UNIDAD DIDÁCTICA

2 DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Comprender el concepto de derivada y sus interpretaciones geométrica y física.
- Saber calcular derivadas.
- Entender el concepto de diferencial y el uso de la tangente para aproximar funciones.
- Utilizar la derivada para determinar errores de funciones a partir de los errores en las medidas.
- Usar la derivada para el estudio del crecimiento, extremos y concavidad de una función, sabiendo obtener una representación gráfica de la función a partir de los datos anteriores.
- Usar la derivada para resolver problemas aplicados de optimización.
- Comprender los teoremas de valor medio y, en particular, usar la regla de L'Hôpital para hallar límites.
- Conocer los polinomios de Taylor y su uso para aproximar funciones.

1. LA DERIVADA

1.1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1.1.1. Definición

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto a. Se dice que f es **derivable** en a si existe y es finito el límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

que se llama **derivada** de f en a. Haciendo el cambio de variable $x = a + h$ en el límite, se obtiene otra expresión para la derivada:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

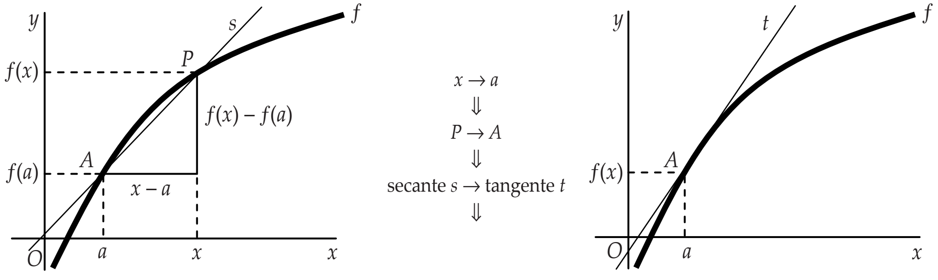
Otras notaciones para la derivada son:

$$y'(a), Df(a), \frac{df}{dx}(a), \frac{dy}{dx}(a), \ldots$$

Intuitivamente, una función es derivable en un punto si su gráfica se traza alrededor del punto de forma suave, es decir, sin cambios bruscos de dirección.

1.1.2. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de f en a es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a, que se conoce como **pendiente de la curva**.



Pendiente de la secante: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\longrightarrow\!\longrightarrow\!\longrightarrow$ Pendiente de la tangente: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

1.1.3. Derivada y continuidad

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto, pues una función puede ser continua y no derivable en un punto.

Demostración

Si f es derivable en a, entonces existe y es finito el límite del cociente $(f(x)-f(a))/(x-a)$ y, puesto que el denominador tiende a 0, es necesario que también tienda a 0 el numerador, es decir, que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, de donde se deduce la continuidad de f en a. El recíproco no es cierto, pues, por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y no es derivable:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, \text{ si } x\to 0^- \\ 1, \text{ si } x\to 0^+\end{cases} \begin{matrix}\Rightarrow \text{No existe el límite} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{No existe } f'(0)\end{matrix}$$

Obviamente, una función no puede ser derivable en los puntos donde no es continua.

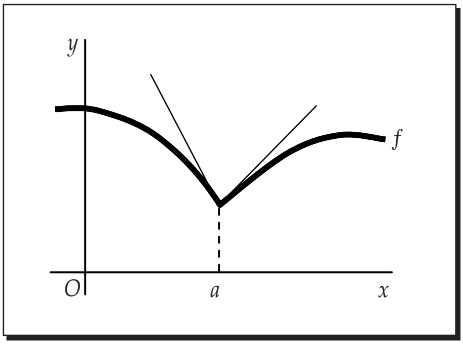
1.1.4. Derivadas laterales

La no existencia de derivada, o del límite que aparece en su definición, se debe con frecuencia a que los límites laterales son distintos. En estos casos, tiene sentido definir las **derivadas laterales por la derecha y por la izquierda**, respectivamente, como:

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Cuando existen las derivadas laterales pero no coinciden, la función no es derivable. En este caso, la gráfica de la función no tiene tangente en el punto, pero sí tiene tangentes laterales y se dice que presenta un **punto anguloso**.

Es el caso de la función $f(x) = |x|$ considerada en el epígrafe anterior, para la que $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$.



1.1.5. Derivada de funciones definidas a trozos

Como fácilmente se puede deducir de la definición, cuando una función está definida a trozos mediante funciones derivables y es continua en su punto de cambio, sus derivadas laterales en dicho punto coinciden con las derivadas de las funciones que intervienen:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ si } x < a \\ h(x), \text{ si } x \geq a \end{cases} \quad \text{continua en } x = a \quad \Rightarrow \begin{cases} f'(a^-) = g'(a) \\ f'(a^+) = h'(a) \end{cases}$$

1.2. FUNCIÓN DERIVADA

1.2.1. Definición

Se llama **función derivada** a aquella que en cada punto proporciona, si existe, el valor de la derivada:

$$x \longrightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1.2.2. Derivadas sucesivas

Puesto que la función derivada es una nueva función, se puede volver a derivar para obtener la derivada segunda (o de orden 2) de f, y así sucesivamente:

$$f''(x) = (f')'\,(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}\ ;\ f''' = (f'')';\ f^{iv} = (f''')';\ \ldots;\ f^{n)};\ \ldots$$

Una **función es de clase *n*** en *D* si admite derivadas y son continuas hasta la derivada de orden *n* en *D*.

1.2.3. Derivadas de operaciones con funciones

Las derivadas de operaciones con funciones se pueden reducir a las derivadas de las funciones que intervienen según las siguientes reglas:

- Operaciones algebraicas:

$$(kf(x))' = kf'(x) \qquad (f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$

- Composición: $(g \circ f)'\,(x) = g'(f(x))\, f'(x)$ (**Regla de la cadena**).

- Función inversa: si g es la función inversa de f, es decir, si $(f \circ g)\,(x) = (g \circ f)\,(x) = x$, entonces:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

1.3. CÁLCULO DE DERIVADAS

1.3.1. Cálculo elemental de derivadas

Por cálculo elemental de derivadas se entiende el cálculo de las derivadas de operaciones con funciones elementales, y con el que el alumno ya debe estar familiarizado desde bachillerato.

Con la única intención de fijar conocimientos, se expone a continuación una tabla con las derivadas de las funciones elementales y se hace algún ejemplo.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
$x^p \; (p \neq 0)$	px^{p-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

EJEMPLO 1

Hallar la función derivada de las funciones:

a) $y = x^3 - 2x + 1$

b) $y = e^{-x^2}$

c) $y = \ln(1 + \sqrt{x})$

Solución

En el caso del polinomio se pueden obtener fácilmente todas sus derivadas, y en el resto de casos se aplica la regla de la cadena:

a) $y = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow y''' = 6 \Rightarrow y^{n)} = 0$, para $n > 3$

b) $y = e^{-x^2} \Rightarrow y' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}$

c) $y = \ln(1+\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \dfrac{(1+\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$

Como se puede observar, los polinomios tienen infinitas derivadas, cada una de ellas con grado una unidad inferior y siendo nulas las de orden superior al grado.

1.3.2. Derivación implícita

Cuando una función viene definida implícitamente, por ejemplo, $x^2y + 2xy^3 = 3x - 1$, su derivada se puede obtener directamente derivando los dos miembros de su expresión. Para ello se usa la regla de la cadena y se tiene en cuenta que, al ser y función de x, su derivada es y'. En el ejemplo de arriba:

$$2xy + x^2y' + 2y^3 + 6xy^2y' = 3 \Rightarrow (x^2 + 6xy^2)y' = 3 - 2xy - 2y^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3 - 2xy - 2y^3}{x(x + 6y^2)}$$

En general, se puede usar la siguiente fórmula:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{df}{dy}}$$

1.3.3. Derivación logarítmica

Para hallar la derivada de una función potencio-exponencial $y = f(x)^{g(x)}$ se procede así:

- Se toman logaritmos y se quita la potencia:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$

- Se deriva implícitamente:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- Se despeja la derivada:

$$y' = \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right] f(x)^{g(x)}$$

EJEMPLO 2

Calcular las derivadas de las funciones:

a) $y = x^x$

b) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x}}$

Solución

En ambos casos se aplica derivación logarítmica. En el primer caso por necesidad y en el segundo para simplificar:

a) Tomando logaritmos, $\ln y = \ln x^x = x \ln x$, y derivando:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y(\ln x + 1) = (\ln x + 1)x^x$$

b) Tomando logaritmos,

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x}} = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{3}(2\ln x - \ln(1-x)),$$

y derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(2\,\frac{1}{x} - \frac{-1}{1-x}\right) = \frac{2-x}{3x(1-x)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{2-x}{3x(1-x)}\,y = \frac{2-x}{3x(1-x)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x}}$$

1.3.4. Fórmula de Leibniz

En el cálculo de derivadas del producto de dos funciones es muy útil la fórmula de Leibniz, que es similar a la de Newton para potencias de sumas, pero con derivadas:

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y^{n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u^{k)}\, v^{n-k)}$$

EJEMPLO 3

Hallar la derivada décima de $y = x^2 e^{-x}$.

Solución

Puesto que $u = x^2$ solo tiene dos derivadas no nulas, $u' = 2x$ y $u'' = 2$, y $v = e^{-x}$ admite término general en sus derivadas, $v^{k)} = (-1)^k e^{-x}$, al aplicar la fórmula de Leibniz se obtiene:

$$y^{10)} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} u^{k)} v^{10-k)} =$$

$$= \binom{10}{0} u^{0)} v^{10)} + \binom{10}{1} u' v^{9)} + \binom{10}{2} u'' v^{8)} + 0 =$$

$$= 1 \cdot x^2 \cdot e^{-x} + 10 \cdot 2x \cdot (-e^{-x}) + 45 \cdot 2 \cdot e^{-x} =$$

$$= (x^2 - 20x + 90)e^{-x}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz. Nació en 1646 en Leipzig, siendo considerado el más grande matemático alemán del siglo XVII. Ingresó en la Universidad de Leipzig a los 15 años y terminó su tesis doctoral a los 20, abandonando después la universidad para dedicarse al estudio y reforma de textos legales. En 1672 fue enviado a París como diplomático, y allí se puso al día de las matemáticas, descubriendo posteriormente los principios fundamentales del cálculo, que fueron publicados en sus libros: «Cálculo de diferencial» en 1684 y «Cálculo integral» en 1686. Se disputa con Newton el descubrimiento del cálculo, considerando en la actualidad que fue obra simultánea e independiente de ambos. Volvió a Alemania como un gigante de las matemáticas y murió en 1716 en Hannover.

2. APLICACIONES DE LA DERIVADA. LA DIFERENCIAL

2.1. APLICACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

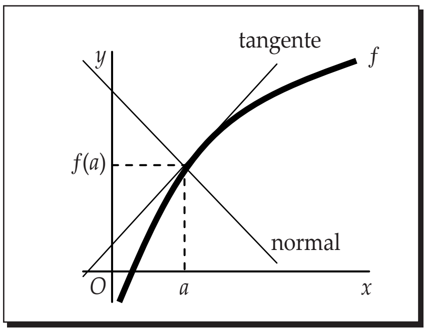
Puesto que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica, y la recta normal a una curva es la perpendicular a la tangente, se tiene que:

- **Recta tangente** a f en a:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

- **Recta normal** a f en a (si $f'(a) \neq 0$):

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}\,(x - a)$$



EJEMPLO 4

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x+2}$ en $x = -3$.

Solución

Puesto que $y' = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$, entonces $y(-3) = -1$ e $y'(-3) = -1$.

Las rectas pedidas son:

$$\begin{cases} \text{Recta tangente:} & y-(-1) = -(x+3) & \Rightarrow & y = -x-4 \\ \text{Recta normal:} & y-(-1) = \dfrac{-1}{-1}(x+3) & \Rightarrow & y = x+2 \end{cases}$$

EJEMPLO 5

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 + xy - x^2 = 1$ en su punto de abscisa $x = 1$ y ordenada negativa.

Solución

Al sustituir $x = 1$ en la ecuación de la curva se obtienen dos puntos de corte:

$$y^2 + y - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

El punto de corte con abscisa $x = 1$ y ordenada negativa es $(1, -2)$, donde la derivada implícita es:

$$2yy' + y + xy' - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x-y}{x+2y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'(1,-2) = \frac{4}{-3} = \frac{-4}{3}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y + 2 = \dfrac{-4}{3}(x-1)$, es decir, $4x + 3y + 2 = 0$.

2.2. APLICACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA

En física, si $x(t)$ representa el espacio recorrido por un móvil en el instante t, su derivada es la velocidad instantánea del móvil en dicho instante:

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v(t)$$

Y la derivada de la velocidad es la aceleración: $a(t) = v'(t) = x''(t)$. En general, la derivada de $y = f(x)$ es la **velocidad** con que varía y respecto de x.

EJEMPLO 6

Un globo esférico se expande creciendo su radio a razón de 2 cm/min. ¿Con qué rapidez crece el volumen del globo cuando su radio es de 5 cm?

Solución

El volumen del globo en función del radio es:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \ r \geq 0$$

Ahora bien, si el radio es función del tiempo, el volumen también lo es:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

La velocidad con que crece el volumen del globo se halla a partir de su derivada, que se calcula por la regla de la cadena:

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi 3r^2(t)\, r'(t) = 4\pi r^2(t)\, r'(t)$$

Puesto que $r'(t) = 2$, para todo t, la velocidad con que crece el volumen del globo en el instante t_0 en el radio $r(t_0) = 5$ es:

$$V'(t_0) = 4\pi r^2(t_0)\, r'(t_0) = 4\pi \cdot 5^2 \cdot 2 = 200\pi \text{ cm/min}$$

2.3. APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN. LA DIFERENCIAL

2.3.1. Aproximación de una función

Si f es derivable en a, entonces:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(a) \simeq \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ cuando } h \simeq 0$$

de donde se deduce que $f(a+h) - f(a) \simeq f'(a)\, h$, cuando $h \simeq 0$.

En física, se suele escribir esta fórmula en términos de incrementos como

$$\Delta y = f'(a)\, \Delta x,$$

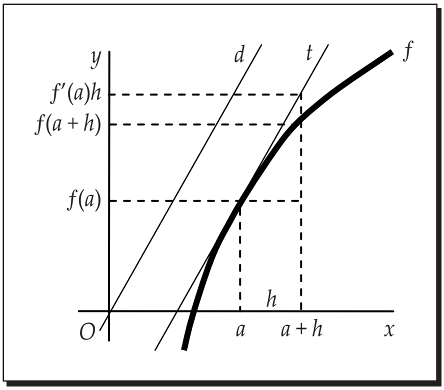
donde

$$\Delta x = h \text{ e } \Delta y = f(a+h) - f(a)$$

Llamando $x = a + h$, se obtiene la **fórmula para valores aproximados** de la función:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)\,(x-a) \text{ cuando } x \simeq a$$

que se basa, como se observa en la figura, en sustituir la función por la tangente.



2.3.2. La diferencial

Se llama **diferencial** de la función f en a a la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\to df(h) = f'(a)\, h \end{aligned}$$

Cuya representación gráfica es la recta d que pasa por el origen y es paralela a la tangente a la gráfica de f en a (véase figura anterior).

EJEMPLO 7

La función $t = f(x) = 5700 \log_2 (x/100)$ da la antigüedad en años de un fósil a partir de la proporción x (en %) de carbono 14 que contiene. Si la proporción de carbono 14 en un fósil es del 25 %, con un error máximo del 1 %, ¿cuál es su antigüedad? Estima el error que se puede cometer.

Solución

La antigüedad correspondiente al 25 % de carbono 14 es $f(25) = 5700 \log_2 (1/4) = -11.400$ años. Teniendo en cuenta que $f'(x) = 5700/(x \ln 2)$, se usa la fórmula de valores aproximados para estimar el error:

$$f(x) - f(25) \simeq f'(25)(x-25) = \frac{228}{\ln 2}(x-25) \Rightarrow |f(x) - f(25)| \simeq \frac{228}{\ln 2}|x-25| \leq \frac{228}{\ln 2} \simeq 329$$

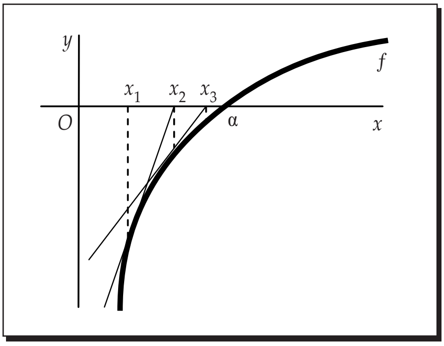
Es decir, el fósil tiene una antigüedad de 11.400 años, con un error máximo de 329 años.

2.3.3. El método de Newton-Raphson para el cálculo de raíces

Es un método numérico iterativo para el cálculo aproximado de raíces. Para aproximar la raíz α de la ecuación $f(x) = 0$, se parte de un punto próximo x_1 y se construye la sucesión de puntos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, donde x_{n+1} es el punto de corte con el eje de abscisas de la tangente a la gráfica de f en x_n, es decir:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \underset{y=0}{\Longrightarrow} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La sucesión converge muy rápidamente a la raíz siempre que, como en la figura, se cumpla que $f(x)\, f''(x) > 0$ entre α y x_1. Para su aplicación se aplica el siguiente algoritmo:



- Se elige x_1, próximo a la raíz, entre cuyos valores se verifique que $f(x)\, f''(x) > 0$.

- Desde $n = 1$ hasta que $|x_{n+1} - x_n| <$ error, hallar $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Un valor aproximado de la raíz es $\alpha \simeq x_{n+1}$.

EJEMPLO 8

Calcular una raíz aproximada de la ecuación $x^3 - 4x + 1 = 0$.

Solución

Por el teorema fundamental del álgebra, esta ecuación tiene como máximo tres raíces reales. Puesto que $f(x) = x^3 - 4x + 1$ es continua con $f(-3) = -14$, $f(0) = 1$, $f(1) = -2$ y $f(2) = 1$, se sabe, aplicando el teorema de Bolzano, que tiene una raíz en cada uno de los siguientes intervalos: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$. Para calcular alguna de ellas se aplica el método de Newton partiendo de algún valor inicial, por ejemplo, $x_1 = -3$, como se recoge en la siguiente tabla:

n	x_n	$f(x_n) = x_n^3 - 4x_n + 1$	$f'(x_n) = 3x_n^2 - 4$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	– 3	– 14	23	– 2,391304	0,608695
2	– 2,391304	– 3,109061	13,155004	– 2,154963	0,236340
3	– 2,154963	– 0,387506	9,931597	– 2,115945	0,039018
4	– 2,115945	– 0,009778	9,431670	– 2,114908	0,001037
5	– 2,114908	– 0,000004	9,418508	– 2,114908	$5 \cdot 10^{-7}$

En solo cinco pasos se ha obtenido la raíz $\alpha \simeq -2,114908$, con un error menor que una millonésima. Este método es mucho más rápido que el método de Bolzano, que se ha visto en la Unidad anterior.

***Sir* Isaac Newton.** Nació en Lincolnshire, en 1643, en el seno de una humilde familia a la que perdió muy pronto. Newton es considerado como uno de los más grandes científicos de la historia. En 1661 marchó a Cambridge a estudiar en el prestigioso Trinity College, donde fue nombrado profesor permanente en 1668. Entre 1669 y 1687 desarrolló la investigación que le llevó a publicar los *Principios matemáticos de la filosofía natural*, donde explicaba su concepción matemática del universo, el movimiento de los planetas, y la mecánica en general. Desarrolló el cálculo diferencial e integral, del que se le considera descubridor junto a Leibniz, con el nombre de fluxiones sobre 1670, aunque no lo publicó hasta el año 1687. El tremendo éxito alcanzado le hizo marcharse a Londres, donde se dedicó a la política. Fue nombrado inspector de la Casa de la Moneda, con vivienda en la Torre de Londres, y *sir* por la reina Ana en 1705. Murió en 1727 en Londres, y fue enterrado junto a reyes y héroes militares en la abadía de Westminster.

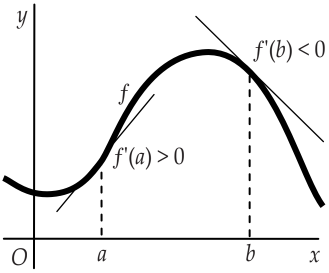
3. PROPIEDADES LOCALES. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

3.1. CRECIMIENTO Y EXTREMOS

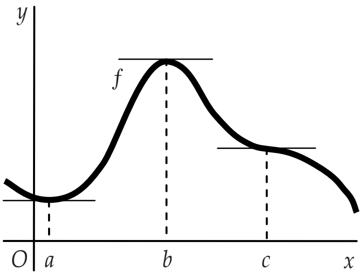
Si f es derivable en a, dependiendo de su signo, se cumple que:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{signo } (f(x)-f(a)) = \text{signo } (x-a) \\ < 0 \Rightarrow \text{signo } (f(x)-f(a)) \neq \text{signo } (x-a) \end{cases} \text{en un entorno de } a$$

Si la derivada es positiva, la función es creciente, y si es negativa, decreciente. La función cuya gráfica aparece en la figura tiene pendiente positiva y es creciente en $x = a$, y tiene pendiente negativa y es decreciente en $x = b$.



En los puntos con pendiente horizontal, es decir, con derivada nula, la función puede ser creciente, decreciente o alcanzar un extremo (máximo o mínimo) relativo. Así, por ejemplo, la función que aparece en esta figura alcanza un mínimo relativo en $x = a$, un máximo relativo en $x = b$ y es decreciente en $x = c$.



Todo lo anterior se puede resumir como sigue:

3.1.1. Criterio de la derivada primera para crecimiento y extremos relativos

Si f es una función derivable en $x = a$, entonces:

- $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en a.
- $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en a.
- Si $f'(a) = 0$, depende del signo de la derivada antes ($x < a$) y después ($x > a$) del punto:
  - $f'(x) > 0$ antes y después $\Rightarrow f$ es creciente en a.
  - $f'(x) < 0$ antes y después $\Rightarrow f$ es decreciente en a.
  - $f'(x) > 0$ antes y $f'(x) < 0$ después $\Rightarrow f$ alcanza un máximo relativo en a.
  - $f'(x) < 0$ antes y $f'(x) > 0$ después $\Rightarrow f$ alcanza un mínimo relativo en a.

Los puntos donde se anula la derivada primera se llaman **puntos críticos**.

Cuando al pasar por un punto la derivada primera pasa de negativa (antes) a positiva (después) es porque la derivada primera crece y, por tanto, su derivada, que es la derivada segunda, será positiva. Análogamente, cuando la derivada pasa de positiva a negativa, la derivada segunda es negativa. Usando esto se obtiene el siguiente criterio para extremos relativos.

3.1.2. Criterio de la derivada segunda para extremos relativos

Si f es una función dos veces derivable en $x = a$ con $f'(a) = 0$, entonces:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene mínimo relativo en a.
- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene máximo relativo en a.

3.1.3. Intervalos de crecimiento

Intervalos de crecimiento de una función son los intervalos donde la función es siempre creciente o siempre decreciente, y son aquellos en que queda dividido el dominio de la función por sus puntos críticos y los puntos donde no es derivable.

3.1.4. Extremos absolutos

Para hallar los extremos absolutos de una función hay que comparar los extremos relativos con los valores de la función en los puntos donde no es derivable y en los extremos del dominio (o su límite cuando no está definida en los extremos del dominio).

EJEMPLO 9

Estudiar el crecimiento y los extremos relativos y absolutos de la función $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

Solución

El dominio es $D = \mathbb{R}$. A partir de la derivada primera se estudia su signo y se calculan los puntos críticos:

$$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) \qquad y' = 0 \iff x = 0, -2$$

Los puntos críticos, $x = 0$ y $x = -2$, dividen el dominio en tres intervalos con el siguiente signo:

$$\begin{array}{ccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \hline & -2 & & 0 & \end{array}$$

Por tanto, la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$, y decreciente en $(-2, 0)$. En $x = -2$, la derivada pasa de positiva a negativa, luego tiene un máximo relativo que vale $f(-2) = 3$. En $x = 0$, la derivada pasa de negativa a positiva, luego tiene un mínimo relativo que vale $f(0) = -1$. Para hallar los extremos absolutos se comparan los relativos con los límites en los extremos del dominio, que son:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Luego la función no está acotada y, por tanto, no alcanza extremos absolutos.

EJEMPLO 10

La cantidad de droga en sangre a las t horas de su ingestión viene dada por la función:

$$d(t) = \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} \text{ mgr/cm}^3$$

¿Cuándo crece y cuándo decrece la droga en sangre? ¿Cuáles son sus valores extremos?

.../...

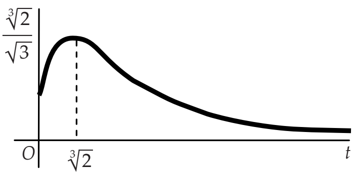
.../...

Solución

Aunque el dominio de la función es toda la recta real, en el contexto del problema es $D =$ $= [0, +\infty)$. A partir de la derivada primera se estudia su signo y se calculan los puntos críticos:

$$d'(t) = \frac{\sqrt{t^3+1} - t\,\dfrac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}}}{t^3+1} = \frac{2(t^3+1) - 3t^3}{2(t^3+1)\sqrt{t^3+1}} = \frac{2-t^3}{2(t^3+1)^{3/2}} \begin{cases} > 0, \text{ si } 0 < t < \sqrt[3]{2} \\ = 0, \text{ si } t = \sqrt[3]{2} \\ < 0, \text{ si } t > \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

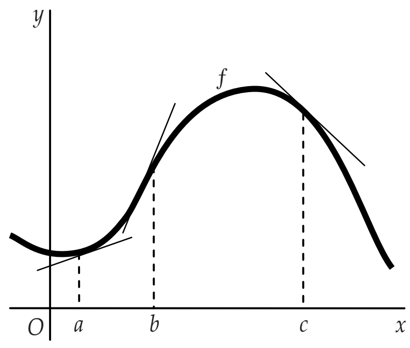
Es decir, la función es creciente en $(0, \sqrt[3]{2})$ y decreciente en $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$, alcanzando un máximo relativo en $t = \sqrt[3]{2}$, que vale $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}/\sqrt{3} \simeq 0{,}727$. Puesto que $d(0) = 0$ y $\lim_{t \to +\infty} d(t) = 0$, la función alcanza el mínimo absoluto en $t = 0$ y el máximo absoluto en $t = \sqrt[3]{2}$.



Por tanto, la droga en sangre crece hasta las $t = \sqrt[3]{2} \simeq 1{,}26$ horas, momento en que alcanza la cantidad de 0,727 mgr/cm^3, para después decrecer continuamente hacia cero, valor que nunca alcanza.

3.2. CONCAVIDAD

3.2.1. Concavidad y puntos de inflexión



Sea f una función derivable en $x = a$. Se dice que:

- f es **convexa** en a, si en un entorno del punto su gráfica está por encima de la tangente en a.
- f es **cóncava** en a, si en un entorno del punto su gráfica está por debajo de la tangente en a.
- f tiene un **punto de inflexión** en a, si en un entorno del punto su gráfica está por encima de la tangente en a a un lado del punto y por debajo al otro.

En los puntos de inflexión cambia la concavidad, siendo la función cóncava antes y convexa después, o viceversa.

La gráfica de la figura es convexa en $x = a$, cóncava en $x = c$, y tiene un punto de inflexión en $x = b$.

3.2.2. Criterio de la derivada segunda para concavidad y puntos de inflexión

Si f es una función dos veces derivable en $x = a$, entonces:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en a.
- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ es convexa en a.
- Si $f''(a) = 0$, depende del signo de f'' antes $(x < a)$ y después $(x > a)$ del punto:
  - $f''(x) > 0$ antes y después $\Rightarrow$ es cóncava en a.
  - $f''(x) < 0$ antes y después $\Rightarrow$ es convexa en a.
  - $f''(x)$ cambia de signo al pasar por $a \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en a.

En donde hemos usado el convenio en el que la curva se mira desde arriba.

Si al pasar por un punto la derivada segunda cambia de signo es porque crece o decrece, asegurándose este crecimiento o decrecimiento si su derivada, que es la derivada tercera, es distinta de cero.

3.2.3. Criterio de la derivada tercera para puntos de inflexión

Si f es una función tres veces derivable en $x = a$ con $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

3.2.4. Intervalos de concavidad

Intervalos de concavidad de una función son los intervalos donde la función es siempre cóncava o siempre convexa, y son aquellos en que queda dividido el dominio de la función por los puntos donde su derivada segunda se anula o no existe.

Sumario

EJEMPLO 11

Estudiar la concavidad y los puntos de inflexión de la función $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

Solución

El dominio es $D = \mathbb{R}$. A partir de la derivada segunda se estudia su signo:

$$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) \qquad y'' = 6x + 6 = 6(x+1) \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Es fácil ver que $y'' < 0$ cuando $x < -1$, e $y'' > 0$ cuando $x > -1$. Por tanto, la función es cóncava en $(-\infty, -1)$, convexa en $(-1, +\infty)$, y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

3.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para obtener una buena representación gráfica de una función $y = f(x)$ se deben estudiar todos o algunos de los siguientes puntos:

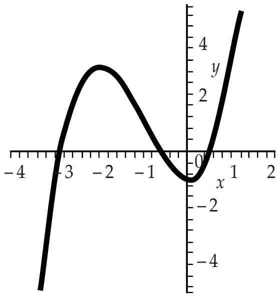
- Dominio, periodicidad y simetrías. Puntos de corte con los ejes.
- Asíntotas.
- Crecimiento y extremos relativos.
- Concavidad y puntos de inflexión.

EJEMPLO 12

Representa gráficamente la función $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

Solución

El dominio es $D = \mathbb{R}$, corta al eje de ordenadas en el punto $(0, -1)$ y no tiene asíntotas (es un polinomio). Teniendo en cuenta los datos obtenidos en los ejemplos 9 y 11, sobre crecimiento, concavidad y extremos, se obtiene la representación gráfica de la figura.



EJEMPLO 13

Representa gráficamente la función $y = x^2\, e^{1/x}$.

Solución

El dominio es $D = \mathbb{R} - \{0\}$. Puesto que la exponencial es un infinito de orden superior:

$$\lim_{x\to 0^-} x^2\, e^{1/x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^2\, e^{1/x} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = +\infty$$

y entonces, $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha. No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\, e^{1/x} = (\infty \cdot 1) = \infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\, e^{1/x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x e^{1/x} = (\infty \cdot 1) = \infty$$

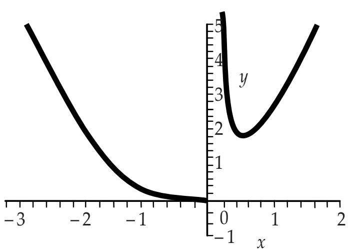
Se halla la derivada para estudiar el crecimiento y los extremos relativos:

$$y' = 2xe^{1/x} + x^2\, \frac{-1}{x^2}\, e^{1/x} = (2x-1)\, e^{1/x} \begin{cases} < 0 \text{ si } x < 1/2 \\ = 0 \text{ si } x = 1/2 \\ > 0 \text{ si } x > 1/2 \end{cases}$$

Luego es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0,1/2)$, creciente en $(1/2, +\infty)$, y tiene un mínimo relativo en $x = 1/2$, con $f(1/2) = e^2/4$. La derivada segunda proporciona la concavidad:

$$y'' = 2e^{1/x} + (2x-1)\, \frac{-1}{x^2}\, e^{1/x} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}\, e^{1/x}$$

Puesto que $y'' > 0$ para todo x, la función es siempre convexa. Con los datos estudiados se obtiene la representación gráfica de la figura.



4. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

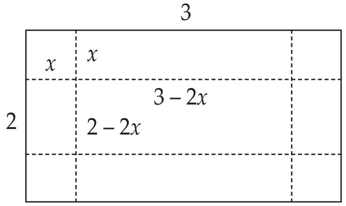
Una aplicación muy importante del cálculo de derivadas son los problemas de optimización, es decir, problemas relativos a hallar un extremo absoluto (máximo o mínimo) de una función.

En estos problemas es muy útil el siguiente criterio de fácil justificación: «Cuando una función derivable en un intervalo solo tiene un extremo relativo, dicho extremo es absoluto».

EJEMPLO 14

Con una plancha de cartón rectangular de 3 m de larga y 2 m de ancha se desea construir una caja sin tapa de volumen máximo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja?

Solución



Si se corta un cuadrado de lado x en cada una de las cuatro esquinas de la plancha, se obtiene una caja cuyo volumen es:

$$V(x) = x(3 - 2x)\,(2 - 2x) = 2x(3 - 2x)\,(1 - x)$$

con $0 \leq x \leq 1$. Se trata de hallar el máximo absoluto de la función $V(x)$ en el intervalo [0, 1]. Para ello se halla la derivada y los puntos críticos:

$$V(x) = 2(2x^3 - 5x^2 + 3x) \;\Rightarrow\; V'(x) = 2(6x^2 - 10x + 3) \qquad V'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{6}$$

El único punto crítico en el intervalo [0, 1] es $x = (5 - \sqrt{7})/6$, que es un máximo relativo al ser la derivada positiva antes del punto y negativa después. Puesto que es el único punto crítico en el intervalo, es también máximo absoluto. Por tanto, las dimensiones de la caja de volumen máximo son:

$$\text{Base: } \left\{ \begin{array}{ll} \text{Largo:} & 3 - 2\,\dfrac{5 - \sqrt{7}}{6} = \dfrac{4 + \sqrt{7}}{3} \simeq 2{,}2 \text{ m} \\[2ex] \text{Ancho:} & 2 - 2\,\dfrac{5 - \sqrt{7}}{6} = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3} \simeq 1{,}2 \text{ m} \end{array} \right. \qquad \text{Alto: } \dfrac{5 - \sqrt{7}}{6} \simeq 0{,}4 \text{ m}$$

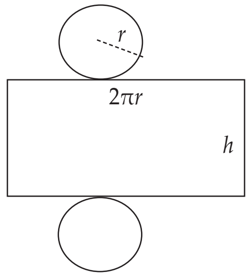
EJEMPLO 15

Se desea construir un recipiente cerrado en forma de cilindro con capacidad para un litro. Calcula las dimensiones del que tiene área total mínima.

.../...

.../...

Solución



El área total de un cilindro con base de radio r y altura h es $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Teniendo en cuenta que su volumen es 1, se obtiene el área en función de r:

$$\begin{cases} A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \\ V = \pi r^2 h = 1 \end{cases} \xRightarrow[h = 1/\pi r^2]{} A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2, \; r > 0$$

Se trata de hallar el máximo absoluto de la función $A(r)$ en el intervalo $[0, +\infty)$. Se halla la derivada y los puntos críticos:

$$A'(r) = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 2 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Puesto que $A''(r) = 4/r^3 + 4\pi$, $A''(1/\sqrt[3]{2\pi}) = 12\pi > 0$ y la función alcanza un mínimo relativo en $r = 1/\sqrt[3]{2\pi}$, que es también mínimo absoluto al ser el único extremo relativo en el intervalo considerado. Por tanto, las dimensiones del cilindro de volumen 1 y área total mínima son:

$$\text{Radio de la base: } r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \simeq 0{,}542 \text{ dm}$$

$$\text{Altura: } h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \simeq 1{,}084 \text{ dm}$$

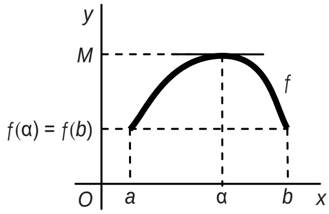
5. TEOREMAS DE VALOR MEDIO. REGLA DE L'HÔPITAL. POLINOMIOS DE TAYLOR

5.1. TEOREMAS DE VALOR MEDIO

5.1.1. Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Demostración



Puesto que f es continua en $[a, b]$, aplicando el teorema de Weierstrass (epígrafe 4.2.5 de la Unidad didáctica 1), alcanza el máximo absoluto M y el mínimo absoluto m en dicho intervalo.

Si $M = m$, entonces f es constante y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Si $M \neq m$, alguno de ellos lo alcanza en el interior del intervalo. Sea, por ejemplo, $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = M$. Puesto que este máximo absoluto lo alcanza en el interior, es también relativo y entonces $f'(\alpha) = 0$.

Geométricamente, el teorema de Rolle afirma que la gráfica de la función tiene al menos un punto interior con tangente horizontal (derivada nula).

5.1.2. Teorema de Cauchy

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]\, g'(\alpha) = [g(b) - g(a)]\, f'(\alpha)$.

Además, si $g(a) \neq g(b)$ y las derivadas de f y g no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a, b), se puede escribir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Demostración

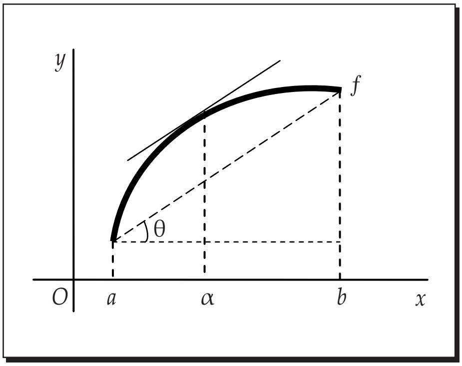
Basta aplicar el teorema de Rolle a la función $F(x) = [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$, previa comprobación de que verifica las hipótesis. La segunda parte es una mera comprobación de que se puede despejar sin llegar a una indeterminación.

Aplicando el teorema de Cauchy a las funciones f y $g(x) = x$, se obtiene el siguiente muy conocido e importante teorema de valor medio.

5.1.3. Teorema de valor medio

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(\alpha)\,(b - a)$$



Geométricamente, el teorema de valor medio afirma que hay un punto interior donde la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos extremos.

EJEMPLO 16

Un coche pasa a 100 km/h por un radar, y 1 minuto después pasa por otro radar, situado a 2,5 km, a 110 km/h. Un guardia lo para y se dirige al coche. Si el límite permitido es de 120 km/h, ¿le multará por exceso de velocidad?

Solución

Sea $x(t)$ el espacio recorrido por el coche en el instante t, que es una función continua y derivable con derivada $x'(t) = v(t)$, es decir, la velocidad en el instante t. Si $t = a$ y $t = b$ son los dos instantes en que el coche pasa por el radar, $b - a = 1$ m y $x(b) - x(a) = 2{,}5$ km. Aplicando el teorema de valor medio existirá un instante intermedio $\alpha \in (a, b)$ donde:

$$x(b) - x(a) = x'(\alpha)\,(b - a) \quad \Rightarrow \quad x'(\alpha) = \frac{x(b) - x(a)}{b - a} = \frac{2{,}5}{1} = 2{,}5 \text{ km/min}$$

Traducido a km/h, supone una velocidad $v'(\alpha) = x'(\alpha) = 2{,}5 \cdot 60 = 150$ km/h. Es decir, el coche ha superado en algún punto intermedio la velocidad permitida y debería ser multado por el guardia.

5.1.4. Propiedades

Dos consecuencias inmediatas de aplicar el teorema de valor medio son las siguientes:

- Si f es derivable en el intervalo I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante en I.
- Si f y g son derivables en el intervalo I y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, entonces $f - g$ es constante en I.

5.2. REGLA DE L'HÔPITAL

Aplicando el teorema de Cauchy, se puede demostrar (véase bibliografía) el siguiente teorema.

Guillaume de L'Hôpital. Nació en 1661 en París. Comenzó la carrera militar, pero su pobre visión le obligó a cambiarla por las matemáticas. Independientemente de otros matemáticos, resolvió el problema de la braquistócrona, pero su logro más conocido es la regla de L'Hôpital. En 1694, acordó pagar a Johann Bernouilli 300 francos por transmitir sus conocimientos, que dieron lugar al primer libro de texto de cálculo, publicado por L'Hôpital en 1696. Nunca asumió como propios los descubrimientos que aparecían en el libro. Tras su muerte, Bernouilli reveló la existencia del trato, asegurando que la mayoría de los descubrimientos del libro eran suyos, incluida la famosa regla. Murió en París en 1704.

5.2.1. Teorema

Sean f y g funciones derivables en un entorno reducido de a (puede ser $a \in \mathbb{R}$ o $a = \pm\infty$) con $g'(x) \neq 0$ cerca de a. Si los límites de f y de g en a son simultáneamente 0 o ∞, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \textbf{(regla de L'Hôpital)}$$

siempre que este último límite exista.

5.2.2. Cálculo de límites

El anterior teorema resulta muy útil en el cálculo de límites cuando se presentan una de las dos indeterminaciones asociadas al cociente:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista, o se pueda calcular aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital. También se resuelven otras indeterminaciones siempre que se transformen previamente en cocientes.

EJEMPLO 17

Usar la regla de L'Hôpital para hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln \dfrac{x-1}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x}$

Solución

En cada caso, después de verificar la indeterminación, se aplica la regla de L'Hôpital las veces necesarias.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x^3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{1-(1+\tan^2 x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\tan^2 x}{3x^2} =$

$= \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{-2\tan x\,(1+\tan^2 x)}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\tan x}{3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(1+\tan^2 x)}{3} = \dfrac{-1}{3}$

d) $\lim_{x\to\infty} x \ln \dfrac{x-1}{x+1} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{-1}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2-1} = -2$

e) $\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{-1}{x^2}\,e^{1/x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$

5.3. POLINOMIOS DE TAYLOR

5.3.1. Aproximación de funciones por polinomios

Los polinomios son las funciones más sencillas y apropiadas para el cálculo numérico, por lo que es interesante desarrollar métodos que permitan aproximar funciones arbitrarias por polinomios. Con el objetivo inicial de aproximar una función $f(x)$ por un polinomio $P(x)$ alrededor de un punto $x = a$, parece lógico pedir que en el punto coincidan sus valores y los de sus primeras derivadas hasta el mayor orden posible. Se trata, por tanto, de encontrar el polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

que tenga el mayor número posible de derivadas iguales a las de f en a. Imponiendo estas condiciones, se obtienen los coeficientes del polinomio:

$$\begin{array}{lcl}
P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n & \Rightarrow & P(a) = a_0 = f(a) \\
P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} & \Rightarrow & P'(a) = a_1 = f'(a) \\
P''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \dots + n(n-1)\, a_n(x-a)^{n-2} & \Rightarrow & P''(a) = 2!\, a_2 = f''(a) \\
P'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)\, a_n(x-a)^{n-3} & \Rightarrow & P'''(a) = 3!\, a_3 = f'''(a) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
P^{n)}(x) = n!\, a_n & \Rightarrow & P^{n)}(a) = n!\, a_n = f^{n)}(a)
\end{array}$$

Es decir:

$$a_0 = f(a) \qquad a_1 = f'(a) \qquad a_2 = \frac{f''(a)}{2!} \qquad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \qquad \dots\dots \qquad a_n = \frac{f^{n)}(a)}{n!}$$

Sustituyendo estos coeficientes en $P(x)$ se obtiene el polinomio de grado n que más se le parece en un entorno del punto.

5.3.2. Polinomio de Taylor

Si f es una función n veces derivable en $x = a$, se llama **polinomio de Taylor** de grado n en $x = a$ al polinomio:

$$P_n^a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Obviamente, el polinomio de Taylor de grado 1 es la recta tangente a la gráfica de la función en el punto.

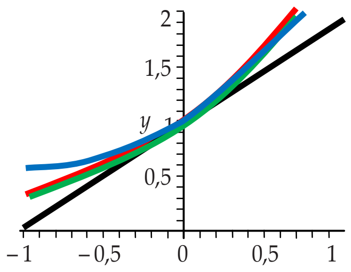
EJEMPLO 18

En la figura aparece (de rojo) la gráfica de la función $f(x) = e^x$ y sus polinomios de Taylor en $x = 0$ de grados 1 (negro), 2 (azul) y 3 (verde):

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$



Se puede observar que la aproximación es mayor cuanto mayor es el grado del polinomio, de tal manera que las gráficas de la función (roja) y del polinomio de grado 3 (verde) prácticamente se confunden alrededor del punto.

Obviamente, la función no coincide con el polinomio de Taylor, siendo su diferencia $f(x) - P_n^a(x) = T_n^a(x)$, conocida con el nombre de **término complementario**. Existen varias formas de expresar este término, siendo la más conocida debida a **Lagrange** y que lleva su nombre:

$$T_n^a(x) = \frac{f^{n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ con } \alpha \text{ entre } a \text{ y } x$$

5.3.3. Fórmula de Taylor

Si f es una función $n + 1$ veces derivable en $x = a$, se llama **fórmula de Taylor** de grado n en $x = a$ a su expresión como suma del polinomio de Taylor con el resto de Lagrange:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\textbf{Polinomio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\textbf{Resto de Lagrange}}$$

donde α está entre a y x.

EJEMPLO 19

Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/4$ y usarlo para hallar un valor aproximado de $\tan \pi/3$, acotando el error cometido.

Solución

Para hallar el polinomio de Taylor de orden 2 se necesitan las dos primeras derivadas en el punto:

$$f(x) = \tan x \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \qquad \Rightarrow P_2(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$f''(x) = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x) \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

Simplificando, el polinomio de Taylor es:

$$P_2(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

Usando este polinomio, un valor aproximado de $\tan \pi/3$ es:

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{72} \simeq 1{,}661$$

El error cometido en la estimación reside en la diferencia entre la función y el polinomio, es decir, en el término complementario cuya expresión, dependiente de la tercera derivada, es:

$$f'''(x) = 2\,(1 + \tan^2 x) + 2\tan x\; 2\tan x\,(1 + \tan^2 x) = 2\,(1 + 2\tan^2 x)\,(1 + \tan^2 x)$$

$$T_2(x) = \frac{f'''(\alpha)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad T_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{f'''(\alpha)}{3!}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)^3 \text{ con } \alpha \text{ entre } \frac{\pi}{4} \text{ y } \frac{\pi}{3}$$

Entonces, una cota del error cometido es:

$$|\tan\alpha| \le \left|\tan\frac{\pi}{3}\right| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |f'''(\alpha)| \le \left|f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = 56 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{error} = \left|T_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \le \frac{56}{6}\left(\frac{\pi}{12}\right)^3 \simeq 0{,}167$$

Cuando $a = 0$, el polinomio y fórmula de Taylor se llaman polinomio y fórmula de McLaurin.

5.3.4. Polinomio de McLaurin

Si f es una función n veces derivable en $x = 0$, se llama **polinomio de McLaurin** de grado n al polinomio:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}\,x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(0)}{k!}\,x^k$$

5.3.5. Fórmula de McLaurin

Si f es una función $n + 1$ veces derivable en $x = 0$, se llama **fórmula de McLaurin** de grado n a su expresión como suma del polinomio de McLaurin con el resto de Lagrange:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}\,x^n}_{\textbf{Polinomio de McLaurin}} + \underbrace{\frac{f^{n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}\,x^{n+1}}_{\textbf{Resto de Lagrange}}$$

donde α está entre 0 y x.

EJEMPLO 20

Hallar el polinomio de McLaurin de orden 3 de $f(x) = e^x$ y usarlo para hallar un valor aproximado del número e, acotando el error cometido.

Solución

Para hallar el polinomio de McLaurin de orden 3 se necesitan las tres primeras derivadas, pero todas coinciden con la función, luego:

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

$$P_3(x) = 1 + 1x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{3!}\,x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Usando este polinomio, un valor aproximado del número e es:

$$e = f(1) \simeq P_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \simeq 2{,}666$$

.../...

.../...

El error cometido en la estimación reside en la diferencia entre la función y el polinomio, es decir, en el término complementario cuya expresión, dependiente de la cuarta derivada, es:

$$f^{4)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad T_3(x) = \frac{f^{4)}(\alpha)}{4!}\, x^4 = \frac{e^\alpha}{4!}\, x^4 \quad \Rightarrow \quad T_3(1) = \frac{e^\alpha}{4!} \text{ con } \alpha \text{ entre 0 y 1}$$

Entonces, una cota del error cometido es:

$$\text{error} = |T_3(1)| \le \frac{e}{4!} \le \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Derivada de una función en un punto.
- Función derivada.
- Interpretaciones geométrica y física de la derivada.
- Aproximación de funciones por la tangente. La diferencial.
- Relación entre derivada y crecimiento y extremos.
- Regla de L'Hôpital.
- Polinomio de Taylor.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$

b) $y = \operatorname{sen} x^2$

c) $y = \ln(\ln x)$

d) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}}$

e) $y = \dfrac{x^2}{2x - 1}$

Enunciado 2

Hallar las dos primeras derivadas de y respecto de x en la función implícita $x^2 - y^2 = 2$.

Enunciado 3

Hallar la derivada de $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Enunciado 4

Hallar, usando la fórmula de Leibniz, las dos primeras derivadas de $y = \dfrac{x^4}{1-x}$.

Enunciado 5

Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $x^2 + 2xy = y^3$ en el punto $(1, -1)$.

Enunciado 6

Una copa en forma de cono invertido, de 12 cm de diámetro superior y 9 cm de altura, está llena de agua. La copa pierde agua por el vértice inferior a razón de 2 cm^3/min. ¿A qué velocidad está bajando el nivel del agua en el instante en que tiene 4 cm de profundidad?

Enunciado 7

Los beneficios acumulados por una empresa a los t años de su fundación vienen dados por

$$B(t) = \frac{2t^2}{t+4} - 4, \text{ en miles de euros}$$

Usar la derivada para hallar los beneficios aproximados de la empresa durante el año duodécimo después de su fundación.

Enunciado 8

En el ejemplo 8 se calculó, por el método de Newton, una de las tres raíces de la ecuación $x^3 - 4x + 1 = 0$. Calcular las otras dos.

Enunciado 9

Estudiar el crecimiento y los extremos:

a) $y = \ln \sqrt{2x^3 + 3x^2}$

b) $y = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $y = xe^{-x^2}$

Enunciado 10

Estudiar la concavidad y los puntos de inflexión de las funciones del ejercicio anterior.

Enunciado 11

Representar gráficamente las funciones del ejercicio 9.

Enunciado 12

Un faro está situado 3 km mar adentro, directamente enfrente de un punto *A* de la costa que es recta. En la costa, a 5 km del punto *A*, hay un almacén. El farero puede remar en su bote a 4 km/h y puede caminar a 6 km/h. ¿Hacia qué punto de la costa debe el farero dirigir su bote para llegar al almacén lo antes posible?

Enunciado 13

Hallar la longitud de la escalera más larga que puede transportarse horizontalmente por un pasillo en forma de ángulo recto si la anchura del pasillo a un lado del ángulo es 1 m y al otro 2 m.

Enunciado 14

Usar la regla de L'Hôpital para hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln (e^x - 1)}{\ln x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\tan \dfrac{a}{x} - \tan \dfrac{b}{x} \right)$

Enunciado 15

Hallar $\sqrt{e}$ a partir del polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$ y acotar el error cometido.

Enunciado 16

Hallar $\sqrt[3]{30}$ a partir del polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en un entorno del punto $x = 27$ y acotar el error cometido.

Enunciado 17

Hallar los polinomios de McLaurin de grado 5 de las funciones $y = e^x$, $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$.

Solución 1

a) $y' = 2 \text{ sen } x \cos x$

b) $y' = 2x \cos x^2$

c) $y' = \dfrac{1}{x \ln x}$

d) $y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}$

e) $y' = \dfrac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

Solución 2

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$y'' = \frac{y^2 - x^2}{y^3}$$

Solución 3

$$y' = \left(\cos x \ln x + \frac{\text{sen } x}{x} \right) x^{\text{sen } x}$$

Solución 4

$$y' = 4x^3 \frac{1}{1-x} + x^4 \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = 12x^2 \frac{1}{1-x} + 2 \cdot 4x^3 \frac{1}{(1-x)^2} + x^4 \frac{2}{(1-x)^3}$$

Solución 5

- Tangente: $y = -1$.
- Normal: $x = 1$.

Solución 6

$$\frac{18}{64\pi} \simeq 0{,}09 \text{ cm/min}$$

Solución 7

1.858 euros.

Solución 8

Las tres raíces son:

$$\alpha_1 \simeq -2{,}114908, \ \ \alpha_2 \simeq 0{,}254102 \ \text{ y } \ \alpha_3 \simeq 1{,}860806$$

Solución 9

a) Creciente en $\left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 0)$.

Máximo relativo en $x = -1$.

b) Decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Mínimo relativo en $x = -\frac{1}{2}$.

c) Decreciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ y creciente en $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Mínimo relativo en $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ y máximo relativo en $x = \frac{+1}{\sqrt{2}}$.

Solución 10

a) Siempre cóncava. No tiene puntos de inflexión.

b) Cóncava en $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty\right)$.

y convexa en $\left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}\right), \left(\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}\right).$

Puntos de inflexión en $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}.$

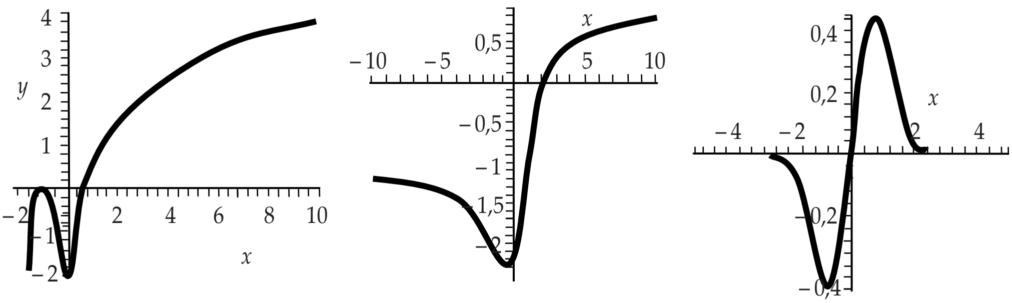
c) Cóncava en $\left(-\infty, \dfrac{-1}{2\sqrt{6}}\right) \cup \left(0, \dfrac{-1}{2\sqrt{6}}\right)$

y convexa en $\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{6}}, 0\right) \cup \left(\dfrac{-1}{2\sqrt{6}}, +\infty\right).$

Puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = \pm \dfrac{-1}{2\sqrt{6}}.$

Solución 11

a) b) c)



Solución 12

Hacia el punto que dista $\dfrac{12}{\sqrt{20}} \simeq 2{,}68$ de A en dirección al almacén.

Solución 13

$$(1+\sqrt[3]{4})^{3/2} \simeq 4{,}16 \text{ m}$$

Solución 14

a) 2

b) 1

c) 1/2

d) $a - b$

Solución 15

$$\sqrt{e} \simeq 1{,}807 \qquad \text{Error} \leq 5/8$$

Solución 16

$$\sqrt[3]{30} \simeq \frac{755}{243} \simeq 3{,}1070 \qquad \text{Error} \leq \frac{5}{3^9} \simeq 0{,}0003$$

Solución 17

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\operatorname{sen} x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, A. et ál. (1994). *Cálculo I*. Madrid: Clagsa.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo I*. Madrid: McGraw-Hill.

Mata, A. y Reyes, M. *Apuntes de cálculo*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo.