UNIDAD DIDÁCTICA

2 TEORÍA DE JUEGOS DE SUMA CERO

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

En esta Unidad didáctica nos vamos a introducir en la teoría de juegos. Se van a ver los distintos elementos de un juego (jugadores, estrategias y matriz de pagos), así como los distintos tipos de juegos existentes según:

- El pago recibido por un jugador en función de lo que reciben los demás jugadores.
- El número de jugadores.
- El grado de interacción entre los jugadores.
- El grado de información que se tenga.
- El número de estrategias que puede adoptar cada jugador.
- El momento en el que deben tomar las decisiones los jugadores.

En el segundo epígrafe se van a estudiar los juegos de suma cero, que son los más utilizados. Se verá cómo realizar la matriz de pagos y mediante el uso de dos metodologías:

- Estrategias dominadas.
- Maximin-minimax.

se aprenderá a encontrar equilibrio del juego de suma cero, su punto silla, y, de esta manera, a conocer el pago asociado al juego.

También nos vamos a introducir en el análisis de sensibilidad de los valores que pueden tener ciertas casillas de la matriz de pagos, para que el punto silla del juego sea otra determinada casilla.

Por último, se analizarán las estrategias mixtas. Este tipo de estrategias se utilizan cuando no existe un punto silla. Se pueden resolver de manera gráfica en unas determinadas condiciones.

1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS

Una herramienta muy útil para poder tomar ciertas decisiones que involucran a varias partes es la teoría de juegos. El estudio de esta temática ha obtenido varios Premios Nobel en los últimos años, entre los que destaca John Nash, cuya vida se vio reflejada en la película *Una mente maravillosa*.

Un **juego** se caracteriza por los siguientes elementos:

- **Jugadores.** Son las distintas partes intervinientes en el mismo. Pueden representar intereses individuales o colectivos (como una empresa).
- **Estrategias.** Son las diversas acciones que puede tomar cada uno de los jugadores. Cada jugador tendrá su conjunto de posibles estrategias, y no tienen por qué coincidir.
- **Matriz de pagos.** Es la tabla que expresa las ganancias o pérdidas de cada uno de los jugadores en función de las estrategias adoptadas. Se utiliza cuando intervienen dos jugadores.

Los juegos se pueden clasificar de numerosas formas:

- Según el **pago recibido** por un jugador en función de lo que reciben los demás jugadores:
  - Suma cero: si la suma de lo que ganan unos jugadores es lo que pierden otros.
  - Suma no cero: si la suma de lo que ganan unos jugadores no coincide con lo que pierden el resto de jugadores.
- Según el **número de jugadores**:
  - Unipersonales.
  - De 2 jugadores.
  - De 3 jugadores o tríadas.

- De *n* jugadores
- Infinitos jugadores: cuando son incontables.

- Según el **grado de interacción** entre los jugadores:
  - Cooperativos: colaboran entre sí para obtener todos los mejores resultados.
  - No cooperativos: actúan todos los jugadores independientemente.

- Según el **grado de información** que se tenga:
  - De información completa: todos los jugadores poseen la misma información.
  - De información incompleta: algunos jugadores tienen acceso a más información que el resto, que desconocen algunos aspectos.

- Según el **número de estrategias** que puede adoptar cada jugador:
  - Estrategias finitas.
  - Estrategias infinitas.

- En función del **momento** en el que deben tomar las decisiones los jugadores:
  - Simultáneos: todos los jugadores las toman en el mismo momento.
  - Secuenciales: un jugador espera a que otro tome una decisión, y, en función de la estrategia adoptada, el otro jugador decide su estrategia más adecuada.

2. JUEGOS DE SUMA CERO DE DOS JUGADORES

Aquel juego en que se puede realizar un mejor análisis es aquel en el que hay 2 jugadores y lo que gana uno es lo que pierde el otro. Son los juegos de suma cero de dos jugadores. En ellos se supone que los jugadores son racionales, es decir, que no van a elegir aleatoriamente una estrategia, sino que, basándose en las posibles ganancias y pérdidas de cada estrategia, buscarán la mejor solución.

En este tipo de juegos, la matriz de pagos se representa de la siguiente manera:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	...	Estrategia m
Estrategia 1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
Estrategia 2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...
Estrategia n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

Siendo p_{ij} el pago que recibe el jugador 1 cuando él aplica la estrategia *i*, mientras que el jugador 2 aplica la estrategia *j*. Como es un juego de suma cero, el pago del jugador 2 será lo opuesto a esa cantidad.

A continuación vamos a ver cómo sería la matriz de pagos de un juego muy típico y conocido internacionalmente: **piedra-papel-tijera**.

Hay que recordar que:

- La piedra gana a la tijera.
- La tijera gana al papel.
- El papel gana a la piedra.
- Si los dos jugadores sacan lo mismo, hay empate y ninguno de los dos gana.

En función de lo dicho, las ganancias asociadas a este juego son las siguientes:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia piedra	Estrategia papel	Estrategia tijera
Estrategia piedra	0	– 1	1
Estrategia papel	1	0	– 1
Estrategia tijera	– 1	1	0

Otro ejemplo típico es el de la **cuota de mercado** que puede ganar un jugador a costa de la que pierde el otro jugador en un mercado con solo 2 competidores. Se va a suponer la siguiente casuística: existen dos fabricantes de móviles que se reparten el mercado y cada uno está pensando en sacar un nuevo producto.

El fabricante A se ha planteado como posibilidades:

- Estrategia 1. Ofertar un *smartphone* con una pantalla de 6,5 pulgadas que sería novedad en el mercado.
- Estrategia 2. Ofertar un reloj que se sincronice con el *smartphone*.

El fabricante B se ha planteado como posibilidades:

- Estrategia 1. Ofertar un *smartphone* con doble sistema operativo, que también sería novedad en el mercado.
- Estrategia 2. Ofertar una pulsera que se sincronice con el *smartphone* útil para los amantes del deporte.

Se han realizado estudios de mercado para conocer las preferencias de los clientes y se han obtenido los siguientes datos:

- Si ambos jugadores optan por su estrategia 1, ninguno de los dos ganaría ni perdería cuota de mercado.
- Si el fabricante A opta por la estrategia 1, mientras el fabricante B opta por la estrategia 2, A ganaría 5 puntos de cuota de mercado a costa de B.
- Si el fabricante A opta por la estrategia 2, mientras el fabricante B opta por la estrategia 1, B ganaría 3 puntos de cuota de mercado a costa de A.
- Si ambos jugadores optan por su estrategia 2, A ganaría 3 puntos de cuota de mercado a costa de B.

La matriz de pagos asociada sería la siguiente:

Fabricante B / Fabricante A	Estrategia 1	Estrategia 2
Estrategia 1	0	5
Estrategia 2	– 3	3

Un aspecto muy interesante y útil de los juegos es encontrar un punto en el cual a ninguno de los dos jugadores le interesa cambiar, ya que saldría perdiendo. A este punto se le suele denominar **punto silla**, **punto de equilibrio** o **equilibrio de Nash**. Los siguientes epígrafes se centran en ver cómo encontrar este punto.

2.1. ESTRATEGIAS DOMINADAS

En los juegos puede existir cierta estrategia (dominante) que siempre es mejor o igual que otras para un jugador (dominadas). Este aspecto servirá de ayuda de cara a encontrar el punto de equilibrio, si existe, o por lo menos para simplificar la matriz de pagos.

Aquellas estrategias de un jugador que son dominadas se pueden descartar, reduciendo la matriz de pagos. Una vez reducida la matriz de pagos, se vuelve a realizar el mismo análisis para el otro jugador, para ver si también tiene estrategias dominantes y dominadas. Este proceso se realiza todas las veces posibles hasta que no existan ya estrategias dominantes. Si solo queda una celda, esta será el punto de equilibrio.

Veamos su aplicación en varios ejemplos:

EJEMPLO 1

Dado el siguiente juego de suma cero, determinar el punto de equilibrio por estrategias dominadas.

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	– 3	3	2
Estrategia 2	0	4	1
Estrategia 3	– 1	– 2	3

.../...

.../...

Solución

En el juego dado se observa que para el jugador 2 la estrategia 3 es siempre peor o igual que la estrategia 1, por lo que se descarta.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	– 3	3	2
Estrategia 2	0	4	1
Estrategia 3	– 1	– 2	3

Quedaría la siguiente matriz de pagos:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2
Estrategia 1	– 3	3
Estrategia 2	0	4
Estrategia 3	– 1	– 2

Ahora, desde el punto de vista del jugador 1, las estrategias 1 y 3 son siempre peores o iguales que la estrategia 2, por lo que se van a descartar:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2
Estrategia 1	– 3	3
Estrategia 2	0	4
Estrategia 3	– 1	– 2

.../...

.../...

Y quedará:

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2
Estrategia 2	0	4

Con lo que el jugador 2 elegirá la estrategia 1.

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1
Estrategia 2	0

Por tanto, el punto de equilibrio por estrategias dominadas será la estrategia 2 del jugador 1 con la estrategia 1 del jugador 2, donde ninguno de los dos jugadores tendrá ganancias ni pérdidas.

EJEMPLO 2

Dado el siguiente juego de suma cero, determinar el punto de equilibrio por estrategias dominadas.

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	– 1	4
Estrategia 2	0	3	– 2
Estrategia 3	1	1	0

Solución

En este caso no se encuentra ninguna estrategia dominada por otra, por lo que no existe punto de equilibrio.

2.2. MAXIMIN-MINIMAX

Otra forma de encontrar el punto de equilibrio de un juego es mediante la utilización del **maximin-minimax**. Tiene como ventaja que es más fácil de aplicar cuando se tienen muchas estrategias por cada jugador. Por otro lado, tiene el inconveniente de que en los casos en los que no existe ese punto de equilibrio no aporta la reducción de la matriz de pagos, como en el caso de las estrategias dominadas.

Los **pasos** que se tienen que seguir son los siguientes:

1. Obtener el mínimo de cada estrategia para el jugador 1.
2. Seleccionar el máximo de los mínimos del punto 1: maximin.
3. Obtener el máximo de cada estrategia del jugador 2.
4. Seleccionar el mínimo de los máximos del punto 3: minimax.
5. Comparar el maximin con el minimax: si coinciden y provienen de la misma celda, esa celda será el punto de equilibrio. En caso contrario, no existe.

A continuación vamos a mostrar dos ejemplos:

EJEMPLO 3

Obtener el punto de equilibrio del siguiente juego mediante la estrategia del maximin-minimax.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	– 3	3	2
Estrategia 2	0	4	1
Estrategia 3	– 1	– 2	3

.../...

.../...

Solución

Se va a obtener el mínimo (mín) por fila y el máximo (máx) por columna:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	mín
Estrategia 1	– 3	3	2	– 3
Estrategia 2	0	4	1	0
Estrategia 3	– 1	– 2	3	– 2
máx	0	4	3	

Ahora se determinan el maximin (máximo de los mínimos) y el minimax (mínimo de los máximos). En caso de coincidir se tendrá punto de equilibrio.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	maximin
Estrategia 1	– 3	3	2	– 3
Estrategia 2	**0**	4	1	**0**
Estrategia 3	– 1	– 2	3	– 2
minimax	**0**	4	3	

Por tanto, el punto de equilibrio será la estrategia 2 del jugador 1 con la estrategia 1 del jugador 2.

EJEMPLO 4

Obtener el punto de equilibrio del siguiente juego mediante la estrategia del maximin-minimax.

.../...

.../...

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	– 1	4
Estrategia 2	0	3	– 2
Estrategia 3	1	1	0

Solución

Se va a obtener el mínimo por fila y el máximo por columna:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	mín
Estrategia 1	2	– 1	4	– 1
Estrategia 2	0	3	– 2	– 2
Estrategia 3	1	1	0	0
máx	2	3	4	

Ahora se determinan el maximin (máximo de los mínimos) y el minimax (mínimo de los máximos).

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	maximin
Estrategia 1	2	– 1	4	– 1
Estrategia 2	0	3	– 2	– 2
Estrategia 3	1	1	0	**0**
minimax	**2**	3	4	

Como no coinciden, no se ha encontrado un punto de equilibrio. Más adelante se verá cómo resolver este tipo de problemas con ayuda de las estrategias mixtas.

3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN LOS JUEGOS DE SUMA CERO

En ciertas ocasiones resulta de interés conocer los valores de ciertas celdas, que hacen que una determinada celda sea el punto de equilibrio. Se realizará con ayuda del maximin-minimax y se restringirá el valor de esas celdas. A continuación se verá un ejemplo de cómo realizarlo:

EJEMPLO 5

Dado el siguiente juego de suma cero, determinar los rangos de valores de p_{11} y p_{22} para que el punto de equilibrio del juego sea la estrategia 2 del jugador 1 con la estrategia 1 del jugador 2.

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	p_{11}	3	2
Estrategia 2	0	p_{22}	1
Estrategia 3	– 1	– 2	3

Solución

Desde el punto de vista del maximin quedaría la siguiente tabla:

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	maximin	
Estrategia 1	p_{11}	3	2	2 o p_{11}	$p_{11} \leq 0$
Estrategia 2	0	p_{22}	1	**0**	$p_{22} \geq 0$
Estrategia 3	– 1	– 2	3	– 2	

.../...

.../...

En la fila correspondiente a la estrategia 1, el mínimo será 2 o p_{11}.

En la fila correspondiente a la estrategia 2, el mínimo será 0 o p_{22}.

Para que se cumpla que el 0 correspondiente a la estrategia 2 sea el maximin, deben darse las dos condiciones siguientes:

- p_{11} debe ser menor o igual a 0.
- p_{22} debe ser mayor o igual a 0.

Si ahora se comprueba desde el punto de vista del minimax:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	p_{11}	3	2
Estrategia 2	0	p_{22}	1
Estrategia 3	– 1	– 2	3
minimax	**0** $p_{11} \leq 0$	3 o p_{22}	3

En la columna correspondiente a la estrategia 1, el máximo será 0 o p_{11}.

En la columna correspondiente a la estrategia 2, el máximo será 3 o p_{22}.

Para que se cumpla que el 0 correspondiente a la estrategia 1 sea el minimax, debe cumplirse la condición siguiente:

- p_{11} debe ser menor o igual a 0.

Por tanto, deben cumplirse todas las condiciones encontradas, que en este caso son:

$$p_{11} \leq 0$$

$$p_{22} \geq 0$$

4. ESTRATEGIAS MIXTAS. SOLUCIÓN GRÁFICA DE LOS JUEGOS DE SUMA CERO

Cuando un juego no tiene un punto de equilibrio, se pueden buscar unas estrategias mixtas, que consisten en determinar varias posibles estrategias por cada jugador, así como la probabilidad de cada una. Para los casos en que uno de los jugadores tiene dos posibles estrategias, este tipo de problemas se puede resolver gráficamente. A continuación veremos cómo realizarlo con ayuda de un ejemplo.

EJEMPLO 6

Dado el siguiente juego, se observa que, aplicando el criterio maximin-minimax, no se llega a un punto de equilibrio:

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	maximin
Estrategia 1	2	– 1	4	**– 1**
Estrategia 2	0	3	– 2	– 2
minimax	**2**	3	4	

Como no coincide el minimax (2) con el maximin (– 1), no existe ese punto de equilibrio. Para estos casos se va a asignar una probabilidad x_1 a la estrategia 1 del jugador 1 y una probabilidad $x_2 = 1 - x_1$ a la probabilidad de la estrategia 2 del jugador 1.

Solución

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	Probabilidad
Estrategia 1	2	– 1	4	x_1
Estrategia 2	0	3	– 2	$x_2 = 1 - x_1$

.../...

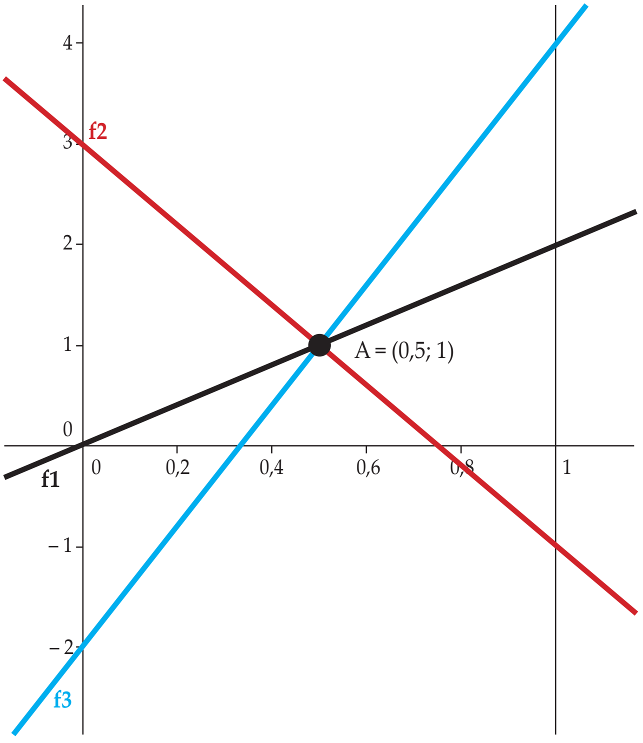
.../...

Con estas probabilidades se va a obtener el pago esperado del jugador 1 en función de la estrategia adoptada por el jugador 2.

Estrategia jugador 2	Pago esperado del jugador 1
1	$f1(x_1) = 2x_1$
2	$f2(x_1) = -x_1 + 3(1 - x_1) = -x_1 + 3 - 3x_1 = -4x_1 + 3$
3	$f3(x_1) = 4x_1 - 2(1 - x_1) = 4x_1 - 2 + 2x_1 = 6x_1 - 2$

Se van a representar gráficamente las tres rectas y se va a seguir el criterio maximin. Se seleccionará la envolvente inferior y se escogerá el máximo de la misma.

Figura 1. **Representación gráfica del ejemplo 6**



.../...

.../...

La envolvente inferior está formada por *f*3 hasta el punto A y a partir de ahí será *f*2. La intersección de *f*2 y *f*3 está en el punto (0,5; 1). Por tanto:

$$x_1 = 0{,}5$$
$$x_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Como *f*1 no pertenece a la envolvente inferior, salvo en un punto, se descarta la estrategia 1 del jugador 2.

A partir de aquí se va a obtener el pago esperado del jugador 2 en función de la estrategia adoptada por el jugador 1. Las probabilidades serán:

- $y_1 = 0$, ya que se acaba de descartar la estrategia 1 del jugador 2.
- y_2 para la estrategia 2 del jugador 2.
- $y_3 = 1 - y_2$ para la estrategia 3 del jugador 2.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	– 1	4
Estrategia 2	0	3	– 2
Probabilidad	$y_1 = 0$	y_2	$y_3 = 1 - y_2$

Los pagos esperados del jugador 2 serán:

Estrategia jugador 1	Pago esperado del jugador 2
1	$f1\ (y_2) = -y_2 + 4\ (1 - y_2) = -5y_2 + 4$
2	$f2\ (y_2) = 3y_2 - 2\ (1 - y_2) = 5y_2 - 2$

La intersección de estas dos funciones en el punto (0,6; 1) dará la estrategia mixta del jugador 2:

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 0{,}6$$
$$y_3 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

El pago esperado del juego, según el valor de la función en el punto de intersección, es 1.

EJEMPLO 7

Dado el siguiente juego, proponemos resolverlo mediante la aplicación de estrategias mixtas.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	1	– 2
Estrategia 2	– 3	2	1

Solución

Se va a comprobar mediante la técnica del maximin-minimax si existe punto de equilibrio:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	maximin
Estrategia 1	2	1	– 2	**– 2**
Estrategia 2	– 3	2	1	– 3
minimax	2	2	**1**	

Como no coincide el minimax (1) con el maximin (– 2), no existe ese punto de equilibrio. Se va a asignar una probabilidad x_1 a la estrategia 1 del jugador 1 y una probabilidad $x_2 = 1 - x_1$ a la probabilidad de la estrategia 2 del jugador 1.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	Probabilidad
Estrategia 1	2	1	– 2	x_1
Estrategia 2	– 3	2	1	$x_2 = 1 - x_1$

Con estas probabilidades se va a obtener el pago esperado del jugador 1 en función de la estrategia adoptada por el jugador 2.

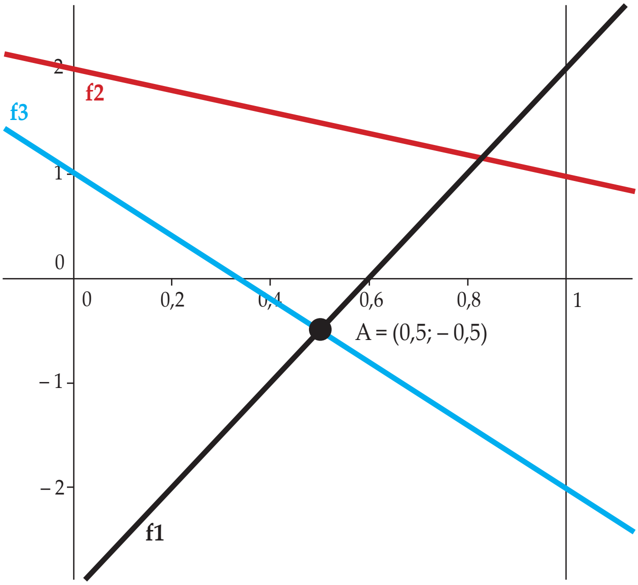
.../...

.../...

Estrategia jugador 2	Pago esperado del jugador 1
1	$f1(x_1) = 2x_1 - 3\ (1 - x_1) = 2x_1 - 3 + 3x_1 = 5x_1 - 3$
2	$f2(x_1) = x_1 + 2\ (1 - x_1) = x_1 + 2 - 2x_1 = -x_1 + 2$
3	$f3(x_1) = -2x_1 + 1\ (1 - x_1) = -2x_1 + 1 - x_1 = -3x_1 + 1$

Se van a representar gráficamente las tres rectas y se va a seguir el criterio maximin. Se seleccionará la envolvente inferior y se escogerá el máximo de la misma.

Figura 2. **Representación gráfica del ejemplo 7**



La envolvente inferior está formada por *f*1 hasta el punto A y a partir de ahí será *f*3. La intersección de *f*1 y *f*3 está en el punto (0,5; – 0,5). Por tanto:

$$x_1 = 0{,}5$$

$$x_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

.../...

.../...

Como $f2$ no pertenece a la envolvente inferior, salvo en un punto, se descarta la estrategia 2 del jugador 2.

A partir de aquí se va a obtener el pago esperado del jugador 2 en función de la estrategia adoptada por el jugador 1. Las probabilidades serán:

- y_1.
- $y_2 = 0$ para la estrategia 2 del jugador 2, ya que se acaba de descartar la estrategia 2 del jugador 2.
- $y_3 = 1 - y_1$ para la estrategia 3 del jugador 2.

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	1	– 2
Estrategia 2	– 3	2	1
	y_1	$y_2 = 0$	$y_3 = 1 - y_1$

Los pagos esperados del jugador 2 serán:

Estrategia jugador 1	Pago esperado del jugador 2
1	$f1(y_1) = 2y_1 - 2\,(1 - y_1) = 2y_1 - 2 + 2y_1 = 4y_1 - 2$
2	$f2(y_1) = -\,3y_1 + 1\,(1 - y_1) = -\,3y_1 + 1 - y_1 = -\,4y_1 + 1$

La intersección de estas dos funciones en el punto (0,375; – 0,5) dará la estrategia mixta del jugador 2:

$$y_1 = 3/8 = 0{,}375$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = 1 - 3/8 = 5/8 = 0{,}625$$

El pago esperado del juego, según el valor de la función en el punto de intersección, es – 0,5.

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Análisis de sensibilidad.
- Estrategias.
- Estrategias dominadas.
- Estrategia dominante.
- Estrategias mixtas.
- Juegos cooperativos.
- Juegos de información completa.
- Juegos de información incompleta.
- Juegos no cooperativos.
- Juegos secuenciales.
- Juegos simultáneos.
- Jugadores.
- Matriz de pagos.
- Maximin.
- Minimax.
- Pago del juego.
- Punto silla, punto de equilibrio o equilibrio de Nash.
- Suma cero.
- Suma no cero.
- Teoría de juegos.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Dado el siguiente juego de suma cero, determinar el punto de equilibrio por estrategias dominadas.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	1	4	– 1
Estrategia 2	1	– 3	– 2
Estrategia 3	3	3	2

Enunciado 2

Obtener el punto de equilibrio del siguiente juego mediante la estrategia del maximin-minimax.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	1	4	– 1
Estrategia 2	1	– 3	– 2
Estrategia 3	3	3	2

Enunciado 3

Dado el siguiente juego de suma cero, determinar los rangos de valores de p_{11} y p_{22} para que el punto de equilibrio del juego sea la estrategia 3 del jugador 1 con la estrategia 3 del jugador 2.

Jugador 2 / Jugador 1	**Estrategia 1**	**Estrategia 2**	**Estrategia 3**
Estrategia 1	1	4	p_{13}
Estrategia 2	1	– 3	– 2
Estrategia 3	p_{31}	3	2

Solución 1

En el juego dado se observa que para el jugador 1 la estrategia 2 es siempre peor o igual que la estrategia 3, por lo que se descarta.

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	1	4	– 1
Estrategia 2	1	– 3	– 2
Estrategia 3	3	3	2

Y quedará:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	1	4	– 1
Estrategia 3	3	3	2

Desde el punto de vista del jugador 2, las estrategias 1 y 2 son siempre peores o iguales que la estrategia 3, por lo que se descartarán:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	1	4	– 1
Estrategia 3	3	3	2

Quedará:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 3
Estrategia 1	– 1
Estrategia 3	2

Y el jugador 1 elegirá la estrategia 3.

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 3
Estrategia 3	2

Por tanto, el punto de equilibrio por estrategias dominadas será la estrategia 3 del jugador 1 con la estrategia 3 del jugador 2.

Solución 2

Se va a obtener el mínimo por fila y el máximo por columna:

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	mín
Estrategia 1	1	4	– 1	– 1
Estrategia 2	1	– 3	– 2	– 3
Estrategia 3	3	3	2	2
máx	3	4	2	

Ahora se determinan el maximin (máximo de los mínimos) y el minimax (mínimo de los máximos).

Jugador 2 / Jugador 1	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	maximin
Estrategia 1	1	4	– 1	– 1
Estrategia 2	1	– 3	– 2	– 3
Estrategia 3	3	3	2	**2**
minimax	3	4	**2**	

Como coinciden, el punto de equilibrio será la estrategia 3 del jugador 1 con la estrategia 3 del jugador 2.

Solución 3

Desde el punto de vista del maximin quedaría la siguiente tabla:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	maximin	
Estrategia 1	1	4	p_{13}	1 o p_{13}	$p_{13} \leq 2$
Estrategia 2	1	– 3	– 2	– 3	
Estrategia 3	p_{31}	3	2	**2**	2 o p_{31} $p_{31} \geq 2$

En la fila correspondiente a la estrategia 1, el mínimo será 1 o p_{13}.

En la fila correspondiente a la estrategia 2, el mínimo será p_{31} o 2.

Para que se cumpla que el 2 correspondiente a la estrategia 3 sea el maximin, deben cumplirse las dos condiciones siguientes:

- p_{13} debe ser menor o igual a 2.
- p_{31} debe ser mayor o igual a 2.

Si ahora se comprueba desde el punto de vista del minimax:

Jugador 1 \ Jugador 2	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	1	4	p_{13}
Estrategia 2	1	– 3	– 2
Estrategia 3	p_{31}	3	2
minimax	1 o p_{31}	4	**2**
	$p_{31} \geq 2$		$p_{13} \leq 2$

En la columna correspondiente a la estrategia 1, el máximo será 1 o p_{31}.

En la columna correspondiente a la estrategia 3, el máximo será 2 o p_{13}.

Para que se cumpla que el 2 correspondiente a la estrategia 3 sea el minimax, deben cumplirse las dos condiciones siguientes:

- p_{31} debe ser mayor o igual a 2.
- p_{13} debe ser menor o igual a 2.

Por tanto, deben cumplirse todas las condiciones encontradas, que en este caso son:

$$p_{13} \leq 2$$
$$p_{31} \geq 2$$

EJERCICIOS VOLUNTARIOS

Tras el estudio de esta Unidad didáctica, el estudiante puede hacer, por su cuenta, una serie de ejercicios voluntarios, como los siguientes:

1. En función del grado de interacción entre los jugadores, ¿qué tipos de juegos existen?
2. ¿Cómo re realiza el método maximin-minimax?
3. ¿Cómo se obtiene la matriz de pagos?
4. ¿Se puede aplicar el método gráfico cuando los 2 jugadores tienen más de dos posibles estrategias? ¿Por qué?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básica

CÓRDOBA, M.: *Metodología para la toma de decisiones*, Delta Publicaciones, Madrid, 2004.

DIXIT, A. K. y NALEBUFF, B. J.: *El arte de la estrategia*, Antoni Bosch Editor, 2010.

HILLIER, F. S. y LIEBERMAN, G. J.: *Introducción a la investigación de operaciones*, McGraw-Hill, 2010.

Avanzada

BRONSON, R. y NAADIMUTHU, G.: *Schaum's outlines of theory and problems of operations research*, New York, McGraw-Hill, 1982.

RÍOS-INSUA, S.; MATEOS, A.; BIELZA, M.ª C. y JIMÉNEZ, A.: *Investigación operativa*, Centro de Estudios Ramón Areces, 1996.

SERRA DE LA FIGUERA, D.: *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones*, Gestión 2000, 2004.

TAHA, H. A.: *Investigación de operaciones*, México, Editorial Pearson, 2004.