UNIDAD DIDÁCTICA

3

EL CAMPO ELECTROSTÁTICO (III): DIELÉCTRICOS Y CONDENSADORES

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

El objetivo principal de la unidad 3 es que entiendas la física del campo electrostático en la materia y cómo esta nos ayuda a construir condensadores eléctricos. Además, estudiaremos la manera en la que los condensadores se comportan cuando se usan como componentes de un circuito eléctrico. En particular, al finalizar esta unidad habrás de:

- Comprender el concepto de «condensador» y sus principales usos.
- Calcular la capacidad de diversas estructuras de condensadores.
- Calcular la energía almacenada en un condensador y la fuerza entre sus placas.
- Comprender y calcular las asociaciones de condensadores.
- Entender el papel de los dieléctricos y su interacción con el campo eléctrico.
- Calcular condensadores construidos con dieléctricos en su interior.
- Comprender el concepto de «polarización» y del «vector desplazamiento eléctrico».

1. INTRODUCCIÓN

Las dos primeras unidades las hemos dedicado a estudiar el campo electrostático en el vacío y en los conductores, y a entender cómo es la energía asociada al campo electrostático. En esta unidad nos adentramos en usos más prácticos del campo electrostático.

Vamos a invertir la mitad de esta unidad en analizar los condensadores: unos dispositivos de ingeniería que, como veremos, nos van a permitir almacenar energía en forma de campo electrostático para luego utilizar esa energía en un montón de usos, pero, principalmente, en circuitos eléctricos y electrónicos.

Después, volveremos a estudiar el campo electrostático cuando lo hagamos interactuar con la materia. En la mayor parte de los manuales de física este recorrido es en el sentido contrario y antes de presentar los condensadores se estudia el campo y su interacción con los dieléctricos. Sin embargo, he decidido hacerlo al revés, pues hay un experimento que permite entender fácilmente cómo funcionan los dieléctricos si previamente se entiende qué es un condensador.

La materia se comporta de una forma curiosa cuando se la somete a un campo electrostático. Donde antes no había nada, al ser excitada por el campo externo, la materia intenta oponerse a este campo generando un campo interno. El experimento de Faraday nos permitirá entender qué es lo que pasa.

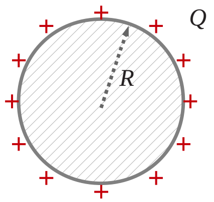
2. PRESENTACIÓN DE LOS CONDENSADORES ELÉCTRICOS

2.1. ALMACENANDO ENERGÍA ELÉCTRICA

Hasta esta unidad, hemos estado entendiendo el comportamiento del campo electrostático y su relación con las cargas eléctricas. Además, en la unidad anterior, hemos hecho cálculos detallados de la energía asociada a los campos eléctricos y a las distribuciones de carga.

En particular, nos hemos dado cuenta de que el mero hecho de tener una distribución de carga en una zona del espacio implica que hemos de haber invertido cierta cantidad de energía eléctrica para colocarla en esa forma y lugar, y ahí se queda en forma de energía potencial electrostática. Llegados a este punto, nos podemos preguntar lo siguiente: ¿es posible hacer algo para aprovechar esta energía?; ¿podemos construir algún sistema que nos permita almacenar energía eléctrica usando las ideas que vimos en la unidad anterior?

Antes de responder a estas preguntas, me gustaría que recordásemos cuál es la energía de una distribución de carga particular. Fíjate en la siguiente figura. En ella hay una esfera metálica de radio *R* que tiene una carga neta total *Q*. ¿Cuál es la energía que ha costado construir este sistema? O, lo que es lo mismo, ¿cuánta energía almacena esta esfera metálica?



Si hacemos memoria de lo que vimos en la unidad 2, recordaremos que el metal acumula su carga en las superficies externas y que, además, es un volumen equipotencial. También calculamos el potencial al que está la esfera metálica en el vacío:

$$V_e = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \; [V]$$

Por tanto, como toda la carga está al mismo potencial, la energía que almacena la esfera (o el trabajo que nos ha costado cargar la esfera) es:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_s \sigma \, V \, ds = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R} \; [J]$$

Lo importante es que tenemos una cantidad de energía almacenada que, quizás, podamos aprovechar en alguna aplicación técnica que se nos pueda ocurrir.

El problema que tiene una esfera metálica cargada, así, sin más, como sistema para almacenar energía es doble:

- Por una parte llena todo el espacio de un campo eléctrico, y esto, a veces, puede ser un problema.
- Por otra parte, la energía almacenada depende no solo de la Q que tiene, sino de si cerca de ella hay otras cargas o campos eléctricos.

Estos dos problemas hacen, como veremos, que una esfera metálica sola no sea un gran sistema para almacenar energía.

Para poder almacenar energía en forma de energía potencial electrostática y, además, resolver los problemas que acabamos de ver, se diseñan los condensadores.

2.2. ¿QUÉ ES UN CONDENSADOR ELÉCTRICO?

> Un **condensador eléctrico** es un sistema diseñado para almacenar energía en forma de energía potencial electrostática o, lo que es lo mismo, en forma de campo electrostático.

Los condensadores están diseñados para ser dispositivos neutros, es decir, sin una carga total neta. De esta forma, se consigue:

- No generar campos externos o hacerlo de forma despreciable.
- Evitar que se vean afectados por los campos externos o al menos de la menor forma posible.

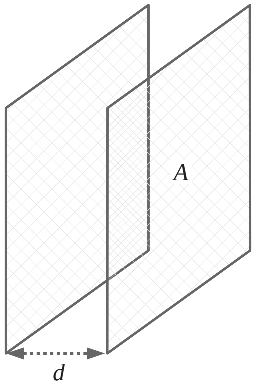
Para ello se basan en un principio muy sencillo: vamos a construir una estructura compuesta por dos piezas de metal simétricas y próximas entre sí. Si cargamos una de las piezas con una carga positiva Q, y otra, con la misma carga, pero negativa, podemos generar, en el espacio que separa las dos piezas, una cantidad de campo eléctrico. Visto desde el exterior, la carga total es 0 y, por tanto, el campo va a hacerse 0 muy rápidamente fuera del condensador.

Un condensador es un invento hecho para ser conectado al mundo exterior. Como también veremos, cada una de las dos estructuras o armaduras metálicas estarán conectadas a un terminal externo para poder enchufar el condensador, por ejemplo, en un circuito eléctrico.

Vamos a ver el ejemplo más sencillo de condensador: el condensador de placas paralelas.

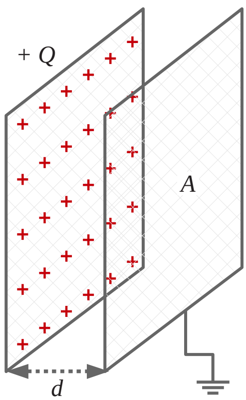
2.2.1. Presentación del condensador plano de placas paralelas

El ejemplo de condensador por defecto es el condensador plano de placas paralelas, como el que tenemos en la siguiente figura:



En esta figura he dibujado dos placas metálicas. Cada una de ellas tiene un área *A* que podemos considerar muy grande comparada con la distancia *d* que las separa. Esta asunción, como veremos, nos permitirá asumir que las placas son infinitas o, lo que es lo mismo, despreciar los efectos de borde.

Ahora, imaginemos que en la placa de la izquierda puedo depositar, de alguna manera, una carga *Q* (positiva) y que la placa de la derecha la pongo a tierra, como en la siguiente figura:

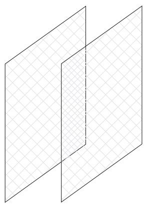
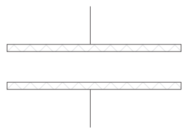
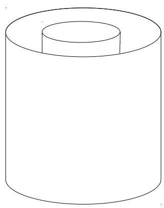
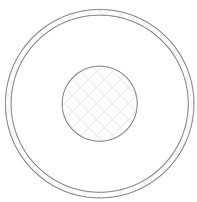


En el equilibrio electrostático, sabemos que a la derecha de la placa puesta a tierra no puede haber campo eléctrico neto, ya que su potencial es 0 y, por lo tanto, para que esto ocurra en la placa puesta a tierra se induce una carga de valor – Q. Luego veremos un desarrollo un poco más detallado de los campos electrostáticos, pero, seguramente, te puedas hacer una idea de que, en esta estructura que hemos construido, el campo eléctrico queda confinado al hueco entre las dos placas y se hace 0, en general, lejos de ella.

Aunque no hemos visto de forma matemática el detalle, puedes intentar intuir que, en general, un condensador va a tener, al menos, dos superficies o hilos metálicos ligeramente separados entre sí y, sin contacto eléctrico entre ellos. Entre los metales se va a crear el campo eléctrico y, gracias a la carga que se deposita en estos metales, se va a almacenar una energía eléctrica.

2.3. ESTRUCTURAS HABITUALES DE CONDENSADORES

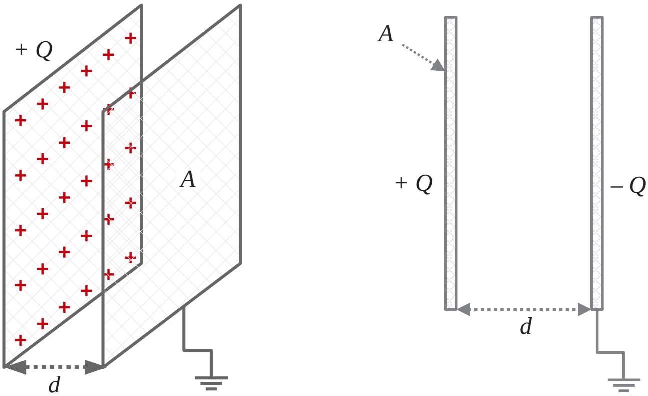
Las estructuras de condensadores más habituales son:

Placas paralelas	 o 
Cilindros concéntricos	
Esferas concéntricas	

3. ¿CÓMO FUNCIONA UN CONDENSADOR? LA CAPACIDAD

3.1. ANÁLISIS DEL CONDENSADOR DE PLACAS PLANAS PARALELAS

Para comprender de forma analítica cómo funciona un condensador, vamos a analizar el condensador de placas paralelas que empezamos a ver en el apartado anterior, y que vuelvo a dibujar aquí en perspectiva y visto de perfil:



Importante. Vamos a realizar el análisis en el vacío, es decir, asumiendo que entre las placas del condensador solo hay vacío, y, por tanto, las ecuaciones que hemos visto hasta ahora del campo eléctrico son válidas. En la práctica, como veremos más adelante, en realidad no se suele usar vacío entre las placas de un condensador, sino que se suelen usar materiales específicamente diseñados. Estos materiales son, en general, materiales dieléctricos y tienen, por tanto, un comportamiento de aislante eléctrico.

En el análisis, seguiremos los siguientes pasos:

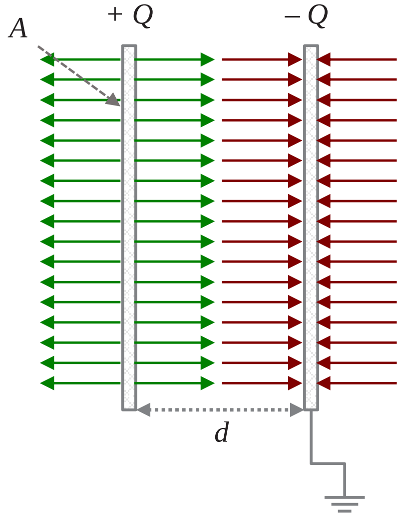
- Supondremos que cada placa tiene una carga de igual valor y signo contrario.
- Calcularemos el campo que genera cada placa.
- Sumaremos ambos campos dentro y fuera de la estructura.
- Calcularemos la diferencia de potencial entre placas.

Podríamos haber usado la ecuación de Laplace y resolver el problema suponiendo una diferencia de potencial, pero, en esta ocasión, tomaremos este otro camino.

Vamos a hacer las siguientes suposiciones:

- El área *A* de las placas es suficientemente grande comparado con la separación entre ellas y, por tanto, a efectos de nuestros cálculos, podemos asumir que son infinitas. Esto es equivalente a decir que podemos ignorar los efectos de borde.
- El grosor de las placas conductoras es despreciable, así que podemos asumir que se comportan como una superficie cargada.
- La placa izquierda almacena una carga *Q* y la derecha una carga – *Q*.

Sabemos que una placa infinita cargada superficialmente genera un campo *E* que es perpendicular a la placa. En la siguiente figura tienes dibujados los campos que generan cada una de las placas:



Tal y como vemos en el dibujo, en la zona interior del condensador los dos campos apuntan en la misma dirección y se suman. Podemos calcular fácilmente cuánto vale el campo en el interior. En este caso, es la suma de dos campos, los generados por cada una de las placas.

El campo generado por una placa infinita con carga superficial, asumiendo que apunta hacia el lado positivo del eje *x*, es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}\,\hat{i}$$

En este caso, podemos calcular la carga superficial, ya que sabemos la carga total Q y el área A. Así:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Por tanto, podemos calcular el campo eléctrico de cada placa en el interior:

$$\vec{E}_{+Q} = \frac{Q}{2\,\epsilon_0\,A}\,\hat{i} \quad \text{y} \quad \vec{E}_{-Q} = \frac{-Q}{2\,\epsilon_0\,A}\,(-\,\hat{i})$$

y el campo total en el interior del condensador:

$$\vec{E}_{int} = 2\,\frac{Q}{2\,\epsilon_0\,A}\,\hat{i} = \frac{Q}{\epsilon_0\,A}\,\hat{i}$$

Si repetimos los cálculos a la derecha y a la izquierda del condensador, verás, por el propio dibujo, o haciendo la suma vectorial, que, en ambos casos, el campo es 0. Por ejemplo, a la derecha del condensador:

$$\vec{E}_{+Q} = \frac{Q}{2\,\epsilon_0\,A}\,\hat{i} \quad \text{y} \quad \vec{E}_{-Q} = \frac{-Q}{2\,\epsilon_0\,A}\,\hat{i}$$

y el resultado total a la derecha del condensador:

$$\vec{E}_{int} = \vec{0}$$

Acabamos de comprobar que este condensador cumple bien con lo que esperábamos de él: no generar campos netos en su exterior y tener una carga neta total 0.

Ahora calcularemos un valor muy importante: la diferencia de potencial entre sus placas. Este valor es fácil de calcular siguiendo un camino paralelo al campo desde la placa derecha hasta la izquierda:

$$\Delta V = -\int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_d^0 \frac{Q}{\epsilon_0 A}\, dx = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}\; [V]$$

Es decir, en un condensador plano de placas paralelas cargado con una carga Q, la diferencia de potencial entre las placas es:

$$V = Q\ \frac{d}{\epsilon A}\ [V]$$

3.2. LA ECUACIÓN DEL CONDENSADOR: CAPACIDAD

En la expresión que acabamos de calcular para el condensador plano tenemos la clave del comportamiento de los condensadores, que, como veremos, es siempre la misma: hay una **relación proporcional entre la diferencia de potencial de sus conductores y la carga que almacena**. Para el condensador plano, si despejamos Q:

$$Q = \frac{\epsilon_0 A}{d}\, V$$

En general, podemos decir que un condensador almacena una cantidad de carga proporcional a la diferencia de potencial de sus conductores. Esta relación se cumple para todos los condensadores que analizaremos y la llamaremos la «ecuación del condensador»:

$$Q = C \cdot V$$

El valor C es la capacidad del condensador y nos indica la cantidad de carga que almacena (en uno de sus conductores) por cada voltio de diferencia de potencial entre los conductores. Nos da una idea, como veremos más adelante, de la capacidad de almacenar energía que tiene el condensador.

El valor de la capacidad de un condensador depende del propio condensador: de su tipo, de sus dimensiones, de si tiene vacío en su interior o de si tiene algún material dieléctrico, etc. Pero sea como sea el condensador, siempre sabemos que la cantidad de carga acumulada en uno de sus conductores es:

$$Q = C \cdot V$$

La capacidad de un condensador se mide en faradios, que tiene unidades de culombios por voltio:

$$C = [F] = [C/V]$$

Al igual que nos pasaba en el caso de la carga, la unidad de capacidad, el faradio, es una unidad increíblemente grande, y los condensadores habituales tienen capacidades de:

$$pF = 10^{-12}\ F \qquad nF = 10^{-9}\ F \qquad \mu F = 10^{-6}\ F$$

Como curiosidad, un condensador esférico de 1 F tendría un diámetro más grande que el de la Tierra.

> **Importante.** Siempre que hablemos de la carga de un condensador, nos referiremos a la carga en uno de sus conductores. Y es que, como dijimos al principio, un condensador se diseña para tener una carga neta 0, de tal forma que uno de sus conductores almacena una carga + Q y el otro – Q. De nuevo, cuando se habla de la carga de un condensador, siempre nos referimos a la carga almacenada en uno de sus conductores.

4. USOS Y APLICACIONES

Tenemos claro que un condensador es una estructura de ingeniería, es decir, un sistema que hemos diseñado para un uso y que su funcionamiento viene determinado por su ecuación básica:

$$Q = C \cdot V$$

Es decir, es capaz de almacenar (condensar) cierta cantidad de carga a un potencial determinado y, por lo tanto, como veremos más adelante, es capaz de almacenar una cantidad de energía en forma de energía electrostática.

Dicho así, uno podría pensar que los condensadores serían la solución para el problema de «cómo almacenamos la energía eléctrica que se produce y no se consume», pero, en realidad, no. Más adelante, veremos que las capacidades de almacenamiento energético de un condensador no son muy grandes.

Pero, por otra parte, como veremos en la unidad 5, aunque no almacenan gran cantidad de energía, son extremadamente rápidos cargándose y descargándose. Por ejemplo, las baterías de litio de un móvil, que almacenan muchísima más energía por metro cúbico, tardan mucho más en cargarse y no pueden descargarse muy rápidamente sin calentarse o estropearse, aunque seguramente tú creas lo contrario.

Entonces, ¿para qué se usan los condensadores? Si abres cualquier equipo electrónico, así como la mayor parte de los equipos eléctricos, verás que hay una gran cantidad de condensadores, de diferentes tipos, tecnologías y formas: de placas paralelas, con dieléctricos sencillos o muy avanzados y polémicos (como los de tántalo), de tipo electrolítico, tan minúsculos que no se pueden ver o más grandes que un yogur. En la imagen derecha se pueden ver distintos tipos de condensadores

Condensadores

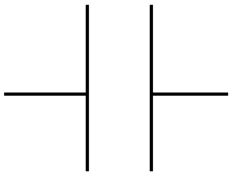
Fuente: Eric Schrader, Creative Commons-Share Alike. Disponible en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Capacitors_(7189597135).jpg.

Los condensadores, por sus características eléctricas, se usan para muchas cosas. Algunas de las más habituales son:

- Dado que entre sus metales no hay contacto eléctrico, no dejan pasar la corriente continua y se usan para evitar que esta llegue a determinadas zonas de circuitos eléctricos.
- Dado que almacenan energía rápidamente, se usan para amortiguar cambios bruscos de tensión eléctrica debido a picos de consumo, por ejemplo, en un amplificador de sonido.
- Asociados a otros componentes eléctricos, se usan como circuitos de sintonía, para sintonizar una frecuencia en la televisión o en la radio.
- Se usan para compensar el comportamiento eléctrico de motores, transformadores y otros inductores, en general, en instalaciones eléctricas de alta potencia.

4.1. SÍMBOLO CIRCUITAL DEL CONDENSADOR

Con independencia de su estructura real (placas paralelas, esferas, etc.), en general, los condensadores se representan con el siguiente símbolo:



A partir de este momento, tanto en esta asignatura como en cualquier otra en la que trabajes con condensadores, verás que cuando se pone un condensador en un esquema eléctrico junto a otras estructuras y componentes se usa este símbolo.

En realidad, el símbolo representa un pequeño condensador de placas paralelas visto de perfil. Las dos líneas horizontales representan dos hilos conductores que permiten conectar al mundo exterior las dos placas que forman el condensador.

Hay otros símbolos que también se usan con algún tipo de condensador, sobre todo con algunos condensadores que, extrañamente, tienen polaridad, pero no los usaremos en este manual.

5. DETERMINACIÓN DE LA CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR

Ya hemos discutido ampliamente que un condensador es una estructura que, en general, tiene dos armaduras conductoras que están diseñadas para almacenar carga a un potencial determinado y que, sea como sea el condensador, se rige por su ecuación:

$$Q = C \cdot V$$

También hemos calculado la capacidad para el condensador de placas planas paralelas. Podemos establecer un método de cálculo general de la capacidad de un condensador. Se basa en lo siguiente: en primer lugar, determinar la relación entre la carga almacenada en una armadura y la diferencia de potencial entre ambas, y en segundo lugar, despejar la relación Q/V, que es la capacidad del condensador.

Si partimos de la diferencia de potencial:

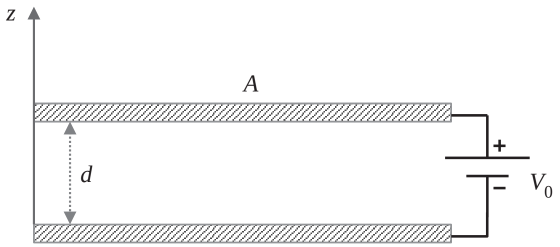
- Resolvemos la ecuación de Laplace.
- Calculamos el campo en el interior del condensador.
- Calculamos la carga almacenada en cada una de las armaduras como una función de V.
- Despejamos la capacidad.

Si partimos de una carga total:

- Calculamos el campo electrostático en el interior del condensador.
- Integramos para calcular la diferencia de potencial como una función de la carga.
- Despejamos la capacidad.

5.1. CONDENSADOR PLANO DE PLACAS PARALELAS

Vamos a volver a determinar la capacidad de un condensador plano de placas paralelas por la vía de la ecuación de Laplace. En la siguiente figura tenemos un condensador puesto de perfil:



Asumimos que en el interior hay un vacío y que las placas están sometidas a una diferencia de potencial como en la figura. La distancia entre las placas es d y el área es A. Como dijimos antes, el área A es suficientemente grande como para ignorar los efectos de borde. La ecuación del potencial en el interior del condensador será la ecuación de Laplace, pues no hay carga volumétrica:

$$\nabla^2 V = 0$$

Al ignorar los efectos de borde, la simetría del problema hace que solo podamos tener variaciones del potencial en el eje *z* (según está dibujado el condensador) y, por lo tanto, el laplaciano queda muy sencillo:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Integrando dos veces la ecuación, obtenemos que la forma del potencial es:

$$V(z) = C_1 z + C_2$$

Las condiciones de contorno nos fuerzan el valor del potencial en $z = 0$ y en $z = d$:

$$V(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad V(d) = V_0$$

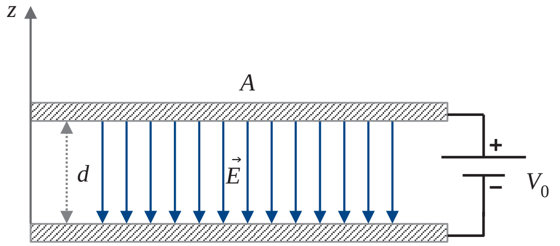
Con esto, podemos calcular el valor de las dos constantes de integración:

$$C_1 = \frac{V_0}{d} \qquad\qquad C_2 = 0$$

Y, a partir del potencial, ya podemos calcular el campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{-V_0}{d}\,\hat{k}$$

Y lo podemos dibujar:



En la unidad 1 vimos que la carga superficial en un conductor está relacionada con el valor del campo eléctrico en la superficie. En módulo:

$$|\vec{E}_n| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Así, la densidad de carga superficial en la armadura superior, por ejemplo, será:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{d} V_0$$

Y como asumimos que no hay efectos de borde, y, por tanto, el campo es constante en el interior del condensador, también lo será la densidad de carga. Con esto, la carga total en la armadura superior será:

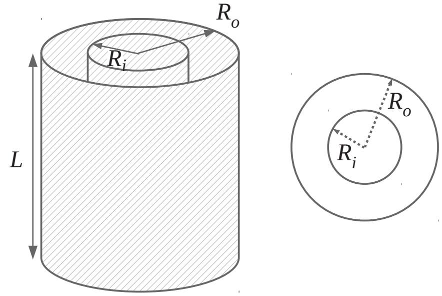
$$Q = A\sigma = \frac{\epsilon_0 A}{d} V_0$$

De esta expresión, que no es más que la carga almacenada como función de la diferencia de potencial, podemos, de nuevo, calcular la capacidad:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} [F]$$

5.2. CONDENSADOR CILÍNDRICO

Un condensador cilíndrico está formado por dos superficies conductoras cilíndricas coaxiales y de longitud L. En la siguiente figura tienes un dibujo en perspectiva y visto en planta con los radios interior y exterior de los conductores del condensador:

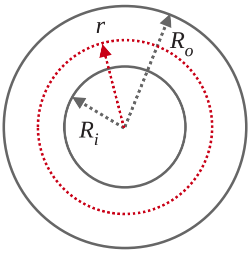


Vamos a asumir lo siguiente:

- La carga total de la armadura interna es Q.
- Podemos despreciar los efectos de borde, es decir, suponer que la longitud L es suficiente como para poder considerarla infinita.

En estas condiciones, lo que haremos será, de forma resumida, calcular el campo, integrar para calcular la diferencia de potencial y, por último, calcular la capacidad.

Como despreciamos los efectos de borde, la simetría del problema nos permite decir que el campo solo puede variar según la coordenada radial, como si el cilindro fuera infinito. Para calcular el campo entre ambas armaduras podemos usar una superficie gaussiana cilíndrica de radio r. Visto en planta, sería algo así:



El campo es perpendicular a la superficie de Gauss y de módulo constante, por lo que podemos aplicar:

$$\Phi_E = |\vec{E}|\, S = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana, en este caso, siempre es Q y la superficie S es la superficie de un cilindro de radio r y altura L. Por lo tanto, vale:

$$S = 2\pi\, r\, L$$

Y el módulo del campo es:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{2\pi\, \epsilon_0\, r}$$

Vectorialmente apunta de forma radial hacia afuera y, por lo tanto, expresado en cilíndricas, vale:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r} \hat{r}$$

Para calcular el potencial podemos elegir un camino de integración paralelo al radio desde la armadura externa a la armadura interna (¡atención al cambio de signo y a los límites de la integral!):

$$V = -\int_{R_0}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_i}^{R_o} \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r} dr$$

Si integramos, obtendremos que:

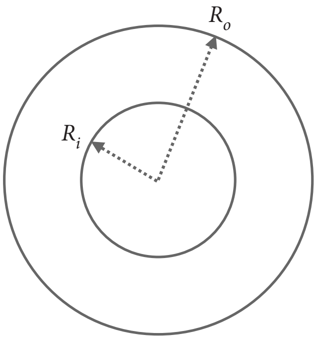
$$V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln(r)\Big|_{R_i}^{R_o} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) [V]$$

Si despejamos la relación Q/V, obtendremos la capacidad, que es:

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(R_o/R_i)} [F]$$

5.3. CONDENSADOR ESFÉRICO

Un condensador esférico, como su propio nombre indica, está compuesto por dos superficies esféricas conductoras concéntricas. En el dibujo tienes un corte por un plano ecuatorial.



Una de las armaduras del condensador es la esfera interna y la otra es la esfera externa. En este caso no hay que asumir ninguna aproximación para el efecto de borde, pues, como el condensador está totalmente cerrado, no existe este problema. Supondremos que en la esfera interna hay una carga total Q. El campo generado por una esfera cargada con una carga Q ya lo conocemos ampliamente; y el campo entre ambas armaduras será, expresado en coordenadas esféricas, el siguiente:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Integrando en un camino radial entre la esfera externa y la esfera interna, podemos calcular la diferencia de potencial del condensador:

$$V = -\int_{R_o}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_o}^{R_i} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr$$

Integramos y obtenemos que:

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{R_o}^{R_i} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o} \right) = \frac{Q(R_o - R_i)}{4\pi \epsilon_0 R_o R_i}$$

Y despejamos la relación Q/V para obtener la capacidad, que es:

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 R_o R_i}{R_o - R_i} [F]$$

6. ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Ya tenemos claro cómo funciona un condensador de forma individual. Volvamos a volver a escribir la ecuación que rige su funcionamiento:

$$Q = C \cdot V$$

Ahora bien, en las aplicaciones reales es habitual tener más de un condensador. Vamos a intentar responder a estas preguntas:

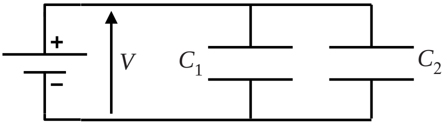
- ¿Cómo puedo asociar condensadores?
- ¿Qué capacidad veo desde fuera? y ¿qué carga total?
- ¿Por qué querría agrupar condensadores?

Empecemos por la última pregunta. Ya hemos dicho que los condensadores son dispositivos de ingeniería y, por lo tanto, tienen aplicación práctica. Dependiendo de para qué queramos usar un condensador, necesitaremos una capacidad concreta. Lo más probable es que, al ir a comprarlo, no encontremos en la tienda un condensador de esa capacidad y, entonces, necesitaremos recurrir a asociar dos o más condensadores para poder conseguirla.

Los condensadores se pueden asociar de muchas formas, pero cuando asociamos dos condensadores solo podemos hacerlo de dos maneras: en paralelo o en serie. Eso sí, una vez empecemos a asociar más de dos condensadores, tendremos asociaciones complejas, pero compuestas de asociaciones elementales en serie o en paralelo.

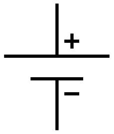
6.1. ASOCIACIÓN DE DOS CONDENSADORES EN PARALELO

En este circuito tenemos dos condensadores asociados en paralelo:



> Dos condensadores están en paralelo cuando sus armaduras, sus bornes, están conectados uno a uno entre sí.

En este esquema tenemos dos condensadores, de capacidades C_1 y C_2, conectados en paralelo, es decir, sus estructuras metálicas están conectadas dos a dos. He aprovechado para introducir en esta figura un elemento que ya hemos visto en alguna ocasión: la fuente de corriente continua.

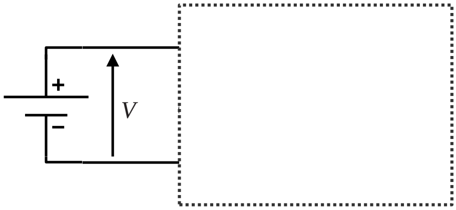


Ahora no nos preocupa demasiado, más allá de saber que lo que hace es forzar entre sus extremos una diferencia de potencial eléctrica que no varía con el tiempo.

Volviendo a los condensadores, si te das cuenta, ambos tienen entre sus bornes la misma diferencia de potencial, es decir, están sometidos a la misma tensión eléctrica. Por tanto, cada uno de ellos almacena una carga distinta según su capacidad:

$$Q_1 = C_1 \cdot V \qquad \text{y} \qquad Q_2 = C_2 \cdot V$$

Visto desde fuera, si metemos los dos condensadores en una caja negra y dejamos que salgan de ella los cables o terminales que conectan con la asociación de condensadores, nos quedaría algo así:



Nosotros sabemos que entre esos dos hilos hay almacenada una carga que es:

$$Q_t = Q_1 + Q_2$$

Si sustituimos cada carga por la relación con los condensadores 1 y 2:

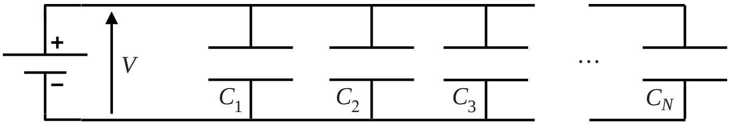
$$Q_t = C_1 \cdot V + C_2 \cdot V = (C_1 + C_2) \cdot V = C_p \cdot V$$

Dicho de otra forma, los **dos condensadores conectados en paralelo se comportan como un solo condensador cuya capacidad es la suma de ambos**. Así:

$$C_p = C_1 + C_2$$

6.2. ASOCIACIÓN DE VARIOS CONDENSADORES EN PARALELO

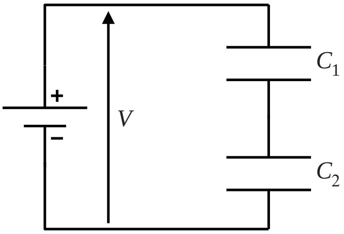
Podemos repetir este procedimiento y si, en lugar de tener dos condensadores conectados en paralelo, tenemos *N*, solo tenemos que sumar la capacidad de todos ellos para obtener la capacidad equivalente de la asociación:



$$C_p = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

6.3. ASOCIACIÓN DE DOS CONDENSADORES EN SERIE

En este circuito tenemos dos condensadores asociados en serie:



Dos condensadores están en serie cuando una armadura o borne de uno de ellos está conectado a una armadura del otro y a nada más.

En esta asociación ya conocemos todos los componentes que nos encontramos: dos condensadores, cada uno con su capacidad, y una fuente de tensión, que mantiene la estructura a una diferencia de potencial continua.

A diferencia de cuando teníamos los condensadores en paralelo, en este caso, ya no tenemos que la diferencia de potencial en cada condensador es igual. Sin embargo, sí sabemos que la carga en cada condensador es la misma necesariamente. ¿Por qué? Imagínate que los dos condensadores están en reposo, sin carga. Ahora, empujamos 1 *C* por la parte de arriba. En la placa superior del condensador C_1 aparece una carga de + 1 *C*, que inmediatamente induce una carga de – 1 *C* en la placa de abajo del condensador C_1. Pero esa placa está conectada a la placa de arriba del condensador C_2 y, por tanto, ese – 1 *C* ha tenido que salir de algún lado, y no de la tierra, sino de la placa de arriba del condensador C_2. Así tenemos a C_2 cargado con una carga de + 1 *C* en su placa superior, que automáticamente genera una carga de – 1 *C* en la placa inferior.

Lo importante es que **en esta estructura ambos condensadores tienen la misma carga**; por tanto:

$$Q = V_1 \cdot C_1 \qquad \text{y} \qquad Q = V_2 \cdot C_2$$

Si despejamos la diferencia de potencial o tensión en cada condensador, tendremos:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

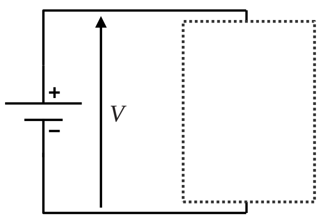
Puesto que la suma de ambas diferencias de potencial tiene que ser la diferencia de potencial total, que es la de la fuente, *V*:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Si de esta ecuación despejamos *Q*, nos queda que:

$$Q = \left(\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \right) V = C_S\, V$$

Es decir, si metemos nuestros condensadores en una caja negra como la que tenemos en el dibujo, esa caja negra se comporta como un condensador de capacidad equivalente C_S:



La capacidad de dos condensadores asociados en serie es:

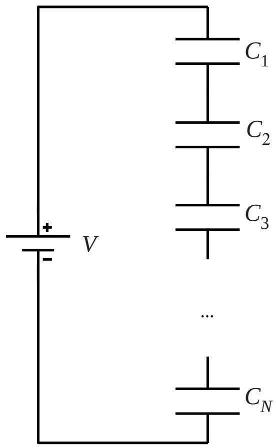
$$\frac{1}{C_S} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_S} \right) \rightarrow C_S = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_S} \right)}$$

Nota. Si desarrollas la expresión anterior, verás que, cuando solo hay dos condensadores, la asociación en serie se simplifica a:

$$C_{serie} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

A esta expresión, como regla nemotécnica, la llamo «producto partido por suma».

6.4. ASOCIACIÓN DE VARIOS CONDENSADORES EN SERIE



Podemos tener más de dos condensadores asociados en serie, uno detrás del otro, como en la figura de la derecha. En este caso, la capacidad total será:

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \rightarrow C_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}}$$

Resumen

En general:

- Cuando queremos tener un condensador equivalente de más capacidad, los asociamos en paralelo.
- Cuando necesitamos un condensador de menos capacidad, los asociamos en serie.

En particular:

- Para multiplicar por dos la capacidad de un condensador, conectamos dos iguales en paralelo.
- Para dividir entre dos la capacidad de un condensador, conectamos dos iguales en serie.

7. ENERGÍA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR

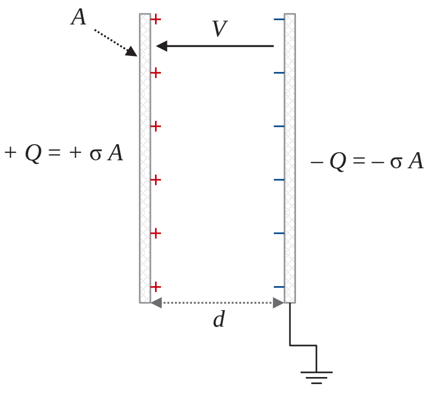
Cuando presentamos el concepto de «condensador» dijimos, y así lo hemos repetido varias veces, que un condensador almacena energía en forma de energía potencial electrostática. Pero, en realidad, hasta ahora, solo hemos hablado de cómo un condensador almacena una cantidad de carga y no hemos hecho ningún cálculo de cuánta energía, en realidad, está «condensando» el condensador.

Como vimos en la unidad 2, cualquier distribución de cargas requiere de una energía para construirse o, lo que es lo mismo, almacena una cantidad de energía. Pero un condensador no es más que una distribución de cargas a un potencial determinado, ¿verdad?

¿De qué forma podemos calcular la energía almacenada en un condensador? Se puede hacer de muchas formas. A continuación lo veremos siguiendo tres caminos diferentes.

7.1. CÁLCULO DE LA ENERGÍA MEDIANTE EL ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

Supongamos que tenemos un condensador de placas planas paralelas cargado con una carga Q a una diferencia de potencial V, como en esta figura:



En este condensador tenemos en realidad dos distribuciones de carga, una de valor total $-Q$ que está puesta a tierra, o a un potencial de referencia que podemos asumir 0, y otra de valor total $+Q$ que está puesta a la diferencia de potencial entre placas. Este potencial lo genera el campo interno del condensador; campo que, a su vez, es generado por la carga que hay en las placas.

¿Cuál es la energía de cada una de esas distribuciones de carga? La energía de una distribución superficial de carga viene dada por:

$$U_{distrib} = \frac{1}{2} \int_s \sigma \, V \, ds$$

En este caso, la densidad de carga es un valor constante, como ya hemos visto antes, y que vale:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

El potencial es constante en todo el metal, ya que los metales son superficies equipotenciales, y la integral queda muy fácil:

$$U_d = \frac{1}{2} \frac{Q}{A} V \int_s ds$$

La integral es justo el área de la placa; por tanto:

$$U_d = \frac{1}{2} QV$$

Hemos decidido que la placa con carga $-Q$ está a 0 V y que la otra está a la tensión del condensador, así que la energía total será la suma de ambas:

$$U_t = U_{+Q} + U_{-Q} = \frac{1}{2} QV + \frac{1}{2} Q \cdot 0 = \frac{1}{2} QV$$

Si la placa $-Q$ hubiera estado a un potencial diferente de 0, el resultado hubiera sido el mismo. Haz las cuentas y verás.

Ahora, recurriendo a la ecuación del condensador, podemos reescribir esta expresión:

$$U_C = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} CV^2$$

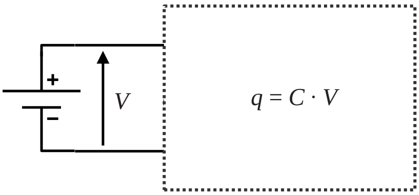
Este análisis es válido, en realidad, para cualquier tipo de condensador, ya que en todos ellos se cumple que los conductores del condensador son cada uno de ellos una superficie equipotencial.

7.2. CÁLCULO DE LA ENERGÍA USANDO EL PROCESO DE CARGA DEL CONDENSADOR

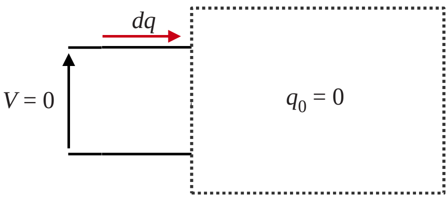
Además de analizar el problema haciendo uso de las herramientas que teníamos para calcular la energía de una distribución de carga, podemos mirar el condensador como una caja negra que sabemos que cumple un requisito: se comporta según la ecuación del condensador:

$$Q = C \cdot V$$

En esta figura tenemos una caja negra que almacena carga según la tensión o diferencia de potencial al que se sometan sus bornes:

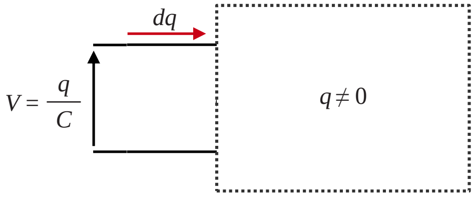


Vamos a imaginarnos el proceso de cargar un condensador y, para ello, vamos a ir, poco a poco, inyectando en uno de los conductores una pequeña cantidad de carga diferencial (dq) y viendo cómo varía el potencial. En este proceso, durante la carga del condensador, usaremos la letra q minúscula para denotar la cantidad de carga que hay en el condensador. Dejaremos la letra Q mayúscula para identificar al valor final de la carga en el condensador. En la siguiente figura tenemos el paso inicial del proceso: el condensador tiene una carga total 0, la diferencia de potencial entre sus bornes es de 0 voltios y, por tanto, el primer diferencial de carga que inyectamos en el condensador no cuesta trabajo.



Ahora imaginemos un paso más avanzado, en el que ya tenemos una cantidad de carga q almacenada en el condensador. En este momento, la diferencia de potencial entre los bornes del condensador ya no es 0 V, sino que vale:

$$V = \frac{q}{C}$$



Por tanto, inyectar el siguiente diferencial de carga ya no nos resulta gratis, sino que nos cuesta una cantidad de trabajo. Dicho de una manera más formal, con el condensador cargado con una carga q, introducir un nuevo dq requiere un diferencial de energía así:

$$dU = V\,dq$$

Ahora, como queremos calcular cuánto ha costado meter toda la carga desde 0 hasta Q, solo tenemos que sumar los diferenciales de trabajo que nos ha costado inyectar cada diferencial de carga:

$$U = \int_0^Q dU = \int_0^Q V\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}\;[J]$$

Como sabemos que el condensador cumple su ecuación, podemos escribir esta ecuación de dos formas diferentes:

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,C \cdot V^2$$

Acabamos de llegar a la misma expresión que habíamos visto en el apartado anterior, como, por otra parte, era de esperar. Esta demostración es válida para los condensadores del resto de tipos. En realidad, es válida incluso para cualquier componente o sistema que cumpla la ecuación del condensador.

7.3. CÁLCULO DE LA ENERGÍA EN FUNCIÓN DE LOS CAMPOS INTERNOS

En la unidad anterior demostramos que el campo electrostático almacena energía, y, en particular, podemos calcular la energía que almacena con esta expresión:

$$U = \int_v \frac{\epsilon_0 \, |\vec{E}|^2}{2} \, dv$$

De esta misma forma podemos hacer el cálculo de la energía almacenada en un condensador, con una ventaja añadida: sabemos que el campo externo generado por un condensador es 0 (o de un valor despreciable), ya que los condensadores están diseñados para que así sea. Con solo integrar dentro del volumen del condensador, tendremos la energía que buscamos.

Antes de seguir vamos a recordar aquí que al valor:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \, |\vec{E}|^2 \; [J/m^3]$$

se le llama «densidad de energía» y representa cuántos julios por metro cúbico almacena un condensador (o cualquier distribución de carga).

Vamos a resolver el caso para un condensador de placas planas paralelas, pues es realmente fácil, ya que, según vimos al principio de la unidad, su campo interno es constante y de valor:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 \, A}$$

Donde Q es la carga almacenada y d la separación entre placas. Por tanto, la densidad de energía será:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \, |\vec{E}|^2 = \frac{Q^2}{2 \, \epsilon_0 \, A^2}$$

Una densidad de energía, *u*, que, al igual que el campo, es un valor constante en el interior del condensador. Para calcular la energía total interna simplemente hacemos:

$$U = \int_v \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \, dv = \int_v \frac{Q^2}{2\,\epsilon_0 A^2} \, dv$$

Como *u* es constante, sale de la integral. Recuerda que el volumen interno del condensador de área *A* y separación *d* es simplemente el área de las placas multiplicada por la separación entre ellas:

$$U = \int_v \frac{Q^2}{2\,\epsilon_0 A^2} \, dv = \frac{Q^2}{2\,\epsilon_0 A^2} (A \cdot d) = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A} [J]$$

Es posible que la expresión anterior pueda parecer muy diferente de la que ya hemos visto antes, que era:

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

Pero, teniendo en cuenta que en un condensador plano la diferencia de potencial es:

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

De esta forma podemos reescribir la expresión de la energía:

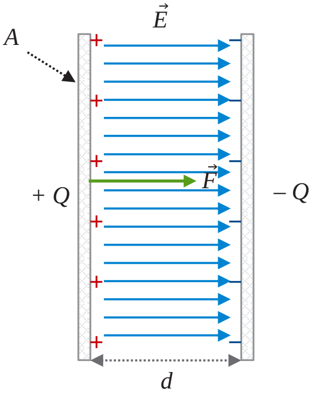
$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} d = \frac{1}{2} QV$$

Si hacemos uso de la ecuación del condensador, se nos convierte en la expresión de la energía del condensador, con la que ya estamos familiarizados:

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 [J]$$

7.4. FUERZA ENTRE LAS PLACAS DE UN CONDENSADOR PLANO

Imaginemos un condensador de placas paralelas relleno de vacío, como el que llevamos usando toda la unidad. Aquí está dibujado, además, el campo eléctrico, pero solo en el interior del mismo. Ya sabemos que, fuera de él, estos campos se anulan:



En este dibujo he aprovechado para pintar un vector. Este vector es la fuerza con la que la placa – *Q* tira de la placa + *Q*. Y es que, no te olvides, la placa – *Q* genera un campo eléctrico que atrae a la placa cargada con + *Q* (lo contrario también es cierto, la placa + *Q* también tira de la placa – *Q*).

¿Cómo podemos calcular la fuerza con la que una de las placas tira de la contraria? En este sencillo ejemplo tenemos dos vías, y las dos son bastante fáciles, pero, en general, solo podremos usar la segunda.

7.4.1. Cálculo de la fuerza haciendo uso de la ley de Coulomb

Sabemos que una carga sometida a un campo eléctrico siente una fuerza que es:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

Sabiendo esto, la fuerza con la que – *Q* tira de + *Q* es fácil de calcular. Empecemos calculando el campo eléctrico que genera la placa – *Q*. En módulo es:

$$E_{-Q} = \frac{Q}{2\,\epsilon_0 A}$$

¡Atención! Este es el campo generado por la distribución – Q, no el campo total en el interior del condensador, al que también contribuye, cómo no, el generado por la distribución + Q. Con esto, la placa + Q ve un campo constante que la somete a una fuerza neta. Cada diferencial de carga dq de la placa + Q siente una fuerza que, expresada en módulo, es:

$$dF = dq \frac{Q}{2\,\epsilon_0 A}$$

Si sumamos toda la fuerza que siente cada diferencial de la placa + Q, solo hay que integrar. Esta integral es fácil, ya que todos los términos del integrando son constantes:

$$F = \int_s dq \frac{Q}{2\,\epsilon_0\,A} = \frac{Q}{2\,\epsilon_0\,A} \int_s dq = \frac{Q^2}{2\,\epsilon_0\,A}\;[N]$$

7.4.2. Cálculo de la fuerza haciendo uso de la energía almacenada

Aquí debemos recordar un concepto importante:

> En presencia de una fuerza conservativa, como la fuerza electrostática, siempre tenemos asociada una energía potencial.

Hemos analizado este concepto en la unidad 2, pero conviene recordarlo. Es, en esencia, equivalente a decir que en presencia de un campo conservativo existe una función potencial asociada.

Para el campo electrostático sabemos que la relación entre el campo y el potencial vale:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,V$$

Si multiplicamos a ambos lados por la carga, tendremos:

$$q\,\vec{E} = -\,q\,\vec{\nabla}\,V = -\,\vec{\nabla}\,(qV)$$

A la izquierda de la igualdad tenemos la fuerza electrostática, y a la derecha, el gradiente de la energía electrostática:

$$\vec{F}_e = -\,\vec{\nabla}\,U_e$$

Este razonamiento nos acaba de dar una nueva herramienta para calcular la fuerza relacionada con el campo electrostático. Si podemos expresar la energía como una función de la distancia, podremos derivar para calcular el gradiente y medir la fuerza estática que sienten las placas del condensador.

En un condensador ya sabemos que la energía almacenada es:

$$U = \frac{q}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Si sustituimos el valor de C por la capacidad de un condensador plano de placas paralelas renombrando la separación entre las placas con la variable x, tendremos:

$$U = \frac{Q^2 x}{2 \epsilon_0 A}$$

Como sabemos que la fuerza entre las placas se produce en la dirección perpendicular, podemos derivar con respecto a x para calcular el gradiente y, por tanto, la fuerza:

$$|\vec{F}| = -\frac{dU}{dx} = \frac{-Q^2}{2 \epsilon_0 A} \; [N]$$

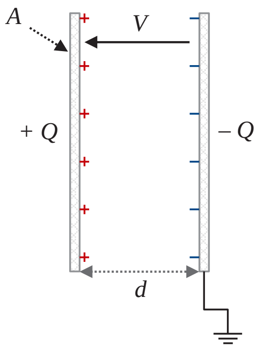
Obtenemos el mismo valor que en el caso anterior, pero con un signo negativo. ¿De dónde viene este signo? Este signo nos indica que, en realidad, al haber derivado con respecto a x, hemos calculado la fuerza sobre la placa $-Q$. Si hubiéramos tomado la derivada con respecto a $-x$, habríamos calculado la fuerza sobre la placa $+Q$.

8. DIELÉCTRICOS

Hasta este momento, en las tres primeras unidades y en todos los cálculos y escenarios que hemos analizado, hemos supuesto que el campo eléctrico y también el relleno de nuestros condensadores era el vacío. En realidad, si lo pensamos bien, es bastante poco práctico y aún menos realista, pero nos ha permitido simplificar bastante los cálculos en todo el camino. En la mayor parte de los casos, los condensadores no están rellenos de vacío, sino que se construyen de determinados materiales. De forma aún más general, el campo eléctrico no está en un medio vacío, sino que normalmente atraviesa estos materiales. En este apartado vamos a analizar qué le pasa al campo electrostático cuando atraviesa medios materiales que llamamos «dieléctricos».

8.1. EXPERIMENTO DE FARADAY CON DIELÉCTRICOS

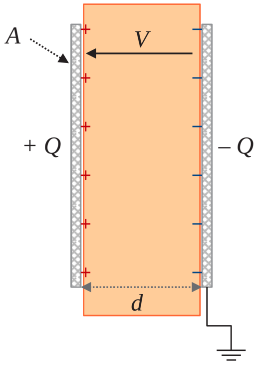
Faraday hizo una gran cantidad de investigación en electricidad. Entre otros muchos, hizo un experimento con condensadores que, seguramente, fue parecido a este: tenía un condensador de placas paralelas, de los que ya conocemos, relleno de aire en lugar de vacío. En realidad, para este cálculo, podemos asumir que el aire y el vacío son iguales. Faraday tenía este condensador cargado con una carga Q. Algo así:



Si Faraday nos pidiera calcular cuál es la diferencia de potencial entre sus placas, lo tendríamos bastante claro, ya que, usando la capacidad de un condensador de placas paralelas, podríamos hacerlo fácilmente:

$$V = \frac{Q}{C} \rightarrow V = Q\,\frac{d}{\epsilon_0 A}$$

A continuación lo que Faraday hacía era insertar entre ambas placas un papel encerado. Podría valer cera de abejas. El resultado es como el del dibujo:



Una vez insertada la lámina de papel encerado, Faraday observaba que la diferencia de potencial entre ambas placas (V') se reducía, se hacía más pequeña. Sin embargo, como es lógico, ni el área de las placas ni la separación entre ellas había cambiado. Además, la carga, puesto que no había permitido que saliera o entrara nada del condensador, seguía siendo la misma. Y entonces, si se mantenía el área, la separación entre las placas y la carga acumulada, ¿cómo era posible que se redujese la diferencia de potencial?

Parecía que, de alguna forma, el campo eléctrico se había hecho menos intenso. Recordemos que la diferencia de potencial entre las placas la podemos calcular así:

$$V' = -\int \vec{E}' \cdot d\vec{r}$$

Como esta diferencia de potencial era menor, la única explicación posible era que el campo electrostático $\vec{E}'$ fuera menos intenso. Además, como consecuencia, también disminuía la fuerza que veían las placas del condensador; es decir, se atraían menos.

Todo apuntaba a que, de alguna forma, el papel encerado había reducido la intensidad del campo eléctrico total y, por tanto, la diferencia de potencial también había disminuido en un factor que podríamos llamar ϵ_r. Y así, la nueva diferencia de potencial era:

$$V' = \frac{V_{vacío}}{\epsilon_r}$$

Faraday siguió experimentando con diversos materiales que tenía a mano y se dio cuenta de que, para cada material que probaba, el valor de ϵ_r variaba. Esto es lo mismo que decir que cada material tenía la propiedad de cambiar la intensidad del campo eléctrico en el interior del condensador de una manera diferente.

Si desarrollamos la ecuación del condensador plano de placas paralelas, pero teniendo en cuenta esta variación en la intensidad del campo eléctrico, tenemos que:

$$V' = -\int \frac{\vec{E}}{\epsilon_r} \cdot d\vec{r} = \frac{Q\,d}{\epsilon_r\,\epsilon_0\,A}$$

Y, por tanto, podemos calcular la nueva capacidad de este condensador con su dieléctrico interno como:

$$C = \frac{\epsilon_r\,\epsilon_0\,A}{d}$$

8.2. ¿QUÉ ES UN DIELÉCTRICO?

Los materiales **dieléctricos** son materiales no conductores, es decir, no tienen cargas libres en su interior y tienen la propiedad de interactuar con el campo electrostático de una forma que veremos en el siguiente apartado.

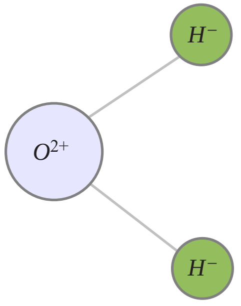
La mayor parte de los materiales no conductores son dieléctricos. En realidad, todos los materiales, incluso los conductores, tienen ciertas propiedades dieléctricas.

8.3. COMPORTAMIENTO DE LOS DIELÉCTRICOS ANTE UN CAMPO ELÉCTRICO

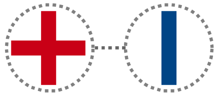
¿Cómo es posible que ocurra lo que Faraday observaba? ¿Qué es lo que hace que el dieléctrico, un material neutro, sin carga neta, aislante, reduzca el campo eléctrico que de otra forma habría en el vacío?

8.3.1. Dipolos moleculares

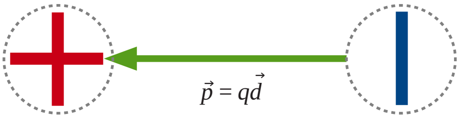
Los materiales dieléctricos están compuestos de gran cantidad de moléculas de uno o varios tipos. Piensa en un dieléctrico, que es poco práctico para construir un condensador, como puede ser el agua. ¡Atención! El agua es aislante, aunque casi todos pensemos que es conductora, pero esto se debe a que las sales que tiene disueltas liberan iones que son cargas libres. Si pensamos en el agua, seguramente recuerdes (en la unidad 1 lo discutimos) que está formada por moléculas de H_2O. Por su disposición geométrica y por la química de sus enlaces se parece a algo así:



Como dijimos en la unidad 1, la molécula de agua, desde un punto de vista de la carga, se puede aproximar a una distribución como la siguiente:



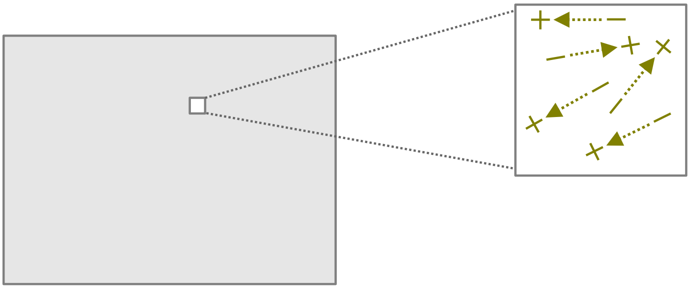
En realidad no es otra cosa que un pequeño dipolo eléctrico. Te recuerdo que el momento dipolar es un vector que apunta en la dirección de $-q$ a $+q$ y cuyo valor es la distancia por la carga, tal cual está dibujado en la siguiente figura:



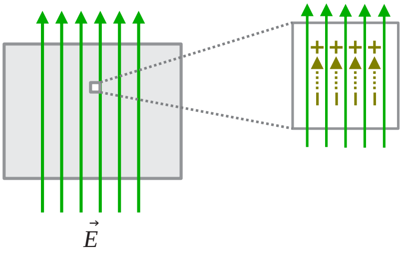
Es cierto que otras moléculas no tienen esa disposición dipolar, pero, más adelante, veremos que, ante un campo eléctrico, se polarizan, creando también pequeños dipolos moleculares.

8.3.2. El dieléctrico sumergido en un campo eléctrico

Volvamos al agua. En este dieléctrico hay gran cantidad de dipolos moleculares; un número extraordinario de ellos, incluso aunque tomásemos un pequeño diferencial de volumen. Ahora bien, cada uno de ellos apunta en una dirección aleatoria y variable con el tiempo. Así, analizando el material desde lejos, no vemos ningún momento dipolar neto, ya que unos dipolos anulan, en media, a los otros, como en la siguiente figura:



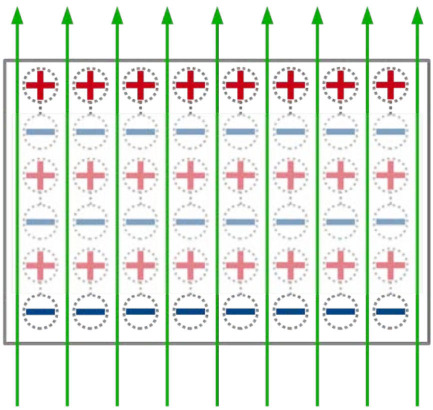
¿Y qué pasa cuando sumergimos el material dieléctrico en un campo eléctrico? Ya te habrás imaginado que estos pequeños dipolos con forma de «pesa» se van a alinear con el campo eléctrico. Algo así:



Es decir, aunque el material sea neutro, una vez que lo sumergimos en un campo eléctrico, sus moléculas se orientan siguiendo al campo. Esta alineación de los dipolos microscópicos hace que su estructura interna cambie ligeramente. Se puede demostrar, aunque no es objeto de este manual, que estos dipolos así ordenados generan un campo eléctrico interno que se opone al campo eléctrico externo.

8.4. CARGA DE POLARIZACIÓN

En la siguiente figura vamos a dibujar un dieléctrico sumergido en un campo eléctrico externo y nos fijaremos en la zona cercana a su frontera:



Pues bien, lo que observamos es que todos los dipolos se han alineado con el campo. En las zonas centrales tenemos tantas cargas positivas como negativas, y podemos asumir que la densidad de carga en esa zona se hace 0. Ahora fijémonos en el borde superior e inferior, justo en la frontera. En esa zona hay unas cargas pegadas a la superficie del dieléctrico que no se anulan: aparece una densidad superficial de carga que llamamos «densidad de carga de polarización» o «densidad de carga ligada».

Se llama «densidad de carga ligada» porque no es carga libre, no puede moverse por el interior del dieléctrico, pero aparece cuando se excita al material con un campo externo.

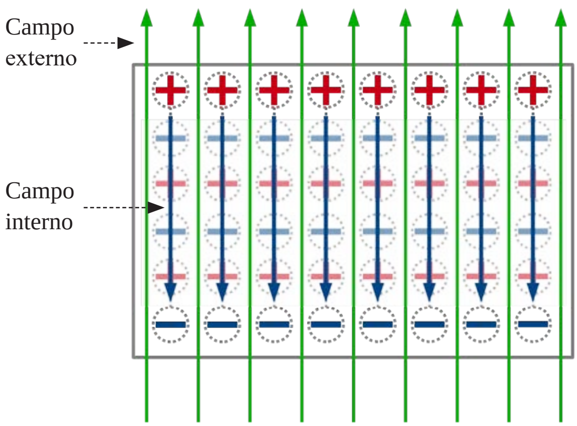
Es importante entender que:

- El dieléctrico sigue siendo neutro y, por lo tanto, toda la densidad de carga que aparece en un lado ha de compensarse con la que aparece en el otro.
- Esta carga solo aparece cuando excitamos al material con un campo externo. En cuanto eliminamos el campo, el material se relaja y la carga ligada desaparece.

Aunque no lo veremos en este manual, esta carga ligada superficial se puede calcular, y, además, si el dieléctrico no es homogéneo, también puede aparecer en su interior una densidad de carga ligada volumétrica.

8.5. CAMPO INTERNO Y CAMPO TOTAL

Si aparece una carga ligada en el dieléctrico, necesariamente aparecerá un campo debido a esa carga. Si volvemos a nuestro ejemplo, podemos dibujar, en el interior del material, la forma de este campo:



Seguramente ya te habrás dado cuenta de que el campo total en el interior del material, que es la suma del campo externo y el que se genera internamente, va a ser ligeramente más pequeño que el campo original en el que sumergimos al dieléctrico, ya que ambos son de sentidos opuestos:

$$|\vec{E}|_t = |\vec{E}|_{ext} - |\vec{E}|_{int}$$

Podemos demostrar que la reducción del campo neto en el interior del dieléctrico tiene estas características:

- Es proporcional al campo eléctrico externo que excita al material.
- Depende del material. Cada material dieléctrico se comporta de manera diferente y produce diferentes reducciones del campo.
- Tiene una expresión matemática así:

$$\vec{E}_t = \frac{\vec{E}_{ext}}{\epsilon_r}$$

A esta constante ϵ_r se la llama «permitividad relativa del medio» o «constante dieléctrica del medio» y, por supuesto, depende del material que estemos polarizando.

8.5.1. Campo generado por una carga puntual en el interior de un dieléctrico

Si depositásemos una carga puntual en el interior de un dieléctrico, esta generaría un campo electrostático que polarizaría al medio. De esta manera, obtendríamos un valor del campo ligeramente más pequeño que el que nos encontraríamos en el vacío.

La expresión generalizada del módulo del campo eléctrico generado por una carga en el interior de un medio dieléctrico será:

$$|\vec{E}_q| = \frac{q}{4\pi\, \epsilon_0\, \epsilon_r\, d^2}$$

8.6. CONSTANTE DIELÉCTRICA Y PERMITIVIDAD DE UN DIELÉCTRICO

Llamamos «permitividad relativa» o «constante dieléctrica» de un medio al valor:

$$\epsilon_r$$

Es una constante adimensional, ya que definimos la permitividad absoluta del medio al valor:

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

En esta tabla tenemos la constante dieléctrica de algunos materiales:

Material	ϵ_r
Vacío	1
Aire	1.00059
Dióxido de silicio	3.9
Agua	80.1 (20 ºC)
Titanato de cobre y calcio	> 250000
Goma	6

Uno podría pensar que para que un material se comporte como hemos deducido ha de tener moléculas polares, como el ejemplo de las moléculas de agua.

En realidad, aunque el dieléctrico tenga moléculas apolares, como, por ejemplo, las moléculas de oxígeno o de CO_2, también tiene este efecto. Esto es así porque, aunque una molécula no sea polar, al sumergirla en un campo eléctrico, los electrones de la molécula tienden a moverse en dirección contraria al campo, creando pequeños dipolos inducidos. Estos dipolos inducidos son equivalentes, aunque, por lo general, menos intensos a los dipolos de las moléculas polares, que no necesitan un campo externo para existir.

8.7. RUPTURA DE UN DIELÉCTRICO

Hay una pregunta interesante que podemos hacernos. Al someter un dieléctrico a un campo eléctrico externo, los dipolos moleculares se alinean con el campo y aparece una carga de polarización, pero ¿podemos hacer el campo externo tan intenso como queramos? ¿Existe algún límite?

Si no existiera ese límite, podríamos aumentar el campo y cada vez aparecería más carga de polarización y más campo interno para anular parte del campo externo. Y podríamos aumentar la intensidad de este campo de forma arbitrariamente alta, hasta valores absurdos, que generarían cantidades absurdas de carga de polarización.

En realidad, lo que ocurre es que los materiales dieléctricos tienen una intensidad de campo de ruptura a partir de la cual la estructura molecular interna no es capaz de soportar la fuerza que sobre sus moléculas ejerce el campo eléctrico. Es el punto de ruptura del dieléctrico.

Una vez superado este punto, se produce la liberación de cargas, normalmente electrones, pero podrían ser iones. El dieléctrico deja de ser un aislante y se vuelve conductor, y, si está dentro de un condensador, pone en contacto eléctrico sus placas y deja de funcionar como tal, aunque sea solo momentáneamente. A esta intensidad de campo de ruptura se la llama «rigidez dieléctrica».

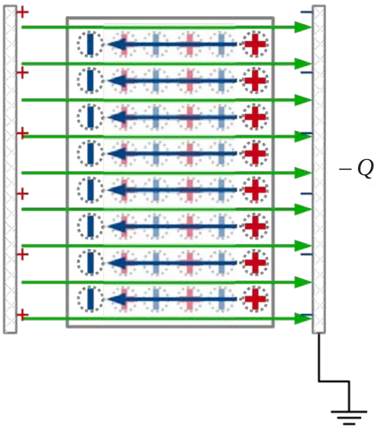
Algunos valores del campo de ruptura son:

Material	**Campo de ruptura (10^6 V/m)**
Aire	0.3-4
Agua destilada	30
Teflón	60
Dióxido de silicio	> 1000
Vacío	20-40 (según la forma del metal)

9. DIELÉCTRICOS Y CONDENSADORES

9.1. EL EXPERIMENTO DE FARADAY (DE NUEVO)

Sabiendo lo que sabemos ahora sobre cómo se comporta un dieléctrico, es fácil entender qué es lo que Faraday observaba en su experimento. En la siguiente figura tenemos el dieléctrico en el interior del condensador excitado por el campo:



Lo que pasa es que la carga ligada que el campo del condensador induce sobre el dieléctrico genera un campo interno que se opone al campo que la excita. El campo total en el interior del condensador se hace más pequeño y, por tanto, la diferencia de potencial entre las armaduras se reduce.

9.2. CÁLCULO DE LA CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR CON UN DIELÉCTRICO

Vamos a calcular la capacidad de un condensador que está relleno de un dieléctrico. Para ello diremos que su capacidad en vacío es:

$$C_0$$

Ya sabemos que el condensador relleno de vacío cumple que:

$$Q = C_0 \cdot V_0$$

Ahora rellenaremos el condensador con un dieléctrico que tiene una constante dieléctrica de valor:

$$\epsilon_r$$

Y volvemos a cargar el condensador con el mismo valor de carga que tenía cuando estaba relleno de vacío:

$$Q = C \cdot V$$

Como hemos visto en el experimento de Faraday, el campo eléctrico y, por tanto, la diferencia de potencial entre ambas armaduras del condensador se hacen más pequeños debido a la presencia del dieléctrico en su interior, siguiendo esta relación:

$$V = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

Si sustituimos en la expresión de la carga, tendremos:

$$Q = \frac{C \cdot V_0}{\epsilon_r}$$

Como hemos cargado el condensador con el mismo nivel de carga en ambos casos, podemos igualar la expresiones:

$$C_0 \cdot V_0 = C \cdot \frac{V_0}{\epsilon_r} \rightarrow C = \epsilon_r \, C_0$$

Cuando un condensador tiene una capacidad en el vacío que es C_0, al rellenarlo por completo con un dieléctrico con una permitividad ϵ_r, su capacidad aumenta y pasa a ser:

$$C = \epsilon_r \cdot C_0$$

9.2.1. Capacidades de los condensadores habituales

Como acabamos de ver, la capacidad de un condensador relleno de dieléctrico aumenta gracias a su capacidad para reducir el campo en su interior. De esta manera podemos calcular las capacidades de los condensadores habituales cuando están totalmente rellenos de un dieléctrico:

- Condensador plano de placas paralelas:

$$C = \frac{\epsilon_r \, \epsilon_0 \, A}{d} = \frac{\epsilon \, A}{d} \; [F]$$

- Condensador cilíndrico:

$$C = \frac{2\pi \, \epsilon_r \, \epsilon_0 \, L}{\ln(R_o/R_i)} = \frac{2\pi \, \epsilon \, L}{\ln(R_o/R_i)} \; [F]$$

- Condensador esférico:

$$C = \frac{4\pi \, \epsilon_r \, \epsilon_0 \, R_i \, R_o}{R_o - R_i} = \frac{4\pi \, \epsilon \, R_i \, R_o}{R_o - R_i} \; [F]$$

9.3. VENTAJAS DE LOS DIELÉCTRICOS

Ya hemos visto que un dieléctrico, cuando se sumerge en el interior de un campo eléctrico, tiene un efecto: reduce la intensidad del campo eléctrico efectivo. Pero ¿qué es lo que aporta esta reducción?:

- Al usarlos dentro de un condensador, aumenta su capacidad según la expresión:

  $$C = \epsilon_r \, C_0$$

  ya que $\epsilon_r \geq 1$.

- Disminuye el campo eléctrico en el interior del medio, lo cual implica que se reduce el riesgo de ruptura del dieléctrico, ya que, al existir una diferencia de potencial menor y un campo eléctrico menor, la posibilidad de que este falle se reduce.

- Proporciona un soporte físico al que pegar los conductores de un condensador, lo que resulta mucho más práctico que el vacío, al que es complicado adherir cosas.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

Enunciado 1

Un condensador esférico está cargado con una carga *Q* de 3 *uC* y los radios de sus armaduras son de 10 y 12 *mm*. ¿Cuánto vale el módulo del campo eléctrico a una distancia de 1.5 *m* de su centro?

Enunciado 2

¿Cuánto trabajo habría que realizar para mover una carga de 1 *C* desde la esfera interior a la esfera exterior del condensador de la pregunta anterior si está sometido a una tensión de 320 *V*?

Enunciado 3

Si un condensador plano de placas paralelas tiene una capacidad de 10 *nF* cuando está relleno de aire, ¿qué capacidad tiene si lo rellenamos de un dieléctrico que tiene una constante dieléctrica de 2.5?

Enunciado 4

¿Cuánto vale el módulo campo eléctrico en el interior de un condensador plano de placas paralelas de separación 10 *cm* si está sometido a una tensión de 130 *V*?

Enunciado 5

¿Cuánta carga almacenan cuatro condensadores de 0.5 *uF* colocados en paralelo y sometidos a una tensión de 300 *V*?

Enunciado 6

Si quiero conseguir una capacidad de 15 *uF* y tengo un condensador de 30 *uF*, ¿qué otro condensador necesito y cómo he de conectarlos?

Enunciado 7

Un condensador plano de placas paralelas está sometido a una tensión de 12.5 *V*. Sabemos que la separación entre placas es de 1 *mm* y que el dieléctrico que lo llena tiene una rigidez dieléctrica de valor:

$$|\vec{E}|_{máx} = 11300 \, [V/m]$$

¿Se romperá el condensador en estas condiciones?

Enunciado 8

Tenemos un condensador cargado a 120 *V* y lo desconectamos de la fuente de alimentación que lo carga. A continuación extraemos el dieléctrico que hay en su interior. ¿Qué pasa con la tensión y la carga?

Enunciado 9

Si la capacidad de un condensador es *C*, ¿cuánto vale la capacidad de *N* condensadores de este tipo asociados en serie?

Enunciado 10

Un condensador tiene almacenada una energía de 30 *pJ* cuando se carga a 10 *V*. ¿Cuál es su capacidad?

Solución 1

$|\vec{E}| = 0\ [V/m]$.

Solución 2

$W = 320\ [J]$.

Solución 3

$C = 25\ [nF]$.

Solución 4

$|\vec{E}| = 1300\ [V/m]$.

Solución 5

$Q_t = 600\ [\mu\ C]$.

Solución 6

Necesitamos otro condensador igual y conectar ambos en serie.

Solución 7

Sí. El campo interno, bajo esa tensión, es de 12500 $[V/m]$, mayor que la rigidez dieléctrica.

Solución 8

La carga se mantiene constante y la tensión subirá.

Solución 9

$$C_t = \frac{C}{N}.$$

Solución 10

$$C = 0.6\ [pF].$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básica

Cheng, D. K. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. 2.ª ed. México DF: Alhambra Mexicana, SA, 2014. 492 pp.

Magro Andrade, R.; Abad Toribio, L.; Serrano Pérez, M.; Velasco Fernández; A. I.; Sánchez Sánchez, S. y Tejedor de las Muelas, J. *Fundamentos de electricidad y magnetismo*. Madrid: García Maroto, 2009. 318 pp.

Avanzada

Feynman, R. P.; Leighton, R. B. y Sands, M. *The Feynman lectures on Physics*. Vol. II: *Mainly electromagnetism and matter*. Perseus Distribution. The New Millennium Edition, 2011. 592 pp.