UNIDAD DIDÁCTICA

3 TEORÍA DE JUEGOS DE SUMA CERO CON ESTRATEGIAS MIXTAS

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Introducción
2. Planteamiento del problema en la hoja de cálculo
   2.1. Confirmación de que no hay punto silla
   2.2. Adecuación del problema
3. Utilización del complemento Solver
   3.1. Jugador 1
   3.2. Jugador 2
4. Análisis de los resultados

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

EJERCICIOS VOLUNTARIOS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

Esta Unidad didáctica se va a centrar en la resolución de juegos de suma cero mediante el uso de estrategias mixtas, para el caso de que el método gráfico no pueda aplicarse. En este tipo de juegos no se ha encontrado un punto silla y se va a realizar un estudio de las probabilidades de cada una de las estrategias para cada jugador. Se realizará mediante la ayuda de un *software* de optimización, en concreto con el complemento Solver de LibreOffice, aunque con Microsoft Excel se hace de manera prácticamente análoga.

Se explicará cómo realizar el planteamiento del problema en la hoja de cálculo, viendo qué casillas hay que incorporar, con sus operaciones necesarias. Asimismo se explicarán detalladamente los pasos que hay que realizar por cada uno de los dos jugadores para incluir todas las restricciones en el complemento Solver.

Una vez ejecutado el complemento, se tendrá acceso a la solución. La interpretación de la misma dirá las probabilidades asociadas a cada estrategia y el pago promedio del juego que se tendría con ellas.

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

1. INTRODUCCIÓN

En la Unidad 2 hemos visto cómo resolver juegos de suma cero cuando no existe punto de equilibrio mediante el método gráfico. Este método tiene el inconveniente de que uno de los jugadores tiene que tener como máximo 2 estrategias, lo que hace que en muchas ocasiones no sea válido para resolver este tipo de problemas. Para aquellos casos en los que los dos jugadores tienen como mínimo tres estrategias no dominadas cada uno de ellos, la mejor opción es resolverlo con ayuda del complemento Solver de las hojas de cálculo. En concreto, en esta Unidad se realizará con el de LibreOffice, aunque con Microsoft Excel se hace de manera prácticamente análoga.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA EN LA HOJA DE CÁLCULO

Vamos a mostrar cómo realizarlo con ayuda de un ejemplo. El punto de partida para este tipo de juegos es la matriz de pagos. Para este caso, el jugador 1 tiene 4 posibles estrategias, mientras que el jugador 2 tiene 3 estrategias. Para cada combinación posible de estrategias se tienen los pagos estimados.

Figura 1. **Problema propuesto**

Teoría de juegos de suma cero con estrategias mixtas

		Jugador 2		
	Estrategias	**1**	**2**	**3**
Jugador 1	**1**	7	3	-1
	2	-3	2	4
	3	1	-4	3
	4	5	0	-2

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

2.1. CONFIRMACIÓN DE QUE NO HAY PUNTO SILLA

Vamos a comprobar que no hay punto silla. Se determina el máximo por columna y el mínimo por fila, y se obtiene el minimax, así como el maximin.

Figura 2. **No hay punto de equilibrio**

Teoría de juegos de suma cero con estrategias mixtas

		Jugador 2				
	Estrategias	1	2	3	Mínimo	Maximin
Jugador 1	1	7	3	-1	-1	
	2	-3	2	4	-3	
	3	1	-4	3	-4	
	4	5	0	-2	-2	
	Máximo	7	3	4		
	Minimax					

Como el minimax es 3 y el maximin es –1, no coinciden y significa que no hay punto silla. Por tanto, no hay una solución estable y se va a analizar mediante estrategias mixtas. El objetivo será determinar las probabilidades de cada una de las estrategias de los dos jugadores de cara a encontrar una estrategia mixta óptima.

2.2. ADECUACIÓN DEL PROBLEMA

Las **casillas que se van a añadir** a la matriz de pagos son las siguientes:

- La función objetivo del jugador 1 que buscará maximizar, mientras que la función objetivo del jugador 2 buscará minimizar.
- Las probabilidades asociadas a cada estrategia tanto para el jugador 1 como para el jugador 2.
- El valor esperado (VE) de cada estrategia en función de las probabilidades asociadas.

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Figura 3. **Nuevas casillas que hay que añadir**

Teoría de juegos de suma cero con estrategias mixtas

				Jugador 2			
			Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Suma Prob
	Max Z		Estrategias	1	2	3	VE
Jugador 1	Prob 1		1	7	3	-1	
	Prob 2		2	-3	2	4	
	Prob 3		3	1	-4	3	
	Prob 4		4	5	0	-2	
	Suma Prob		VE				

Empecemos con los cálculos básicos que debemos realizar:

A) Celdas suma de probabilidades

La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

Figura 4. **Suma de probabilidades del jugador 1**

Arial 10

D12 =SUMA(D8:D11)

Teoría de juegos de suma cero con estrategias mixtas

				Jugador 2			
			Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Suma Prob
	Max Z		Estrategias	1	2	3	VE
Jugador 1	Prob 1		1	7	3	-1	
	Prob 2		2	-3	2	4	
	Prob 3		3	1	-4	3	
	Prob 4		4	5	0	-2	
	Suma Prob	0	VE				

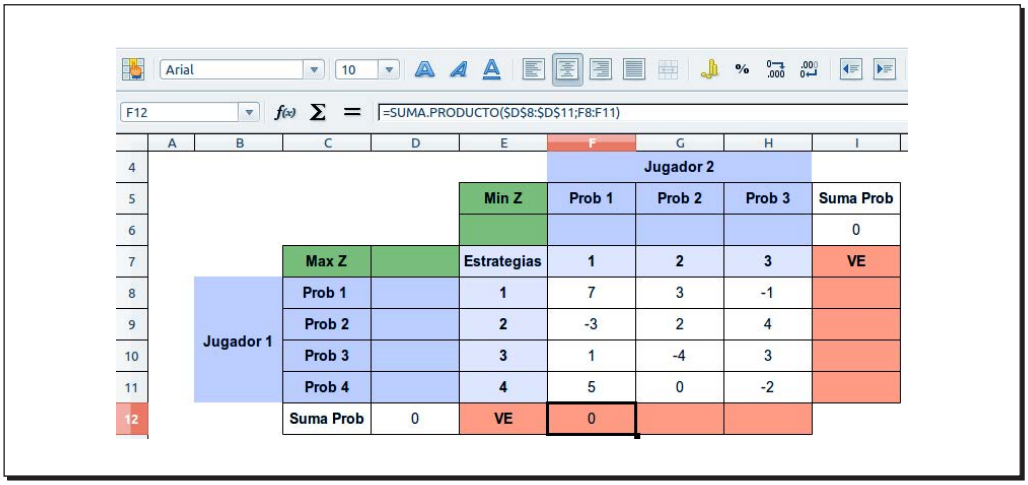
"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Figura 5. **Suma de probabilidades del jugador 2**

B) Celdas de valor esperado

Se usará la función suma.producto, que multiplicará todos los pagos de una estrategia por sus probabilidades y las sumará.

Figura 6. **Valor esperado para estrategia 1 del jugador 2**



"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Figura 7. **Valor esperado para estrategia 2 del jugador 2**

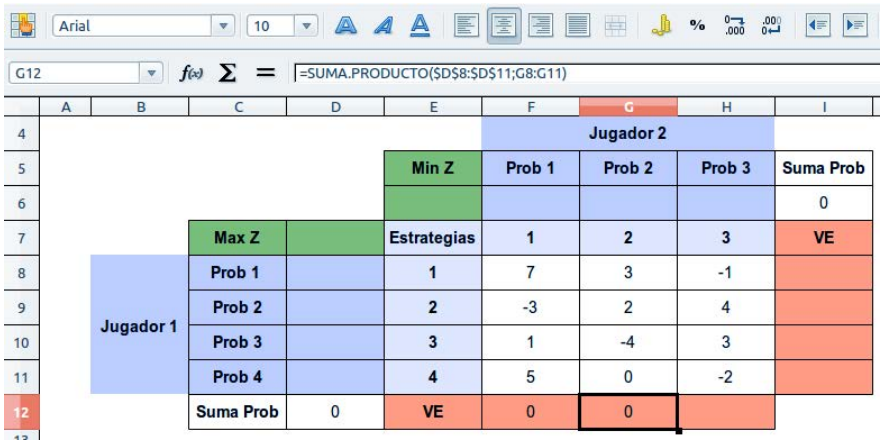
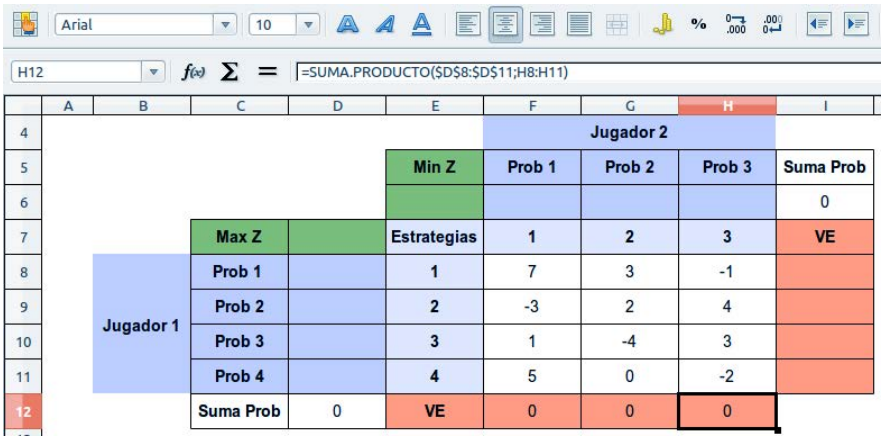


Figura 8. **Valor esperado para estrategia 3 del jugador 2**



"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Figura 9. **Valor esperado para estrategia 1 del jugador 1**

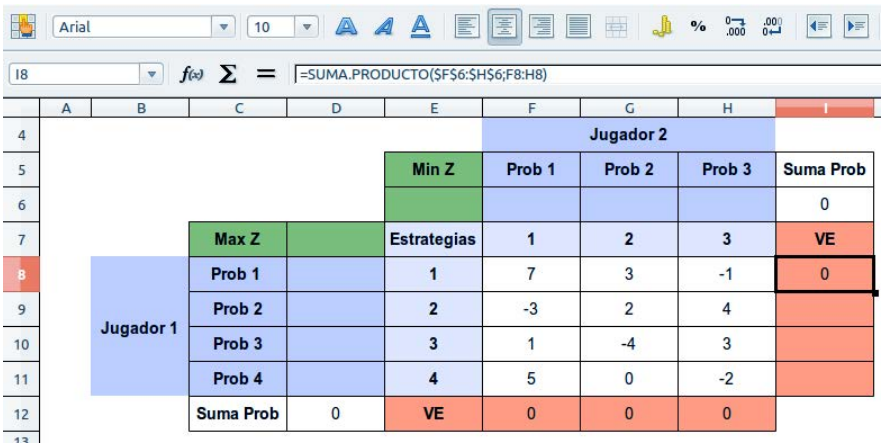
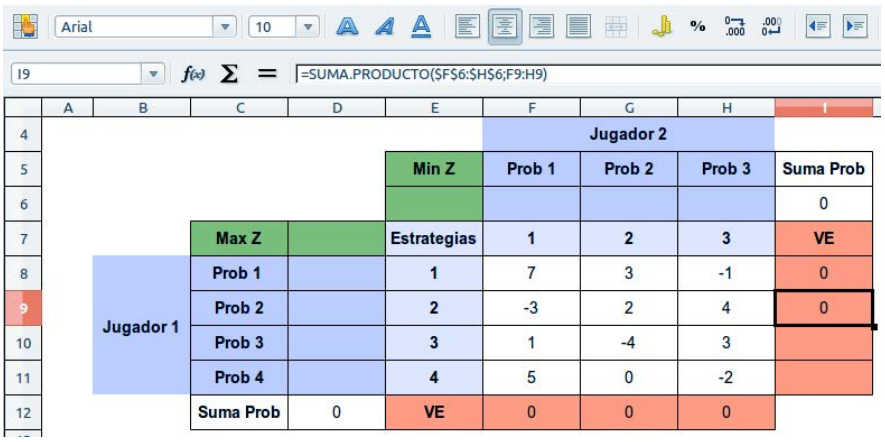


Figura 10. **Valor esperado para estrategia 2 del jugador 1**



"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Figura 11. **Valor esperado para estrategia 3 del jugador 1**

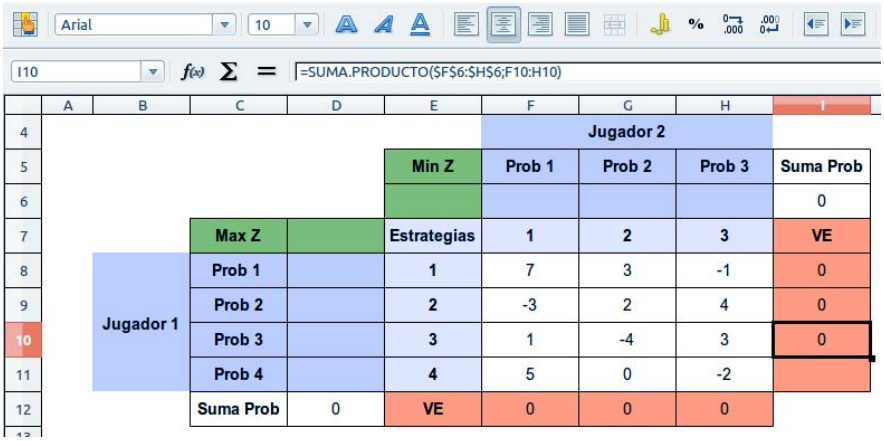
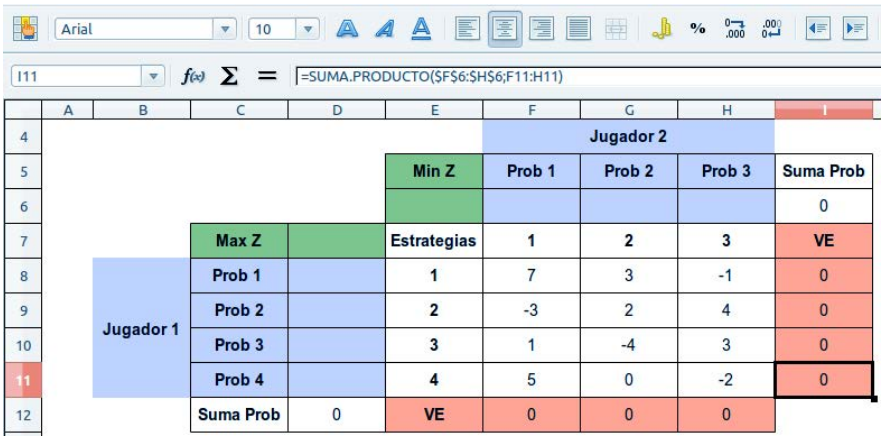


Figura 12. **Valor esperado para estrategia 4 del jugador 1**

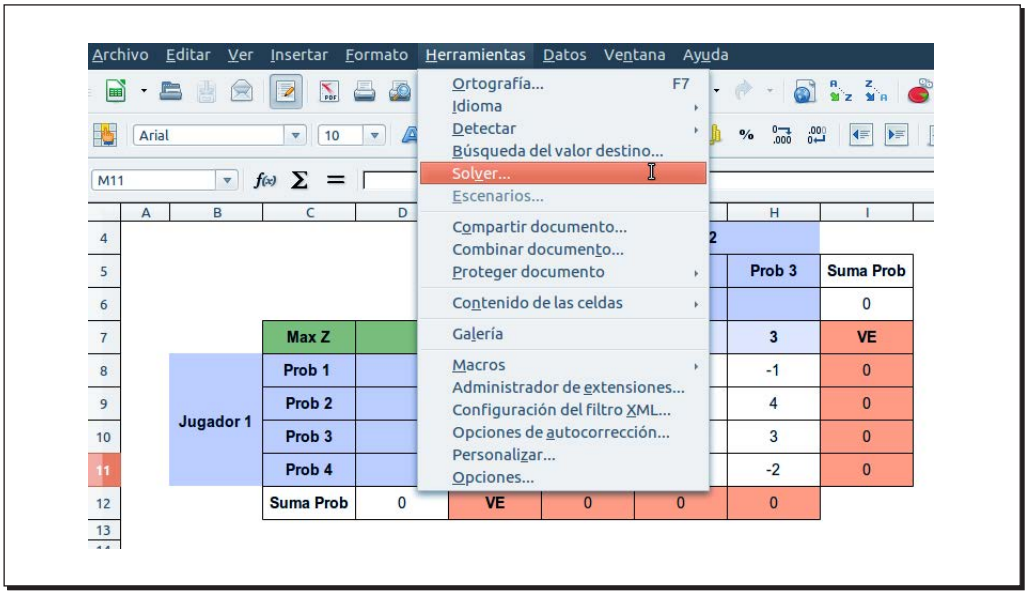


"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

3. UTILIZACIÓN DEL COMPLEMENTO SOLVER

Ahora ya se puede utilizar el complemento Solver. En LibreOffice está en Herramientas/Solver. Este complemento utiliza técnicas de programación lineal para obtener la solución al juego.

Figura 13. **Herramientas/Solver**



3.1. JUGADOR 1

Vamos a comenzar con el jugador 1. Hay que rellenar los siguientes campos:

- Objetivo de celda: la casilla de la función objetivo.
- Se busca maximizar.
- Al cambiar las celdas: se seleccionan las de la función objetivo y probabilidades.

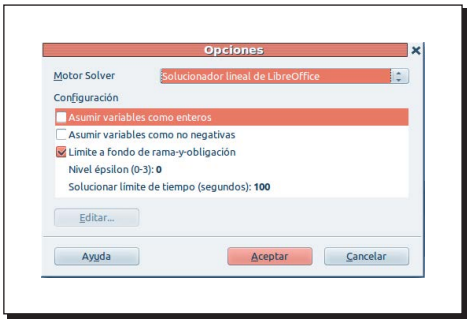
Figura 14. **Solver para jugador 1**

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Las restricciones que hay que poner serán las siguientes:

- Todas las probabilidades son mayor o igual a cero.
- La suma de probabilidades es 1.
- Los valores esperados por el jugador 2 son mayores o iguales a la función objetivo.

Figura 15. **Opciones de Solver**



En Opciones hay que asegurarse de que se esté usando el modelo lineal.

Ya se puede pulsar el botón de Solucionar y se tendrán las probabilidades del jugador 1 y su pago esperado. El resultado será:

Figura 16. **Solución para jugador 1**

Teoría de juegos de suma cero con estrategias mixtas

				Jugador 2			
			Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Suma Prob
							0
	Max Z	1,74285714	Estrategias	1	2	3	VE
Jugador 1	Prob 1	0,42857143	1	7	3	-1	0
	Prob 2	0,45714286	2	-3	2	4	0
	Prob 3	0,11428571	3	1	-4	3	0
	Prob 4	0	4	5	0	-2	0
	Suma Prob	1	VE	1,74285714	1,74285714	1,74285714	

3.2. JUGADOR 2

Ahora vamos a realizar lo análogo para el jugador 2:

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

- Objetivo de celda: la casilla de la función objetivo.
- Se busca minimizar.
- Al cambiar las celdas: se seleccionan las de la función objetivo y probabilidades.

Figura 17. **Solver para jugador 2**

Las restricciones que hay que poner serán las siguientes:

- Todas las probabilidades son mayor o igual a cero.
- La suma de probabilidades es 1.
- Cambia esta última restricción. En este caso los valores esperados por el jugador 1 son menores o iguales a la función objetivo.

Pulsando solucionar se obtienen las probabilidades de las estrategias del jugador 2 que logran una estrategia mixta óptima, así como el pago esperado del jugador 2. Se ve que coincide con el que se había determinado para el jugador 1. Por tanto ya hemos encontrado la solución.

Figura 18. **Solución para jugador 2**

Teoría de juegos de suma cero con estrategias mixtas

					Jugador 2			
				Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Suma Prob
				1,74285714	0,2952381	0,0952381	0,60952381	1
		Max Z	1,74285714	Estrategias	1	2	3	VE
	Jugador 1	Prob 1	0,42857143	1	7	3	-1	1,74285714
		Prob 2	0,45714286	2	-3	2	4	1,74285714
		Prob 3	0,11428571	3	1	-4	3	1,74285714
		Prob 4	0	4	5	0	-2	0,25714286
		Suma Prob	1	VE	1,74285714	1,74285714	1,74285714	

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El valor esperado del juego es 1,74 aproximadamente.

Desde el punto de vista del jugador 1, le interesa jugar con las diversas estrategias según las siguientes probabilidades:

- Estrategia 1: 42,9 % aproximadamente.
- Estrategia 2: 45,7 % aproximadamente.
- Estrategia 3: 11,4 % aproximadamente.

Se observa que la probabilidad asociada a la estrategia 4 del jugador 1 es 0, lo que está indicando que esta estrategia está dominada por otra y se podía haber eliminado antes. En este caso está dominada por la estrategia 1, que siempre es mejor o igual que la 4.

Desde el punto de vista del jugador 2, le interesa jugar con las diversas estrategias según las siguientes probabilidades:

- Estrategia 1: 29,5 % aproximadamente.
- Estrategia 2: 9,6 % aproximadamente.
- Estrategia 3: 60,9 % aproximadamente.

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Estrategias mixtas.
- Juego de suma cero.
- Modelo lineal.
- Probabilidades asociadas.
- Restricciones.
- Solver.
- Valor esperado.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de la siguiente actividad de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado

Resolver el siguiente juego de suma cero con ayuda del complemento Solver.

El punto de partida para este tipo de juegos es la matriz de pagos. Para este caso, el jugador 1 tiene 3 posibles estrategias, mientras que el jugador 2 tiene 4 estrategias. Para cada combinación posible de estrategias se tienen los pagos estimados.

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Figura 19. **Problema propuesto**

		Jugador 2			
	Estrategias	**1**	**2**	**3**	**4**
Jugador 1	**1**	3	6	2	0
	2	5	-2	1	3
	3	1	0	3	-2

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Solución

Vamos a comprobar que no hay punto silla. Se determina el máximo por columna y el mínimo por fila, y se obtiene el minimax, así como el maximin.

Figura 20. **No hay punto de equilibrio**

		Jugador 2					
	Estrategias	1	2	3	4	Minimo	Maximin
Jugador 1	1	3	6	2	0	0	
	2	5	-2	1	3	-2	
	3	1	0	3	-2	-2	
	Máximo	5	6	3	3		
	Minimax						

Como el minimax es 3 y el maximin es 0, no coinciden, y esto significa que no hay punto silla. Por tanto, no hay una solución estable y se va a analizar mediante estrategias mixtas. El objetivo va a ser determinar las probabilidades de cada una de las estrategias de los dos jugadores de cara a encontrar una estrategia mixta óptima.

Las casillas que se van a añadir a la matriz de pagos son las siguientes: la función objetivo del jugador 1 que buscará maximizar, mientras que la función objetivo del jugador 2 buscará minimizar; las probabilidades asociadas a cada estrategia tanto para el jugador 1 como para el jugador 2; el VE de cada estrategia en función de las probabilidades asociadas.

Figura 21. **Nuevas casillas que hay que añadir**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										
4			Max Z		Estrategias	1	2	3	4	VE
5			Prob 1		1	3	6	2	0	
6		Jugador 1	Prob 2		2	5	-2	1	3	
7			Prob 3		3	1	0	3	-2	
8			Suma Prob		VE					

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Empecemos con los cálculos básicos que hay que realizar.

A) Celda suma de probabilidades

La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

Figura 22. **Suma de probabilidades del jugador 1**

D8 | =SUMA(D5:D7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										
4			Max Z		Estrategias	1	2	3	4	VE
5		Jugador 1	Prob 1		1	3	6	2	0	
6			Prob 2		2	5	-2	1	3	
7			Prob 3		3	1	0	3	-2	
8			Suma Prob	0	VE					

Figura 23. **Suma de probabilidades del jugador 2**

J3 | =SUMA(F3:I3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										0
4			Max Z		Estrategias	1	2	3	4	VE
5		Jugador 1	Prob 1		1	3	6	2	0	
6			Prob 2		2	5	-2	1	3	
7			Prob 3		3	1	0	3	-2	
8			Suma Prob	0	VE					

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

B) Celdas de valor esperado

Se usará la función suma.producto, que multiplicará todos los pagos de una estrategia por sus probabilidades y las sumará.

Figura 24. **Valor esperado para estrategia 1 del jugador 2**

F8 =SUMA.PRODUCTO($D$5:$D$7;F5:F7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										0
4			Max Z		Estrategias	1	2	3	4	VE
5			Prob 1		1	3	6	2	0	
6		Jugador 1	Prob 2		2	5	-2	1	3	
7			Prob 3		3	1	0	3	-2	
8			Suma Prob	0	VE	0				

Y haciendo lo mismo para el resto de los valores esperados del jugador 2:

Figura 25. **Valor esperado para estrategia 4 del jugador 2**

I8 =SUMA.PRODUCTO($D$5:$D$7;I5:I7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										0
4			Max Z		Estrategias	1	2	3	4	VE
5			Prob 1		1	3	6	2	0	
6		Jugador 1	Prob 2		2	5	-2	1	3	
7			Prob 3		3	1	0	3	-2	
8			Suma Prob	0	VE	0	0	0	0	

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Los valores esperados para el jugador 1 se calcularán:

Figura 26. **Valor esperado para estrategia 1 del jugador 1**

J5 | =SUMA.PRODUCTO($F$3:$I$3;F5:I5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										0
4			Max Z		Estrategias	1	2	3	4	VE
5		Jugador 1	Prob 1		1	3	6	2	0	0
6			Prob 2		2	5	-2	1	3	
7			Prob 3		3	1	0	3	-2	
8			Suma Prob	0	VE	0	0	0	0	

Y haciendo lo mismo para el resto de los valores esperados del jugador 1:

Figura 27. **Valor esperado para estrategia 3 del jugador 2**

J7 | =SUMA.PRODUCTO($F$3:$I$3;F7:I7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										0
4			Max Z		Estrategias	1	2	3	4	VE
5		Jugador 1	Prob 1		1	3	6	2	0	0
6			Prob 2		2	5	-2	1	3	0
7			Prob 3		3	1	0	3	-2	0
8			Suma Prob	0	VE	0	0	0	0	

Ahora ya se puede utilizar el complemento Solver. En LibreOffice está en Herramientas/Solver. Vamos a comenzar con el jugador 1:

- Objetivo de celda: la casilla de la función objetivo.

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

- Se busca maximizar.
- Al cambiar las celdas: se seleccionan las de la función objetivo y probabilidades.

Figura 28. **Solver para jugador 1**

Las restricciones que hay que poner serán las siguientes:

- Todas las probabilidades son mayor o igual a 0.
- La suma de probabilidades es 1.
- Los valores esperados por el jugador 2 son mayores o iguales a la función objetivo, aplicando el criterio del minimax.

En Opciones hay que asegurarse de que se esté usando el modelo lineal (véase figura 29). Ya se puede pulsar el botón de Solucionar y se tendrán las probabilidades del jugador 1 y su pago esperado. Se pulsa sobre Mantener resultados (véase figura 30).

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Figura 29. **Opciones de Solver**

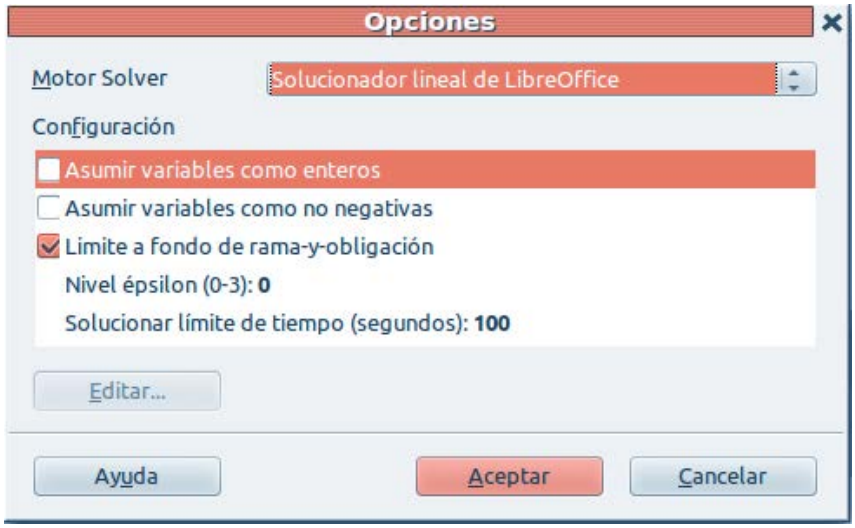
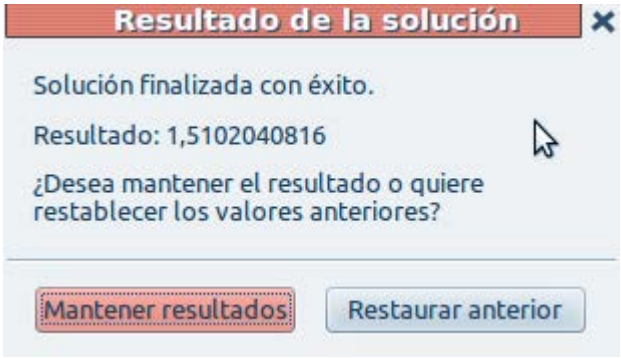


Figura 30. **Resultado de la solución**



"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

El resultado será:

Figura 31. **Solución para jugador 1**

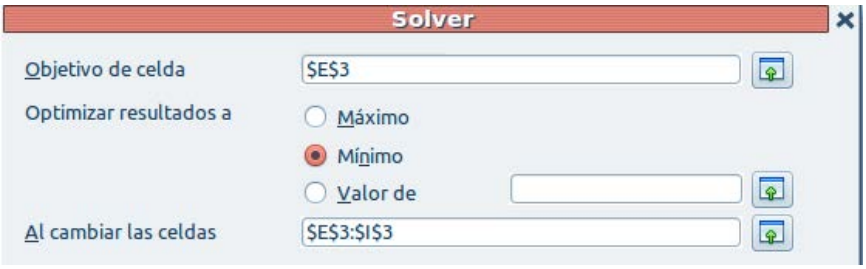
D4 | $f(x)$ Σ = 1,51020408163265

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3										0
4			Max Z	1,51020408	Estrategias	1	2	3	4	VE
5			Prob 1	0,42857143	1	3	6	2	0	0
6		Jugador 1	Prob 2	0,53061224	2	5	-2	1	3	0
7			Prob 3	0,04081633	3	1	0	3	-2	0
8			Suma Prob	1	VE	3,97959184	1,51020408	1,51020408	1,51020408	

Ahora vamos a realizar lo análogo para el jugador 2:

- Objetivo de celda: la casilla de la función objetivo.
- Se busca minimizar.
- Al cambiar las celdas: se seleccionan las de la función objetivo y probabilidades.

Figura 32. **Solver para jugador 2**



.../...

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

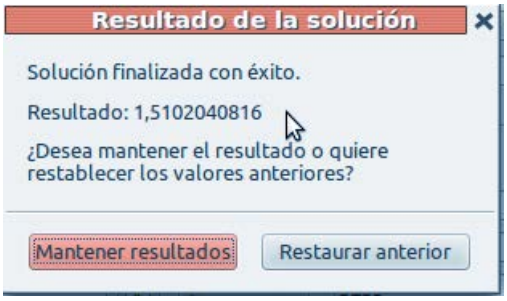
.../...

Las restricciones que hay que poner serán las siguientes:

- Todas las probabilidades son mayor o igual a 0.
- La suma de probabilidades es 1.
- Cambia esta última restricción. En este caso los valores esperados por el jugador 1 son menores o iguales a la función objetivo, aplicando el criterio del maximin.

Pulsando Solucionar se obtienen las probabilidades de las estrategias del jugador 2 que logran una estrategia mixta óptima, así como el pago esperado del jugador 2. Se pulsa sobre Mantener resultados:

Figura 33. **Resultado de la solución**



"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

Se ve que coincide con el que se había determinado para el jugador 1. Por tanto ya hemos encontrado la solución.

Figura 34. **Solución para jugador 2**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Jugador 2				
2					Min Z	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Suma Prob
3					1,51020408	0	0,02040816	0,69387755	0,28571429	1
4			Max Z	1,51020408	Estrategias	1	2	3	4	VE
5			Prob 1	0,42857143	1	3	6	2	0	1,51020408
6		Jugador 1	Prob 2	0,53061224	2	5	-2	1	3	1,51020408
7			Prob 3	0,04081633	3	1	0	3	-2	1,51020408
8			Suma Prob	1	VE	3,97959184	1,51020408	1,51020408	1,51020408	

El valor esperado del juego es 1,51 aproximadamente.

Desde el punto de vista del jugador 1, le interesa jugar con las diversas estrategias según las siguientes probabilidades:

- Estrategia 1: 42,8 % aproximadamente.
- Estrategia 2: 53,1 % aproximadamente.
- Estrategia 3: 4,1 % aproximadamente.

Desde el punto de vista del jugador 2, le interesa jugar con las diversas estrategias según las siguientes probabilidades:

- Estrategia 1: 0 %. En esta situación está dominada por la estrategia 4, que siempre es mejor o igual que la 1.
- Estrategia 2: 2,0 % aproximadamente.
- Estrategia 3: 69,4 % aproximadamente.
- Estrategia 4: 28,6 % aproximadamente.

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

EJERCICIOS VOLUNTARIOS

Tras el estudio de esta Unidad didáctica, el estudiante puede hacer, por su cuenta, una serie de ejercicios voluntarios, como los siguientes:

1. ¿Cómo se obtiene el valor de la casilla Valor esperado para los dos jugadores?
2. En el complemento Solver, ¿qué casillas deben ponerse en Al cambiar las celdas para cualquier jugador?
3. ¿Qué restricciones deben especificarse en el complemento Solver para el jugador 1?
4. ¿Qué restricciones deben especificarse en el complemento Solver para el jugador 2?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básica

CÓRDOBA, M.: *Metodología para la toma de decisiones*, Delta Publicaciones, Madrid, 2004.

DIXIT, A. K. y NALEBUFF, B. J.: *El arte de la estrategia,* Antoni Bosch Editor, 2010.

HILLIER, F. S. y LIEBERMAN, G. J.: *Introducción a la investigación de operaciones*, McGraw-Hill, 2010.

SERRA DE LA FIGUERA, D.: *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones*, Gestión 2000, 2004.

Avanzada

BRONSON, R. y NAADIMUTHU, G.: *Schaum's outlines of theory and problems of operations research,* New York, McGraw-Hill, 1982.

MUÑOZ, B. y RIVEROLA, J.: *Del buen pensar y mejor hacer*, México, McGraw-Hill, 2003.

RÍOS-INSUA, S.; MATEOS, A.; BIELZA, M.ª C. y JIMÉNEZ, A.: *Investigación operativa,* Centro de Estudios Ramón Areces, 1996.

TAHA, H. A.: *Investigación de operaciones*, México, Editorial Pearson, 2004.

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".

"Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta Unidad sólo puede ser realizada con la autorización de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 91 702 19 70 / 93 272 04 47)".