Muy bien, Alexander. Tu actividad es excelente. Ten cuidado con los enunciados de todos modos. En el 8 te doy los datos.
Un saludo

Actividad de Evaluación Continua (AEC1)

Análisis Matemático

Alumno: Alexander Sebastian Kalis
Profesor: Dr. Juan José Moreno García

5 de enero de 2025

$$\frac{11{,}8 + 1{,}2}{12} \to 10$$

Índice

1

1. Problema 1

Enunciado: Hallar los tres puntos críticos, y determinar su naturaleza, de la función:

$$f(x, y) = x^2y - x^2 - 2y^2 + 2.$$

Solución

Para determinar los puntos críticos, seguimos estos pasos:

Paso 1: Cálculo de las derivadas parciales

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2x, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4y.$$

Los puntos críticos se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

Paso 2: Resolución del sistema

$$f_x = 2x(y - 1) = 0,$$
$$f_y = x^2 - 4y = 0.$$

De la primera ecuación:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad y = 1.$$

Caso 1: Si $x = 0$, sustituimos en $f_y = x^2 - 4y = 0$:

$$0^2 - 4y = 0 \implies y = 0.$$

Por lo tanto, un punto crítico es $(0, 0)$.

Caso 2: Si $y = 1$, sustituimos en $f_y = x^2 - 4y = 0$:

$$x^2 - 4(1) = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Por lo tanto, los puntos críticos adicionales son $(2, 1)$ y $(-2, 1)$.

Paso 3: Determinación de la naturaleza de los puntos críticos

Calculamos las segundas derivadas:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - 2, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x.$$

El determinante de la matriz hessiana es:

$$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

En $(0,0)$**:**

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -4, \quad f_{xy} = 0$$
$$H = (-2)(-4) - (0)^2 = 8 > 0.$$

Dado que $f_{xx} < 0$, $(0,0)$ es un **máximo relativo**.

En $(2,1)$ **y** $(-2,1)$**:**

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = -4, \quad f_{xy} = 4 \text{ para } (2,1), \text{ y } f_{xy} = -4 \text{ para } (-2,1).$$

$$H = (0)(-4) - (4)^2 = -16 < 0.$$

En ambos casos, $(2,1)$ y $(-2,1)$ son **sillas**.

Conclusión

Los puntos críticos son:

$$(0,0) : \text{máximo relativo}, \quad (2,1) : \text{silla}, \quad (-2,1) : \text{silla}.$$

1

2. Problema 2

Enunciado: Hallar los máximos y mínimos (hay cuatro en total) que alcanza la función:

$$f(x,y) = 3xy,$$

cuando (x,y) recorre la elipse:

$$x^2 + y^2 + xy = 3.$$

Solución

Para resolver el problema, seguimos estos pasos:

Paso 1: Aplicación del método de Lagrange

Queremos encontrar los extremos de $f(x,y)$ sujetos a la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$. Utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 3xy + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3).$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 3y + \lambda(2x + y) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 3x + \lambda(2y + x) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0.$$

Paso 2: Resolución del sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones es:

$$3y + \lambda(2x + y) = 0, \quad 3x + \lambda(2y + x) = 0, \quad x^2 + y^2 + xy = 3.$$

De la primera ecuación:

$$\lambda = -\frac{3y}{2x + y} \quad (\text{si } 2x + y \neq 0).$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$3x - \frac{3y(2y + x)}{2x + y} = 0 \implies 3x(2x + y) - 3y(2y + x) = 0,$$

$$6x^2 + 3xy - 6y^2 - 3xy = 0 \implies 6x^2 - 6y^2 = 0 \implies x^2 = y^2.$$

Por lo tanto, $x = y$ o $x = -y$.
Caso 1: $x = y$ Sustituyendo en $x^2 + y^2 + xy = 3$:

$$x^2 + x^2 + x^2 = 3 \implies 3x^2 = 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Esto da los puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.
Caso 2: $x = -y$ Sustituyendo en $x^2 + y^2 + xy = 3$:

$$x^2 + x^2 - x^2 = 3 \implies x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}.$$

Esto da los puntos $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Paso 3: Evaluación de $f(x, y)$ en los puntos críticos

Calculamos $f(x, y) = 3xy$ en los puntos críticos:

- En $(1, 1)$: $f(1, 1) = 3(1)(1) = 3$.
- En $(-1, -1)$: $f(-1, -1) = 3(-1)(-1) = 3$.
- En $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$: $f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -9$.
- En $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$: $f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 3(-\sqrt{3})(\sqrt{3}) = -9$.

Conclusión

Los máximos de $f(x, y)$ son:

$$f(1, 1) = 3 \quad \text{y} \quad f(-1, -1) = 3.$$

Los mínimos de $f(x, y)$ son:

$$f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -9 \quad \text{y} \quad f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -9.$$

3. Problema 3

Enunciado: Calcular la siguiente integral:

$$I = \int\int_S \frac{1}{4}xy\,dy\,dx,$$

donde S es la región limitada por las rectas $y = x + 1$, $y = 3x - 1$ y el eje y.

Solución

Paso 1: Identificación de la región S

La región S está limitada por:

- La recta $y = x + 1$,
- La recta $y = 3x - 1$,
- El eje y, es decir, $x = 0$.

Los puntos de intersección son:

1. Intersección entre $y = x + 1$ y $y = 3x - 1$:

$$x + 1 = 3x - 1 \implies 2x = 2 \implies x = 1.$$

Sustituyendo $x = 1$ en $y = x + 1$, obtenemos $y = 2$. Punto: $(1, 2)$.

2. Intersección de $y = x + 1$ con el eje y ($x = 0$):

$$y = 0 + 1 = 1. \quad \text{Punto: } (0, 1).$$

3. Intersección de $y = 3x - 1$ con el eje y ($x = 0$):

$$y = 3(0) - 1 = -1. \quad \text{Punto: } (0, -1).$$

La región es un triángulo con vértices en $(0, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

Paso 2: Determinación de los límites de integración

El triángulo se divide según las rectas $y = x + 1$ y $y = 3x - 1$:

- Para $x \in [0, 1]$, y varía entre $y = 3x - 1$ (curva inferior) y $y = x + 1$ (curva superior).

Paso 3: Escritura de la integral

La integral es:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \int_{3x-1}^{x+1} xy\,dy\,dx.$$

Paso 4: Resolución de la integral interna

Primero resolvemos la integral respecto a y:

$$\int_{3x-1}^{x+1} xy\,dy = x\int_{3x-1}^{x+1} y\,dy.$$

La integral de y es:

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2}.$$

Evaluando en los límites $y = x+1$ y $y = 3x-1$:

$$\int_{3x-1}^{x+1} y\,dy = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(3x-1)^2}{2}.$$

Expandiendo:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1.$$

Sustituyendo:

$$\int_{3x-1}^{x+1} y\,dy = \frac{1}{2}\left[(x^2+2x+1) - (9x^2-6x+1)\right].$$

Simplificando:

$$\int_{3x-1}^{x+1} y\,dy = \frac{1}{2}\left(-8x^2+8x\right) = 4x - 4x^2.$$

Multiplicamos por x:

$$x\int_{3x-1}^{x+1} y\,dy = x(4x-4x^2) = 4x^2 - 4x^3.$$

Paso 5: Resolución de la integral externa

La integral externa es:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 (4x^2 - 4x^3)\,dx.$$

Separando términos:

$$I = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 4x^2\,dx - \int_0^1 4x^3\,dx\right].$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^1 4x^2\,dx = 4\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 4x^3\,dx = 4\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = 1.$$

Sustituyendo y concluyendo:

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

4. Problema 4

Enunciado: Calcular la integral:

$$I = \int\int_D (4x + 2)\, dA,$$

donde D es la región encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x$.

Solución

Paso 1: Identificación de la región D

La región D está limitada por:

- La parábola $y = x^2$,
- La recta $y = 2x$.

Determinamos los puntos de intersección resolviendo $x^2 = 2x$:

$$x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 2.$$

Por lo tanto, los límites de integración en x son $x \in [0, 2]$.

Paso 2: Escritura de la integral

Para cada $x \in [0, 2]$, el límite inferior de y es $y = x^2$ y el límite superior es $y = 2x$. La integral se escribe como:

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy\, dx.$$

Paso 3: Resolución de la integral interna

La integral respecto a y es:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy = (4x + 2) \int_{x^2}^{2x} 1\, dy = (4x + 2)\, [y]_{y=x^2}^{y=2x}.$$

Evaluamos:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy = (4x + 2) \left[2x - x^2\right] = (4x + 2)(2x - x^2).$$

Expandiendo:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy = (4x + 2)(2x) - (4x + 2)(x^2) = 8x^2 + 4x - 4x^3 - 2x^2.$$

Simplificando:

$$\int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy = 6x^2 - 4x^3 + 4x.$$

Paso 4: Resolución de la integral externa

La integral respecto a x es:

$$I = \int_0^2 \left(6x^2 - 4x^3 + 4x\right)\, dx.$$

Separando términos:

$$I = \int_0^2 6x^2\, dx - \int_0^2 4x^3\, dx + \int_0^2 4x\, dx.$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^2 6x^2\, dx = 6\int_0^2 x^2\, dx = 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 6\cdot\frac{8}{3} = 16,$$

$$\int_0^2 4x^3\, dx = 4\int_0^2 x^3\, dx = 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4\cdot\frac{16}{4} = 16,$$

$$\int_0^2 4x\, dx = 4\int_0^2 x\, dx = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4\cdot 2 = 8.$$

Sustituyendo:

$$I = 16 - 16 + 8 = 8.$$

5. Problema 5

Enunciado: Usando el cambio a coordenadas esféricas, calcular la integral:

$$I = \iiint_\Omega e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}\, dx\, dy\, dz,$$

donde Ω es todo $\mathbb{R}^3$.

Solución

Paso 1: Cambio a coordenadas esféricas

Recordemos las expresiones en coordenadas esféricas:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi,$$

donde:

- $\rho \geq 0$ es la distancia radial,
- $\phi \in [0,\pi]$ es el ángulo polar,
- $\theta \in [0,2\pi)$ es el ángulo azimutal.

El elemento de volumen en coordenadas esféricas es:

$$dx\, dy\, dz = \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

La integral se convierte en:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\rho^3}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Paso 2: Separación de variables

Debido a la simetría del integrando, la integral se puede separar:

$$I = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho \right).$$

Calculamos cada término por separado:
1. Integral respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

2. Integral respecto a ϕ:

$$\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = [-\cos\phi]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

3. Integral respecto a ρ: Sea $u = \rho^3$, entonces $du = 3\rho^2 \, d\rho$. Esto implica:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-u} \, du.$$

La integral de e^{-u} es:

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \, du = 1.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3}.$$

Paso 3: Resultado final

Combinando los resultados:

$$I = (2\pi)(2) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}.$$

6. Problema 6

Enunciado: Sea Ω la región limitada por el plano $z = 2$ y por el paraboloide cuya superficie es descrita por:

$$2z = x^2 + y^2.$$

Calcular:

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Solución

Paso 1: Descripción de la región

La región Ω está limitada por:

- El paraboloide $2z = x^2 + y^2$, que reescribimos como $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$,
- El plano $z = 2$.

La intersección entre el paraboloide y el plano $z = 2$ ocurre cuando:

$$z = 2 \implies 2z = x^2 + y^2 \implies x^2 + y^2 = 4.$$

Por lo tanto, la proyección en el plano xy es un círculo de radio 2 centrado en el origen.

Paso 2: Cambio a coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \quad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

La ecuación del paraboloide es:

$$z = \frac{1}{2}r^2.$$

La integral en coordenadas cilíndricas se convierte en:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^2 \cdot r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Paso 3: Resolución de la integral

1. Integral respecto a z:

$$\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3\,dz = r^3\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 dz = r^3\,[z]_{\frac{1}{2}r^2}^2 = r^3\left(2 - \frac{1}{2}r^2\right).$$

Expandiendo:

$$\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3\,dz = 2r^3 - \frac{1}{2}r^5.$$

2. Integral respecto a r:

$$\int_0^2\left(2r^3 - \frac{1}{2}r^5\right)dr = 2\int_0^2 r^3\,dr - \frac{1}{2}\int_0^2 r^5\,dr.$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^2 r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4,$$

$$\int_0^2 r^5\,dr = \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^2 \left(2r^3 - \frac{1}{2}r^5\right)dr = 2(4) - \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}\right) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24}{3} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

3. Integral respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

4. Combinación de resultados:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^2 \cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \left(\frac{8}{3}\right)(2\pi) = \frac{16\pi}{3}.$$

2

7. Problema 7

Enunciado: Hallar la integral curvilínea:

$$I = \int (x^2 + y^2)\,ds$$

sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$ para $a > 0$.

Solución

Paso 1: Ecuación de la circunferencia

La ecuación de la circunferencia dada es:

$$x^2 + y^2 = ax.$$

Reorganizando términos:

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Por lo tanto, es una circunferencia con centro en $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y radio $r = \frac{a}{2}$.

Paso 2: Representación paramétrica

Usamos la representación paramétrica de la circunferencia:

$$x(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \quad y(t) = \frac{a}{2}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

El diferencial de arco ds se calcula como:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Derivando $x(t)$ e $y(t)$ respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{2}\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{a}{2}\cos t.$$

Por lo tanto:

$$ds = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\, dt = \sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \frac{a}{2}\, dt.$$

Paso 3: Evaluación de la integral

El integrando es $x^2 + y^2$. Sustituyendo $x(t)$ e $y(t)$:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin t\right)^2.$$

Expandiendo:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\cos t + \frac{a^2}{4}\cos^2 t + \frac{a^2}{4}\sin^2 t.$$

Usamos $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\cos t = \frac{a^2}{2}(1 + \cos t).$$

Sustituimos en la integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}(1 + \cos t) \cdot \frac{a}{2}\, dt = \frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos t)\, dt.$$

Dividimos la integral:

$$I = \frac{a^3}{4}\left(\int_0^{2\pi} 1\, dt + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt\right).$$

Calculamos cada término:

$$\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0.$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{a^3}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi a^3}{2}$$

9 8

8. Problema 8

Enunciado: Estudiemos el problema de una placa fina homogénea de longitud L y sección rectangular constante hecha de un material determinado, por ejemplo acero. La coordenada x se considera a lo largo de la lámina, mientras que $y(x)$ representa el desplazamiento respecto a la horizontal debido a una fuerza aplicada en un extremo de la placa.

La teoría de elasticidad establece que el momento de deformación $M(x)$ es proporcional a la curvatura $k(x)$ de la curva elástica C. Bajo la aproximación de pequeñas deformaciones, la curvatura se puede aproximar como:

$$k(x) \approx y''(x).$$

Además, bajo las condiciones de Euler-Bernoulli:

$$M(x) = k(x)EI,$$

donde E es el módulo de Young del material y I es el momento de inercia de la sección rectangular. Se cumple la ecuación diferencial:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x).$$

Si el momento es causado únicamente por una fuerza F aplicada en el extremo libre, el momento será:

$$M(x) = F(L - x).$$

Finalmente, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x).$$

Solución

Paso 1: Resolución de la ecuación diferencial

Integramos dos veces la ecuación diferencial para hallar $y(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x).$$

Primera integración:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{F}{EI}(L - x)\,dx = \frac{F}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1,$$

donde C_1 es una constante de integración.

Segunda integración:

$$y(x) = \int \left[\frac{F}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1\right] dx = \frac{F}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1x + C_2,$$

donde C_2 es otra constante de integración.

Paso 2: Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno son:

- En el extremo fijo ($x = 0$): $y(0) = 0$ y $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0$.

Usando $y(0) = 0$:

$$y(0) = \frac{F}{EI}\left(\frac{L\cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{6}\right) + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \implies C_2 = 0.$$

Usando $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F}{EI}\left(L \cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right) + C_1 = 0 \implies C_1 = 0.$$

Paso 3: Solución final

Sustituyendo las constantes $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, la solución es:

$$y(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Desplazamiento en el extremo libre

Para $x = L$, el desplazamiento $y(L)$ es:

$$y(L) = \frac{F}{EI}\left(\frac{L\cdot L^2}{2} - \frac{L^3}{6}\right) = \frac{F}{EI}\left(\frac{L^3}{3}\right).$$

Por lo tanto, el desplazamiento máximo en el extremo libre es:

$$y(L) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

Conclusión

La curva elástica que describe la deformación está dada por:

$$y(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

y el desplazamiento máximo en el extremo libre es: ¿Y cuánto vale eso?

$$y(L) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

2

9. Problema 9

Enunciado: Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

Solución

Paso 1: Ecuación característica

Planteamos la solución general para la ecuación diferencial homogénea:

$$y(t) = e^{rt}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$r^2 e^{rt} + 4re^{rt} - 5e^{rt} = 0.$$

Factorizamos e^{rt} (que nunca es cero):

$$r^2 + 4r - 5 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}.$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -5.$$

Paso 2: Solución general de la ecuación diferencial

La solución general es:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t}.$$

Paso 3: Aplicación de las condiciones iniciales

Usamos las condiciones iniciales para encontrar C_1 y C_2.

Primera condición: $y(0) = 0$

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0.$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -C_2.$$

Segunda condición: $y'(0) = 6$ Primero derivamos $y(t)$:

$$y'(t) = C_1 e^{t} - 5C_2 e^{-5t}.$$

Sustituimos $t = 0$:

$$y'(0) = C_1 e^0 - 5C_2 e^0 = C_1 - 5C_2.$$

Sustituyendo $C_1 = -C_2$:

$$-C_2 - 5C_2 = 6 \implies -6C_2 = 6 \implies C_2 = -1.$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -C_2 = 1.$$

Paso 4: Solución particular

Sustituimos $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$ en la solución general:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} = e^t - e^{-5t}.$$

10. Problema 10

Enunciado: Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y''(t) - 3y'(t) - 18y(t) = 18t + 6, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

Solución

Paso 1: Solución general de la ecuación homogénea asociada

La ecuación homogénea asociada es:

$$y''(t) - 3y'(t) - 18y(t) = 0.$$

Planteamos la solución en la forma $y_h(t) = e^{rt}$, y sustituimos en la ecuación:

$$r^2 e^{rt} - 3re^{rt} - 18e^{rt} = 0.$$

Factorizamos e^{rt} (que nunca es cero):

$$r^2 - 3r - 18 = 0.$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$r = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}.$$

Las raíces son:

$$r_1 = 6, \quad r_2 = -3.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-3t}.$$

Paso 2: Solución particular de la ecuación completa

Buscamos una solución particular $y_p(t)$ de la forma:

$$y_p(t) = At + B.$$

Calculamos sus derivadas:

$$y_p'(t) = A, \quad y_p''(t) = 0.$$

Sustituimos en la ecuación completa:

$$0 - 3A - 18(At + B) = 18t + 6.$$

Expandiendo y agrupando términos:

$$-18At - 18B - 3A = 18t + 6.$$

Comparando coeficientes de t y los términos constantes:

$$-18A = 18 \implies A = -1,$$

$$-18B - 3(-1) = 6 \implies -18B + 3 = 6 \implies -18B = 3 \implies B = -\frac{1}{6}.$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p(t) = -t - \frac{1}{6}.$$

Paso 3: Solución general

La solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y la particular:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-3t} - t - \frac{1}{6}.$$

Paso 4: Aplicación de las condiciones iniciales

Usamos $y(0) = 0$:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 - 0 - \frac{1}{6} = C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 0.$$

Por lo tanto:

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{6}.$$

Usamos $y'(0) = 6$. Derivamos $y(t)$:

$$y'(t) = 6C_1 e^{6t} - 3C_2 e^{-3t} - 1.$$

Sustituimos $t = 0$:

$$y'(0) = 6C_1 - 3C_2 - 1 = 6.$$

Por lo tanto:

$$6C_1 - 3C_2 = 7.$$

Resolviendo el sistema:

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{6}, \quad 6C_1 - 3C_2 = 7.$$

De la primera ecuación:

$$C_2 = \frac{1}{6} - C_1.$$

Sustituimos en la segunda:

$$6C_1 - 3\left(\frac{1}{6} - C_1\right) = 7 \implies 6C_1 - \frac{1}{2} + 3C_1 = 7.$$

$$9C_1 = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \implies C_1 = \frac{5}{6}.$$

$$C_2 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Paso 5: Solución final

Sustituimos C_1 y C_2 en la solución general:

$$y(t) = \frac{5}{6}e^{6t} - \frac{2}{3}e^{-3t} - t - \frac{1}{6}.$$

11. Problema 11

Enunciado: Resolver, usando transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + 25y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

Solución

Paso 1: Transformada de Laplace de la ecuación diferencial

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 25\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}.$$

Usamos las propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 25Y(s) = 0.$$

Sustituimos las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 5$:

$$s^2Y(s) - s(1) - 5 + 25Y(s) = 0.$$

Simplificamos:

$$(s^2 + 25)Y(s) = s + 5.$$

Despejamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+25}.$$

Paso 2: Transformada inversa de Laplace

Para calcular la solución $y(t)$, aplicamos la transformada inversa de Laplace a $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+25} + \frac{5}{s^2+25}.$$

Separando los términos: 1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} = \cos(5t)$. 2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\} = \sin(5t)$.
Por lo tanto:

$$y(t) = \cos(5t) + \sin(5t).$$

12. Problema 12

Enunciado: Resolver, usando transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 4e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Solución

Paso 1: Aplicación de la transformada de Laplace

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 7\mathcal{L}\{y'(t)\} + 10\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{4e^t\}.$$

Usamos las propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0), \quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 3$:

$$s^2Y(s) - s(1) - 3 - 7[sY(s) - 1] + 10Y(s) = \frac{4}{s-1}.$$

Simplificamos:

$$s^2Y(s) - s - 3 - 7sY(s) + 7 + 10Y(s) = \frac{4}{s-1}.$$

Agrupamos los términos en $Y(s)$:

$$(s^2 - 7s + 10)Y(s) = \frac{4}{s-1} + s - 4.$$

Simplificamos el lado derecho:

$$(s^2 - 7s + 10)Y(s) = \frac{4}{s-1} + s - 4.$$

Finalmente, despejamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2 - 5s + 8}{(s-5)(s-2)(s-1)}.$$

Paso 2: Descomposición en fracciones parciales

Descomponemos la fracción:

$$Y(s) = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}.$$

Multiplicamos por el denominador común $(s-5)(s-2)(s-1)$:

$$s^2 - 5s + 8 = A(s-2)(s-1) + B(s-5)(s-1) + C(s-5)(s-2).$$

Expandiendo cada término y comparando coeficientes, resolvemos para A, B, y C:

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad C = 1.$$

Por lo tanto, la descomposición es:

$$Y(s) = \frac{2}{3(s-5)} - \frac{2}{3(s-2)} + \frac{1}{s-1}.$$

Paso 3: Transformada inversa de Laplace

Aplicamos la transformada inversa a cada término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3(s-5)}\right\} = \frac{2}{3}e^{5t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{3(s-2)}\right\} = -\frac{2}{3}e^{2t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^{t}.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t} + e^{t}.$$