EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LAS UNIDADES 6, 7, 8, 9 y 10

Asignatura:	Análisis Matemático / Fundamentos Matemáticos.
Profesor responsable de la Asignatura:	Dr. Juan José Moreno García
Tipo de actividad: Título de la actividad:	Actividad de Evaluación Continua (AEC) **Ejercicios Propuestos**

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

La realización de esta primera actividad de evaluación continua va a permitir comprobar los avances realizados por el estudiante mediante la aplicación práctica de los conceptos teóricos desarrollados en las unidades correspondientes. El objetivo que se pretende conseguir es que el estudiante sea capaz de, a partir de un enunciado, encontrar las herramientas matemáticas de Cálculo necesarias para resolver el problema y que sea capaz de aplicarlas con éxito.
La evaluación de este trabajo tendrán en cuenta los siguientes puntos:

- Correcta aplicación de las expresiones matemáticas asociadas a cada uno de los enunciados propuestos y relación de conceptos vistos en estas unidades.
- Procedimiento utilizado para llevar a cabo dicha aplicación.
- Conclusión alcanzada con el análisis de los resultados obtenidos en cada caso.

No hay que olvidar argumentar los pasos que se van dando. No basta con dar sólo la solución.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 1:

Hallar los tres puntos críticos, y determinar su naturaleza, de la función:

$$f(x,y) = x^2y - x^2 - 2y^2 + 2.$$

PROBLEMA 2:

Hallar los máximos y mínimos (hay cuatro en total) que alcanza la función $f(x,y) = 3xy$ cuando (x,y) recorre la elipse

$$x^2 + y^2 + xy = 3.$$

PROBLEMA 3:

Calcular la siguiente integral:

$$I = \int\int_S \frac{1}{4} xy \, dy \, dx$$

En donde S es la región limitada por las rectas $y = x + 1$, $y = 3x - 1$ y el eje y.

PROBLEMA 4:

Calcular la integral

$$\int\int_D (4x + 2) \, dA$$

En donde D es la región encerrada por las curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

PROBLEMA 5:

Usando el cambio a coordenadas esféricas, calcular la integral

$$I = \int\int\int_\Omega e^{-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \, dx \, dy \, dz,$$

en donde Ω es todo $\mathbb{R}^3$.

PROBLEMA 6:

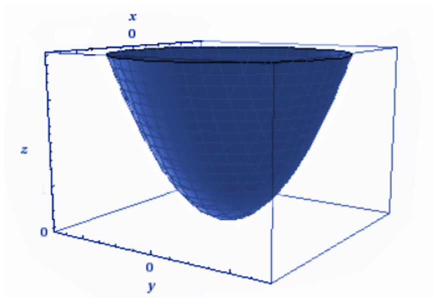
Sea Ω la región limitada por el plano $z = 2$ y por el paraboloide que está en todos los cuadrantes cuya superficie es descrita por

$$2z = x^2 + y^2.$$

Calcular

$$I = \int\int\int_\Omega (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

La situación está representada en la figura de al lado.



DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

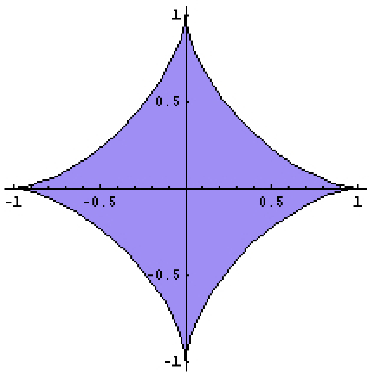
PROBLEMA 7:

Hallar la integral curvilínea

$$\oint (x^2 + y^2)\, ds$$

sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$ para $a > 0$.

PROBLEMA 8:



Calcular el área encerrada por la hipocicloide definida por

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

usando la parametrización

$$x = \cos^3\theta,\ y = \operatorname{sen}^3\theta,$$

para $0 \le \theta \le 2\pi$ y empleando el teorema de Green:

$$\text{Área} = \int\int_S dx\, dy = \frac{1}{2}\int_\sigma xdy - ydx.$$

Pista: $\operatorname{sen}^2\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta = \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$

PROBLEMA 9:

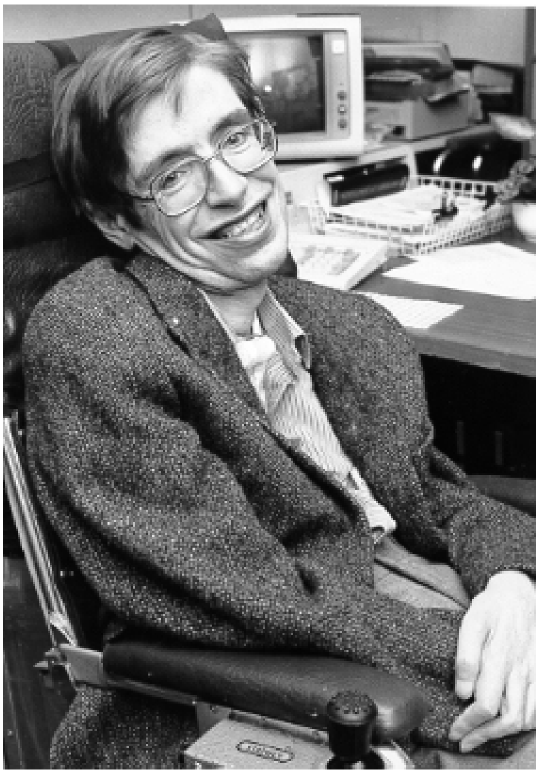
Un globo aerostático que parte del nivel del mar a una determinada presión atmosférica y temperatura del aire dada alcanza como máximo 2 kilómetros de altura. Se ha podido determinar que la velocidad con la que sube sigue la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = 30 - 15h,$$

en donde la altura h está está expresada en kilómetros y el tiempo en horas.
¿Cuánto tarda en ascender hasta los 1000 metros de altura? ¿Qué altura habrá alcanzado al cabo de 6 minutos?

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 10:



Stephen William Hawking (1942-2018) era un físico teórico. Sus logros más importantes los realizó sobre el estudio de las singularidades espacio-temporales de la Relatividad General y sobre la evaporación de agujeros negros. Hawking tuvo en cuenta la Mecánica Cuántica a la hora de estudiar estos objetos y descubrió la termodinámica que los rige. Es decir, el agujero negro se comporta como un cuerpo caliente y sigue la ley de emisión de radiación de un cuerpo negro. Según esto, un agujero negro tiene una entropía S que es proporcional al área de su horizonte de sucesos:

$$S = \frac{c^3 k_b A}{4G\hbar},$$

siendo c, k_b, $\hbar$ y G la velocidad de la luz, la constante de Boltzmann, la constante reducida de Planck y la constante de gravitación universal respectivamente. A su vez, este área A sólo depende de la masa del agujero negro:

$$A = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}.$$

Recordemos que el horizonte de sucesos es la frontera del agujero negro que, una vez es cruzada, ya no se puede volver atrás, pues por debajo de ese horizonte la velocidad de escape es superior a la velocidad de la luz y nada, ni siquiera la luz puede escapar. Para el caso de un agujero negro de tipo Schwarzschild ese horizonte se encuentra a una distancia de

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Sin embargo, Hawking descubrió que, gracias a un mecanismo mecánico-cuántico, los agujeros negros se van evaporando poco a poco justo en el horizonte y que este mecanismo roba masa al agujero hasta que este desaparece. Si se tiene en cuenta la ley de radiación del cuerpo negro de Stefan-Boltzmann, la métrica de Schwarzschild y la radiación Hawking se puede llegar a la ecuación diferencial que rige la evaporación de un agujero negro:

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{k}{M^2},$$

siendo M la masa del agujero negro y k es la constante siguiente:

$$k = \frac{\hbar c^4}{30\pi 8^3 G^2} = 0{,}3958 \cdot 10^{16}\,\mathrm{Kg}^3/\mathrm{s}.$$

Teniendo en cuenta todo esto, considérese que una supernova explota y deja como remanente un agujero negro con una masa de $2 \cdot 10^{30}$ kg, que es una masa similar a la del Sol. ¿Cuánto tiempo tardaría este agujero negro en evaporarse por completo?

Se cree que es posible que en el Big Bang se produjeran agujeros negros primordiales, si se produjo uno con una masa de $1{,}73 \cdot 10^{11}$ kg, ¿cuándo se evaporaría por completo? ¿Cuánta masa pierde en el último segundo?

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA 11:

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + 4y' - 5y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 6.$$

PROBLEMA 12:

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' - 3y' - 18y = 18t + 6, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 6.$$

PROBLEMA 13:

(A resolver por los alumnos de IOI solamente) Resolver, usando transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 5.$$

PROBLEMA 14:

(A resolver por los alumnos de IOI solamente) Resolver la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace:

$$y'' - 7y' + 10y = 4e^t, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 3.$$

No olvidar leer la página siguiente.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

PROBLEMA OPCIONAL (LA ENTREGA ES VOLUNTARIA):

A finales de los años ochenta del pasado siglo, Steven H. Strogatz propuso en un artículo, publicado en Mathematics Magazine, un divertido modelo acerca del amor romántico en una pareja formada por un individuo, al que vamos a llamar Romeo y una mujer a la que vamos a denominar Julieta. Supongamos que Romeo es un romántico empedernido e insensato que no mira por las posibilidades de conseguir convencer a la tal Julieta de tener una relación con él. Por tanto, sus sentimientos amorosos, a los que llamaremos R, sólo dependerán de él mismo. Es el modelo más sencillo que podemos pensar, pues su amor por Julieta dependerá exclusivamente del amor que ya siente por ella, de tal modo que la variación de ese amor será proporcional al amor que le procesa en un momento dado. Es decir, será algo de este estilo:

$$\frac{dR}{dt} = a_r R,$$

cuya solución es la típica función exponencial:

$$R(t) = R_0 e^{a_r t}.$$

Será creciente cuando $a_r > 0$, por lo que su amor crece. O decreciente para $a_r < 0$, por lo que llegará a ser prácticamente cero. Si $a_r = 0$ entonces su amor permanecerá constante. Podemos hacer algo parecido a esto para Julieta:

$$\frac{dJ}{dt} = a_j J.$$

Sin embargo, no tendría demasiado sentido un modelo que fuera así, pues el amor que cada uno de ellos siente también depende del amor que siente y le expresa el otro. Así, para Romeo tendremos que

$$\frac{dR}{dt} = a_r R + b_r J,$$

en donde b_r nos dice cómo responde Romeo al amor que siente y expresa Julieta hacia él. Si esta constante es positiva, Romeo acrecentará su amor y si esta constante es negativa entonces su amor disminuirá proporcionalmente al amor que le expresa Julieta. Naturalmente, se puede hacer lo mismo con Julieta:

$$\frac{dJ}{dt} = a_j J + b_j R,$$

en donde b_j nos dice cómo responde Julieta al amor que siente y es expresado por Romeo.
Juntando las dos ecuaciones y reordenando términos llegamos al siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \dfrac{dR}{dt} = & a_r R & + & b_r J \\ \dfrac{dJ}{dt} = & b_j R & + & a_j J \end{array} \right.$$

que no es más que un sistema autónomo lineal bastante sencillo.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Se podrían añadir términos no lineales e incluso podría ser no autónomo si el amor que sienten cada uno de ellos depende de la época del año. Por ejemplo, se sabe que los hombres son más románticos en primavera y las mujeres en otoño.
Si escribimos ese sistema matricialmente entonces toma esta forma:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ b_j & a_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

Vamos a tomar este modelo, pero la relación que vamos a considerar será un tanto neurótica. A Romeo no le gusta verse atrapado en una relación, por lo que cuando siente sentimientos responde negativamente tratando de eliminarlos, así que a_r será negativa. Pero a Romeo le gusta ser amado y cuando Julieta le expresa amor entonces siente más amor hacia ella, así que b_r será positiva. Por otro lado, Julieta es una romántica que al sentir amor lo alimenta al estar enamorada de amor, por lo que a_j es positiva. Sin embargo, Julieta rechaza el ser amada por Romeo, bien porque no se quiere a sí misma y se niega a ser querida o porque considera que Romeo no es el príncipe azul que espera, por lo que cuanto más expresa Romeo su amor a Julieta, más disminuye el amor de esta hacia él, así que b_j será negativa.
Cómo evolucionará en concreto la relación dependerá de los valores numéricos de estos parámetros. Consideremos el caso en particular en el que la matriz del sistema sea

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix},$$

que en un primer momento Romeo no siente amor hacia Julieta y que es esta la que primero se siente interesada con 1 unidad hacia él: $(R(0), J(0)) = (0, 1)$. Realizar un estudio cualitativo de la relación. ¿Será feliz la pareja? ¿Durante cuánto tiempo?

No olvidar leer la página siguiente.

INSTRUCCIONES PARA LA REALIZACIÓN Y ENTREGA DE LA ACTIVIDAD

Criterios de valoración:
Se valorará la presentación.
Se valorará el correcto planteamiento de los ejercicios.
Se valorará la correcta solución de los ejercicios.
Se valorará que la solución dada a cada una de las cuestiones planteadas sea correcta, así como que esté bien argumentada.
Se tendrá en cuenta la correcta redacción, por lo que se pide un cuidadoso uso del idioma y una cuidada presentación, priorizándose una fácil lectura del documento.

Entrega y calificación:
La actividad cumplimentada se envía al profesor a través del Buzón de entrega del Aula Virtual. En ese mismo buzón aparece la fecha límite de entrega. Entregas después de esa fecha
Se recuerda la necesidad de identificar correctamente el documento de entrega de la tarea, indicando nombre y apellidos del alumno en la primera página del documento. El nombre del fichero constará sólo del nombre del alumno, primer apellido y AEC2.
La entrega de la tarea se hará siempre a través de un documento **pdf**, y en ningún momento se aceptarán documentos doc, docx, excel o similares, pues el sistema no permite visualizar y corregir documentos de otro tipo. **Muchas aplicaciones (incluso word) permiten volcar un documento en pdf**. Alternativamente, si se pide una solución gráfica también se podrá usar el formato postscript.
En esta asignatura, si el estudiante lo desea, podrá escanear un documento realizado a mano alzada y crear así el documento pdf **siempre que éste sea legible**, es decir, se tiene que leer muy bien para así evitar confusiones y problemas con la calificación. No se admiten fotos, ni fotos de teléfonos móviles, ni papel cuadriculado. Además, las páginas estarán convenientemente ordenadas y orientadas.
El incumplimiento de las normas anteriores puede acarrear el riesgo de que la actividad no sea calificada.
Las entregas realizadas con procesador tendrán puntuación extra.
Es importante que el documento pdf **no esté protegido frente a escritura**, porque de otro modo no se pueden hacer anotaciones sobre él que sirvan de *feedback* al estudiante.
La calificación obtenida, previa corrección y calificación por parte del profesor, se podrá consultar con carácter permanente en el apartado CALIFICACIONES del Aula Virtual.