EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LAS UNIDADES 6, 7, 8, 9 y 10

Asignatura:	Análisis Matemático / Fundamentos Matemáticos.
Profesor responsable de la Asignatura:	Dr. Juan José Moreno García
Tipo de actividad: Título de la actividad:	Actividad de Evaluación Continua (AEC) **Ejercicios Propuestos**

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

La realización de esta primera actividad de evaluación continua va a permitir comprobar los avances realizados por el estudiante mediante la aplicación práctica de los conceptos teóricos desarrollados en las unidades correspondientes. El objetivo que se pretende conseguir es que el estudiante sea capaz de, a partir de un enunciado, encontrar las herramientas matemáticas de Cálculo necesarias para resolver el problema y que sea capaz de aplicarlas con éxito.
La evaluación de este trabajo tendrán en cuenta los siguientes puntos:

- Correcta aplicación de las expresiones matemáticas asociadas a cada uno de los enunciados propuestos y relación de conceptos vistos en estas unidades.
- Procedimiento utilizado para llevar a cabo dicha aplicación.
- Conclusión alcanzada con el análisis de los resultados obtenidos en cada caso.

No hay que olvidar argumentar los pasos que se van dando. No basta con dar sólo la solución.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 1:

Hallar los tres puntos críticos, y determinar su naturaleza, de la función:

$$f(x, y) = x^2y - x^2 - 2y^2 + 2.$$

PROBLEMA 2:

Hallar los máximos y mínimos (hay cuatro en total) que alcanza la función $f(x, y) = 3xy$ cuando (x, y) recorre la elipse

$$x^2 + y^2 + xy = 3.$$

PROBLEMA 3:

Calcular la siguiente integral:

$$I = \int\int_S \frac{1}{4} xy \, dy \, dx$$

En donde S es la región limitada por las rectas $y = x + 1$, $y = 3x - 1$ y el eje y.

PROBLEMA 4:

Calcular la integral

$$\int\int_D (4x + 2) \, dA$$

En donde D es la región encerrada por las curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

PROBLEMA 5:

Usando el cambio a coordenadas esféricas, calcular la integral

$$I = \int\int\int_\Omega e^{-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \, dx \, dy \, dz,$$

en donde Ω es todo $\mathbb{R}^3$.

PROBLEMA 6:

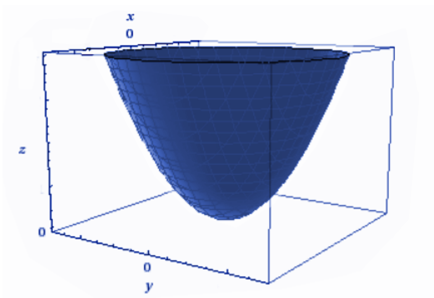
Sea Ω la región limitada por el plano $z = 2$ y por el paraboloide que está en todos los cuadrantes cuya superficie es descrita por

$$2z = x^2 + y^2.$$

Calcular

$$I = \int\int\int_\Omega (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

La situación está representada en la figura de al lado.



DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 7:

Hallar la integral curvilínea

$$\oint (x^2 + y^2)\, ds$$

sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$ para $a > 0$.

PROBLEMA 8:

Estudiemos el problema de una placa fina homogénea de longitud L y sección rectangular constante hecha de un material determinado, por ejemplo acero. Consideraremos la coordenada x como la coordenada que va a lo largo de esta lámina, siendo $y(x)$ el desplazamiento de la misma respecto a la horizontal. Vamos a suponer que está sujeta por un extremo y que se le aplica una fuerza en el otro extremo. Entonces, la lámina se flexiona una distancia $y(x)$ respecto al eje x (eje longitudinal a lo largo de la misma) que será distinta para cada punto x considerado. Nos podemos plantear hallar la ecuación de la curva resultante que describe esa deformación, o curva elástica C y, como consecuencia, el desplazamiento que se produce en el extremo en donde aplicamos la fuerza.
Según la teoría de la elasticidad, el momento de deformación $M(x)$ es proporcional a la curvatura $k(x)$ de C. Si asumimos que la placa se flexiona poco, de tal modo que tanto el desplazamiento $y(x)$ como su derivada $y'(x)$, que es tangente a C, son pequeños, entonces $(y')^2 \approx 0$ y podemos hacer la aproximación

$$k(x) = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \approx y''.$$

Bajo las condiciones de aplicabilidad de Euler-Bernoulli se cumple que

$$M(x) = k(x)EI,$$

en donde E es el módulo de Young de elasticidad del material e I el momento de inercia correspondiente a la sección de la chapa. Tanto estos parámetros como la sección no variarán a lo largo de la placa. Si juntamos todo esto, vemos que

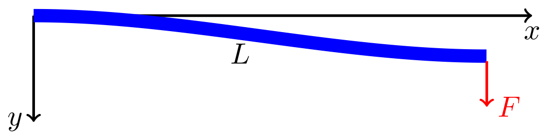
$$EIy''(x) = M(x).$$

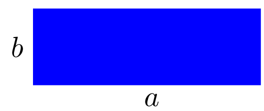
Para hacer las cosas más sencillas asumiremos ciertas aproximaciones. Entre otras, recordemos que vamos a considerar que la flexión a la que está sometida la lámina es muy pequeña, de tal modo que la pendiente es casi cero, por lo que $dy/dx \approx 0$. Además, despreciaremos el peso de la propia chapa y aplicaremos la fuerza de carga solamente en el extremo libre. Por tanto, para estas pequeñas flexiones, el desplazamiento y del extremo libre de la barra, es proporcional a la fuerza F aplicada. La función de la carga es sencilla al despreciar el peso de la propia chapa y considerar el momento de la fuerza F aplicada en el extremo libre respecto del punto (x, y), por lo que $M(x) \approx F(L - x)$, siendo F una constante (que tendrá un valor negativo si apunta hacia abajo).

Así que finalmente nos queda lo siguiente:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = F(L-x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L-x).$$

El módulo de Young caracteriza el comportamiento de un material elástico según la dirección en la que se aplica una fuerza. Para un material elástico lineal e isótropo, el módulo de Young tiene el mismo valor para una tracción que para una compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda el límite elástico. En nuestro caso, la lámina se flexionará dependiendo del valor de este módulo para el material del que esté hecha y asumiremos que la carga o fuerza no será grande y, por tanto, no superaremos el límite elástico. Para fijar un valor en concreto, consideraremos el módulo de Young de un acero de construcción típico: $E = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$.
Vamos a considerar una chapa de sección rectangular de anchura a, grosor b y longitud L. Además, nuestra lámina o *cantilever* estará en voladizo. Es decir, va a estar sujeta solamente por un extremo y estará libre por el otro, tal y como estaría un trampolín de piscina. Por tanto, en el extremo fijo (al que asignaremos que $x = 0$) se cumple que $y(0) = 0$ al no haber desplazamiento ahí y se tendrá que $y'(0) = 0$ al no haber flexión en ese punto. La fuerza F la aplicaremos en el extremo libre. En el dibujo se puede ver un esquema de la disposición del *cantilever* y la fuerza aplicada. A su derecha se muestra, ampliada, un esquema de la posible sección de la chapa de acero.





Hay que tener en cuenta que para una sección rectangular, el momento de inercia es

$$I = \frac{ab^3}{12}.$$

Además, consideraremos que $a \gg b$, con $a = 0{,}03\,\mathrm{m}$ y $b = 0{,}0008\,\mathrm{m}$ ($0{,}8\,\mathrm{mm}$). La longitud será $L = 0{,}5\,\mathrm{m}$ y aplicaremos una fuerza $F = 0{,}5\,\mathrm{N}$ justo para $x = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Como podemos ver, para poder ser realistas y que haya una flexión apreciable, el grosor del *cantilever* es muy pequeño en comparación con su anchura, por lo que será más una chapa que una barra.
¿Qué curva describe nuestro voladizo cuando aplicamos esa fuerza? ¿Cuánto se desplaza el extremo libre respecto a la horizontal?

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 9:

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + 4y' - 5y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 6.$$

PROBLEMA 10:

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' - 3y' - 18y = 18t + 6, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 6.$$

PROBLEMA 11:

(A resolver por los alumnos de IOI solamente) Resolver, usando transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5.$$

PROBLEMA 12:

(A resolver por los alumnos de IOI solamente) Resolver la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace:

$$y'' - 7y' + 10y = 4e^t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

No olvidar leer la página siguiente.

INSTRUCCIONES PARA LA REALIZACIÓN Y ENTREGA DE LA ACTIVIDAD

Criterios de valoración:
Se valorará la presentación.
Se valorará el correcto planteamiento de los ejercicios.
Se valorará la correcta solución de los ejercicios.
Se valorará que la solución dada a cada una de las cuestiones planteadas sea correcta, así como que esté bien argumentada.
Se tendrá en cuenta la correcta redacción, por lo que se pide un cuidadoso uso del idioma y una cuidada presentación, priorizándose una fácil lectura del documento.

Entrega y calificación:
La actividad cumplimentada se envía al profesor a través del Buzón de entrega del Aula Virtual. En ese mismo buzón aparece la fecha límite de entrega. Entregas después de esa fecha
Se recuerda la necesidad de identificar correctamente el documento de entrega de la tarea, indicando nombre y apellidos del alumno en la primera página del documento. El nombre del fichero constará sólo del nombre del alumno, primer apellido y AEC2.
La entrega de la tarea se hará siempre a través de un documento **pdf**, y en ningún momento se aceptarán documentos doc, docx, excel o similares, pues el sistema no permite visualizar y corregir documentos de otro tipo. **Muchas aplicaciones (incluso word) permiten volcar un documento en pdf**. Alternativamente, si se pide una solución gráfica también se podrá usar el formato postscript.
En esta asignatura, si el estudiante lo desea, podrá escanear un documento realizado a mano alzada y crear así el documento pdf **siempre que éste sea legible**, es decir, se tiene que leer muy bien para así evitar confusiones y problemas con la calificación. No se admiten fotos, ni fotos de teléfonos móviles, ni papel cuadriculado. Además, las páginas estarán convenientemente ordenadas y orientadas.
El incumplimiento de las normas anteriores puede acarrear el riesgo de que la actividad no sea calificada.
Las entregas realizadas con procesador tendrán puntuación extra.
Es importante que el documento pdf **no esté protegido frente a escritura**, porque de otro modo no se pueden hacer anotaciones sobre él que sirvan de *feedback* al estudiante.
La calificación obtenida, previa corrección y calificación por parte del profesor, se podrá consultar con carácter permanente en el apartado CALIFICACIONES del Aula Virtual.