<u>Soluciones a los ejercicios de auto-aprendizaje de las unidades 4, 5 y 6</u>

PROBLEMA 1

Para obtener y representar la distribución de probabilidad, hay que enumerar todos los casos posibles y hallar la probabilidad por la Regla de Laplace:

1	1	2	3	4	5	6
Diferencia en valor absoluto	0	1	2	3	4	5

2	1	2	3	4	5	6
Diferencia en valor absoluto	1	0	1	2	3	4

3	1	2	3	4	5	6
Diferencia en valor absoluto	2	1	0	1	2	3

4	1	2	3	4	5	6
Diferencia en valor absoluto	3	2	1	0	1	2

5	1	2	3	4	5	6
Diferencia en valor absoluto	4	3	2	1	0	1

6	1	2	3	4	5	6
Diferencia en valor absoluto	5	4	3	2	1	0

Con estos datos nuestra tabla de probabilidades es la siguiente:

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)=f(x)	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

La función de distribución es la siguiente:

$$F(X)=\sum f(x)$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{para } x<0 \\ 6/36 & \text{para } 0<x<1 \\ 16/36 & \text{para } 1<x<2 \\ 24/36 & \text{para } 2<x<3 \\ 30/36 & \text{para } 3<x<4 \\ 34/36 & \text{para } 4<x<5 \\ 36/36 & \text{para } x\geq 5 \end{cases}$$

Para calcular $P(2\leqslant x\leqslant 4)=F(4)-F(1)=34/36-16/36=18/36=0{,}5$

O también $P(2\leqslant x\leqslant 4)=f(2)+f(3)+f(4)=8/36+6/36+4/36=18/36=0{,}5$

Para calcular la desviación típica de X, sabemos σ = $\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}$

Vamos a calcular la E(X) = media = $\sum xif(xi)$ = 0*6/36+.....+5*2/36=1,94

Vamos a calcular la E(X²) = $\sum xi^2 f(xi)$ =0²*6/36+......+5²*2/36=5,83

Entonces σ= $\sqrt{5{,}83-1{,}94^2}=1{,}44$

PROBLEMA 2

Para que una función sea de densidad, la integral en todo su dominio tiene que dar 1. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$; En nuestro caso $\int_{0}^{\infty} k\,e^{-kx}\,dx=1\ \forall\ k\neq 0\ en\ nuestro\ caso\ para\ k>0$

La función de distribución es $F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Para $x\leqslant 0$ tenemos F(x) = 0, dado que f(x) = 0 en ese dominio.

Para $x>0$ tenemos $F(x)=\int_{0}^{x} k\,e^{-kt}\,dt=1-\mathrm{e}^{-kx}$

Para calcular la mediana necesitamos que $P(x<Me)=0{,}5$

Entonces $P(x<Me)=\int_{-\infty}^{Me} f(x)\,dx=\int_{0}^{Me} f(x)\,dx=0{,}5=1-\mathrm{e}^{-kMe}$

despejando Me= (-Ln 0,5)/k=0,693/k

Para calcular la media necesitamos μ = E(X)= $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_{0}^{\infty} xk\,e^{-kx}\,dx$ es una integral por partes. (Recordatorio del Método de Integración de por partes $\int udv=uv-\int vdu$ donde si tenemos como en este caso un polinomio que es la x y una exponencial, la x es u y la exponencial el dv)

μ = E(X)= 1/k

PROBLEMA 3

En este problema hay una probabilidad de éxito p=0,15 y una muestra n = 5, por lo tanto se puede aproximar por una Binomial B(n,p) = B(5, 0,15).

Nos piden la probabilidad de que se supere dicho valor una vez, por lo tanto x=1,

entonces $P(x=1)=\binom{5}{1}0{,}15^{1}0{,}85^{4}=0{,}39$

Para calcular la probabilidad de que se supere dicho valor al menos una vez es

$$P(x\geqslant 1)=1-P(0)=1-[\binom{5}{0}0{,}15^{0}0{,}85^{5}]=1-0{,}85^{5}=0{,}56$$

PROBLEMA 4

Para considerar en este problema una Poisson, necesitamos su parámetro λ, que lo vamos a calcular haciendo np, siendo n= 25 y p= 12/600. Entonces λ=np=0,5.

$$P(x=2)=\frac{0{,}5^{2}}{2!}\mathrm{e}^{-0{,}5}=0{,}076$$

PROBLEMA 5

X es una variable aleatoria N(100,9), queremos hallar la probabilidad $P(80\leqslant X\leqslant 100)$ para ello tenemos que Tipificar la variable para convertirla en Z que es una variable N(0,1), al proceso del cambio de variable para poder hallar probabilidades en la tabla de la N(0,1) se llama tipificar. Es muy importante.

Z=(X-μ)/σ y Z es una N(0,1)

En nuestro caso $Z=\frac{X-100}{9}$ entonces tenemos que realizar el siguiente proceso:

$$P(80 \leqslant X \leqslant 100) = P(\frac{80-100}{9} \leqslant Z \leqslant \frac{100-100}{9}) = P(\frac{-20}{9} \leqslant Z \leqslant 0) = P(-2{,}22 \leqslant Z \leqslant 0) \quad =$$

$$= \quad P(Z \leqslant 0) - P(Z \leqslant -2{,}22) = P(Z \leqslant 0) - P(Z > 2{,}22) = P(Z \leqslant 0) - [1 - P(Z \leqslant 2{,}22)] \quad =$$

= 0,5-[1-0,9868]=0,4868

PROBLEMA 6

La distribución de X = “ Acierto en tiros libres” sigue una distribución Binomial de n= 50 y p= 0,87.

Para saber la probabilidad P(x= 45), se puede hacer por la binomial $\binom{50}{45} 0{,}87^{45} 0{,}13^{5}$

Si queremos aproximarlo por la Normal, μ = np = 43,5 y σ = $\sqrt{npq}$ = 2,38

Entonces tenemos una Normal N(43,5, 2,38)

$P(x=45) = P(Z = \frac{45-43{,}5}{2{,}38}) = P(Z=0{,}63) = 0$ **Porque una probabilidad de P(Z=K) siempre es cero. Es muy importante recordar esto, así que para este apartado sólo podéis obtener el resultado por la binomial.**

Para el apartado siguiente es mejor aproximar a la Normal porque nos piden la probabilidad $P(x \geqslant 42)$, entonces podríamos realizar la binomial y realizar muchos cálculos

$\binom{50}{42} 0{,}87^{42} 0{,}13^{8}$ +......+ $\binom{50}{50} 0{,}87^{50} 0{,}13^{0}$

Con la normal, sólo hay que tipificar y mirar la tabla N(0,1)

$$P(x \geqslant 42) = 1 - P(x \leqslant 42) = 1 - P(Z \leqslant \frac{42-43{,}5}{2{,}38}) = 1 - P(Z \leqslant -0{,}63) = 1 - [1 - P(Z \leqslant 0{,}63)] \quad =$$

$$P(Z \leqslant 0{,}63) = 0{,}7357$$

PROBLEMA 7

Sea X una variable aleatoria N(4,3), vamos a tipificar para hallar la probabilidad pedida y el valor de a en la segunda probabilidad.

$$P(3{,}4 \leqslant x \leqslant 4{,}6) = P(\frac{3{,}4-4}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{4{,}6-4}{3}) = P(Z \leqslant 0{,}2) - P(Z \leqslant -0{,}2) \quad =$$

=0,5793-(1-0,5793)=0,1586

Para el segundo apartado, vamos a tipificar, vamos a encontrar el valor de a que cumpla la probabilidad que nos resulte:

$$P(4-6\mathrm{a} \leqslant x \leqslant 4+6\mathrm{a}) = P(\frac{-6\mathrm{a}}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{6\mathrm{a}}{3}) = P(-2\mathrm{a} \leqslant Z \leqslant 2\mathrm{a}) \quad =$$

$$= \quad P(Z \leqslant 2\mathrm{a}) - P(Z \leqslant -2\mathrm{a}) = P(Z \leqslant 2\mathrm{a}) - [1 - P(Z \leqslant 2\mathrm{a})] = 2\mathrm{P}(Z \leqslant 2\mathrm{a}) - 1 = 0{,}75 \quad =$$

= $P(Z \leqslant 2a) = 0{,}875 ;\ 2a = 1{,}15 ;\ a = 0{,}575$

PROBLEMA 8

$P(2<x<3)=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3 3/4(x-1)(3-x)\,dx=0{,}5$ realizando cálculos, queda un polinomio de segundo grado que es una integral inmediata.

PROBLEMA 9

Para comprobar que f(x) es una función de densidad, debemos realizar la integral en todo su dominio y que el resultado sea 1. Como es una función en doble variable, la integral es doble.

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dxdy = 1$$

Las funciones de densidad marginales son:

$$f_1(x)=\int_0^1 (x+y)\,dy = x+\frac{1}{2}$$
$$f_2(y)=\int_0^1 (x+y)\,dx = y+\frac{1}{2}$$

$$P(x<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} (x+\frac{1}{2})\,dx=\frac{3}{8}$$

PROBLEMA 10

La función de densidad condicionada de X se define $f(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}=\dfrac{x+y}{y+1/2}$

La probabilidad $P(X<1/2/Y=1/4)=\int_0^{\frac{1}{2}} (\dfrac{x+1/4}{1/4+1/2})\,dx=1/3$

Si comparamos las probabilidades de $P(x<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} (x+\frac{1}{2})\,dx=\frac{3}{8}$ con

$P(X<1/2/Y=1/4)=\int_0^{\frac{1}{2}} (\dfrac{x+1/4}{1/4+1/2})\,dx=1/3$ observamos que no son iguales, por lo tanto

demostramos que no son independientes.