c) En lo que se refiere a las densidades condicionadas se tiene:

$$\underset{x\in(0,\,1)}{f(y/x)} = \frac{f(x,\,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{24y(1-x-y)}{4(1-x)^3} & \text{si} \quad y \in (0,\,1-x) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\underset{y\in(0,\,1)}{f(x/y)} = \frac{f(x,\,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \dfrac{24y(1-x-y)}{12(1-y)^2 y} & \text{si} \quad x \in (0,\,1-y) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

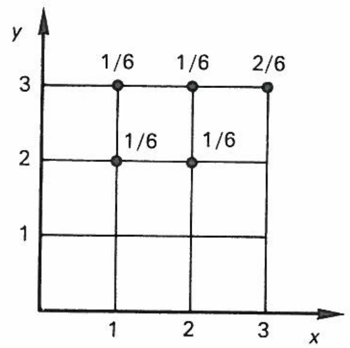
11.4. Sea la función de masa $P\{(1,2)\} = P\{(1,3)\} = P\{(2,2)\} = P\{(2,3)\} = 1/6$, $P\{(3,3)\} = 2/6$. Calcular:

a) La función de distribución bivariante asociada.

b) $P\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 4\}$.

Solución:

Conviene representar gráficamente la función de masa



a)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \text{ ó } y < 2 \\ 1/6 & \text{si} \quad 1 \leqq x < 2,\ 2 \leqq y < 3 \\ 2/6 & \text{si} \quad 1 \leqq x < 2,\ y \geqq 3 \\ 2/6 & \text{si} \quad 2 \leqq x < 3,\ 2 \leqq y < 3 \\ 4/6 & \text{si} \quad 2 \leqq x < 3,\ y \geqq 3 \\ 4/6 & \text{si} \quad x \geqq 3,\ 2 \leqq y \leqq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqq 3,\ y \geqq 3 \end{cases}$$

b) $P\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x + y = 4\} = P\{(1,3)\} + P\{(2,2)\} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.

11.5. Sea $(X,\,Y)$ variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x,y) = e^{-x-y}$ si $0 < y < 1$, $x > -y$ (cero en el resto).

a) Comprobar que $f(x,y)$ es función de densidad.

b) Determinar las distribuciones marginales.

c) Determinar las distribuciones condicionadas.

Solución:

a) Desde luego $f(x,y) \geqq 0$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, y además:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=-1}^{\infty} e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} [e^{-x-y}]_{x=-y}^{\infty}\,dy =$$

$$= \int_0^1 1\,dy = 1$$

*b*1) La densidad marginal de X viene dada por

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

y, por tanto, será

- si $x \leqq -1$, $f(x) = 0$
- si $-1 < x < 0$, $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{1} e^{-x-y}\,dy = 1 - e^{-x-1}$
- si $x \geqq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x-y}\,dy = e^{-x} - e^{-x-1}$

*b*2) La densidad marginal de Y viene dada por

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

y, por tanto, será

$$f(y) = \int_{-y}^{\infty} e^{-x-y}\,dx = 1, \quad \forall\, y \in (0,\,1)$$

y cero en el resto.

*c*1) Supuesto que $f(y) > 0$ (es decir, $0 < y < 1$), la densidad condicionada $X/Y = y$ viene dada por $f(x/y) = f(x, y)/f(y)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, luego directamente obtenemos que $f(x/y) = e^{-x-y}$, $\forall x > -y$, y cero en el resto.

*c*2) Supuesto que $f(x) > 0$ (es decir, $x > -1$), la densidad condicionada $Y/X = x$ viene dada por $f(y/x) = f(x, y)/f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pero habrá que distinguir a efectos de cálculo entre los $-1 < x < 0$ y los $x \geqq 0$:

- Si $-1 < x < 0$, entonces

$$f(y/x) = \begin{cases} e^{-x-y}/(1 - e^{-x-1}) & \text{si} \quad -x < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Si $x \geqq 0$, entonces

$$f(y/x) = \begin{cases} e^{-x-y}/(e^{-x} - e^{-x-1}) & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

11.6. Dar un ejemplo de una función, $F(x, y)$, que no sea función de distribución bivariante, aun cuando verifique las siguientes propiedades: i) F es continua por la derecha en cada variable; ii) F es monótona no decreciente en cada variable; iii) $\lim\limits_{x,y\to\infty} F(x, y) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$.

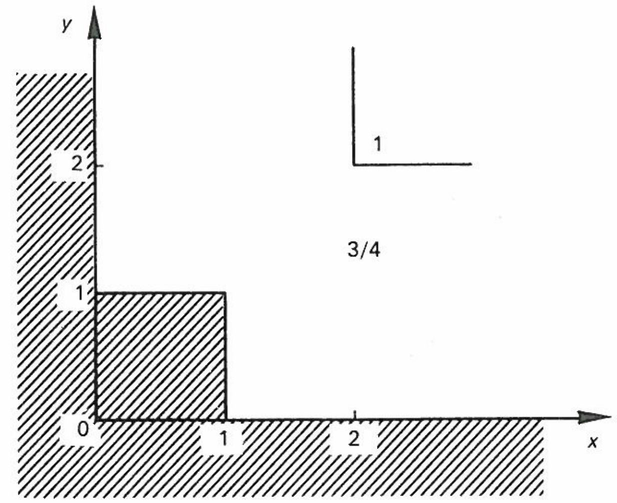
Solución:

Una función F, de $\mathbb{R}^2$ en $[0, 1]$, es función de distribución si y sólo si verifica las propiedades i), iii) y iv) $F(v_1, v_2) - F(u_1, v_2) - F(v_1, u_2) + F(u_1, u_2) \geqq 0$ para cualesquiera $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tales que $u_1 \leqq v_1$ y $u_2 \leqq v_2$.

La propiedad iv) implica la propiedad ii) sin más que tomar ($v_1 = a_1 + h$, $v_2 = a_2$, $u_1 = a_1$, $u_2 = -\infty$) y ($v_1 = a_1$, $v_2 = a_2 + h$, $u_1 = -\infty$, $u_2 = a_2$); sin embargo, el recíproco no es cierto. En efecto, sea

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqq 2, y \geqq 2 \\ 0 & \text{si} \quad (x < 1, y < 1) \text{ o } (x < 0) \text{ o } (y < 0) \\ 3/4 & \text{resto} \end{cases}$$

F tiene la siguiente representación gráfica



Claramente F verifica las propiedades i), ii) y iii); sin embargo,

$$F(2, 2) - F(2, 0) - F(0, 2) + F(0, 0) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} < 0$$

Por tanto, F no verifica la propiedad iv).

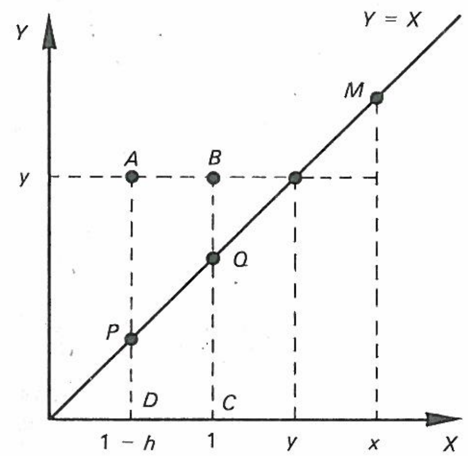
11.7. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional que concentra su masa en la semirrecta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x = y > 0\}$ según una función de distribución exponencial de parámetro uno. Calcular:

a) Las funciones de distribución marginales de Y y de X.

b) La función de distribución de Y condicionada a $X = 1$.

c) La función de distribución conjunta.

d) ¿Son X e Y independientes?



Solución:

Razonaremos sobre la gráfica:

a) Si $x < 0$,

entonces

$F_X(x) = 0.$

El segundo método utiliza la fórmula

$$V(Y) = V_X(E(Y/X = x)) + E_X(V(Y/X = x))$$

Por un lado, sea $Z = E[Y|X] = \dfrac{X+1}{2}\cdot$ En tal caso,

$$V_X(E(Y|X = x)) = V(Z)$$

$$E(Z) = E_X(E(Y|X = x)) = E(Y) = \frac{2}{3}$$

$$E(Z^2) = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{4} f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{4} 2(1-x)\,dx = \frac{11}{24}$$

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{11}{24} - \frac{4}{9} = \frac{1}{72}$$

Por otro lado, se tiene que

$$E((Y|X = x)^2) = \int_x^1 y^2 f(y|x)\,dx = \int_0^1 \frac{y^2}{1-x}\,dy = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1)$$

$$V(Y|X = x) = E((Y|X = x)^2) + (E(Y|X = x))^2 = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1) + \frac{(x+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{12}(x^2 - 2x + 1)$$

$$E_X[V(Y/X = x)] = E\left(\frac{X^2 - 2X + 1}{12}\right) = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{12} 2(1-x)\,dx = \frac{1}{24}$$

Finalmente,

$$V(Y) = \frac{1}{72} + \frac{1}{24} = \frac{1}{18}$$

11.9. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional cuya función de masa viene dada por la siguiente tabla

Y \ X	0	1	2	2	3
1	0	3/8	3/8	3/8	0
3	1/8	0	0	0	1/8

Calcular las funciones de probabilidad marginales y condicionadas: de la variable X por la $Y = 1$ y la de Y condicionada por $X = 0$.

Solución:

$$P_X(x) = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{si} \quad x = 0$$
$$= \frac{3}{8} + 0 = \frac{3}{8} \quad \text{si} \quad x = 1$$
$$= \frac{3}{8} + 0 = \frac{3}{8} \quad \text{si} \quad x = 2$$
$$= 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{si} \quad x = 3$$

$$P_Y(y) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + 0 = \frac{3}{4} \quad \text{si} \quad y = 1$$
$$= \frac{1}{8} + 0 + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad y = 3$$

$$P(x/Y = 1) = \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0}{6/8} = 0 \quad \text{si} \quad x = 0$$
$$= \frac{3/8}{6/8} = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x = 1$$
$$= \frac{3/8}{6/8} = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x = 2$$
$$= \frac{0}{6/8} = 0 \quad \text{si} \quad x = 3$$

$$P(y/X = 0) = \frac{P(Y = y, X = 0)}{P(X = 0)} = \frac{0}{1/8} = 0 \quad \text{si} \quad y = 1$$
$$= \frac{1/8}{1/8} = 1 \quad \text{si} \quad y = 3$$

11.10. Consideremos la función de densidad uniforme en el cuadrado unidad $(0, 1) \times (0, 1)$. Calcular:

a) $P\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x + y \leqq 1\}$

b) $P\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\frac{1}{3} \leqq x + y \leqq \frac{3}{2}\right\}$

c) $P\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \geqq 2y\}$