Unidad 10. Semejanza hidrodinámica y análisis dimensional.

Introducción

El desarrollo de las máquinas calculadoras y ordenadores permite hoy día la resolución matemática de muchos problemas de Mecánica de Fluidos que hace algunos años eran inabordables. Sin embargo, son todavía muchos los problemas que solo pueden atacarse experimentalmente.

Las variables que pueden intervenir en un problema cualquiera de mecánica de fluidos se pueden reducir a ocho:

1. la fuerza F,
2. la longitud L,
3. la velocidad v,
4. la densidad ρ,
5. la viscosidad dinámica η,
6. la aceleración de la gravedad g,
7. la velocidad del sonido c
8. la tensión superficial σ.

Supongamos que se trata, por ejemplo, de construir una serie nueva de bombas para la recirculación del líquido refrigerante de una central nuclear. Son necesarios una serie de ensayos experimentales en los que se introducen y comprueban las distintas variables y variantes del diseño (diámetro del rodete, forma de los álabes o paletas, etc.). Para hacerlo, tenemos dos formas:

a) construir un prototipo del mismo tamaño.

b) considerar una de las variables, por ejemplo el rendimiento como variable dependiente, función de las restantes variables que intervienen en el fenómeno. Los resultados obtenidos en el banco de pruebas se podrían representar mediante curvas. Una función de una variable se puede representar por una curva. Una función de dos variables se puede representar por un ábaco o familia de curvas, una curva para cada valor de la tercera variable. Una función de tres variables se puede representar por una serie de ábacos; un ábaco por cada valor de la cuarta variable, y así sucesivamente.

En cuanto a la condición a este procedimiento prácticamente resulta irrealizable, porque si la máquina es grande sería antieconómico y muchas veces irrealizable construir un prototipo a escala 1/1, realizar las modificaciones requeridas por la experimentación, etc.; a causa de los gastos de energía, personal, instalaciones, etc.

En cuanto a la condición b: Si para cada curva se necesitan 10 puntos experimentales, cada ábaco ha de tener 10 curvas, y se han de hacer 10 ábacos, la representación experimental de un fenómeno con 3 variables independientes requeriría 1.000 puntos experimentales. Ahora bien, el coste de la obtención de un solo punto experimental puede muchas veces ser muy elevado. Si las variables independientes son más de 3, el problema se complica en progresión geométrica.

En la práctica la condición a) se sustituye por la siguiente:

No se ensaya un prototipo a escala 1/1, sino un modelo reducido a escala 1/10 ó 1/100, por ejemplo.

La condición b) se sustituye por la siguiente:

Se reduce el número de variables. Como veremos en la investigación experimental de un fenómeno en Mecánica de Fluidos se puede reducir el número de variables en la mayor parte de los casos a una variable dependiente y a otra independiente. Así por ejemplo, el coeficiente de pérdida de carga en una tubería lisa (λ) que se verá más adelante y que prácticamente es función sólo del número de Reynolds Re, aunque Re a su vez es una función de varias variables:

$$\mathrm{Re} = \frac{vD\rho}{\eta} \tag{10.1}$$

Este número adimensional Re, así como los otros números adimensionales que estudiaremos en este capítulo, nos ayuda a profundizar en el fenómeno que nos ocupa. En efecto, el coeficiente de pérdida de carga depende de la velocidad del fluido v y de la viscosidad η, pero con valores distintos de la velocidad y de la viscosidad, el coeficiente λ será constante si Re es constante. Es la relación adimensional de las cuatro variables de la ecuación (10.1) la que determina a fin de cuentas este fenómeno.

La nueva condición 1 plantea el siguiente problema: ¿Cómo predecir el comportamiento de! prototipo a partir de los resultados obtenidos experimentalmente en un modelo a escala? Resuelto este problema queda abierto e! camino a la experimentación con modelos.

La nueva condición 2 plantea el problema de la reducción de! número de variables. En primer lugar las ocho enumeradas al comienzo de esta sección se han logrado reducir de una vez para siempre a cinco variables o números adimensionales, que son los que se obtienen de comparar las fuerzas que pueden actuar sobre un fenómeno hidráulico entre sí.

Fuerzas

Las fuerzas que pueden actuar sobre un fenómeno hidráulico, son:

1) Las de inercia (gradiente de presiones) La fuerza causada por la diferencia de presiones. Si un carrito que puede rodar sin rozamiento sobre un plano horizontal es empujado por la derecha y por la izquierda con una fuerza de 10 N el carro no se mueve. La presión por ambos lados es igual. Si por el lado derecho la fuerza es de 10 N Y por el lado izquierdo la fuerza es de 5 N hay un gradiente de presiones y el carro se moverá hacia la izquierda en el sentido decreciente del gradiente de presiones. (En un fluido en reposo hay un gradiente de presiones y la fuerza que este gradiente origina está en equilibrio con la fuerza de la gravedad.)

2) Las de peso (gravedad) y que es ejercida por la tierra con su atracción.

3) Las de viscosidad (rozamiento). Es nula en el fluido ideal.

4) Las de capilaridad (tensión superficial). Juega de ordinario un papel poco importante

5) Las de elasticidad. No entra en juego en el fluido incompresible.

La fuerza de la gravedad es externa al fluido (la ejerce la tierra con su atracción). Las otras fuerzas son internas.

Números adimensionales

La comparación de las cuatro últimas fuerzas respecto a las de inercia, nos permite determinar los números adimensionales de Froude, Reynolds, Weber y Mach, muy usados en mecánica de fluidos. El número de Euler se obtiene de relacionar las fuerzas de inercia con las de presión. Por tanto los números adimensionales serán:

Número de Euler se define en la forma:

$$Eu = \frac{\text{Fuerzas de presión}}{\text{Fuerzas de inercia}} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \tag{10.2}$$

Número de Reynolds se define en la forma:

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de tensiones viscosas}} = \frac{vL\rho}{\mu} \tag{10.3}$$

Número de Froude se define en la forma:

$$Fr = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de gravedad}} = \frac{v}{\sqrt{gL}} \tag{10.4}$$

Número de Weber se define en la forma:

$$We = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de tension superficial}} = \frac{\rho v^2 L}{\sigma} \tag{10.5}$$

Número de Mach se define en la forma:

$$Ma = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de tension superficial}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} = \frac{v}{c} \tag{10.6}$$

El teorema п de Buckingham.

El teorema Π de Buckingham demuestra que, en un problema físico que incluye n cantidades en las que hay m dimensiones, las cantidades se pueden ordenar en n-m parámetros adimensionales independientes. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ las cantidades implicadas, tales como la presión, viscosidad, velocidad, etc. Se sabe que todas las cantidades son esenciales a la solución, por lo que debe existir alguna relación funcional

$$F(A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n) = 0$$

Si $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots$, representan algunas agrupaciones adimensionales de la cantidades $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$, entonces con m dimensiones implicadas, existe una ecuación de la forma

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots\ldots, \Pi_{n-m}) = 0$$

El método para determinar los parámetros Π, consiste en selecciona m de las cantidades *A*, con diferentes dimensiones, que contengan entre ellas las *m* dimensiones y usarlas como variables repetitivas, junto con una de las otras *A* cantidades para cada Π. Por ejemplo, sea que A_1, A_2, A_3 contengan M, L, T no necesariamente en cada una, sino en forma colectiva. Entonces el primer parámetro Π está compuesto como

$$\Pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{Y_1} A_3^{z_1} A_4$$

El segundo como

$$\Pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{Y_2} A_3^{z_2} A_5$$

y así hasta

$$\Pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{Y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n$$

En estas ecuaciones se determinarán los exponentes para que cada Π sea adimensional. Las dimensiones de las cantidades *A* se sustituyen y los exponentes de M, L, T se fijan iguales a cero respectivamente, estos producen tres ecuaciones con tres incógnitas para cada parámetro Π, con lo que se pueden determinar los exponentes x, y, z y de aquí el parámetro Π.

Si solo están implicadas dos dimensiones, dos de las cantidades A se escogen como variables repetitivas y se obtienen dos ecuaciones con los dos exponentes incógnitos para cada término de Π.

En muchos casos la agrupación de términos A es tal que el arreglo adimensional es evidente por inspección. El caso más simple es aquel cuando dos cantidades tienen las mismas dimensiones, por ejemplo, longitud, la razón de estos dos términos, siendo el parámetro Π.

Lo más sencillo es verlo con algún ejemplo que siempre se ven las cosas más fácilmente

Ejemplo 1. La descarga por un tubo capilar horizontal se piensa que depende de la caída de presión por unidad de longitud, el diámetro y la viscosidad. Encuentre la forma de la ecuación.

Solución

Las cantidades son listadas por sus dimensiones:

Descarga	Q	L^3T^{-1}
Caída de presión por unidad de longitud	*Δp/L*	$ML^{-2}T^{-2}$
Diámetro	D	L
Viscosidad	μ	$ML^{-1}T^{-1}$

Entonces

$$F\left(Q, \frac{\Delta p}{l}, D, \mu\right) = 0$$

Se usan tres dimensiones, y con cuatro cantidades habrá un parámetro Π:

$$\Pi = Q^{x_1}\left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{y_1} D^{z_1}\mu$$

Sustituyendo en las dimensiones da

$$\Pi = (L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-2}T^{-2})^{y_1} L^{z_1} ML^{-1}T^{-1} = M^0L^0T^0$$

Los exponentes de cada dimensión deben ser iguales en cada lado de la ecuación. Con L primero,

$$3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0$$

E igualmente para M y T

$$y_1 + 1 = 0$$

$$-x_1 - 2y_1 - 1 = 0$$

De la cual $x_1 = 1, y_1 = -1, z_1 = -4$

Y $\Pi = \dfrac{Q\mu}{D^4 \Delta p / l}$

Después de resolver para Q

$$Q = C \frac{\Delta p}{l} \frac{D^4}{\mu}$$