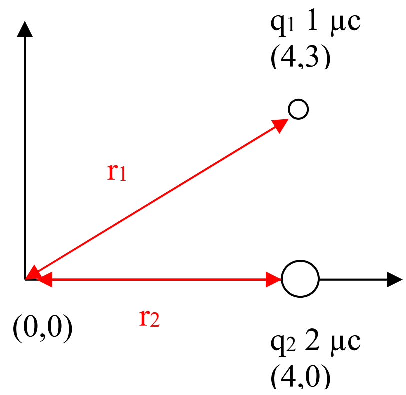
EJERCICIOS RESUELTOS UNIDAD DIDÁCTICA 2

(Ejercicios correspondientes a los enunciados del capítulo 3 del manual)

E _3.3



Calculamos el potencial creado en el origen (0,0) por las cargas q_1 y q_2:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{r_i}$$

Donde:

$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m

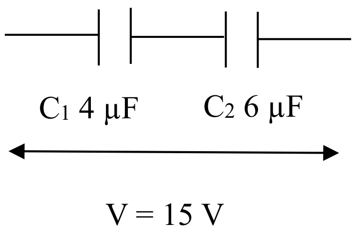
$r_2 = 4$ m

$$V = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}}{5} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} \right) = 6{,}3 \cdot 10^3\ V$$

El trabajo necesario para traer una carga de 4 μC desde el infinito hasta el origen es:

$$W = qV = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}3 \cdot 10^3 = 25{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

E _3.7



La energía almacenada en un condensador viene dada por la expresión:

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

Calculamos la capacidad equivalente del conjunto de condensadores, al estar conectados en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq} = \frac{12}{5}\,10^{-6}\,F$$

y la energía total almacenada:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5}\,10^{-6} \cdot 15^2 = 0{,}27 \text{ mJ}$$

E _3.8

a)

La mínima capacidad se conseguirá cuando los condensadores se conecten en serie ya que *la capacidad equivalente de un conjunto de condensadores conectados en serie es siempre menor que la capacidad del menor de todos ellos*. En este caso la capacidad equivalente será:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = 3 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq} = 1\ \mu F$$

b)

La máxima capacidad se conseguirá cuando los condensadores se conecten en paralelo ya *que la capacidad equivalente de un conjunto de condensadores conectados en paralelo es siempre mayor que la capacidad del mayor de todos ellos*. En este caso la capacidad equivalente será:

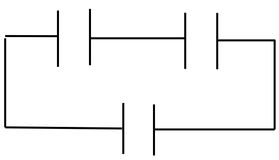
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 3 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \Rightarrow C_{eq} = 9\ \mu F$$

c)

Las posibles opciones para conectar los tres condensadores, además de las anteriores son:

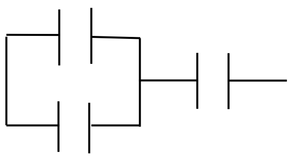
- Dos en serie y uno en paralelo
- Dos en paralelo y uno en serie

Resolvemos ambos casos:



$$\frac{1}{C_{eq,serie}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2C}{C^2} \Rightarrow C_{eq,serie} = \frac{C}{2} = 1{,}5\ \mu F$$

$$C_{eq,total} = C_{eq,serie} + C = 4{,}5 \cdot \mu F$$

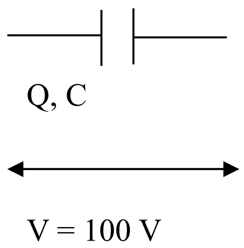


$$C_{eq,paralelo} = C + C = 2C = 6 \cdot \mu F$$

$$\frac{1}{C_{eq,total}} = \frac{1}{C_{eq,paralelo}} + \frac{1}{C} = \frac{3C}{2C^2} \Rightarrow C_{eq,total} = \frac{2C}{3} = 2\ \mu F$$

Luego esta combinación es la que buscamos.

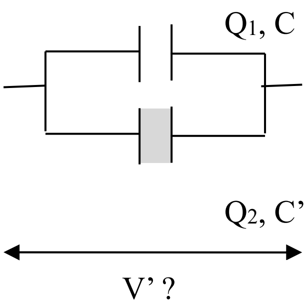
E _3.9



El condensador, al que suponemos una capacidad C, al estar sometido a una diferencia de potencial de 100 V se cargará con una carga de valor:

Q = 100 C

Cuando se conecte el segundo condensador en paralelo, la carga inicial se repartirá entre ambos del siguiente modo:



$$Q = Q_1 + Q_2 = CV' + C'V' = V'(C + C')$$

Teniendo en cuenta que C’ es la capacidad del segundo condensador, que es igual que el primero pero que contiene un dieléctrico de k =4

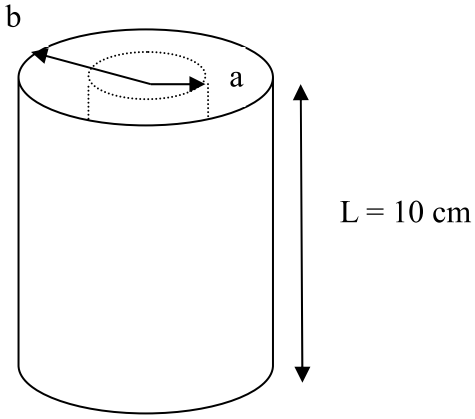
C’ = 4C por tanto,

$$V' = \frac{Q}{(C + C')} = \frac{100C}{(C + 4C)} = 20\ V$$

E _3.10

a)

La capacidad de un condensador cilíndrico, tal y como se deduce en el manual (apartado 3.5.2) viene dada por la expresión:



$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(\frac{b}{a})} = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1}{\ln(\frac{20}{5})} = 4{,}01 \text{ pF}$$

a = 5 mm
b = 20 mm

b)

Al llenar todo el espacio entre los dos cilindros que forman el condensador con poliestireno, aumentamos la capacidad del mismo en proporción a la constante dieléctrica del material. En este caso, de acuerdo con la tabla 3.1 del manual, la constante dieléctrica del poliestireno es de 2,55, por tanto:

C' = k C = 10,22 pF

c)

En este caso podemos considerar el cilindro como dos condensadores en paralelo (sometidos al mismo potencial), uno de 5 cm de longitud sin dieléctrico y otro de 5 cm de longitud con un dieléctrico de constante 2,55. La capacidad del primer condensador será:

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(\frac{b}{a})} = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}05}{\ln(\frac{20}{5})} = 2{,}01 \text{ pF}$$

y la del segundo

$$C_2 = 2{,}55 \cdot 2 = 5{,}12 \text{ pF}$$

Como están en paralelo la capacidad equivalente será la suma de ambas: C = 7,13 pF

E _3.12

a)

La capacidad de un condensador plano viene dada por la expresión:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

En este caso:

$A = \pi R^2 = 7{,}85\ 10^{-5}\ m^2$
$d = 0{,}002$ m

considerando que en el interior del condensador hay un dieléctrico de constante dieléctrica 5, la capacidad será:

$$C = k\,\frac{\epsilon_0 A}{d} = 5\,\frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-5}}{0{,}002} = 1{,}74\ \mathrm{pF}$$

b)

La resistencia dieléctrica se define como la diferencia máxima de potencial que se podrá aplicar entre los terminales del condensador sin que se produzca la ruptura del dieléctrico y se expresa en función del espesor del material.

La diferencia de potencial entre las placas del condensador la determina el campo eléctrico creado por la distancia entre placas, luego por unidad de longitud y aplicando la ley de Gauss:

$$\frac{V}{d} = E = \frac{Q}{k\epsilon_0 A}$$

como la carga máxima es 10 μC obtenemos

$$\frac{V}{d} = \frac{10\ \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-5}} = 2{,}87 \cdot 10^{9}\ \ \mathrm{V/m}$$