UNIDAD DIDÁCTICA

3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

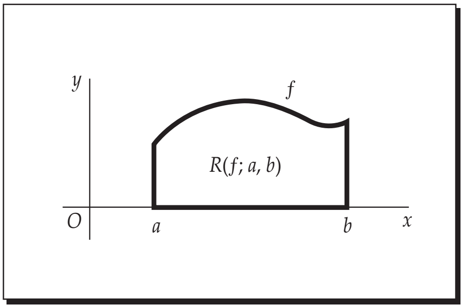
- Entender el concepto de integral de Riemann como área limitada por la gráfica de la función.
- Comprender el teorema fundamental del cálculo que relaciona la derivada con la integral.
- Calcular las primitivas de funciones sencillas.
- Hallar integrales definidas mediante la regla de Barrow.
- Entender el concepto de integral impropia y saber calcularlas usando la definición.
- Usar la integral definida para calcular áreas planas, volúmenes y áreas de revolución, y longitudes de curvas.

1. LA INTEGRAL DE RIEMANN

1.1. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

La **integral de Riemann** o **integral definida** tiene como objetivo el cálculo de áreas planas. Concretamente, si la función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y positiva, la integral de Riemann pretende calcular el área del recinto:

$$R(f; a, b) = \left\{ \begin{array}{c} (x, y) : a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}$$



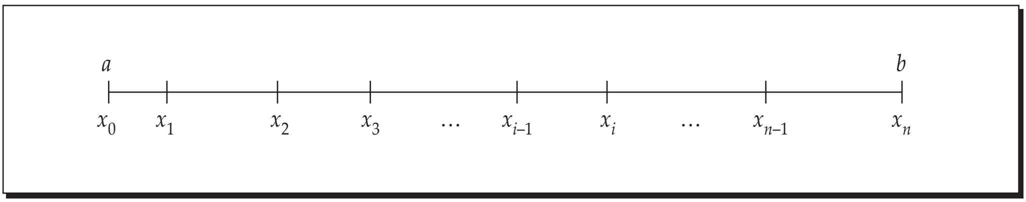
1.1.1. Particiones de un intervalo

Una **partición** del intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es cualquier colección finita y ordenada de puntos del intervalo que contenga a los extremos:

$$P = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$$

La partición divide el intervalo en subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, y se llama **diámetro de la partición** a la longitud del mayor de ellos:

$$\delta(P) = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \max_{1\leq i\leq n}\{x_i - x_{i-1}\}$$



Dadas dos particiones P y Q del mismo intervalo $[a, b]$, se dice que **Q es más fina que P** si $P \subset Q$, es decir, si Q contiene todos los puntos de P. Obviamente, si Q es más fina que P, $\delta(Q) \leq \delta(P)$.

1.1.2. Sumas de Riemann

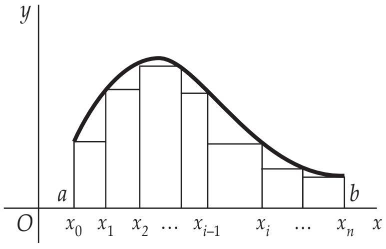
Se definen las **sumas inferior y superior de Riemann** de una función acotada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ asociadas a la partición $P = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$ como:

$$s(f, P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

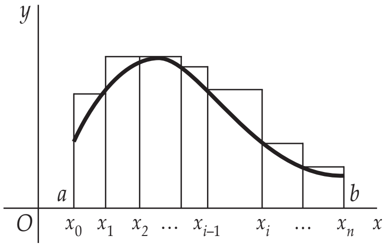
$$S(f, P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde m_i y M_i son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Si f es positiva, la **suma inferior de Riemann** es la suma de las áreas de los rectángulos que tienen por base los subintervalos y altura el ínfimo de la función en los mismos y, por tanto, es menor o igual que área limitada por la gráfica sobre el intevalo $[a, b]$.



Si f es positiva, la **suma superior de Riemann** es la suma de las áreas de los rectángulos que tienen por base los subintervalos y altura el supremo de la función en los mismos y, por tanto, es mayor o igual que área limitada por la gráfica sobre el intevalo $[a, b]$.



Es fácil comprobar que las sumas de Riemann verifican las siguientes propiedades:

- Para cualquier partición P: $s(f, P) \leq S(f, P)$.

- Si Q es más fina que P, entonces: $s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$.
- Para cualesquiera particiones P y Q: $s(f, P) \leq S(f, Q)$.

Como consecuencia de estas propiedades, al hacer particiones más finas, las sumas inferiores crecen y las superiores decrecen, siendo siempre las primeras menores o iguales que las segundas. Cuando ambas tienden a un mismo valor se dice que la función es integrable.

1.1.3. Integrabilidad de Riemann

Se dice que la función acotada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es **integrable Riemann** (o, simplemente, integrable) cuando el supremo de las sumas inferiores coincide con el ínfimo de las sumas superiores, y dicho valor, llamado **integral de Riemann**, se representa por:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_P \{s(f, P)\} = \inf_P \{S(f, P)\}$$

Se puede consultar en la bibliografía recomendada la demostración del siguiente criterio de integrabilidad, así como la justificación de que son integrables las funciones que ahí aparecen.

Bernhard Riemann. Nació en Breselenz (Hannover) en 1826. Hijo de un pastor luterano, en 1846 comenzó estudios de filosofía y teología en la Universidad de Gottingen, para continuar en 1847 con estudios de matemáticas en la misma universidad. En 1854 expuso la «geometría de Riemann», usada en la teoría de la relatividad, y en 1859 formuló la «hipótesis de Riemann» que aún permanece como uno de los problemas matemáticos más importantes no resueltos. En un libro publicado en 1954 definió el concepto de integral de Riemann. A partir de 1857 fue profesor en Gottingen. En 1866, durante un viaje por Selasca (Italia), murió de tuberculosis.

1.1.4. Criterio de integrabilidad Riemann. Funciones integrables

Se dice que la función acotada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Se puede probar que verifican este criterio y, por tanto, son integrables:

- Todas las funciones monótonas (siempre crecientes o siempre decrecientes) en $[a, b]$.
- Todas las funciones continuas en $[a, b]$.
- Todas las funciones con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$.

1.1.5. Propiedades de la integral

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables.

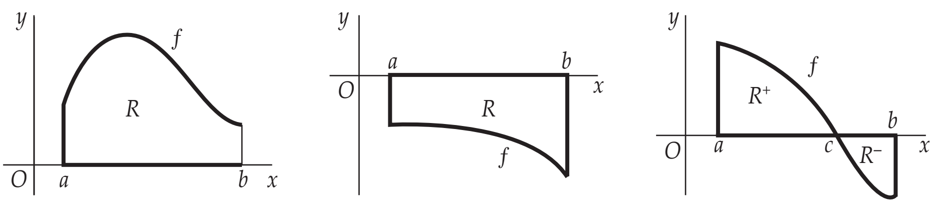
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ es integrable y $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx +$ $+ \mu \int_a^b g(x)\, dx$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.
- Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$.
- $|f|$ es integrable y $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
- Si $a < c < b$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

Según lo definido, la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ requiere que $a < b$. Sin embargo, siendo compatibles con la última propiedad de la integral, se puede extender a otros casos como sigue:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0 \qquad\qquad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

1.1.6. Interpretación geométrica de la integral

La integral de una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y positiva es el área del recinto limitado por su gráfica y el eje de abscisas entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Cuando la función no es siempre positiva, recurriendo a las propiedades de la integral, se tiene:



$$\int_a^b f(x)\, dx = A(R) \qquad A(R) = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -A(R) \qquad A(R) = -\int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = A(R^+) - A(R^-) \qquad A(R) = A(R^+) + A(R^-) = = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx$$

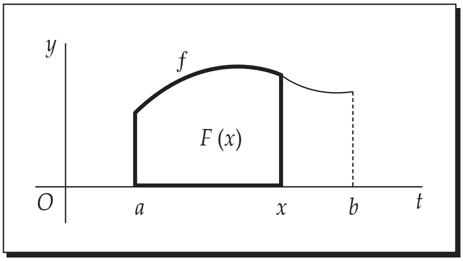
1.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El cálculo de integrales de Riemann o definidas, que sería muy complejo usando la definición (a partir de sumas inferiores y superiores), se simplifica extraordinariamente como consecuencia del siguiente teorema que relaciona el cálculo de áreas con la derivada.

1.2.1. Teorema

Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y F: $[a, b] \to \mathbb{R}$ la función área barrida:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



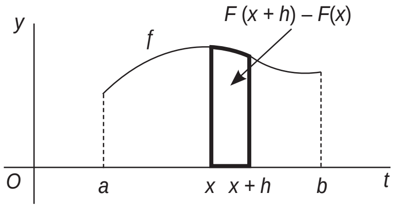
Entonces, F es continua y derivable en $[a, b]$ con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración

Si $x \in [a, b)$ y $h > 0$, entonces:

$$F(x+h) - F(x) =$$

$$= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$



Si m_h y M_h y son, respectivamente, el mínimo y el máximo de f en $[x, x + h]$, que se alcanzan por ser f continua, entonces:

$$m_h\, h \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le M_h\, h \Rightarrow m_h\, h \le F(x+h) - F(x) \le M_h\, h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_h \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le M_h$$

Por la continuidad de f, $\lim_{h\to 0^+} m_h = \lim_{h\to 0^+} M_h = f(x)$, de donde:

$$F'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Análogamente, se obtiene que $F'(x^-) = f(x)$, para todo $x \in (a, b]$, con lo que se concluye que F es derivable y $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

1.2.2. Corolario

Sean I y J intervalos, $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua y $u, v : J \to I$ dos funciones derivables. Entonces, $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$ es derivable y $F' = f(v(x))\, v'(x) - f(u(x))\, u'(x)$.

EJEMPLO 1

Hallar, sin integrar, la derivada de la función $F(x) = \int_{x^2+1}^{\text{sen}\, x} \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Solución

Usando el corolario 1.2.2, se obtiene que:

$$F'(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x - \frac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot 2x$$

1.2.3. Primitiva o antiderivada

Una función F se llama **primitiva** o **antiderivada** de f en $D \subset \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in D$.

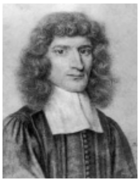
Usando las propiedades del epígrafe 5.1.4 de la Unidad 2, dos primitivas de una misma función en un intervalo se diferencian en una constante, es decir:

$$F'(x) = G'(x), \text{ para todo } x \in I \text{ (intervalo)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x) - G(x) = c,\ c \in \mathbb{R}, \text{ para todo } x \in I$$

1.2.4. Regla de Barrow

Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y Φ es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces la integral de Riemann o integral definida de f en $[a, b]$ se calcula como:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [\Phi(x)]_{x=a}^{b} = \Phi(b) - \Phi(a)$$



Isaac Barrow. Nació en Londres en 1630. Estudió matemáticas en el Trinity College de Cambridge, graduándose en 1648. En 1663 ocupó la prestigiosa cátedra lucasiana de Cambridge, donde tuvo de alumno a Newton. Gracias a sus conocimientos de griego y teología, en 1669 renunció a su cátedra para ocupar el puesto más importante de capellán real, proponiendo a Newton para ocupar la cátedra. Fue el primero en darse cuenta de que la derivada y la integral son operaciones inversas. En 1677 viajó a Londres, donde enfermó de fiebres malignas, muriendo poco después en la abadía de Westminster.

Demostración

Puesto que, por el teorema fundamental del cálculo, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es también primitiva de f, entonces, por el epígrafe 1.2.3, F y Φ se diferencian en una constante: $F(x) - \Phi(x) = c$, para todo $x \in [a, b]$. Haciendo $x = a$ se puede hallar la constante:

$$F(x) - \Phi(x) = c \underset{x=a}{\Longrightarrow} F(a) - \Phi(a) = c \underset{F(a)=0}{\Longrightarrow} c = -\Phi(a) \Rightarrow F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$$

En el caso particular de que $x = b$, se obtiene la regla de Barrow:

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a) \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

EJEMPLO 2

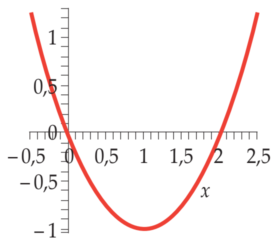
Calcular la integral $\int_0^2 x(x-2)\,dx$ e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

Solución

Una primitiva de $f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$ es $\Phi(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2$.

Por tanto:

$$\int_0^2 x(x-2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{x=0}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0-0) = -\frac{4}{3}$$



Puesto que $f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$ es una parábola con curvatura hacia arriba que corta al eje de abscisas en $x = 0$ y $x = 2$, $f(x) \leq 0$ en $[0, 2]$, como se observa en la figura. La integral obtenida es, por tanto, el opuesto del área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

1.3. TEOREMA DE VALOR MEDIO

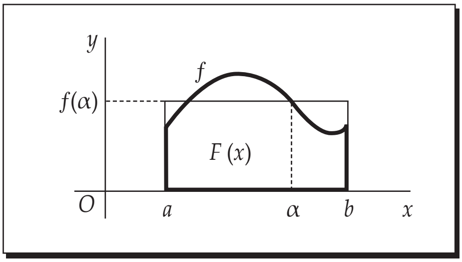
El siguiente teorema de valor medio integral, cuya demostración puede verse en la bibliografía recomendada, se usa para calcular el valor medio de una función continua.

1.3.1. Teorema de valor medio integral

Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $\alpha \in (a, b)$, tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)\,(b-a)$$

El valor $f(\alpha)$ se llama **valor medio** de f en $[a, b]$.



1.3.2. Valor medio de una función

Se llama **valor medio** y **valor medio cuadrático** de la función continua f en $[a, b]$ a:

$$\mathrm{VM}(f; [a, b]) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \mathrm{VMC}(f; [a, b]) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

EJEMPLO 3

Hallar el valor medio y el valor medio cuadrático de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.

Solución

Usando las fórmulas correspondientes:

$$\mathrm{VM}(x^2; [0, 2]) = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{8}{3}\right) - 0\right] = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{VMC}(x^2; [0, 2]) = \left(\frac{1}{2-0}\int_0^2 (x^2)^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\left[\left(\frac{32}{5}\right) - 0\right]\right)^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

2. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Por la regla de Barrow, el cálculo de la integral (de Riemann o definida) se reduce a hallar una primitiva de la función y evaluarla en los extremos del intervalo de integración. Por este motivo, el cálculo de primitivas cobra especial importancia.

Se llama **primitiva, antiderivada** o **integral indefinida** de f en $D \subset \mathbb{R}$ a cualquier función F tal que $F'(x) = f(x)$ en D. Como ya se ha visto, la primitiva no es única, ya que, si a una función se le suma una constante, sigue teniendo la misma derivada. La integral indefinida se suele indicar $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria y F una primitiva de f.

2.1. PRIMITIVAS INMEDIATAS

Una primitiva, antiderivada o integral indefinida se llama inmediata si se reconoce fácilmente como derivada de alguna función. Puesto que la integración es la operación inversa de la derivación, es fácil obtener la columna de la izquierda de la siguiente tabla de primitivas inmediatas. Aplicando la regla de la cadena se obtiene la columna de la derecha.

$\int k\,dx = kx + c \qquad (k \in \mathbb{R})$	
$\int x^p\,dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c \qquad (p \neq -1)$	$\int u(x)^p\,u'(x)\,dx = \dfrac{u(x)^{p+1}}{p+1} + c \qquad (p \neq -1)$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\lvert u(x)\rvert + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int e^{u(x)}\,u'(x)\,dx = e^{u(x)} + c$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \qquad (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{u(x)}\,u'(x)\,dx = \dfrac{a^{u(x)}}{\ln a} + c \qquad (a > 0, a \neq 1)$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$	$\int u'(x)\operatorname{sen} u(x)\,dx = -\cos u(x) + c$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int u'(x)\cos u(x)\,dx = \operatorname{sen} u(x) + c$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)\,dx = \tan x + c$	$\int \dfrac{u'(x)\,dx}{\cos^2 u(x)} = \tan u(x) + c$
$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int (1 + \cot^2 x)\,dx = -\cot x + c$	$\int \dfrac{u'(x)\,dx}{\operatorname{sen}^2 u(x)} = -\cot u(x) + c$

.../...

.../...

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}\, x + c$	$\int \frac{u'(x)\, dx}{\sqrt{1-u(x)^2}} = \text{arcsen}\, u(x) + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$	$\int \frac{u'(x)\, dx}{1+u(x)^2} = \arctan u(x) + c$

Dos integrales que no son inmediatas, pero que conviene recordar por su frecuencia, son las siguientes:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\text{sen}\, x} = \int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

EJEMPLO 4

Calcular las siguientes integrales indefinidas reducibles a inmediatas:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} \qquad\qquad \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Solución

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1/x}{\ln x}\, dx = \ln|\ln x| + c$$

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \frac{1}{2}\int (-2x)\, (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \text{arcsen}\, x + \frac{1}{2}\, \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c$$

2.2. MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

Se van a repasar los métodos elementales de integración, que ya deben ser conocidos desde el segundo curso de bachillerato. Para más detalles se puede recurrir a dicho libro o a la bibliografía recomendada.

2.2.1. Integración por cambio de variable

El cambio de variable en una integral indefinida se hace según la fórmula:

$$\int f(x)\,dx = \left(\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Una vez calculada esta última integral en la nueva variable, que debe ser más sencilla que la integral original, hay que deshacer el cambio de variable.

EJEMPLO 5

Hallar la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{x-5}\,dx$.

Solución:

Esta integral no es inmediata y se intenta simplificar eliminando la raíz cuadrada, lo que se consigue con el cambio de variable $x - 5 = t^2$, es decir, $x = 5 + t^2$.

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \left(\begin{array}{c} x = 5 + t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right) = \int (5 + t^2)\,t \cdot 2t\,dt = \int (10t^2 + 2t^4)\,dt = \frac{10t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + c$$

Ahora hay que deshacer el cambio de variable. Teniendo en cuenta que $t = \sqrt{x-5}$, se obtiene:

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \frac{10t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + c = \frac{10}{3}(x-5)\sqrt{x-5} + \frac{2}{5}(x-5)^2\sqrt{x-5} + c$$

2.2.2. Integración por partes

Si se integra la derivada del producto de dos funciones (usando diferenciales) se obtiene:

$$(uv)' = u'\,v + uv' \qquad \text{o} \qquad d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv \ \underset{\text{integrando}}{\Longrightarrow} \ uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

Despejando una de las integrales, se obtiene la fórmula de integración por partes que transforma una integral indefinida en otra que debería ser más sencilla:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

En esta fórmula, el integrando se descompone en el producto de dos funciones, de las cuales una se integra y otra se deriva para obtener la nueva integral.

EJEMPLO 6

Hallar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int x \ln x \, dx$

b) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$

c) $\int x^2 e^{-x} \, dx$

Solución

En cada caso se eligen las funciones u y dv adecuadas para simplificar la integral.

$$\text{a) } \int x \ln x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\text{b) } \int \operatorname{arcsen} x \, dx = \left(\begin{array}{c} u = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) =$$

$$= x \operatorname{arcsen} x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\text{c) } \int x^2 e^{-x} \, dx = \left(\begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right) = x^2 (-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\, 2x \, dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \, dx =$$

$$= \left(\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right) = -x^2 e^{-x} + 2\left(x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\, dx\right) = (-x^2 - 2x - 2)\, e^{-x} + c$$

2.2.3. Integrales de funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos polinomios. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, se reduce, mediante división, a un polinomio, más otra función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Si el cociente de la división es $c(x)$ y el resto $r(x)$, se cumple que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(c(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \right) dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx$$

Puesto que la integral de un polinomio es inmediata, el problema de calcular la integral queda reducido al caso en que el grado del numerador es menor que el del denominador, en cuyo caso se puede aplicar la **descomposición en fracciones simples**:

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{r(x)}{(x-a)\,(x-b)^p\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]\,[(x-\gamma)^2+\delta^2]^q\ldots} =$$

$$= \frac{A}{x-a} + \left[\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_p}{(x-b)^p} \right] + \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2} +$$

$$+ \left[\frac{E_1x+F_1}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]} + \frac{E_2x+F_2}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^2} + \ldots + \frac{E_qx+F_q}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^q} \right] + \ldots$$

Con esto, el cálculo de la integral se reduce a calcular integrales de algunos de los tipos anteriores. Para más detalles sobre este tipo de integrales se puede recurrir a los libros de segundo curso de bachillerato o a la bibliografía recomendada.

EJEMPLO 7

Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx$

Solución

a) Puesto que el grado del numerador es menor que el del denominador se procede directamente a hacer la descomposición factorial del denominador y en fracciones simples del cociente:

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)\,(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} =$$

$$= \frac{Ax(x-1)\,(x+1) + B(x-1)\,(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)\,(x+1)}$$

.../...

.../...

Puesto que los denominadores son iguales, también deben serlo los numeradores, e igualando los coeficientes de ambos polinomios se obtiene un sistema que se resuelve:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Término independiente:} & -B=1 \\ \text{Coeficiente de grado 1:} & -A=0 \\ \text{Coeficiente de grado 2:} & B+C-D=1 \\ \text{Coeficiente de grado 3:} & A+C+D=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=0 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=-1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^4-x^2} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

La integral queda reducida a tres integrales sencillas:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \ln|x-1| - \ln|x+1| + c = \frac{1}{x} + \ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + c$$

b) En este caso, el grado del numerador es mayor que el del denominador. Al dividir, el cociente es $c(x) = x - 4$ y el resto $r(x) = 2x + 52$. Puesto que el denominador no tiene raíces reales, se puede poner como suma de cuadrados completando $x^2 + 4x$ hasta ser el cuadrado de un binomio.

Se obtiene:

$$\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx = \int\left(x-4+\frac{2x+52}{x^2+4x+13}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{2x+52}{(x+2)^2+9}\,dx$$

En el numerador de la integral se busca la derivada del denominador, que es $2x + 4$, y la fracción restante será la derivada de un arco tangente:

$$\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \int\left(\frac{2x+4}{(x+2)^2+9} + \frac{48}{(x+2)^2+9}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \ln[(x+2)^2+9] + \frac{48}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \ln[(x+2)^2+9] + 16\arctan\frac{x+2}{3} + c$$

2.2.4. Integrales de algunas funciones trigonométricas

Las integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x \, dx$ se pueden resolver, con frecuencia, recurriendo a identidades trigonométricas, entre las que cabe destacar aquellas que transforman los cuadrados del seno y coseno al ángulo doble:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Para el resto de integrales de funciones racionales en seno y coseno, $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, es decir, integrales de cocientes de polinomios en seno y coseno, se debe recurrir, según el caso, a uno de los siguientes cambios de variable:

- Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \cos x$.
- Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \operatorname{sen} x$.
- Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \tan x$.
- Si no se cumplen las propiedades anteriores, se hace el cambio $t = \tan \frac{x}{2}$, en cuyo caso:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

EJEMPLO 8

Hallar las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

b) $\int \cos^3 x \, dx$

c) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2 + \cos x} \, dx$

e) $\int \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 + \cos x} \, dx$

.../...

.../...

Solución

En los tres primeros casos se recurre a las identidades trigonométricas.

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$

b) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\, dx = \int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x)\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx = \int \operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\cos^2 x\, dx =$

$$= \int (\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos^4 x)\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

d) El integrando es impar respecto del seno y, por tanto, se hace el cambio $t = \cos x$.

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2+\cos x}\, dx = \left(\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen} x\, dx \end{matrix} \right) = \int \frac{t(-dt)}{2+t} = -\int \frac{t+2-2}{2+t}\, dt =$$

$$= -\int \left(1 - \frac{2}{2+t} \right) dt = -t + 2 \ln|2+t| + c = -\cos x + 2\ln|2+\cos x| + c$$

e) En este caso hay que hacer el cambio $t = \tan \dfrac{x}{2}$. Teniendo en cuenta las fórmulas dadas:

$$\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}\, dx = \int \frac{2 - \dfrac{2t}{1+t^2}}{2 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{4(t^2-t+1)}{(t^2+3)(t^2+1)}\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{2t+4}{t^2+3} + \frac{-2t}{t^2+1} \right) dt = \int \left(\frac{2t}{t^2+3} + \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\dfrac{t}{\sqrt{3}} \right)^2} - \frac{2t}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \ln|t^2+3| + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} - \ln|t^2+1| + c =$$

$$= \ln \frac{3 + \tan^2 \dfrac{x}{2}}{1 + \tan^2 \dfrac{x}{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c$$

2.2.5. Integrales de algunas funciones irracionales

Se llaman integrales irracionales aquellas cuyo integrando contiene raíces. En algunos casos se integran mediante cambios de variable a funciones trigonométricas que eliminan las raíces.

- Si el integrando contiene $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, se hace el cambio $bx = a \cos t$.
- Si el integrando contiene $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, se hace el cambio $bx = a \tan t$.
- Si el integrando contiene $\sqrt{a^2x^2 - b^2}$, se hace el cambio $ax = b \sec t$.

EJEMPLO 9

Hallar la integral indefinida: $\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx$.

Solución

Se hace el cambio de variable $2x = 3 \cos t$.

$$\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx = \left(\begin{matrix} 2x = 3 \cos t \\ 2dx = -3 \operatorname{sen} t\, dt \end{matrix} \right) = \int \sqrt{9 - 9 \cos^2 t} \cdot \frac{-3 \operatorname{sen} t}{2}\, dt = \frac{-9}{2} \int \operatorname{sen}^2 t\, dt$$

Esta integral se ha resuelto en el ejemplo 8 a). Se sustituye y se deshace el cambio:

$$\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx = \frac{-9}{2} \int \operatorname{sen}^2 t\, dt = \frac{-9}{2} \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) + c =$$

$$= \frac{-9}{4} \arccos \frac{2x}{3} + \frac{9}{4}\, x \sqrt{1 - \frac{4x^2}{-9}} + c$$

3. INTEGRALES IMPROPIAS

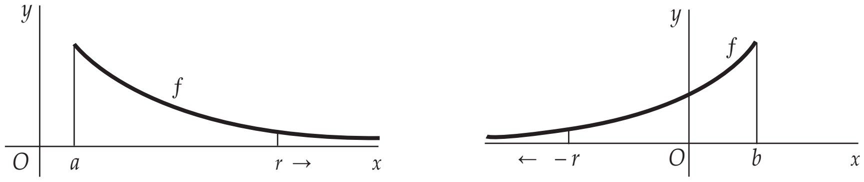
3.1. DEFINICIONES

Se dice que $\int_a^b f(x)\, dx$ es una **integral impropia** cuando el intervalo de integración es infinito (a o b son $\pm\infty$) o la función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ no está acotada.

3.1.1. Integral impropia de primera especie

Es cualquier integral de la forma $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ o $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y f es acotada en cada intervalo de la forma $[a, r]$ o $[-r, b]$, según el caso, con $r \in \mathbb{R}$. En estos casos se define la integral impropia como límite de integrales propias de Riemann:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_a^{r} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{b} f(x)\,dx$$

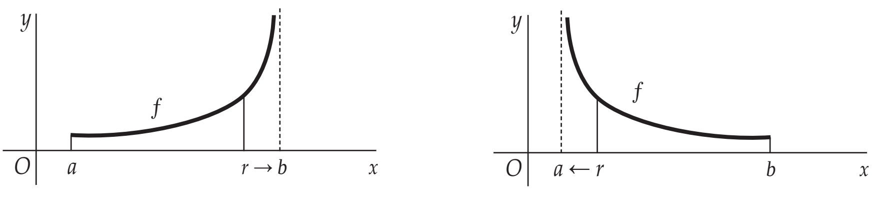


Se dice que la integral impropia es convergente, divergente o no existe si el límite es finito, infinito o no existe, respectivamente.

3.1.2. Integral impropia de segunda especie

Es cualquier integral de la forma $\int_a^{b} f(x)\,dx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y f es acotada en cada intervalo de la forma $[a, r]$ o $[r, b]$, según el caso, con $a < r < b$. En estos casos se define la integral impropia como límite de integrales propias de Riemann:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to b^-}\int_a^{r} f(x)\,dx \qquad \int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to a^+}\int_{r}^{b} f(x)\,dx$$



Se dice que la integral impropia es convergente, divergente o no existe si el límite es finito, infinito o no existe, respectivamente.

3.1.3. Integral impropia general

Cualquier integral impropia se puede descomponer en suma de integrales impropias de primer y/o segunda especie, y se dice que la integral impropia es convergente cuando lo son todas las integrales en que se descompone, siendo divergente en caso contrario.

EJEMPLO 10

Estudiar la convergencia (hallando su valor) o divergencia de las siguientes integrales impropias:

a) $I_p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(p > 0)$

b) $J_p = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $(p > 0)$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$

d) $\int_0^1 \frac{1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$

Solución

a) Es una integral impropia de primera especie.

Para hallarla se distinguen dos casos:

$$p \neq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r x^{-p}\, dx = \lim_{r \to +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{x=1}^r = \lim_{r \to +\infty} \frac{r^{1-p} - 1}{1-p} = \begin{cases} +\infty & \text{, si } 0 < p < 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{, si } p > 1 \end{cases}$$

$$p = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{dx}{x} = \lim_{r \to +\infty} [\ln|x|]_{x=1}^r = \lim_{r \to +\infty} (\ln r - 0) = +\infty$$

En resumen, $I_p = +\infty$ cuando $0 < p \leq 1$, e $I_p = \dfrac{1}{p-1}$ cuando $p > 1$.

.../...

.../...

b) Es una integral impropia de segunda especie.

Para hallarla se distinguen dos casos:

$$p \neq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{r \to 0^+} \int_r^1 x^{-p}\, dx = \lim_{r \to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{x=r}^1 = \lim_{r \to 0^+} \frac{1 - r^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{si } 0 < p < 1 \\ +\infty, & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

$$p = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{r \to 0^+} \int_r^1 \frac{dx}{x} = \lim_{r \to 0^+} [\ln|x|]_{x=r}^1 = \lim_{r \to 0^+} (1 - \ln r) = +\infty$$

En resumen, $J_p = \dfrac{1}{1-p}$ cuando $0 < p < 1$, y $J_p = +\infty$ cuando $p \geq 1$.

c) Es una integral impropia de primera especie:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r \to +\infty} [\arctan x]_{x=0}^r = \lim_{r \to +\infty} (\arctan r - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

d) La función tiende a infinito en $x = 0$ y $x = 1$, por lo que se descompone en suma de dos integrales impropias de segunda especie:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx + \int_{1/2}^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx =$$

$$= \lim_{r \to 0^+} \int_r^{1/2} \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx + \lim_{r \to 1^-} \int_{1/2}^r \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx =$$

$$= \lim_{r \to 0^+} \left[2\sqrt{x(1-x)}\right]_{x=r}^{1/2} + \lim_{r \to 1^-} \left[2\sqrt{x(1-x)}\right]_{x=1/2}^{r} = 2$$

3.2. COMPARACIÓN DE INTEGRALES

Un método útil para decidir la convergencia o divergencia de integrales impropias, pero que no sirve para calcular su valor, es el método de comparación con otras de las que se conoce su convergencia o divergencia.

3.2.1. Criterio de comparación

Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces:

- $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge y $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

Este criterio resulta útil para conocer la convergencia o divergencia de una integral impropia cuando es difícil calcular la integral indefinida asociada.

EJEMPLO 11

Estudiar la convergencia o divergencia de la integral impropia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

Solución

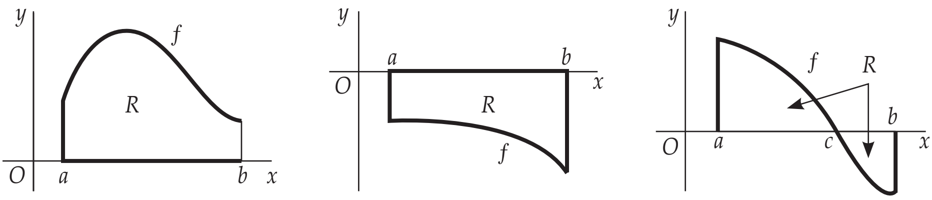
Puesto que $\sqrt{1+x^3} \geq \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ y usando el ejemplo 10 a):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq \dfrac{1}{x^{3/2}} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = I_{3/2} = 2 < \infty \end{array}\right. \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \text{ es convergente y } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \leq 2$$

4. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

4.1. ÁREAS PLANAS

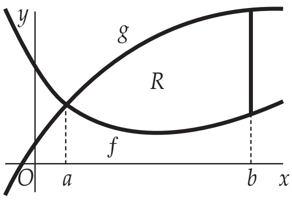
De la interpretación geométrica de la integral se deduce su uso para el cálculo de áreas planas:



$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$ $\quad$ $A(R) = -\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad$ $A(R) = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

En general, el área de la región plana limitada por las gráficas de dos funciones f y g entre $x = a$ y $x = b$ se puede calcular como:

$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



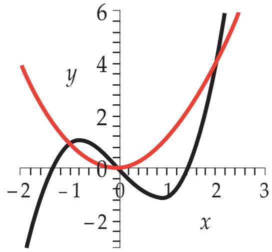
EJEMPLO 12

Calcular el área del recinto acotado limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = x^3 - 2x$.

Solución

Se hallan los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones:

$x^3 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2) \Leftrightarrow x = -1, 0, 2$



Dos curvas continuas que se cortan en tres puntos limitan dos regiones acotadas, en las que hay que determinar cuál es la función mayor. Simplemente calculando sus valores en algún punto intermedio se puede ver que cuando $-1 \leq x \leq 0$ se tiene que $x^2 \leq x^3 - 2x$, y cuando $0 \leq x \leq 2$ se tiene que $x^3 - 2x \leq x^2$. Por tanto:

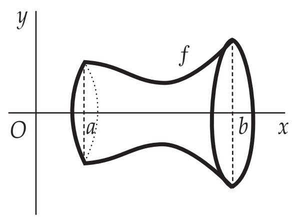
$$A = \int_{-1}^{0} [(x^3 - 2x) - x^2]\,dx + \int_0^2 [x^2 - (x^3 - 2x)]\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2\right]_{x=0}^{2} =$$

$$= \left[0 - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{-1}{3}\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{4} + 4\right) - 0\right] = \frac{37}{12}\,u^2$$

4.2. VOLÚMENES Y ÁREAS DE REVOLUCIÓN

El cuerpo engendrado al girar la gráfica de una función $f \geq 0$, entre $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje de abscisas se llama **sólido de revolución**.

Su volumen y área son:



- **Volumen:**

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

- **Área:**

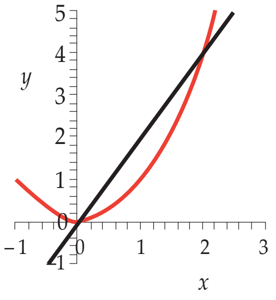
$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

EJEMPLO 13

Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada comprendida entre $y = x^2$ e $y = 2x$ alrededor del:

a) Eje de abscisas.

b) Eje de ordenadas.



Solución

Para determinar la región comprendida entre las dos curvas se calcula su intersección:

$$x^2 = 2x \iff x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \iff x = \{0, 2\}$$

a) Teniendo en cuenta que en $0 \leq x \leq 2$ se cumple que $x^2 \leq 2x$, el volumen de revolución engendrado al girar dicho recinto alrededor del eje de abscisas es el volumen engendrado por la curva $y = 2x$ menos el volumen engendrado por la curva $y = x^2$, es decir:

$$V = \pi \int_0^2 (2x)^2 \, dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) \, dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^2 = \frac{64\pi}{15} \; u^3$$

.../...

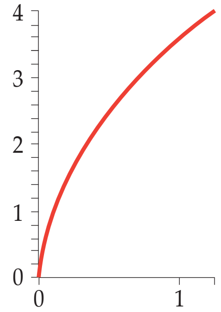
.../...

b) Para hallar el volumen de revolución respecto del eje de ordenadas, hay que intercambiar los papeles de x e y. Se trata de hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región comprendida entre $x = y/2$ y $x = \sqrt{y}$, entre $y = 0$ e $y = 4$. Dicho volumen es:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2\, dy - \pi \int_0^4 \left(\frac{y}{2} \right)^2 dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dx = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right]_{x=0}^4 = \frac{8\pi}{3}\, u^3$$

EJEMPLO 14

Calcular la superficie de una antena parabólica de base un círculo de radio 4 m y altura 1 m.



Solución

La antena parabólica se obtiene al girar alrededor del eje de abscisas del trozo de la parábola que pasa por el origen y por el punto (1, 4) comprendido entre $x = 0$ y $x = 1$. La ecuación de dicha parábola es:

$$x = ay^2 \xrightarrow[\text{pasa por } (1,\,4)]{} 1 = 16a \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$$

Es decir, $x = y^2/16$ o $y = 4\sqrt{x}$. El área de la superficie de revolución es:

$$A = 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 4\sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)^2} dx = 8\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{\frac{x+4}{x}}\, dx = 8\pi \int_0^1 \sqrt{x+4}\, dx =$$

$$= 8\pi \left[\frac{(x+4)^{3/2}}{3/2} \right]_{x=0}^1 = \frac{16\pi}{3} (5^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{16\pi}{3} (5\sqrt{5} - 8) \simeq 53{,}3\, u^2$$

4.3. LONGITUDES DE CURVAS

La longitud de la curva determinada por la gráfica de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

EJEMPLO 15

Calcular la longitud de la catenaria, que es la gráfica de la función $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

Puesto que $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, se tiene que:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_{x=0}^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} - 0 = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- El concepto de integral de Riemann como área.
- El teorema fundamental del cálculo.
- Regla de Barrow.
- Integrales indefinidas elementales.
- Métodos elementales de integración.
- Áreas planas y volúmenes de revolución.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Calcular, interpretando geométricamente su valor, las integrales:

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

b) $\int_{-1}^{2} x^3 \, dx$

Enunciado 2

Hallar el valor medio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Enunciado 3

Calcular los siguientes integrales reducibles a inmediatas:

a) $\displaystyle\int \frac{2 + 3 \cos x}{\text{sen}^2 x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1 + \ln x}{3 + x \ln x}\, dx$

Enunciado 4

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x\sqrt{x - 1}\, dx$

b) $\int \arctan x\, dx$

c) $\int x^2 \text{ sen } x\, dx$

Enunciado 5

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \cos^2 x\, dx$

b) $\int \text{sen}^3 x\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\, dx}{1 + \text{sen}^2 x}$

Enunciado 6

Calcular la integral: $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Enunciado 7

Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$

Enunciado 8

Determinar el valor de a para que el área de la región limitada por las curvas $y =$ $= x - x^2$ e $y = ax$ sea 9/2.

Enunciado 9

Un tanque de gasolina con forma de cilindro de radio 1 m y longitud 3 m se halla tumbado horizontalmente a lo largo de su arista. Determinar el volumen de gasolina en el tanque cuando la misma llega a una altura h, $0 \leq h \leq 2$.

Enunciado 10

Un barril se diseña mediante rotación alrededor del eje de abscisas de la región encerrada por la elipse $(x^2/4) + y^2 = 1$ entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Determinar la capacidad del barril.

Enunciado 11

Hallar el área de una esfera de radio r.

Enunciado 12

Un toro es el sólido obtenido al girar una circunferencia de radio r alrededor de un eje que está a distancia $R > r$ del centro de la circunferencia. Calcular su volumen.

Solución 1

a) 2

b) 15/4

Solución 2

$4/\pi$

Solución 3

a) $\dfrac{-3}{\operatorname{sen} x} - 2 \cot x + c$

b) $\ln|3 + x \ln x| + c$

Solución 4

a) $\dfrac{2}{15}(2 + 3x)(x - 1)\sqrt{x - 1} + c$

b) $x \arctan x - \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$

c) $-x^2 \cos x + 2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + c$

Solución 5

a) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$

b) $\dfrac{-\cos x}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x) + c$

c) $\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - x + c$

Solución 6

$$\frac{1}{2}\, x \sqrt{4 - x^2} + 2 \text{ arcsen } \frac{x}{2} + c$$

Solución 7

a) $\pi/2$

b) Divergente.

Solución 8

$$a = -2 \text{ o } a = 4$$

Solución 9

$$V(h) = \frac{3\pi}{2} + 3 \text{ arcsen } (h - 1) + 3(h - 1) \sqrt{2h - h^2}$$

Solución 10

$$V = \frac{11\pi}{6}$$

Solución 11

$$A = 4\pi\, r^2$$

Solución 12

$$V = 2\pi^2\, r^2\, R$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, A. et ál. (1994): *Cálculo I*, Madrid: Clagsa.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006): *Cálculo I*. Madrid: McGraw-Hill.

Mata, A. y Reyes, M. *Apuntes de cálculo*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo.

Reyes, M. *Apuntes de análisis*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/analisis.