PROBLEMA 1:
Sea el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de dos dados, donde la variable aleatoria X es la diferencia, en valor absoluto, entre las puntuaciones obtenidas en ambos dados.

- Obtener y representar la distribución de probabilidad.

  Solución:
  Lo primero es enumerar todos los casos posibles y calcular la probabilidad de cada suceso por Laplace. Teniendo en cuesta esto se obtiene la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)=f(x)	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

  que puede ser utilizada para reconstruir un diagrama de barras con posiciones 0, 1, 2 3, 4 y 5 y de alturas 6/36, 10/36, 8/36 6/36 4/36 y 2/36 respectivamente.

- Hallar la función de distribución.

  Solución:
  Para calcular la función de distribución basta con sumar

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x),$$

  en donde $f(x)$ es la función probabilidad. Así que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F(0) = 6/36 & 0 \leq x < 1 \\ F(1) = 16/36 & 1 \leq x < 2 \\ F(2) = 24/36 & 2 \leq x < 3 \\ F(3) = 30/36 & 3 \leq x < 4 \\ F(4) = 34/36 & 4 \leq x < 5 \\ F(5) = 36/36 & 5 \leq x \end{cases}$$

- Calcular la probabilidad $P(2 \leq X \leq 4)$.

  Solución:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(1 < X \leq 4) = F(4) - F(1) = 34/36 - 16/36 = 18/36 = 0.5$$

  Alternativamente:

$$P(2 \leq X \leq 4) = \sum_{k=2}^{4} f(k) = f(2) + f(3) + f(4) = 8/36 + 6/36 + 4/36 + 18/36 = 0.5$$

- Calcular la desviación típica de X.

  Solución:

  $$\mu = E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = 0 \cdot 6/36 + 1 \cdot 10/36 + 2 \cdot 8/36 \cdots + 5 \cdot 2/36 = 70/36 = 1.94$$

  $$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2,$$

  siendo

  $$E(X^2) = \sum_i x_i^2 f(x) = 0^2 \cdot 6/36 + 1^2 \cdot 10/36 + 2^2 \cdot 8/36 \cdots + 5^2 \cdot 2/36 = 210/36 = 5.83$$

  Luego

  $$\sigma = \sqrt{5.83 - 1.94^2} = 1.44$$

PROBLEMA 2:
Muchos fenómenos de ciencias experimentales se expresan matemáticamente mediante una ley de probabilidad exponencial negativa:

$$\text{f(x)}= \begin{cases} ke^{-kx} & 0 \le x,\ k > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Determinar para qué valores de k, $f(x)$ es una función de densidad.

  Solución:
  Se ha de satisfacer que: i)$f(x) \ge 0$ y ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
  i) $f(k) \ge 0 \Longrightarrow k \ge 0$
  ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} ke^{-kx}dx = k\left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^{\infty} = 1\ \forall k \neq 0$
  Por lo tanto los valores para los que se cumplen las dos condiciones son $k > 0$.

- Hallar la expresión para la función de distribución.

  Solución:
  Integrando se obtiene fácilmente:

  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

  Para $x \le 0$ tendremos que $F(x) = 0$, dado que $f(t) = 0$

  Para $x > 0$ tendremos:

  $$F(x) = \int_0^x ke^{-kt}dt = 1 - e^{-kx}$$

- Calcular la mediana.

  Solución
  Por definición de mediana $P(x < M_e) = 0.5$ así que:

  $$P(x < M_e) = \int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = \int_0^{M_e} f(x)dx = 0.5 = 1 - e^{-kM_e} = F(M_e)$$

  Que nos da $e^{-kM_e} = 0.5$ y despejando: $M_e = -\log 0.5/k = 0.693/k$

- Calcular la media de X.

  Solución:
  La media (o esperanza) se puede calcular así:

  $$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xke^{-kx}dx$$

  que integrando por partes nos da $\mu = E(X) = 1/k$

PROBLEMA 3:
En cierto lugar, la probabilidad de que la temperatura máxima anual supere el valor de 40 grados centígrados es de $P = 0.15$. Calcular la probabilidad de que en los próximos cinco años:

- Se supere dicho valor una vez.

  Solución:
  El problema es determinar si se supera dicha temperatura así que podemos considerar que la superación significa "éxito" de que suceda algo y aplicar una distribución binomial.

  $b(x; n, p)$ será la probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos, siendo p la probabilidad de éxito en un solo ensayo. En nuestro caso tenemos $n = 5$, $p = 0.15$, así que:

  $$b(x; 5, 0.15) = \binom{5}{x} 0.15^x 0.85^{5-x},$$

  que para $x = 1$ será

  $$P = b(1; 5, 0.15) = \binom{5}{1} 0.15^1 0.85^4 = 0.39$$

  Es curioso subir el valor de p y ver qué ocurre. Si hacemos esto vemos que llega un momento en que b empieza a disminuir porque al subir la probabilidad de que algo suceda disminuye la probabilidad de que suceda solamente una vez en un periodo dado. Lo normal que en esos 5 años ocurra varias veces y no solamente una vez.

- Se supere dicho valor al menos una vez

  Solución:
  Lo mejor es restar a la probabilidad total (que es 1) la probabilidad de que no se dé el suceso:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - b(0; 5, 0.15) = 1 - \binom{5}{0} 0.15^0 0.85^5 = 1 - 0.85^5 = 0.56$$

Para estos cálculos podemos usar tanto una calculadora normal como la tabla I.

Nota: Aunque se puede efectuar el cálculo a mano y una calculadora, es posible utilizar las tablas que se han proporcionado, en concreto la tabla I y la tabla II. Es interesante comparar ambos métodos para aprender así cómo utilizar las tablas. Estas tablas son de lectura más o menos directa y no entrañan ninguna complicación. El valor de p se escoge en el eje horizontal y los valores de n en bloques señalados en la primera columna y los de x en filas señalados en la segunda columna.

Naturalmente, en todas las tablas proporcionadas no se tiene una precisión con muchos decimales, así que habrá que escoger los valores más cercanos.

PROBLEMA 4:
En los últimos 600 años se han producido 12 grandes terremotos en España. Determínese la probabilidad de que se produzcan dos en los próximos 25 años.

Ayuda: Es apropiado usar una distribución de Poisson. Además téngase en cuenta que los enunciados no suelen proporcionar λ, sino que hay que calcularla.
Además del cálculo directo se puede utilizar la tabla III de Poisson acumulada, de la cual se pueden obtener las individuales restando a un punto la acumulada del punto anterior. Nótese que a veces hay varias tablas por página.

Solución:
Podemos usar una distribución de Poisson para resolver este problema, pero no nos dan la λ, así que lo primero que hay que lo primero que hacer es calcular el número medio de terremotos cada 25 años $\lambda = 25 \cdot 12/600 = 0.5$.

Una manera de hallar lo pedido será:

$$P(x = 2) = p(2; \lambda = 0.5) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{0.5^2}{2} e^{-0.5} = 0.076$$

Otra vía es usar la Tabla III que nos da la probabilidad acumulada y restar lo acumulado hasta 2 de lo acumulado hasta 1:

$$P(x = 2) = \sum_{x=0}^{2} p(x; \lambda) - \sum_{x=0}^{1} p(x; \lambda) = 0.986 - 0.910 = 0.076$$

PROBLEMA 5:
En una estación de montaña se han observado 20 días con altura de nieve mayor que h durante un periodo de 10 años. Suponiendo que es aplicable la distribución de Poisson, calcular la probabilidad de superar dicho valor h:

- Menos de cinco veces en los próximos dos años.

Solución:
Aplicaremos una distribución de Poisson. Lo primero es calcular la media $20/10 = 2$ días por año. Así que en 2 años $\lambda = 2 \times 2 = 4$.

En dos años la probabilidad acumulada será

$$P(x < 5) = \sum_{r=0}^{4} p(r; 4) = 0.629$$

(Tabla III para $\lambda = 4$ y $x = 4$).

- Más de tres veces en el próximo año.

  Solución:
  Ahora λ será diferente al del apartado anterior, concretamente $\lambda = 2$.

  La probabilidad acumulada en un año será

$$P(X > 3) = \sum_{r=4}^{\infty} p(r; 2) = 1 - \sum_{r=0}^{3} p(r; 2) = 1 - 0.857 = 0.143$$

- Una vez en el año 2001.

  Solución:
  Obviamente da igual qué año sea, 2001 o 2025. Como $\lambda = 2$, como en el caso anterior, en un año y usando las tablas

$$P(X = 1) = \sum_{r=0}^{1} p(r; 2) - \sum_{r=0}^{0} p(r; 2) = 0.406 - 0.135 = 0.271$$

  Calculándolo directamente:

$$P(X = 1) = p(1; 2) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 2e^{-2} = 0.271$$

Pista: Poisson. De nuevo se puede usar la tabla III.

PROBLEMA 6:
Una variable se distribuye según una distribución normal de parámetros $N(2, 1)$. Calcular el percentil 90.

Pistas: Usar la tabla IV y tener en cuenta el punto 8.2 del manual.
La lectura de la tabla IV no es trivial: Los valores de $\alpha = F(x)$ se distribuyen de menor a mayor, la primera columna son los primeros dos dígitos de Z_α y la primera fila corresponde al dígito tercero de tal modo que su suma es Z_α. Por ejemplo, para $\alpha = 0.000033$ $Z = 3.9{+}0.09 = 3.99$.

Solución:
El percentil 90 nos dice que el 90 % de los valores deben estar por debajo. Como la distribución normal sólo la tenemos tabulada para el caso centrado con desviación típica igual a 1 ($N(0, 1)$), entonces hacemos un cambio de variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = X - 2$. Si miramos en la tabla IV que nos da la curva normal tipificada el 10 % (es decir, 0.1) encontramos que el valor más cercano será $\alpha = 0.1003$, valor que se obtiene para $Z_{90} = 1.28$. Pasando a la variable original con el cambio

de variable $X = Z + 2$ obtenemos $X_{90} = Z_{90} + 2 = 1.28 + 2 = 3.28$

PROBLEMA 7 :
Una de las primeras aplicaciones de la curva normal fue debida al astrónomo F. W. Bessel en 1818, que comprobó que los errores de medidas astronómicas coincidían con bastante aproximación con los previstos por Gauss con la curva normal. Suponiendo que la media de estos errores es cero y las desviación típica es 4 grados, calcúlese:

- La probabilidad de que un error no sea mayor que 7 grados.

  Nos piden $P(|X| < 7) = P(|Z| < 1.75)$, ya que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{7-0}{4} = 1.75$, luego:

  $P(|Z| < 1.75) = P(-1.75 < Z < 1.75) = P(Z > -1.75) - P(Z > 1,75) = (1 - P(Z > 1.75)) - P(Z > 1,75) = 1 - 2P(Z > 1.75) = 1 - 2 \times 0.0401 = 0.9198$

- El número esperado de errores mayores o iguales a 7 grados en 300 observaciones.

  Solución:
  En este caso esos errores mayores o iguales a 7 grados se consideran errores grandes, así que lo que realmente estamos evaluado son los errores grandes.

  $P = P(|x| > 7) = 1 - P(|x| < 7) = 1 - 0.9198 = 0.0802$ en donde nos hemos aprovechado del cálculo del apartado anterior.

  El número de errores grandes N será igual al número de observaciones n por esa probabilidad: $N = n \cdot P(|X| > 7) = 300 \times 0.080 \approx 242$. En una colección grande de observaciones habrá puntos con errores grandes.

PROBLEMA 8:
La longitud aleatoria de una pieza se distribuye con la función densidad:

$$f(x) = \frac{3}{4}(x-1)(3-x)$$

Si se considera que una pieza es correcta cuando su longitud está comprendida entre 2 y 3, ¿cuál es la probabilidad de que la pieza sea correcta?

Solución:
Una pieza es correcta si $2 \leq x \leq 3$

$$P_{correcta} = P(2 < X < 3) = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \frac{3}{4}(x-1)(3-x)dx$$

Simplificando y resolviendo la integral:

$$3/4 \int_2^3 (4x - x^2 - 3)dx = 3/4 \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right]_2^3 = 0.5$$

PROBLEMA 9:
La función densidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{f(x,y)}= \begin{cases} x+y & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Comprobar que $f(x,y)$ es una función densidad.

  Solución:

  $f(x,y) \geq 0$ se cumple. Veamos la segunda condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\left[x^2/2\right]_{x=0}^{x=1} + [yx]_{x=0}^{x=1}\right) dy = \int_0^1 (1/2+y)dy = 1/2+1/2 = 1$$

- Hallar las funciones de densidad marginal $f_1(x)$ y $f_2(y)$.

  Solución:

  Integramos solamente sobre una de las variables:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2}$$

  Análogamente, para el otro caso:

$$f_2(y) = y + \frac{1}{2}$$

- Calcular la probabilidad de que $X < 1/2$

  Solución:
  Podemos aprovechar lo hallado en el apartado anterior e integrar hasta el valor pedido:

$$P(X < 1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} f_1(x)dx = \int_0^{1/2} (x+1/2)dx = \left[x^2/2 + x/2\right]_0^{1/2} = 3/8$$

PROBLEMA 10:
Para la misma función densidad conjunta del problema anterior.

- Hallar la función de densidad condicionada de X.

  Solución:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{x+y}{y+1/2}$$

- Calcular la probabilidad de que $X < 1/2$ en el caso de que $Y = 1/4$.

  Solución:
  Podemos ver la aplicación del apartado anterior en este otro apartado.

  $$P(X < 1/2|Y = 1/4) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x|y = 1/4)dx,$$

  que utilizando el resultado del apartado anterior:

  $$\int_{0}^{1/2} \frac{x + 1/4}{1/4 + 1/2} dx = 1/3$$

- ¿Son las variables X e Y independientes?

  Si comparamos los resultados del anterior apartado y del aparatado último del ejercicio anterior: Vemos que $P(X < 1/2) \neq P(X < 1/2|Y = 1/4)$, por tanto las probabilidades de ambas variables no son independientes.

  Otra forma de verlo es comprobar si se cumple la condición necesaria (aunque no suficiente):

  $$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$$

  Como no se verifica, pues $x + y \neq (x + 1/2)(y + 1/2) = xy + 1/2(x + y) + 1/4$ entonces no son independientes.

  Además $F(x, y) = 1/2(x^2y + xy^2)$ y se tendría que verificar $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$