

Actividad de Aprendizaje

Asignatura:	Álgebra.
Profesor responsable de la Asignatura:	Dr. Juan José Moreno García
Tipo de actividad:	Actividad de Aprendizaje (AA1)
Título de la actividad:	Práctica con Octave

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

La realización de esta actividad de evaluación continua va a permitir comprobar los avances realizados por el estudiante mediante la aplicación práctica de los conceptos teóricos desarrollados en las unidades correspondientes. Además servirá para que el estudiante aprecie las aplicaciones prácticas de la disciplina. El objetivo que se pretende conseguir es que el estudiante sea capaz de, a partir de un enunciado, encontrar las herramientas de las Matemáticas y de la informática necesarias para resolver el problema y que sea capaz de aplicarlas con éxito.

La evaluación de este trabajo tendrán en cuenta los siguientes puntos:

- Correcta aplicación de las expresiones matemáticas asociadas a cada uno de los enunciados propuestos y relación de conceptos vistos en estas unidades.
- Procedimiento utilizado para llevar a cabo dicha aplicación.
- Conclusión alcanzada con el análisis de los resultados obtenidos en cada caso.

No hay que olvidar argumentar los pasos que se van dando. **No basta con dar simplemente la solución.**

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

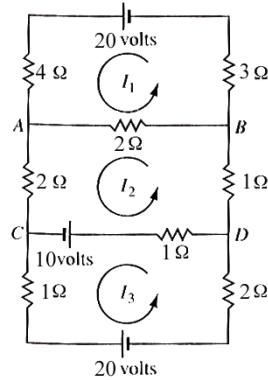
Prerrequisitos: haber hecho o intentado la AA1. Conocer el sistema de resolución de Gauss-Jordan, el concepto de diagonalización y la teoría sobre valores singulares.

En esta actividad se usará un programa informático para el cálculo matricial. Para ello hay que instalar Octave en el ordenador, que es una versión gratuita del comercial Matlab, o usar la del aula de laboratorio. Quien lo desee puede usar Matlab. Gran parte del tiempo necesario para la realización de esta práctica se empleará en la instalación y familiarización con este programa. En el aula hay documentos que indican cómo instalar este programa, así como varios manuales sobre su utilización. De todos modos al final de este documento viene un resumen con lo más esencial.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 1:

Proporcionar las corrientes I_1 , I_2 y I_3 que circulan según el esquema de figura aplicando la ley de Ohm y las reglas de Kirchhoff. Para ello guiararse por la página 83 del manual.



Notas:

El estudiante no necesita programar scripts ni programas ni nada de eso, sólo efectuar una operación tras otra paso a paso con Octave usando `rref()` según el esquema teórico conocido.

Como siempre deberá decir cómo consigue los resultados y los pasos que ha seguido. Los resultados se incluirán en un pdf creado con un procesador de texto.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 2:

Usar el método de valores singulares descrito en el apéndice para calcular la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} -149,5 & -50 & -154 \\ 539 & 180 & 545 \\ -27 & -9 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 3:

Supóngase que en una aldea perdida en las montañas viven un granjero, un sastre, un albañil, un leñador y Alejo, un destilador ilegal de alcohol que se bebe gran parte de lo que produce. Cada uno de ellos proporciona comida, ropa, vivienda, energía y aguardiente a ellos mismos y a los demás. La fracción de los bienes producidos que consume cada uno de ellos (normalizado a la unidad) viene dado por la siguiente tabla:

Habitante	comida	ropa	vivienda	energía	aguardiente
Granjero	0.26	0.15	0.23	0.15	0.14
Sastre	0.16	0.28	0.18	0.16	0.10
Albañil	0.20	0.20	0.25	0.21	0.10
Leñador	0.20	0.14	0.19	0.33	0.14
Alejo	0.18	0.23	0.15	0.15	0.52

Así, por ejemplo, Alejo consume el 18 % de toda la comida, el 23 % de la ropa, el 15 % de la vivienda, el 15 % de la energía y el 52 % de su propio aguardiente. Obsérvese que la suma de cada uno de todos esos bienes de consumo (las columnas de la tabla) es 1.

Supongamos ahora que $s = [x, y, z, u, w]$ es un vector formado con los ingresos respectivos de cada uno de ellos. En una economía cerrada como ésta, esas cantidades no sólo denotan los ingresos, sino que además denotan el precio de las cosas.

Tarea: teniendo en cuenta lo expuesto plantear un problema de autovectores a resolver con Octave en el que se obtenga el precio que han de tener los bienes allí producidos para que los cinco habitantes puedan sobrevivir. ¿Qué bienes de consumo es el tercero más caro?

Notas:

El estudiante no necesita programar scripts ni programas, sólo efectuar una operación tras otra paso a paso según el esquema teórico de cómo se calculan autovectores y autovalores.

El estudiante se valdrá de Octave para calcular lo que le piden, le basta usar de nuevo Gauss-Jordan para las matrices adecuadas. Una pista de cómo hacerlo la puede dar el funcionamiento del motor de búsqueda de Google que asigna el rango. No se calcula el autovector directamente, sino que se impone un $\lambda = 1$ y se calcula por Gauss-Jordan.

Como siempre deberá decir cómo consigue los resultados y los pasos que ha seguido. Los resultados se darán en un pdf creado con un procesador de texto.

Notas:

El estudiante no necesita programar scripts ni programas ni nada de eso, sólo efectuar una operación tras otra paso a paso con Octave usando **rref()** según el esquema teórico conocido.

Como siempre deberá decir cómo consigue los resultados y los pasos que ha seguido. Los resultados se incluirán en un pdf creado con un procesador de texto.

INSTRUCCIONES PARA LA REALIZACIÓN Y ENTREGA DE LA ACTIVIDAD

Criterios de valoración:

Se valorará el correcto planteamiento de los ejercicios.

Se valorará la correcta solución de los ejercicios.

Se valorará que la solución dada a cada una de las cuestiones planteadas esté bien argumentada.

Se tendrá en cuenta la correcta redacción, por lo que se pide un cuidadoso uso del idioma y una cuidada presentación, priorizándose una fácil lectura del documento.

Entrega y calificación:

La actividad cumplimentada se envía al profesor a través del Buzón de entrega del Aula Virtual. En ese mismo buzón aparece la fecha límite de entrega.

Se recuerda la necesidad de identificar correctamente el documento de entrega de la tarea, indicando nombre y apellidos del alumno en la primera página del documento. El nombre del fichero constará sólo del nombre del alumno, apellidos y AA2.

La entrega de la tarea se hará siempre a través de un documento **pdf**, y en ningún momento se aceptarán documentos .doc, docx, .xls o similares, pues el sistema no permite visualizar y corregir documentos de otro tipo. Muchas aplicaciones (incluso word) permiten volcar un documento en pdf. Alternativamente, si se pide una solución gráfica también se podrá usar el formato postscript. **No se admitirán documentos realizados a mano alzada y escaneados.**

La calificación obtenida, previa corrección y calificación por parte del profesor, se podrá consultar con carácter permanente en el apartado CALIFICACIONES del Aula Virtual.

Apéndice

Introduzcamos algunas generalizaciones que nos serán de utilidad a lo largo de la práctica cuando abordemos sistemas lineales mal condicionados.

Matriz mal condicionada: Una matriz A está mal condicionada si pequeños cambios en sus elementos pueden producir cambios grandes en las soluciones del sistema lineal $Ax = b$. Si pequeños cambios de los elementos de A producen únicamente cambios pequeños en las soluciones de $Ax = b$, entonces se dice que A está bien condicionada.

Es decir, un cambio pequeño en alguno de los coeficientes da lugar a cambios muy significativos en el vector solución. Es importante observar que las perturbaciones de los coeficientes de un sistema lineal no ocurren de forma “intencionada”, las fuentes más comunes de estas perturbaciones son el truncamiento y redondeo de los resultados parciales que tiene lugar de forma inevitable durante los cálculos. Recordad que los ordenadores trabajan con aritmética finita, lo que significa que la representación de prácticamente cualquier número real lleva asociado un error. Aunque bien es verdad que estos errores son muy pequeños, también lo es que éstos se van acumulando durante los cálculos produciendo cambios que no son despreciables y pueden influir en los resultados que muestra el ordenador. En consecuencia, es importante saber, si un sistema lineal está mal condicionado y disponer de métodos para abordar los problemas que de ellos se derivan. Como veremos, la descomposición en valores singulares es uno de ellos. Antes introduciremos algunos conceptos.

Rango numérico: Sea el número real $\delta > 0$ una cota para los valores singulares de una matriz $\mathcal{A}_{m \times n}$, tal que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q > \delta \geq \sigma_{q+1} \geq \cdots \geq \sigma_r > 0, \quad \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0 .$$

El número natural r coincide con el rango de la matriz \mathcal{A} . Al número natural q para el cual

$$\sigma_q > \delta$$

se le llama rango numérico de la matriz \mathcal{A} .

Matriz truncada: Sea $\mathcal{A}_{m \times n}$ una matriz $m \times n$ cuya descomposición en valores singulares está dada por

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}\Sigma\mathcal{V}^T$$

y sea el número natural q su rango numérico. La matriz truncada de \mathcal{A} se define como

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{U}\Sigma_t\mathcal{V}^T,$$

donde

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} D_{q \times q} & O_{q \times (n-q)} \\ O_{(m-q) \times q} & O_{(m-q) \times (n-q)} \end{bmatrix},$$

$$D_{q \times q} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_q \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad O_{p \times s} = \begin{bmatrix} 0_{11} & \dots & 0_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{p1} & \dots & 0_{ps} \end{bmatrix} .$$

Pseudo-Inversa truncada: Sea $\mathcal{A}_{m \times n}$ la matriz de la definición anterior cuyo rango numérico es q . La matriz pseudo-inversa truncada de \mathcal{A} se define como

$$\mathcal{A}_t^\dagger = \mathcal{V}\Sigma_t^\dagger\mathcal{U}^T,$$

donde

$$\Sigma_t^\dagger = \begin{bmatrix} D_{q \times q}^{-1} & O_{q \times (m-q)} \\ O_{(n-q) \times q} & O_{(n-q) \times (m-q)} \end{bmatrix},$$

y

$$D_{q \times q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_q} \end{bmatrix} ; \quad O_{p \times s} = \begin{bmatrix} 0_{11} & \dots & 0_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{p1} & \dots & 0_{ps} \end{bmatrix} .$$

Aplicaciones

La descomposición en valores singulares de una matriz es una herramienta útil en muchas aplicaciones, como por ejemplo: resolución de sistemas de ecuaciones mal condicionados, aproximación por mínimos cuadrados y compresión de imágenes digitales.

Resolución de sistemas de ecuaciones mal condicionados

Supongamos que deseamos resolver el sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 18 & 12 \\ 20 & 22 & 40 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 78 \\ 144 \end{bmatrix}$$

La solución exacta de este sistema de ecuaciones lineales es:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Ahora supongamos que consideramos la matriz perturbada

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 18 & 12 \\ 20 & 22 & 39 \end{bmatrix} .$$

La solución exacta del sistema lineal perturbado $\tilde{A}x = b$ es

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Verificar estas soluciones usando gauss-jordan en Octave.

Esto ocurre porque la matriz A está mal condicionada y pequeños errores en las entradas de la matriz A producen grandes errores en la solución final.

Veamos ahora cómo la descomposición en valores singulares de una matriz nos ayuda a tratar este problema. Consideremos nuevamente nuestro sistema lineal $Ax = b$ y busquemos una solución del problema $A_t x = b$. Esta solución viene dada por:

$$x = A_t^\dagger * b$$

Utilicemos el programa Octave para ver lo que ocurre.

1. Escribamos la matriz A

$\gg A = [1 \ 2 \ 1; 10 \ 18 \ 12; 20 \ 22 \ 40]$

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 18 & 12 \\ 20 & 22 & 40 \end{matrix}$$

y escribamos la matriz b

$\gg b = [8; 78; 144]$

$$x = \begin{matrix} 8 \\ 78 \\ 144 \end{matrix}$$

2. Realicemos la descomposición en valores singulares de la matriz A . Para ello escribamos la siguiente instrucción

$\gg [U, D, V] = svd(A)$

$$U = \begin{matrix} -0,0400 & -0,1203 & -0,9919 \\ -0,4091 & -0,9037 & 0,1261 \\ -0,9116 & 0,4108 & -0,0131 \end{matrix}$$

$$D = \begin{matrix} 54,5107 & 0 & 0 \\ 0 & 9,3049 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0079 \end{matrix}$$

$$V = \begin{matrix} -0,4103 & -0,1011 & 0,9063 \\ -0,5045 & -0,8028 & -0,3179 \\ -0,7597 & 0,5877 & -0,2783 \end{matrix}$$

Esto de acuerdo a la definición significa que

$$A = UDV^T$$

3. Consideremos la matriz D .

$$D = \begin{bmatrix} 54,5107 & 0 & 0 \\ 0 & 9,3049 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0079 \end{bmatrix}$$

Como podemos observar el valor singular $0,0079$ es muy pequeño. Si consideramos $\delta = 0,01$ de forma que

$$\sigma_1 > \delta \geq \sigma_2,$$

el rango de la matriz A sería $q = 2$. Ahora utilizando la definición podemos truncar la matriz A y tener que

$$A_t = \begin{bmatrix} -0,0400 & -0,1203 & -0,9919 \\ -0,4091 & -0,9037 & 0,1261 \\ -0,9116 & 0,4108 & -0,0131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 54,5107 & 0 & 0 \\ 0 & 9,3049 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,4103 & -0,5045 & -0,7597 \\ -0,1011 & -0,8028 & 0,5877 \\ 0,9063 & -0,3179 & -0,2783 \end{bmatrix}.$$

Para truncar la matriz A , basta con truncar la matriz D en su rango numérico para ello escribimos la siguiente instrucción

$\gg D(3, 3) = 0$

$$D = \begin{matrix} 54,5107 & 0 & 0 \\ 0 & 9,3049 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

escribimos

$$\gg \quad Dt = D$$

$$Dt =$$

$$\begin{matrix} 54,5107 & 0 & 0 \\ 0 & 9,3049 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Esto indica que la nueva matriz Dt esta truncada.

4. Calculemos A_t^\dagger . De acuerdo a la definición de pseudo inversa basta con invertir los valores de la diagonal de la matriz truncada, para ello escribimos la siguientes instrucciones

$$\gg \quad Dtin = Dt; Dtin(1,1) = 1/Dtin(1,1); Dtin(2,2) = 1/Dtin(2,2)$$

$$Dtin =$$

$$\begin{matrix} 0,0183 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Finalmente calculamos la matriz pseudo-inversa truncada. Escribimos la siguiente instrucción

$$\gg \quad Apit = V * Dtin * U'$$

$$Apit =$$

$$\begin{matrix} 0,0016 & 0,0129 & 0,0024 \\ 0,0107 & 0,0818 & -0,0270 \\ -0,0070 & -0,0514 & 0,0387 \end{matrix}$$

5. Para “resolver” el sistema $Ax = b$, utilizando la descomposición en valores singulares ($x = A_t^\dagger * b$), escribimos la siguiente instrucción

$$\gg \quad x = Apit * b$$

$$x =$$

$$\begin{matrix} 1,3642 \\ 2,5738 \\ 1,5023 \end{matrix}$$

Ahora de manera similar al ejemplo mostrado, “perturbemos” nuestra matriz A de manera que

$$A = \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 18 & 12 \\ 20 & 22 & 39 \end{bmatrix}.$$

Resolvamos ahora el sistema $\tilde{A}x = b$. Para ello debes seguir las instrucciones antes indicadas. Obtendrás

$$\gg \quad x = Apit * b$$

$$x =$$

$$\begin{matrix} 1,3667 \\ 2,5320 \\ 1,5631 \end{matrix}$$

Como se puede observar, la descomposición en valores singulares nos ha ayudado a reducir el mal condicionamiento de la matriz A . Lo que en realidad hemos hecho es reemplazar el sistema mal condicionado $Ax = b$ por uno “cercano”, $A_t x = b$ que está bien condicionado.