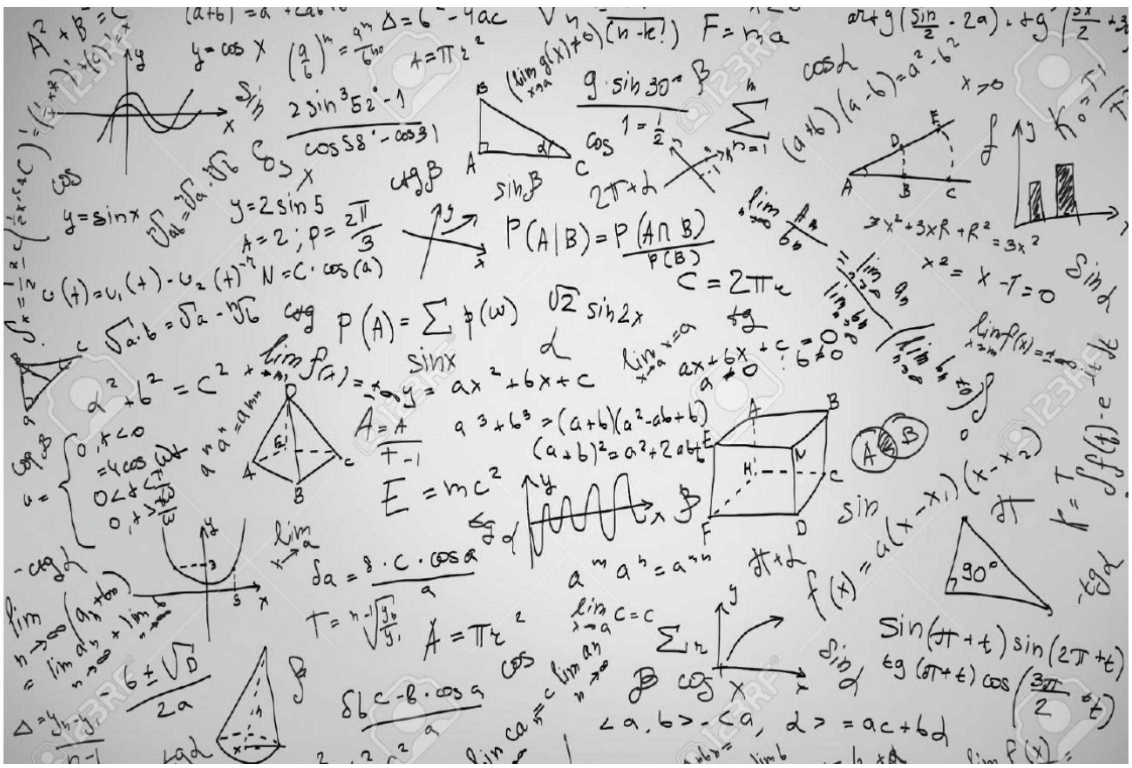
Actividad de Evaluación Continua 2

Álgebra Lineal



Autor: Alexander Sebastian Kalis
Profesor: Dr. Juan José Moreno García
Curso: 1o, Ingeniería de Organización Industrial
UDIMA

Actividades

Problema 1

¿Son linealmente independientes los vectores del siguiente conjunto?
$C = 2x^3 - 4x^2 + 2x, 2x^3 - 3x^2 - 2x + 7, x^3 - 3x^2 - 2x + 2, -2x^2 + x - 5$

Podemos representar el conjunto C de forma matricial:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Para que los vectores de C sean linealmente independientes, entre otros, se debe cumplir que $Null(C)$ tenga una única solución, el vector $\mathbf{0}$.

Sabiendo que $Null(C) = Null(rref(C))$ primero obtenemos $rref(C)$ ayudándonos de Octave:

$$rref(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ,5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Viendo esto inmediatamente podemos deducir que los vectores del conjunto C **no son linealmente independientes** ya que c_2 se puede producir mediante la combinación lineal de las otras columnas escalándolas con coeficientes diferentes a 0.

Problema 2

Encuentra una base del espacio columna y una para el espacio fila de A. Si esta matriz corresponde a una aplicación $Tx = Ax$ hallar una base para la imagen y otra para el núcleo. ¿Es la transformación inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$rref(A) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

Tras haber encontrado la forma escalonada reducida, simplemente seleccionamos las columnas pivote para obtener la base del espacio columna y las filas no nulas para la base del espacio fila:

$$\mathcal{B}_c(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

$$\mathcal{B}_f(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Para determinar el núcleo o espacio nulo de A, debemos resolver el sistema $Ax = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Representado en forma de matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1}$$

Obtenemos el conjunto de soluciones:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\mathcal{B}(Null(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Y recuperando del apartado anterior:

$$\mathcal{B}_c(A) = \mathcal{B}_c(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para determinar qué tipo de aplicación es, recuperamos el conjunto solución:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que no será inyectiva ni biyectiva ya que el espacio nulo son todas las combinaciones lineales para cualquier $\{x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$.

Por otro lado la aplicación tampoco será sobreyectiva ya que la imagen está en $\mathbb{R}^3$ mientras que el codominio está en $\mathbb{R}^4$.

Problema 3

Sea en $\mathbb{R}$ las bases siguientes:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea además en dicho espacio el vector $v = (1, 2, -3)^T$. Calcular lo siguiente:
-La matriz de cambio de base que pasa de B a C.

Podemos encontrar la matriz de cambio de base tomando la inversa de C mediante Gauss-Jordan:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Entonces la matriz utilizada para hacer el cambio de base es:

$$M = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

-El vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B. El vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ en C usando la matriz de cambios de base y **comprobar los resultados**.

El vector $\mathbf{v}$ en base B será el mismo, ya que B es la base canónica en $\mathbb{R}^3$. Para encontrar las coordenadas de $\mathbf{v}$ tras aplicarle el cambio de base en C, multiplicamos $M\mathbf{v}$:

$$M\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para comoprobar los resultados, multiplicamos cada vector por su base y el resultado final debería ser el mismo:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

Problema 4

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación definida por

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+3c-4d \\ 6a+4b+8c-10d \\ -8a-6b-14c+18d \\ -7a-5b-11c+14d \end{bmatrix}$$

Calcular su matriz asociada respecto a la base estandar o canónica, una base de su núcleo y una base de su imagen.

La matriz asociada respecto a I_4 es la propia transformación que aplica f sobre los vectores:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 8 & -10 \\ -8 & -6 & -14 & 18 \\ -7 & -5 & -11 & 14 \end{bmatrix}$$

Para obtener la base de su núcleo resolvemos $Bx = 0$:

$$Bx = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 8 & -10 \\ -8 & -6 & -14 & 18 \\ -7 & -5 & -11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$rref\left(\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 8 & -10 & 0 \\ -8 & -6 & -14 & 18 & 0 \\ -7 & -5 & -11 & 14 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Obtenemos entonces como solución:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siendo x_3 y x_4 variables libres. Y por lo tanto:

$$\mathcal{B}(Null(B)) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Y la base de la imagen serán las columnas pivote de B, dicho de otra forma, $C(B)$:

$$\mathcal{C}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

Problema 5

Demostrar si el siguiente conjunto de vectores en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es linealmente independiente:

$$p_1(x) = 1 + 3x + 2x^2, p_2(x) = 2 + 4x, p_3(x) = 3 + 6x - x^2$$

Si es así formar la base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) siguiente$:

$$C = \{p_1, p_2, p_3\}$$

Siendo la base canónica de $\mathcal{P}_2((R))$:
Sea en dicho espacio el vector $p(x) = 2 + 6x + 8x^2$. Calcular el vector de coordenadas de p en la base C usando una matriz de cambio base y comprobar el resultado.

Para comprobar si el conjunto es linealmente independiente resolvemos:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ya que la única solución a $Ax = 0$ es $\mathbf{x} = 0$, sabemos que el conjunto $\mathcal{P}_2$ es linealmente independiente.

Ya que los 3 vectores son linealmente independientes o columnas pivote, forman la base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para hacer la transformación primero necesitamos encontrar la matriz de cambio M, que lo haremos como en los problemas anteriores utilizando Gauss-Jordan:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7{,}5 & -3{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 7{,}5 & -3{,}5 & 1{,}5 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicamos la transformación a $p(x)$:

$$Mp(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 7{,}5 & -3{,}5 & 1{,}5 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Finalmente comprobamos el resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = p(x)$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

Problema 6

Estudia si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

es o no diagonalizable. En caso afirmativo:

(a) Escribe explícitamente una matriz diagonal D y dos matrices P y P^{-1} tales que $D = P^{-1}AP$. Ordenar las entradas de D de menor a mayor según se lee de izquierda a derecha.

(b) Calcular no explícitamente y sin usar fuerza bruta A^{5050}.

Para determinar si A es diagonalizable, encontramos sus autovalores y auto vectores:

$$(\lambda I_3 - A)\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff det\,(\lambda I_3 - A) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \rightarrow det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 & 1 \\ 5 & -4-\lambda & 1 \\ 4 & -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

Resolviendo $-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0$ obtenemos $\lambda_1 = 0$,$\lambda_2 = 2$,$\lambda_3 = -1$ lo que significa que la matriz **es diagnoalizable** pues obtenemos 3 autovalores distintos.

Podemos representar la matriz diagonal $D = P^{-1}AP$:

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Para encontrar las columnas de P necesitamos primero encontrar los auto vectores para cada valor en:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 & 1 \\ 5 & -4-\lambda & 1 \\ 4 & -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = -1$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 0$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 2$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dejando la variable libre $v_3 = 1$, podemos construir la matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y su matriz inversa:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -{,}5 & 0 & {,}5 \\ 1{,}5 & -1 & {,}5 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que $A = PDP^{-1}$, podemos calcular $(PDP^{-1})^{5050}$, que resultará mucho más sencillo a nivel computacional pues P y P^{-1} se irán cancelando a medida que evolucione la série y nos quedamos con:

$$A = PD^{5050}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{5050} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{5050} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -{,}5 & 0 & {,}5 \\ 1{,}5 & -1 & {,}5 \end{bmatrix}$$

Problema 7

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -10 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Calcula los autovalores de A, sus autovectores correspondintes y argumentar por qué la matriz es o no es diagonalziable. En caso positivo hallar D, P, P^{-1} y la diagonalización. Ordenar los autovalores en D de menor a mayor en sentido de lectura.

$$det\,(A - \lambda I_3) = 0 \to det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 & 3 \\ -10 & 3-\lambda & -6 \\ -10 & 2 & -5-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \to -(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$$

Lo que nos otorga los valores $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad 1 con los que procederemos a calcular los auto vectores:

Para $\lambda_1 = 1$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 3 & 0 \\ -10 & 2 & -6 & 0 \\ -10 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 0 \\ -10 & 1 & -6 & 0 \\ -10 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ya que las dimensiones de ambos espacios coinciden con la multiplicidad de sus autovalores, sabemos que la matriz es diagonizable:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \to P^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 6 \\ 10 & -2 & 7 \\ -10 & 2 & -6 \end{bmatrix} \to D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 8

Resuélvase el siguiente sistema incompatible por mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y &= 0 \\ x + 2y &= -8 \end{aligned}$$

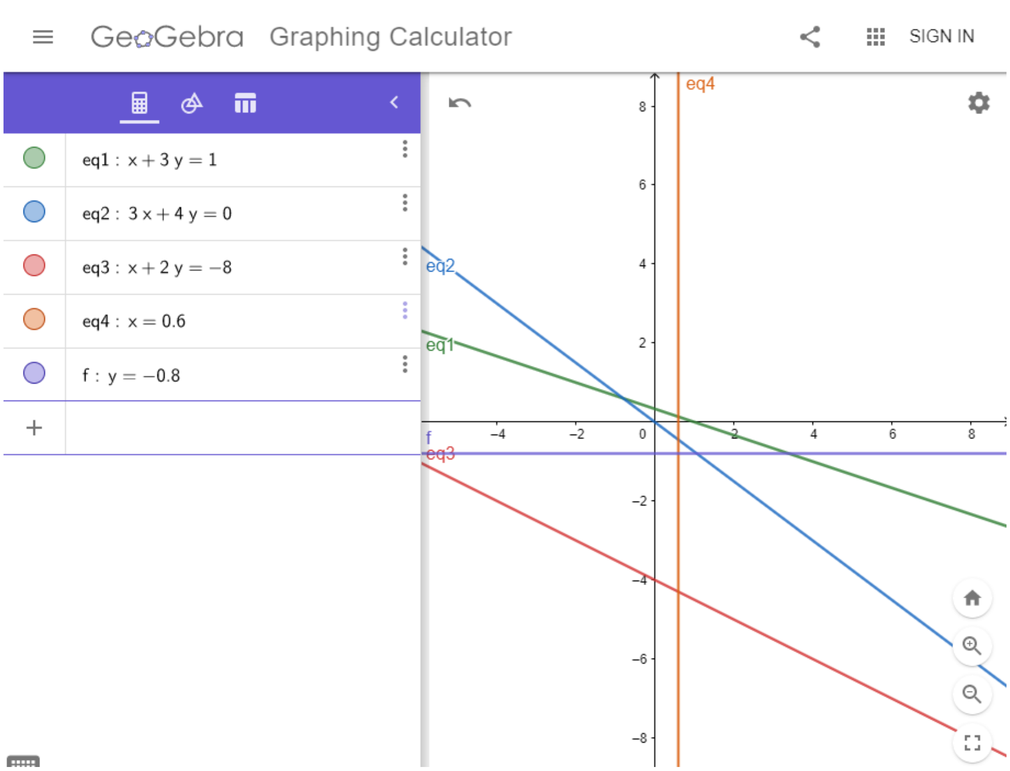
Ya que no hay ningún punto que cumple el sistema de ecuaciones anterior, podemos buscar el punto más cercano a todas las rectas trazadas por el sistema mediante el método de mínimos cuadrados.

$$A^T Ax = A^T b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Que tiene forma $Ax = b$ y se puede resolver mediante Gauss-Jordan:

$$rref\left(\left[\begin{array}{cc|c} 11 & 17 & -7 \\ 17 & 29 & -13 \end{array}\right] \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ,6 \\ 0 & 1 & -,8 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución más cercana, mediante el método de mínimos cuadrados es $x = 0{,}6$ e $y = -0{,}8$:



Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

Problema 9

Calcula la descomposición QR de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota importante: conservar los números en forma de raíces cuadradas y sus combinaciones y no explicitar sus valores en forma decimal. Si se da en forma decimal se calificará con un cero.

Procedemos a descomponer A en Q, una matriz ortonormal y R, una matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = QR$$

Para encontrar las columnas de Q, podemos utilizar la ortogonalización Gram-Schmidt:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to e_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v_1}\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0e_1 \to e_2 \frac{1}{\|\mathbf{v_2}\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - 0e_2 \to e_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v_3}\|} v_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Recopilamos todos los vectores en la matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Y finalmente:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

Problema 10

Dada la matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

calcular los autovalores y autovectores. ¿Es diagonalizable? Obtener un conjunto de autovectores ortogonales a partir de los autovectores asociados. Escribe explícitamente una matriz diagonal D (con autovalores de menor a mayor leídos de izquierda a derecha) y dos matrices Q y Q^T tales que $D = Q^T AQ$. Es decir, realiza la diagonalización ortogonal de esa matriz simétrica.

Encontramos los autovalores:

$$det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$

Y obtenemos: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ y $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. La matriz es diagnoalizable pues los 3 valores son únicos.
Procedemos a computar los autovectores y dividimos por su módulo para obtener los autovectores ortogonales:
Para $\lambda_1 = -2$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = \sqrt{2}$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} -1-\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizado:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_3 = -\sqrt{2}$:

$$rref\left(\left[\begin{array}{ccc|c} -1+\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizado:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos formar la matriz Q con los vecotres ortonormales:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Y su traspuesta:

$$Q^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Podemos entonces computar D:

$$D = Q^T A Q = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$