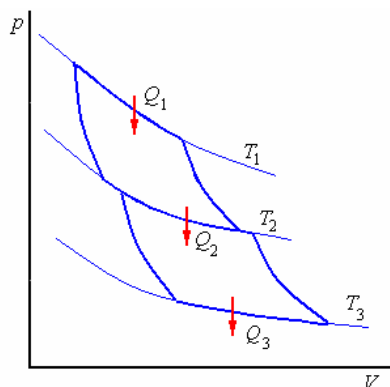
$T_2 = 800 \text{ K}$ y $T_3 = 400 \text{ K}$. Sabiendo que el

reservorio T_1 suministra 1500 Joules de calor al sistema, calcular:

a) La eficiencia de cada máquina y del sistema.

b) El trabajo de cada máquina y el total del sistema.

Solución.



$$a) e_A = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{800}{1000} = 20 \%$$

$$e_B = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{400}{800} = 50 \%$$

Eficiencia del sistema

$$e_S = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{400}{1000} = 60 \%$$

b) Cálculo de W_A

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1 = \frac{800}{1000} (1500) = 1200 \text{ J}$$

$$\text{Luego } W_A = Q_1 - Q_2 = 1500 - 1200 = 300 \text{ J}$$

Cálculo de W_B

$$\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{T_3}{T_2} \Rightarrow$$

$$Q_3 = \frac{T_3}{T_2} Q_2 = \frac{400}{800} (1200) = 600 \text{ J}$$

$$\text{Luego } W_B = Q_2 - Q_3 = 1200 - 600 = 600 \text{ J}$$

y el trabajo total del sistema

$$W_S = Q_1 - Q_3 = 1500 - 600 = 900 \text{ J}$$

Nota: observe que:

$$W_S = W_A + W_B \text{ y } e_S \neq e_A + e_B$$

Ejemplo 115. Una casa cerca de un lago se calefacciona mediante un motor térmico. En invierno, el agua debajo del hielo que cubre el lago se bombea por medio del motor térmico. Se extrae el calor hasta que el agua está en el punto de congelar cuando se expulsa. El aire exterior se utiliza como enfriador. Asuma que temperatura del aire es -15°C y la temperatura del agua del lago es 2°C . Calcule la razón en la cual el agua se debe bombear al motor. La eficiencia del motor es un quinto que el de un motor de Carnot y la casa requiere 10 kilovatios.

Solución.

La eficiencia de un motor Carnot es $[1 - (T_1/T_2)]$.

Para éste problema,

$$e = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{1}{5} \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right)$$

El calor se toma del agua del lago mientras que se enfría de 2°C a 0°C antes de la eyección. La temperatura media del reservorio caliente es 274 K . Si m es la masa del agua que fluye en el tiempo t , el calor tomado adentro del reservorio caliente por unidad de tiempo es $Q_2/t = (m/t)c \times 2^\circ\text{C}$, donde c está la capacidad específica de calor del agua.

El calor que sale al aire como reservorio frío a una temperatura de $-15^\circ\text{C} = 258 \text{ K}$, por la cantidad infinita de aire disponible se asume que la temperatura permanece constante.

Además, el trabajo realizado ($Q_2 - Q_1$) es 10 kilovatio = 10^4 J/s . Así, de la primera ecuación, tenemos

$$\frac{10^4 \text{ J/s}}{(m/t)(4,18 \text{ J/g}^\circ\text{C})(2^\circ\text{C})} = \frac{1}{5} \frac{(274 - 258) \text{ K}}{274 \text{ K}}$$

$$\therefore \frac{m}{t} = \frac{5 \times 274 \times 10^4 \text{ g}}{2 \times 4,18 \times 16 \text{ s}} = 102,4 \times 10^3 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

La razón del flujo de agua necesario es $102,4$ litros/s

Ejemplo 116. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30% .

Para cada ciclo de operación,

a) ¿cuánto calor se absorbe?, y

b) ¿cuánto calor se libera?

Solución. Q_1 calor absorbido de la fuente caliente Q_2 calor cedido a la fuente fría $W = 200 \text{ J}$

$$e = \frac{W}{Q_1} = 0,3$$

entonces

$$a) Q_1 = \frac{200}{0,3} = 666,7 \text{ J}$$

$$b) Q_2 = Q_1 - W = 666,7 - 200 = 466,7 \text{ J}$$

Ejemplo 117. En un determinado refrigerador las serpentinas de baja temperatura están a -10°C y el gas comprimido en el condensador tiene una temperatura de $+30^\circ\text{C}$. Considerando que trabaja con el ciclo Carnot. ¿Cuál es su rendimiento teórico?

Solución.

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{303}{263} - 1} = \frac{263}{40} = 6,58$$

Ejemplo 118. Una máquina térmica absorbe 360 J de calor y realiza un trabajo de 25 J en cada ciclo. Encuentre:

- la eficiencia de la máquina y
- el calor liberado en cada ciclo.

Solución.

$$Q_1 = 360 \text{ J}$$

$$W = 25 \text{ J}$$

$$a) e = \frac{W}{Q_1} = \frac{25}{360} = 0,069 = 6,9\%$$

$$b) Q_{\text{Liberado}} = Q_1 - W = 335 \text{ J}$$

Ejemplo 119. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%.

Para cada ciclo de operación,

- ¿cuánto calor se absorbe?, y
- ¿cuánto calor se libera?

Solución.

Q_1 calor absorbido de la fuente caliente

Q_2 calor cedido a la fuente fría

$$W = 200 \text{ J}$$

$$e = \frac{W}{Q_1} = 0,3$$

Entonces

$$a) Q_1 = \frac{200}{0,3} = 666,7 \text{ J}$$

$$b) Q_2 = Q_1 - W = 666,7 - 200 = 466,7 \text{ J}$$

Ejemplo 120. Un refrigerador tiene un coeficiente de operación igual a 5. Si el refrigerador absorbe 120 J de calor de una fuente fría en cada ciclo, encuentre:

- el trabajo hecho en cada ciclo y
- el calor liberado hacia la fuente caliente.

Solución.

$$\eta = 5$$

$$Q_1 = 120 \text{ J}$$

$$a) \eta = \frac{Q_1}{W} = \frac{W + Q_2}{W}$$

$$\text{De donde } 5 = \frac{W + 120}{W} \Rightarrow W = 30 \text{ J}$$

$$b) Q_2 = W + Q_1 = 30 + 120 = 150 \text{ J}$$

Ejemplo 121. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:

- el calor absorbido en cada ciclo y
- el tiempo para cada ciclo.

Solución.

$$P = \text{potencia} = 5 \text{ kW} = 5 \times 10^3 \text{ W}$$

$$e = 25\% = 0,25$$

$$Q_1 = 8000 \text{ J}$$

Si t es el tiempo de un ciclo

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{W}{W + Q_1} = \frac{Pt}{Pt + Q_1}$$

o bien

$$0,25 = \frac{5 \times 10^2 t}{5 \times 10^2 t + 8000}$$

De donde se obtiene $t = 0,53 \text{ s}$ el tiempo para cada ciclo.

El calor absorbido en cada ciclo será

$$Q_1 = 5 \times 10^2 t + 8000 \\ = 5 \times 10^2 (0,53) + 8000 = 1,065 \times 10^4 \text{ J}$$

Ejemplo 122. El calor absorbido por una máquina es el triple del trabajo que realiza.

- ¿Cuál es su eficiencia térmica?
- ¿Qué fracción del calor absorbido se libera a la fuente fría?

Solución.

$$Q_1 = 3W$$

$$a) e = \frac{W}{Q_1} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33\%$$

$$b) Q_2 = Q_1 - W = Q_1 - \frac{Q_1}{3} = \frac{2}{3} Q_1$$

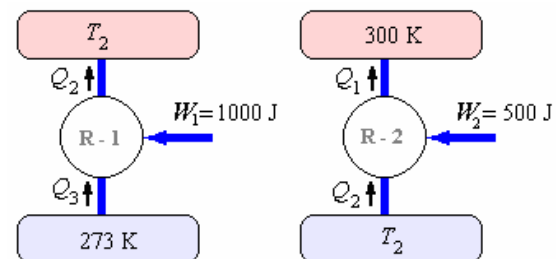
Fracción del calor absorbido que se libera:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2}{3} = 0,66$$

Ejemplo 123. Dos máquinas frigoríficas de Carnot trabajan en serie la primera extrae calor de una fuente a 0°C y consume 1000 J. La segunda máquina consume 500 J. y entrega calor a una fuente a 27°C . Considere que el calor que la primera cede a una fuente intermedia es íntegramente absorbido por la segunda.

- ¿Cuál es el calor que la primera máquina extrae?
- ¿Cuál es la temperatura de la fuente intermedia?
- ¿Qué calor intercambian las máquinas con la fuente de temperatura intermedia?

Solución.



- Para el conjunto

$$\eta = -\frac{Q_3}{Q_3 - Q_1} = -\frac{Q_3}{W_1 + W_2} = -\frac{1}{1 - \frac{Q_1}{Q_3}} = -\frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{Q_3}{-(1000 + 500)} = -\frac{1}{1 - \frac{300}{273}}$$

$$Q_3 = \frac{1500 \times 273}{27} = 15166,7 \text{ J}$$

b) Para R - 1

$$\eta_1 = -\frac{Q_3}{Q_3 - Q_2} = -\frac{Q_3}{W_1} = -\frac{1}{1 - \frac{Q_2}{Q_3}} = -\frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{15166,7}{-1000} = -\frac{1}{1 - \frac{T_2}{273}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{273} - 1 = 0,066 \Rightarrow T_2 = 290,1 \text{ K}$$

c) $Q_3 = 15166,7 \text{ J}$,

$$Q_2 = Q_3 - W_1 = 15166,7 - (-1000) = 16166,7 \text{ J}$$

ENTROPIA

Recordemos para el ciclo reversible de Carnot,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{o} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Es posible aproximar cualquier ciclo reversible por una serie de ciclos de Carnot, y éste nos conduce a la conclusión que

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{para un ciclo reversible.}$$

Esto recuerda a las fuerzas conservativas, donde

$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ para una trayectoria cerrada. Que nos llevó a definir la energía potencial U donde

$U_B - U_A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$. En este caso un estado del sistema fue caracterizado por un valor definido de U , la energía potencial. De la misma manera, definimos una nueva variable del estado, la entropía S , tal que

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad \text{y} \quad S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

Note que aunque un valor definido de Q no caracteriza un estado (es decir, un punto en un diagrama pV), cada punto en el diagrama pV tiene un valor definido de S . Es curioso que aunque el flujo del calor en un sistema depende de la trayectoria seguida entre los dos estados, el cambio en S es independiente de la trayectoria. Decimos que dQ es un diferencial inexacto, y dS es un diferencial exacto.

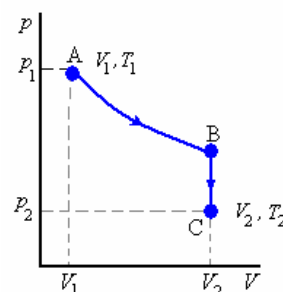
La ecuación anterior es cierta para un ciclo

reversible. Uno puede razonar que $\oint (dQ/T) > 0$ para un ciclo irreversible. Además, es posible ampliar este razonamiento a cualquier proceso que lleve un sistema del estado A al estado B , con el resultado que $\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} = \oint (dQ/T)$.

Para un sistema aislado, esto se convierte $\Delta S = 0$ para un ciclo reversible y $\Delta S > 0$ para un ciclo irreversible.

Esto significa que la entropía de un sistema aislado sigue siendo constante o aumenta. Puesto que los procesos verdaderos son todos irreversibles, esto significa que la entropía del universo aumenta siempre en cada proceso.

Ejemplo 124. Calcular el cambio en la entropía para un gas ideal siguiendo un proceso en el cual lo lleve de p_1, T_1, V_1 a p_2, T_2, V_2 según se muestra en la figura.



Solución.

No importa qué trayectoria siga, el cambio de la entropía será igual puesto que S es una función del estado. Para simplificar el cálculo, elegiremos la trayectoria reversible mostrada, primero viajando a lo largo de una trayectoria isotérmica, y luego a lo largo de una trayectoria a volumen constante. A lo largo de la isoterma la temperatura no cambia, por lo tanto no hay cambio en energía interna.

$$(U = nC_V T)$$

Así $dQ = dW$ para este proceso, y

$$S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dW}{T_1}$$

$$pV = nRT, \text{ tal que } S_{(B)} - S_{(A)} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT dV_1}{VT_1}$$

$$S_{(B)} - S_{(A)} = nR \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Para $B \rightarrow C$, no se realiza trabajo, luego

$$dQ = dU = nC_V dT :$$

$$S_{(C)} - S_{(B)} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dQ}{T} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

El cambio total de la entropía es

$$\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} + S_{(C)} - S_{(B)} :$$

$$\Delta S = S(p_2, V_2, T_2) - S(p_1, V_1, T_1)$$

$$= nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Ejemplo 125. Un kilogramo de agua a temperatura de 280 K se mezcla con 2 kilogramos de agua a 310 K en un recipiente aislado térmicamente. Determine el cambio en la entropía del Universo.

Solución.

Aquí, un proceso de mezclado

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

donde (por calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

siendo

$$m_1 = 1000 \text{ g}$$

$$T_1 = 280 + 273,15 = 553,15 \text{ K}$$

$$m_2 = 2000 \text{ g}$$

$$T_2 = 310 + 273,15 = 583,15 \text{ K}$$

entonces

$$T_f = \frac{553,15 + 2 \times 583,15}{3} = 573,15 \text{ K}$$

$$\begin{aligned} \text{y } \Delta S &= 1000 \ln \frac{573,15}{553,15} + 2000 \ln \frac{573,15}{583,15} \\ &= 0,92 \frac{\text{cal}}{\text{K}} \end{aligned}$$

Ejemplo 122. Una masa m de líquido a temperatura T_1 se mezcla con una igual cantidad del mismo líquido a temperatura T_2 en un recipiente aislado térmicamente. Demuestre que el cambio de entropía

del Universo es $2mc_p \ln \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$ y pruebe que

es necesariamente positivo.

Solución.

El cambio de entropía del Universo será el cambio de entropía de la mezcla, es decir

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

pero $m_1 = m_2 = m$ y $c_1 = c_2 = c$ por lo cual resulta

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Y

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 2mc \ln \frac{T_f}{\sqrt{T_1 T_2}} =$$

$$2mc \ln \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$$

Para probar que es positivo, debemos demostrar que en general

$$\frac{x + y}{2\sqrt{xy}} > 1$$

y esto se deduce de

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0 \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} > 0 \Rightarrow$$

$$x + y > 2\sqrt{xy}$$

$$\text{Finalmente: } \frac{x + y}{2\sqrt{xy}} > 1$$