

# **Análisis de máquinas eléctricas. Transformadores**

### Objetivos del capítulo

El objetivo de este capítulo es el análisis del funcionamiento de un transformador en una instalación eléctrica, tanto monofásica como trifásica, a partir de sus parámetros característicos, las particularidades de la línea que lo alimenta y las peculiaridades de la instalación a la que se conecta. La presencia de estas máquinas eléctricas en los puntos de generación, distribución y consumo de energía eléctrica pone de manifiesto la necesidad de conocer adecuadamente su funcionamiento en el campo de la ingeniería industrial.

Los objetivos específicos de aprendizaje son:

- Conocer los principios de electromagnetismo en los que se basa el funcionamiento del transformador.
- Caracterizar el funcionamiento de un transformador real, identificando las pérdidas en el proceso de transformación.
- Describir el procedimiento de los ensayos de vacío y de cortocircuito, las magnitudes a medir y las características del transformador que se pueden determinar a partir de ellos.
- Calcular el rendimiento de un transformador y su índice de carga.
- Analizar el funcionamiento de un transformador en una determinada instalación, resolviendo el circuito equivalente reducido al primario.

## 1. Introducción

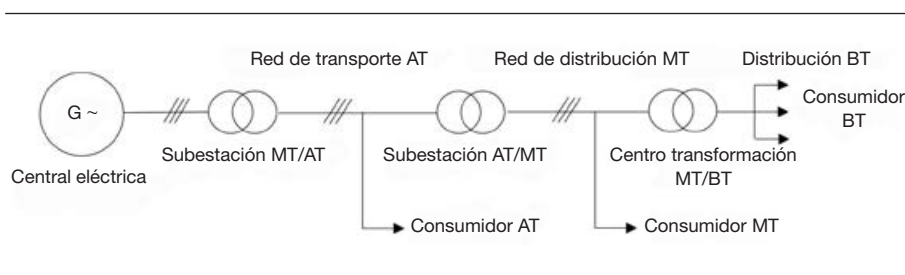
En este capítulo comenzamos el análisis de las *máquinas eléctricas*, que son dispositivos que realizan la conversión entre dos formas de energía, una de ellas, eléctrica. Su funcionamiento se basa en los principios del electromagnetismo, estando constituidas por circuitos magnéticos y eléctricos. Las máquinas eléctricas se clasifican en tres grandes grupos:

- Generadores. Transforman la energía mecánica en eléctrica. Son máquinas que forman parte del sistema de generación de energía eléctrica transformando, por ejemplo, la fuerza motriz hidráulica o eólica en energía eléctrica.
- Motores. Transforman la energía eléctrica en mecánica. Son equipos que necesitan de una energía eléctrica de entrada para producir la energía mecánica correspondiente, empleándose en múltiples aplicaciones domésticas e industriales.
- Transformadores. Transforman una energía eléctrica de entrada, con determinados valores de tensión y corriente, en otra energía eléctrica de salida, modificando los valores de tensión y corriente, manteniendo prácticamente la misma potencia.

Los generadores y motores se denominan *máquinas rotativas* porque están dotadas de movimiento, mientras que los transformadores son *máquinas estáticas*.

Centrándonos en los transformadores, que son el objeto de estudio en este capítulo, es importante destacar su papel en el sistema eléctrico, ya que para transportar la electricidad desde los puntos de generación a los puntos de consumo, minimizando las pérdidas eléctricas sin modificar la potencia transportada, es necesario disminuir la intensidad circulante por los conductores, aumentando la tensión. Una vez en el lugar de consumo, nuevamente mediante el uso de transformadores, la tensión se reduce a los valores necesarios para el suministro final de energía eléctrica. En la figura 1 se muestra un esquema de la estructura del sistema eléctrico con las subestaciones transformadoras y los centros de transformación que permiten la modificación de la tensión de transporte y distribución. En el capítulo 9 se estudiarán con más detalle estos centros de transformación.

Figura 1. Estructura del sistema eléctrico



Los transformadores más empleados en el sistema eléctrico son los transformadores de tensión que, como se refleja en la figura 1, permiten modificar la tensión de transporte, eleván-

dola o reduciéndola, para interconectar líneas a diferentes niveles de tensión y suministrar la tensión que demanda el consumidor final. Otro tipo de transformadores son los transformadores de intensidad, que se suelen emplear en la medición y control de las corrientes y como elementos de protección en motores, aparataje eléctrica y equipos electrónicos.

## 2. Análisis del funcionamiento de los transformadores. Transformador ideal y transformador real

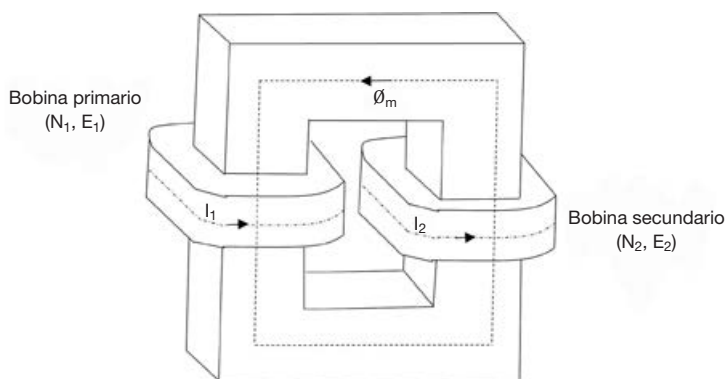
Un *transformador* es un dispositivo formado por un núcleo que está compuesto por láminas de material ferromagnético en el que se devanan dos o más bobinas, normalmente de hilo de cobre, aisladas del núcleo y entre sí, es decir, no hay continuidad eléctrica entre el núcleo y los devanados o entre ambos devanados. Al circular un flujo magnético variable por el núcleo, se induce una tensión en las bobinas de acuerdo con la Ley de Faraday. Por ejemplo, como se observa en la figura 2, si  $\Phi_m$  es el flujo creado por la intensidad  $I_1$  que circula por un devanado que tiene  $N_1$  vueltas, la tensión inducida ( $e_1$ ) vendrá dada por la siguiente expresión:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (2.1)$$

Siendo  $e_1$  la notación para la forma de onda de la tensión y  $E_1$ , la notación para su valor eficaz.

El devanado 1 es el que se conecta a la corriente cuya tensión quiere modificarse y se denomina *primario*, mientras que el devanado 2 es el que proporciona la salida con los parámetros de tensión y corriente requeridos y se denomina *secundario*.

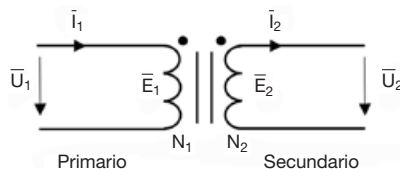
Figura 2. Elementos del transformador



Para continuar con el análisis, suponemos que el transformador es ideal (figura 3), es decir, en su funcionamiento no influyen:

- Las pérdidas por efecto Joule en los devanados, suponiendo una resistencia despreciable en los mismos.
- Las pérdidas en el núcleo magnético, suponiendo que su permeabilidad es infinita.
- Los flujos de dispersión, suponiendo que todo el flujo está confinado al núcleo y no se dispersa por el aire.

Figura 3. Circuito equivalente del transformador ideal



Con estas hipótesis, derivando la expresión 2.1 para una variación senoidal del flujo, se obtiene el valor de la tensión inducida en el devanado  $N_1$ . Hay que tener en cuenta que en la expresión 2.2. no se tiene en cuenta el signo negativo porque se ha considerado la polaridad de la f.e.m inducida, que será opuesta a la tensión  $\bar{U}_1$ .

$$e_1 = N_1 \frac{d(\varnothing_{\max} \sin \omega t)}{dt} = N_1 \omega \varnothing_{\max} \cos \omega t \quad (2.2)$$

Realizando el mismo análisis en el devanado secundario, la tensión inducida en el mismo es la siguiente:

$$e_2 = N_2 \frac{d(\varnothing_{\max} \sin \omega t)}{dt} = N_2 \omega \varnothing_{\max} \cos \omega t \quad (2.3)$$

Como en el transformador ideal no existe dispersión de flujo, dividiendo entre sí las expresiones 2.2 y 2.3, obtenemos la relación entre las dos partes del transformador:

$$r_t = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.4)$$

Donde  $r_t$  es la denominada *relación de transformación* que, en otras fuentes bibliográficas, se representa también como  $m$ . La expresión 2.4 se puede escribir en función de los valores eficaces de la fuerza electromotriz inducida:

$$r_t = \frac{E_1}{E_2} \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta que, para un flujo senoidal, el valor eficaz de la f.e.m inducida en el devanado  $i$  es:

$$E_1 = \frac{\omega N_i \varnothing_{\max}}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_i \varnothing_{\max} \quad (2.6)$$

Donde  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  es la frecuencia de la red en Hz.

En el transformador ideal, la fuerza magnetomotriz a lo largo del circuito magnético es nula, ya que la permeabilidad del núcleo se considera infinita, por lo que se cumple la siguiente relación:

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \quad (2.7)$$

Relacionándolo con la relación de transformación y en función de los valores eficaces, obtenemos:

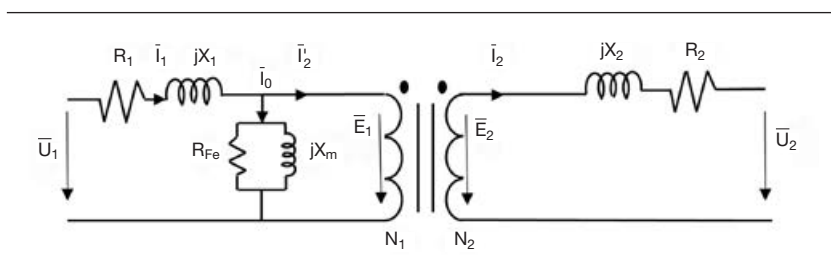
$$r_t = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.8)$$

En un *transformador real* existen pérdidas en el cobre de los devanados por efecto Joule, produciendo calentamientos y caídas de tensión, así como pérdidas en el núcleo ferromagnético, tanto por histéresis debidas a la reorientación de los dominios magnéticos, como por corrientes parásitas de Foucault, que dependen del voltaje aplicado. Además, la permeabilidad del núcleo en un transformador real no es infinita, existiendo flujo de dispersión. Para considerar todos estos aspectos en el análisis eléctrico de un transformador, es necesario simular el comportamiento de las pérdidas empleando resistencias y reactancias, configurando lo que se denomina el circuito equivalente del transformador, que se analiza en el siguiente epígrafe.

## 2.1. Modelo eléctrico del transformador. Circuito equivalente

En la figura 4 se muestra el circuito equivalente de un transformador real, con los componentes necesarios para modelar las diferentes pérdidas y el flujo de dispersión.

Figura 4. Circuito equivalente del transformador real



Observamos los siguientes elementos:

- Una resistencia y una reactancia en cada uno de los devanados ( $R_1$ ,  $X_1$ ,  $R_2$ ,  $X_2$ ) para representar las pérdidas por efecto Joule y por dispersión.

- Una rama en paralelo en el circuito del primario formada por una resistencia que modela las pérdidas en el hierro ( $R_{Fe}$ ) y una reactancia que representa las pérdidas por magnetización ( $X_m$ ). Por esta rama circula una corriente  $\bar{I}_0$ , denominada intensidad de vacío, que es la suma de la corriente de pérdidas en el hierro ( $\bar{I}_{Fe}$ ) y de la corriente de magnetización ( $\bar{I}_m$ ).

Por tanto, las magnitudes y elementos indicados en la figura 4 son los siguientes:

$\bar{U}_1$  es la tensión en el primario.

$\bar{U}_2$  es la tensión en el secundario.

$\bar{E}_1$  es la f.e.m inducida en el primario.

$\bar{E}_2$  es la f.e.m inducida en el secundario.

$\bar{I}_1$  es la intensidad en el primario.

$\bar{I}_2$  es la intensidad en el secundario.

$\bar{I}_0$  es la intensidad de vacío.

$\bar{I}_2$  es la intensidad del secundario referida al primario.

$R_1$  es la resistencia del devanado primario.

$R_2$  es la resistencia del devanado secundario.

$X_1$  es la reactancia de dispersión del primario.

$X_2$  es la reactancia de dispersión del secundario.

$R_{Fe}$  es la resistencia de pérdidas en el hierro.

$X_m$  es la reactancia de magnetización.

El circuito de la figura 4 se puede simplificar eliminando el transformador, reduciendo ambos devanados al mismo número de espiras. Generalmente, se reduce el secundario al primario, lo que significa trabajar con un secundario con un número de espiras  $N'_2$  igual a  $N_1$ . Todas las magnitudes relativas a este nuevo devanado se denotan mediante los símbolos del secundario real, con una tilde por superíndice. Para que este transformador sea equivalente deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$r'_t = \frac{U_1}{U'_2} = \frac{N_1}{N'_2} = 1 \Rightarrow U'_2 = U_1 = r_t U_2 \quad (2.9)$$

Para que la simplificación sea equivalente, la potencia aparente debe conservarse en el secundario, antes y después de la reducción al primario, luego su módulo será:

$$S_2 = U_2 \cdot I_2 = U'_2 \cdot I'_2$$

Aplicando 2.9:

$$U_2 \cdot I_2 = r_t U_2 \cdot I'_2 \Rightarrow I'_2 = \frac{I_2}{r_t} \quad (2.10)$$

Del mismo modo que se conserva la potencia aparente, también lo hace la potencia activa en las resistencias y la reactiva en las reactancias, por lo que se pueden reducir las siguientes relaciones:

$$R_2 \cdot I_2^2 = R'_2 \cdot I_1^2 \quad (2.11)$$

$$X_2 \cdot I_2^2 = X'_2 \cdot I_1^2 \quad (2.12)$$

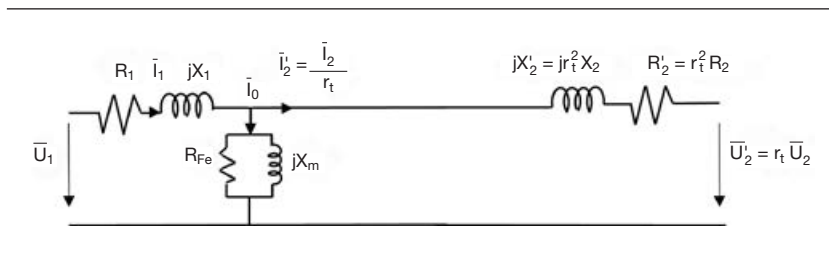
Aplicando 2.10:

$$R'_2 = r_t^2 R_2 \quad (2.13)$$

$$X'_2 = r_t^2 X_2 \quad (2.14)$$

En la figura 5 se muestra el circuito equivalente del transformador reducido al primario.

Figura 5. **Circuito equivalente del transformador real reducido al primario**



En el análisis del funcionamiento del transformador en una instalación debemos considerar las cargas conectadas al secundario, es decir, los elementos consumidores como motores, iluminación, equipos, etc. Estas cargas se modelan mediante una impedancia ( $\bar{Z}_C$ ) y para trabajar con ellas en el circuito equivalente se procede del siguiente modo:

$$\bar{Z}_C = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} = \frac{\frac{\bar{U}_2'}{r_t}}{\bar{I}_2' r_t} = \frac{\bar{U}_2'}{\bar{I}_2'} \frac{1}{r_t^2} = \frac{\bar{Z}_C'}{r_t^2} \Rightarrow \bar{Z}_C' = r_t^2 \bar{Z}_C \quad (2.15)$$

De la misma manera se puede analizar la impedancia debida a la línea de alimentación que conecta el secundario con la carga.

### 3. Ensayos del transformador

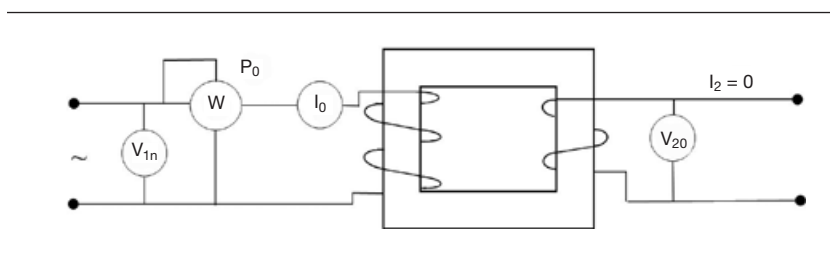
La resolución del circuito equivalente del transformador permite analizar su funcionamiento en una determinada instalación, pero, para que este estudio refleje la situación real,

los parámetros del circuito equivalente ( $R_1$ ,  $X_1$ ,  $R_2$ ,  $X_2$ ,  $R_{Fe}$ ,  $X_m$ ) deben estar correctamente definidos. Existen dos ensayos básicos que se pueden realizar en laboratorio en un transformador sin carga real y con bajos consumos energéticos que permiten caracterizar correctamente estos parámetros de forma relativamente sencilla. A continuación, se analiza el procedimiento a seguir para llevar a cabo estos ensayos y los parámetros que se obtienen en cada uno de ellos.

### 3.1. Ensayo de vacío

En el ensayo de vacío de un transformador se deja abierto uno de los devanados, normalmente el secundario, aplicando la tensión nominal a la frecuencia nominal en el otro devanado, normalmente el primario. Las magnitudes que se miden al realizar este ensayo, tal y como se muestra en la figura 6, son la tensión aplicada, la intensidad de vacío, la potencia absorbida y la tensión de vacío en el terminal abierto. A partir de estos valores se pueden determinar los parámetros  $R_{Fe}$  y  $X_m$  y la relación de transformación como se describe seguidamente.

Figura 6. Esquema del ensayo de vacío



A partir del dato de potencia activa registrada  $P_0$ , que es la potencia de pérdidas en el hierro, se puede determinar el factor de potencia de vacío y las componentes de la corriente  $I_0$  (figura 7), teniendo en cuenta que la caída de tensión en el primario es despreciable, por lo que  $U_{1n} \approx E_1$ . Las expresiones que relacionan los valores medidos en el ensayo con los valores de las componentes de la intensidad de vacío son:

$$P_0 = U_{1n} I_0 \cos \varphi_0 \quad (2.16)$$

$$I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0 \quad (2.17)$$

$$I_m = I_0 \sin \varphi_0 \quad (2.18)$$

A partir de las componentes de la corriente se pueden determinar los parámetros de la rama en paralelo del transformador:

$$R_{Fe} = \frac{U_{1n}}{I_{Fe}} \quad (2.19)$$

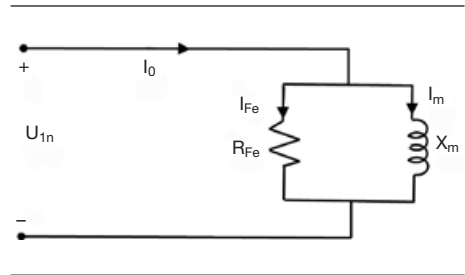


$$X_m = \frac{U_{1n}}{I_m} \quad (2.20)$$

A partir de los datos del ensayo de vacío, también se puede determinar la relación de transformación, ya que la f.e.m  $E_2$  es igual a la tensión de vacío medida en el secundario:

$$r_t = \frac{E_1}{E_2} \approx \frac{U_{1n}}{V_{20}} \quad (2.21)$$

Figura 7. Circuito equivalente del ensayo de vacío



### EJEMPLO 1

Se dispone de los siguientes resultados de un ensayo de vacío de un transformador de 20 kVA de tensión nominal 2.300/230 V eficaces:

- Corriente de vacío:  $I_0 = 96 \text{ mA}$ .
- Potencia activa consumida:  $P_0 = 176 \text{ W}$ .

Determinar la resistencia de pérdidas en el hierro y la inductancia de magnetización.

La potencia activa de vacío se rige por la siguiente expresión:

$$P_0 = U_{1n} I_0 \cos \varphi_0$$

El ensayo nos permite disponer de todos los datos para calcular el ángulo de la impedancia de la carga  $R_{Fe} + jX_m$ :

$$\cos \varphi_0 = \frac{176}{0,096 \cdot 2.300} = 0,80$$

Luego,  $\varphi_0 = 36,87^\circ$ .

Con el factor de potencia se pueden calcular los valores de los elementos de la rama en paralelo a partir de la intensidad medida en el ensayo y de la tensión de entrada:

$$R_{Fe} = \frac{U_{1n}}{I_{Fe}} \quad \text{con} \quad I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0$$

$$R_{Fe} = \frac{U_{1n}}{I_0 \cos \varphi_0} = \frac{2.300}{0,096 \cdot 0,8} = 29.948 \, \Omega$$

$$X_m = \frac{U_{1n}}{I_m} \quad \text{con} \quad I_m = I_0 \sin \varphi_0$$

$$X_m = \frac{U_{1n}}{I_0 \sin \varphi_0} = \frac{2.300}{0,096 \cdot 0,6} = 39.931 \, \Omega$$

$$Z = 29.948 + j39.931 \, \Omega$$

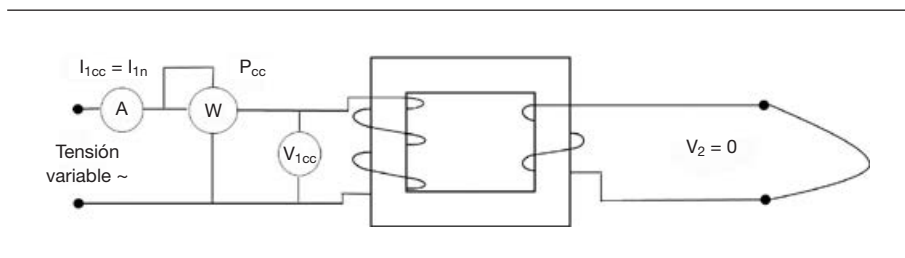
### 3.2. Ensayo de cortocircuito

Este ensayo consiste en cortocircuitar uno de los devanados del transformador, normalmente el de menor tensión, que suele ser el secundario, y aplicar en el otro devanado una tensión que se eleva gradualmente hasta que por los devanados circule la corriente nominal de plena carga (figura 8). A pesar de que en el ensayo de cortocircuito se alimenta el devanado de mayor tensión, el valor de tensión necesario para lograr las condiciones de ensayo no es muy elevado, por lo que el flujo en el núcleo es pequeño y se pueden despreciar las pérdidas en el hierro. De este modo, la potencia activa medida en el ensayo corresponde con las pérdidas por efecto Joule en condiciones nominales, pudiendo caracterizar los parámetros de la rama en serie del transformador, aunque de forma conjunta, es decir, se obtiene el valor de la resistencia y la reactancia de cortocircuito ( $R_{cc}$  y  $X_{cc}$ ), pero no cómo se distribuyen entre el primario y el secundario:

$$R_{cc} = R_1 + R'_2 \quad (2.22)$$

$$X_{cc} = X_1 + X'_2 \quad (2.23)$$

Figura 8. Esquema del ensayo de cortocircuito



A partir de la potencia medida en el ensayo, se puede determinar el factor de potencia de cortocircuito y la caída de tensión en la resistencia y la reactancia de los devanados (figuras 9 y 10):

Figura 9. Circuito equivalente del ensayo de cortocircuito

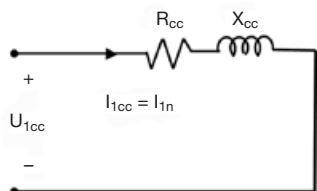
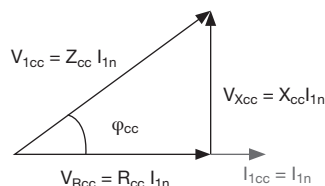


Figura 10. Diagrama fasorial de tensiones en el ensayo de cortocircuito



$$P_{cc} = U_{1cc} I_{1n} \cos \varphi_{cc} \quad (2.24)$$

$$U_{R_{cc}} = R_{cc} I_{1n} = U_{1cc} \cos \varphi_{cc} \quad (2.25)$$

$$U_{X_{cc}} = X_{cc} I_{1n} = U_{1cc} \sin \varphi_{cc} \quad (2.26)$$

Generalmente, las caídas de tensión en los devanados obtenidas en el ensayo de cortocircuito suelen expresarse respecto a la tensión nominal del primario, definiéndose el parámetro  $\varepsilon_{cc}$ , que representa esta caída de tensión porcentual del ensayo de cortocircuito:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{U_{1cc}}{U_{1n}} \cdot 100 (\%) \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_{R_{cc}} = \frac{U_{R_{cc}}}{U_{1n}} \cdot 100 (\%) \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{X_{cc}} = \frac{U_{X_{cc}}}{U_{1n}} \cdot 100 (\%) \quad (2.29)$$

Donde los valores para la resistencia y la reactancia son para los dos devanados, ya que del ensayo de cortocircuito se obtienen los valores de  $R_{cc}$  y  $X_{cc}$  de forma conjunta, como se ha indicado anteriormente. Para calcular estos valores por devanado se emplean las siguientes aproximaciones:

$$R_1 = R_2' = \frac{R_{cc}}{2} \quad (2.30)$$

$$X_1 = X_2' = \frac{X_{cc}}{2} \quad (2.31)$$

## EJEMPLO 2

Se dispone de los siguientes resultados de un ensayo de cortocircuito de un transformador de 20 kVA de tensión nominal 2.300/230 V eficaces:

- Tensión de primario:  $U_{1cc} = 74$  V.
- Corriente en el primario:  $I_{1cc} = 8,5$  V.
- Potencia activa consumida:  $P_{1cc} = 450$  W.

Determinar las resistencias de pérdidas en el cobre y las inductancias de pérdidas en el flujo ( $R_1$ ,  $X_1$ ,  $R_2'$ ,  $X_2'$ ).

El módulo de la impedancia de cortocircuito se puede calcular:

$$Z_{cc} = \frac{U_{1cc}}{I_{1cc}} = \frac{74}{8,5} = 8,7 \, \Omega$$

A partir de la potencia activa de cortocircuito calculamos el ángulo de la impedancia:

$$P_{cc} = U_{1cc} I_{1n} \cos \varphi_{cc} \quad \text{luego,} \quad \cos \varphi_{cc} = \frac{450}{74 \cdot 8,5} = 0,71 \quad \text{y} \quad \varphi_{cc} = 44,3^\circ$$

La potencia de cortocircuito también se puede escribir:

$$P_{cc} = R_{cc} I_{1cc}^2 \quad \text{de donde} \quad R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{1cc}^2} = \frac{450}{8,5^2} = 6,22 \, \Omega$$

que coincide con

$$R_{cc} = Z_{cc} \cos \varphi_{cc} = 6,17 \, \Omega$$

La inductancia la podemos determinar:

$$X_{cc} = Z_{cc} \sin \varphi_{cc} = 6,07 \, \Omega \qquad Z_{cc} = 6,17 + j6,07 \, \Omega$$

Los valores de cortocircuito se corresponden con las impedancias de rama del circuito, aunque no se conoce cómo se distribuyen exactamente. Se realiza una aproximación, suponiendo que las resistencias y reactancias del primario y del secundario equivalente son iguales:

$$R_1 = R_2' = \frac{R_{cc}}{2} = 3,08 \, \Omega \qquad X_1 = X_2' = \frac{X_{cc}}{2} = 3,03 \, \Omega$$

## 4. Parámetros característicos de un transformador

### 4.1. Caída de tensión

En el funcionamiento de un transformador se pueden distinguir dos modos básicos: funcionamiento en vacío o funcionamiento en carga. Si se alimenta el primario con su tensión nominal ( $U_{1n}$ ), en el funcionamiento en vacío, el secundario proporcionará una tensión de vacío  $U_{20}$ , mientras que si se conecta al secundario una carga y circula corriente, la tensión medida en este devanado ya no será la de vacío, debido a la impedancia interna del transformador, sino que será un valor denominado  $U_2$ . Se puede definir la *caída de tensión interna* en el transformador como la diferencia de los módulos de ambas tensiones en el secundario en ambos modos de funcionamiento:

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 \qquad (2.32)$$

Se denomina *caída de tensión relativa o de regulación* a la caída de tensión en el secundario respecto a la tensión secundaria de vacío, y se denota mediante  $\Delta u$  o  $\varepsilon$ , según bibliografía. No hay que confundir  $\varepsilon$  con  $\varepsilon_{cc}$ .

$$\varepsilon = \frac{U_{20} - U_2}{U_{20}} \cdot 100 (\%) \quad (2.33)$$

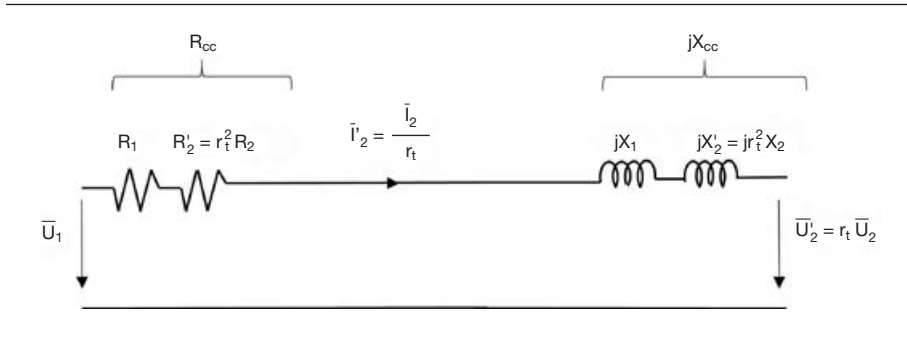
Para trabajar con el circuito equivalente, empleando las ecuaciones 2.9 y 2.21, la expresión 2.33 puede escribirse en función de la tensión nominal del primario:

$$\varepsilon = \frac{U_{1n} - U'_1}{U_{1n}} \cdot 100 (\%) \quad (2.34)$$

Resolviendo el circuito equivalente de la figura 5, despreciando la rama en paralelo (figura 11) y aplicando la segunda Ley de Kirchhoff, se obtiene la relación entre la tensión del secundario reducida al primario y la tensión nominal del primario:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_2 \cdot (R_{cc} + jX_{cc}) + \bar{U}'_2 \quad (2.35)$$

Figura 11. Circuito equivalente del transformador simplificado



## 4.2. Índice de carga

En la bibliografía de este capítulo se puede encontrar un método aproximado para calcular el módulo de la tensión  $U'_2$  denominado aproximación de Kapp, que relaciona la caída de tensión absoluta en el transformador con el factor de potencia de la carga ( $\cos \varphi_2$ ) mediante la siguiente ecuación:

$$U_{1n} - U'_2 = R_{cc} I_2 \cos \varphi_2 + X_{cc} I_2 \sin \varphi_2 \quad (2.36)$$

Si se define el *índice de carga de un transformador C* como el cociente entre la intensidad del secundario del transformador que alimenta a la carga respecto a la intensidad nominal del

secundario, la caída de tensión relativa puede expresarse en función de este valor mediante la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{U_{1n} - U'_2}{U_{1n}} \cdot 100 = \frac{R_{cc} I'_2 \cos \varphi_2 + X_{cc} I'_2 \sin \varphi_2}{U_{1n}} =$$

$$= C \cdot \varepsilon_{R_{cc}} \cos \varphi_2 + C \cdot \varepsilon_{X_{cc}} \sin \varphi_2$$
(2.37)

Donde:

$$C = \frac{I_2}{I_{2n}} = \frac{I'_2}{I'_{2n}} \approx \frac{I_1}{I_{1n}}$$
(2.38)

Los valores de  $\varepsilon_{R_{cc}}$  y  $\varepsilon_{X_{cc}}$  se determinan empleando las expresiones 2.28, 2.29 combinadas con 2.25 y 2.26:

$$\varepsilon_{R_{cc}} = \frac{R_{cc} I_{1n}}{U_{1n}} \cdot 100 = \frac{R_{cc} I'_{2n}}{U_{1n}} \cdot 100 (\%)$$
(2.39)

$$\varepsilon_{X_{cc}} = \frac{X_{cc} I_{1n}}{U_{1n}} \cdot 100 = \frac{X_{cc} I'_{2n}}{U_{1n}} \cdot 100 (\%)$$
(2.40)

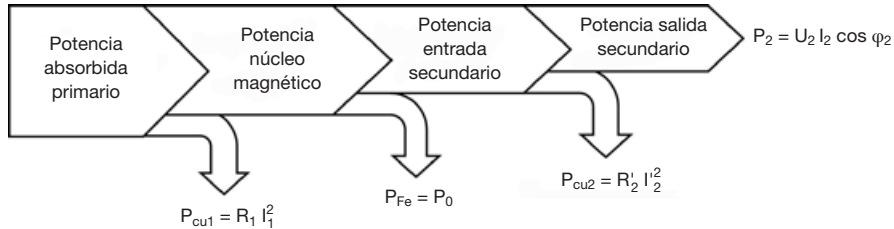
### 4.3. Rendimiento

Un transformador funcionando en carga absorbe una potencia activa  $P_1$  en el primario y cede una potencia  $P_2$  en el secundario que, como en cualquier máquina, tiene un valor inferior a  $P_1$  debido a las pérdidas en el proceso. Por tanto, el *rendimiento* de un transformador viene determinado por las pérdidas en el mismo y se define como el cociente entre la potencia útil obtenida en el secundario y la potencia útil que entra en el primario.

El análisis de las pérdidas caracterizará el funcionamiento del transformador bajo determinadas condiciones, como ya hemos estudiado, las pérdidas se deben a diferentes causas y se disipan en forma de calor.

En la figura 12 se representa el balance de potencias del transformador desde la potencia de entrada en el primario hasta la potencia de salida en el secundario. En primer lugar, una pequeña parte de la potencia  $P_1$  se pierde en los devanados del primario por efecto Joule, denominadas *pérdidas en el cobre* ( $P_{Cu1}$ ). La potencia restante se transmite al secundario mediante el campo magnético común creado en el núcleo, aquí se produce una pérdida de potencia debida a las corrientes de Foucault y a las pérdidas por magnetización, englobadas ambas bajo la denominación de *pérdidas en el hierro* ( $P_{Fe}$ ). Por último, en los devanados del secundario, se producen pérdidas por efecto Joule ( $P_{Cu2}$ ) cuando por ellos circula intensidad.

Figura 12. Balance de potencias en un transformador



La expresión del rendimiento de un transformador puede expresarse en función de las pérdidas mediante la siguiente ecuación:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{pérdidas}}} = \frac{P_2}{P_2 + P_{cu1} + P_{Fe} + P_{cu2}} = \frac{CU_2 I_{2n} \cos \varphi_2}{CU_2 I_{2n} \cos \varphi_2 + P_0 + C^2 P_{cc}} \quad (2.41)$$

Donde  $U_2 \cdot I_{2n}$  es la potencia nominal o asignada ( $S_n$ ) del transformador en VA. Las relaciones empleadas en la expresión 2.41 son las siguientes:

- $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = CU_2 I_{2n} \cos \varphi_2$ , considerando la definición del índice de carga de la ecuación 2.38.
- $P_{Fe} = P_0$ , la potencia de pérdidas en el hierro es un valor fijo caracterizado en el ensayo de vacío.
- $P_{cu1} + P_{cu2} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 \approx (R_1 + R_2') I_2^2 = R_{cc} I_2^2$ , esta expresión se puede relacionar con la potencia medida en el ensayo de cortocircuito, teniendo en cuenta que la potencia registrada en este ensayo es la de las pérdidas en el cobre para la intensidad nominal, por tanto:

$$P_{cu} = R_{cc} I_2^2 = R_{cc} C^2 I_{1n}^2 = R_{cc} C^2 I_{1n}^2 = C^2 P_{cc} \quad (2.42)$$

Siendo las pérdidas en el cobre variables, en función del índice de carga del transformador.

Se puede demostrar que existe un índice de carga óptimo para el que el rendimiento es máximo y se corresponde a:

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} \quad (2.43)$$

### EJEMPLO 3

Un transformador monofásico de potencia nominal 250 kVA, relación de tensiones 15.000/250 V y 50 Hz tiene unas pérdidas en el hierro de 4 kW y unas pérdidas en el cobre a plena carga de 5 kW. Determinar:

1. El rendimiento a plena carga con un factor de potencia de 0,8.
2. El rendimiento a media carga con un factor de potencia unidad.
3. La potencia de máximo rendimiento.
4. El rendimiento máximo para un factor de potencia 0,9.

1. **El rendimiento a plena carga con un factor de potencia de 0,8.** Aplicando la expresión 2.41:

$$\eta = \frac{CS_{2n} \cos \varphi_2}{CS_{2n} \cos \varphi_2 + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{1 \cdot 250.000 \cdot 0,8}{1 \cdot 250.000 \cdot 0,8 + 4.000 + 1^2 \cdot 5.000} = 95,7 \%$$

2. **El rendimiento a media carga con un factor de potencia unidad.** De igual modo, obtenemos  $\eta = 96\%$ , que es superior al anterior porque, aunque ha disminuido la carga, ha aumentado el factor de potencia.

3. **La potencia de máximo rendimiento.** Aplicando la expresión 2.43:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{4.000}{5.000}} = 0,894$$

Y la potencia será:

$$S_{max} = C_{opt} S_n = 0,894 \cdot 250.000 = 223.500 \text{ VA}$$

4. **El rendimiento máximo para un factor de potencia 0,9.** El rendimiento máximo para un factor de potencia 0,9 será:

$$\eta = \frac{CS_{2n} \cos \varphi_2}{CS_{2n} \cos \varphi_2 + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{0,894 \cdot 250.000 \cdot 0,9}{0,894 \cdot 250.000 \cdot 0,9 + 4.000 + 0,894^2 \cdot 5.000} = 96,2 \%$$

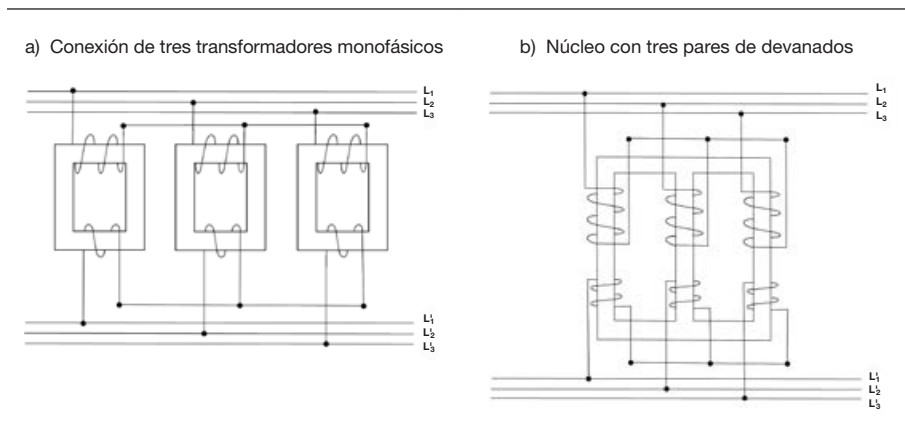
## 5. Transformadores trifásicos

### 5.1. Conexiones

Un transformador trifásico se puede conseguir mediante la conexión de tres transformadores monofásicos o situando tres pares de devanados en un único núcleo magnético (figura 13).



Figura 13. Configuraciones de un transformador trifásico

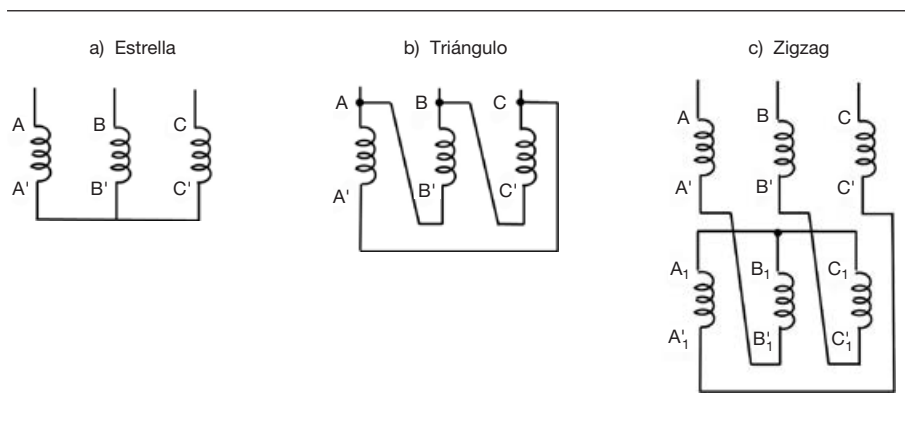


La primera de las formas indicadas se denomina banco de transformadores y se caracteriza según el modo de conexión de los devanados del primario y del secundario entre sí (en estrella (Y), en triángulo ( $\Delta$  o D) o en zigzag (Z), tal y como se representa en la figura 14.

La designación de la forma de conexión se representa mediante dos letras y un número, la primera de las letras, mayúscula, indica el modo de conexión en el lado de alta tensión, mientras que la segunda, en minúscula, indica cómo se conecta el lado de baja tensión.

El número indica el índice horario del transformador, es decir, el ángulo que forman las tensiones de línea del primario y del secundario, indicado en múltiplos de  $30^\circ$ . Es decir, un índice horario de 5 representa un desfase de  $150^\circ$ . La segunda de las formas constituye el transformador trifásico propiamente dicho.

Figura 14. Formas de conexión de un banco de transformadores



## 5.2. Circuito equivalente

El análisis de un transformador trifásico se realiza por fases, transformando los devanados reales del primario y del secundario a conexiones en estrella equivalentes, teniendo en cuenta las reglas de transformación  $\Delta$ -Y, que se estudiaron en el capítulo 1, y resolviendo el circuito equivalente.

### EJEMPLO 4

Un transformador elevador de tensión trifásico de potencia nominal 2.000 kVA, relación de tensiones 6.600/33.000 V, tiene el devanado primario conectado en triángulo y el devanado secundario conectado en estrella. La impedancia de cada fase del primario es  $0,5 + j2,6 \, \Omega$  y de cada fase del secundario,  $4,3 + j21,7 \, \Omega$ .

Determinar la tensión en el secundario cuando trabaja a plena carga con un factor de potencia 0,8, si el primario se alimenta a tensión nominal.

Para analizar el comportamiento del transformador hay que resolver el circuito monofásico equivalente. Primero hay que transformar las conexiones de triángulo a estrella, en este caso, la impedancia del primario empleando la expresión 1.13:

$$\bar{Z}_{1Y} = \frac{\bar{Z}_{1\Delta}}{3} = \frac{0,5 + j2,6}{3} = 0,167 + j0,867 \, \Omega$$

Siendo la impedancia del secundario  $\bar{Z}_{2Y} = 4,3 + j21,7 \, \Omega$ .

El equivalente en estrella de la tensión de alimentación del primario, conectado en triángulo, tiene un módulo de valor:

$$U_{1Y} = \frac{U_{1\Delta}}{\sqrt{3}} = \frac{6.600}{\sqrt{3}} \, V$$

El circuito equivalente que se debe analizar es el circuito equivalente de un transformador monofásico, despreciando la rama en paralelo (figura 11), donde la impedancia del circuito es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{cc} &= (R_1 + R'_2) + j(X_1 + X'_2) = (R_1 + r_t^2 R_2) + j(X_1 + r_t^2 X_2) = \\ &= (0,167 + 0,2^2 \cdot 4,3) + j(0,867 + 0,2^2 \cdot 21,7) = 0,399 + j1,735 \, \Omega \end{aligned}$$

Siendo la relación de transformación ( $r_t$ ), la relación entre las tensiones de fase del primario y del secundario:

$$r_t = \frac{U_{1\text{fase}}}{U_{2\text{fase}}} = \frac{\frac{6.600}{\sqrt{3}}}{\frac{33.000}{\sqrt{3}}} = 0,2$$

Donde se ha tenido en cuenta que los valores de la relación de tensiones del transformador, si no se indica lo contrario, son valores de línea y que el secundario está conectado en Y, por lo que hay que transformar la tensión de línea a fase.

El valor de la intensidad circulante por el circuito se puede determinar a partir de la potencia del transformador. La potencia aparente trifásica será:

$$S_n = \sqrt{3} \cdot U_{1n \text{ línea}} \cdot I_{1n \text{ línea}} = \sqrt{3} \cdot U_{2n \text{ línea}} \cdot I_{2n \text{ línea}}$$

Como el transformador trabaja a plena carga, la tensión en el secundario será la tensión nominal, luego:

$$I_{2n \text{ línea}} = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_{2n \text{ línea}}} = \frac{2.000.000}{\sqrt{3} \cdot 33.000} = 35 \text{ A}$$

Siendo igual a la intensidad de línea, porque la conexión es en estrella, la intensidad circulante por el circuito equivalente será:

$$I'_2 = \frac{I_{2 \text{ fase}}}{r_t} = \frac{35}{0,2} = 175 \text{ A}$$

Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff al circuito de la figura 11 y despreciando la rama en paralelo:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}'_2 \cdot (R_{cc} + jX_{cc}) + \bar{U}'_2$$

Tomando la tensión del primario en el origen y sabiendo que el ángulo de la intensidad en el secundario será el ángulo de la impedancia del secundario con signo contrario:

$$\begin{aligned} \frac{6.600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ &= 175 \angle -36,86^\circ \cdot (0,399 + j1,735) + \bar{U}'_2 \\ \bar{U}'_2 &= \frac{6.600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 175 \angle -36,86^\circ \cdot 1,78 \angle 77,04^\circ = \frac{6.600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 311,5 \angle 40,18^\circ = \\ &= \frac{6.600}{\sqrt{3}} - 238 - j201 = 3.572,51 - j201 = 3.578,16 \angle -3,22^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

El módulo de  $U_2$  será:

$$U_2 = \frac{U'_2}{r_t} = \frac{3.578,16}{0,2} = 17.890,8 \text{ V}$$

Que es la tensión de salida de la fase que estamos analizando, la tensión de línea de salida será:

$$U_{2 \text{ línea}} = \sqrt{3} \cdot 17.890,8 = 30.987,77 \text{ V}$$

## Conceptos básicos

- Un transformador es una máquina eléctrica estática que permite aumentar o disminuir la tensión (y la intensidad) en una instalación eléctrica para adecuarla a las necesidades de consumo. Está formado por un núcleo magnético en el que se arrollan dos o más devanados en los que se induce una determinada tensión debida al flujo circulante por el núcleo.
- El análisis del comportamiento del transformador en una instalación se realiza a través del circuito equivalente reducido al primario que modela, mediante resistencias y reactancias, las pérdidas que hacen que el comportamiento del transformador no sea ideal (pérdidas en el hierro y pérdidas en el cobre).
- Para obtener los valores de las resistencias y reactancias que modelan las pérdidas en un determinado transformador se llevan a cabo los ensayos de vacío y cortocircuito. El primero permite determinar la relación de transformación y los parámetros que caracterizan las pérdidas en el núcleo, mientras que el segundo sirve para calcular la impedancia de cortocircuito que caracteriza las pérdidas en los devanados.
- Otros parámetros que caracterizan al transformador son la caída de tensión relativa al conectarse una carga en el secundario respecto a la tensión de funcionamiento en vacío en este devanado, el índice de carga, que es la relación entre la intensidad que alimenta a una carga conectada en el secundario y la intensidad nominal en este devanado y el rendimiento del equipo, que relaciona la potencia útil suministrada en el secundario con la potencia absorbida en el primario, siendo las pérdidas fijas en el hierro y las variables en el cobre la diferencia entre ambas.
- El funcionamiento de un transformador trifásico en una instalación eléctrica se puede analizar resolviendo el circuito monofásico equivalente reducido al primario.

## Actividades de autocomprobación

- 1 Los resultados de los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador monofásico de 800 kVA y relación de tensiones 13,2 kV/400 son los siguientes:

- Ensayo de vacío:  $I_0 = 1,3\%$  (de  $I_{1n}$ );  $P_0 = 2.000 \text{ W}$ .
- Ensayo de cortocircuito:  $U_{1cc} = 800 \text{ V}$ ;  $P_{cc} = 1.500 \text{ W}$ .

Determinar los parámetros del circuito equivalente ( $R_{cc}$ ,  $X_{cc}$ ,  $R_{Fe}$  y  $X_m$ ).

### Solución

La potencia de vacío viene determinada por  $P_0 = U_{1n} I_0 \cos \varphi_0$ .

Como conocemos que el valor de la intensidad de vacío es un % de la intensidad nominal, calculamos primero  $I_{1n}$ :

$$S_n = U_{1n} \cdot I_{1n} \quad I_{1n} = \frac{S_n}{U_{1n}} = \frac{800.000}{13.200} = 60,60 \text{ A}$$

Y por tanto  $I_0 = 0,013 \cdot 60,60 = 0,7878 \text{ A}$ .

Despejando el valor del factor de potencia de la expresión de la potencia de vacío, tenemos:

$$2.000 = 13.200 \cdot 0,7878 \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,1923 \Rightarrow \varphi_0 = \arccos(0,1923) = 78,91^\circ$$

Sabemos que  $I_0$  se descompone en:

$$I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0 = 0,7878 \cdot 0,1923 = 0,1515 \text{ A}$$

$$I_m = I_0 \sin \varphi_0 = 0,7878 \cdot \sin(78,91) = 0,773 \text{ A}$$

Como  $R_{Fe}$  y  $X_m$  tienen valores mucho más altos que  $R_1$  y  $X_L$ , la potencia absorbida en vacío coincide prácticamente con las pérdidas en el hierro, por tanto:

$$R_{Fe} = \frac{U_{1n}}{I_{Fe}} = \frac{13.200}{0,1515} = 87,12 \text{ k}\Omega \quad X_m = \frac{U_{1n}}{I_m} = \frac{13.200}{0,773} = 17,06 \text{ k}\Omega$$

Del ensayo de cortocircuito obtenemos el resto de los parámetros. La intensidad de cortocircuito será igual a la corriente nominal del primario, porque se desprecian las pérdidas de vacío:

$$I_{cc} = I_{1n} = 60,6 \text{ A}$$

El factor de potencia se puede obtener del valor registrado de la potencia de cortocircuito:

$$P_{cc} = U_{1cc} I_{1n} \cos \varphi_{cc}$$

Sustituyendo valores:

$$P_{cc} = 1.500 = 800 \cdot 60,6 \cdot \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \varphi_{cc} = \arccos(0,031) = 88,23^\circ$$

Los valores de la resistencia y la reactancia de cortocircuito se obtienen a partir de la caída de tensión en estos componentes:

$$U_{R_{cc}} = R_{cc} I_{1n} = U_{1cc} \cos \varphi_{cc} \Rightarrow R_{cc} = \frac{800 \cdot \cos(88,23)}{60,6} \Rightarrow R_{cc} = 0,41 \Omega$$

$$U_{X_{cc}} = X_{cc} I_{1n} = U_{1cc} \sin \varphi_{cc} \Rightarrow X_{cc} = \frac{800 \cdot \sin(88,23)}{60,6} \Rightarrow X_{cc} = 13,19 \Omega$$

- 2** Para un transformador monofásico de 150 kVA, relación de tensiones 3.000/380 V, se pide:

1. Determinar las componentes de la corriente de vacío ( $I_{Fe}$ ,  $I_m$ ) a partir de los siguientes datos del ensayo de vacío medidos en el primario:

$$P_0 = 1.100 \text{ W}; I_0 = 0,9 \text{ A}$$

2. Calcular la potencia de pérdidas en el hierro y la potencia de pérdidas en el cobre a plena carga, conociendo los siguientes datos del ensayo de cortocircuito medidos en el secundario:

$$P_{2cc} = 800 \text{ W}; I_{2cc} = 325 \text{ A}; V_{2cc} = 10 \text{ V}$$

### Solución

1. Determinar las componentes de la corriente de vacío ( $I_{Fe}$ ,  $I_m$ ) a partir de los siguientes datos del ensayo de vacío medidos en el primario:

$$P_0 = 1.100 \text{ W}; I_0 = 0,9 \text{ A}$$

A partir de la expresión de la potencia de vacío, calculamos el ángulo  $\varphi_0$ :

$$P_0 = U_{1n} I_0 \cos \varphi_0$$

$$1.100 = 3.000 \cdot 0,9 \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,407 \Rightarrow \varphi_0 = 65,95$$

Las componentes de la corriente de vacío son:

$$I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0 = 0,9 \cdot \cos(65,95) = 0,367 \text{ A}$$

$$I_m = I_0 \sin \varphi_0 = 0,9 \cdot \sin(65,95) = 0,822 \text{ A}$$

2. Calcular la potencia de pérdidas en el hierro y la potencia de pérdidas en el cobre a plena carga, conociendo los siguientes datos del ensayo de cortocircuito medidos en el secundario:

$$P_{2cc} = 800 \text{ W}; I_{2cc} = 325 \text{ A}; V_{2cc} = 10 \text{ V}$$

La potencia absorbida en vacío es igual a la potencia de pérdidas en el hierro, a partir de los datos del ensayo de vacío, obtenemos su valor:

$$P_0 = P_{Fe} = 1.100 \text{ W}$$

Las pérdidas en el cobre a plena carga se determinan a partir de los datos del ensayo de cortocircuito. Primero hay que comprobar si el ensayo se ha realizado a plena carga con una intensidad en el secundario de 325 A.

La corriente a plena carga es:

$$I_{2n} = \frac{S_n}{U_{2n}} = \frac{150.000}{380} = 394,73 \text{ A}$$

Superior a la corriente del ensayo, por lo que el índice de carga será:

$$C = \frac{I_2}{I_{2n}} = \frac{325}{394,73} = 0,823$$

La relación entre las pérdidas en el cobre del ensayo y las pérdidas en el cobre a plena carga es:

$$P_{2cc} = P_{cu} = C^2 P_{cc} \Rightarrow 800 = 0,823^2 \cdot P_{cc} \Rightarrow P_{cc} = 1.181,1 \text{ W}$$

- 3 Partiendo de la ecuación del rendimiento del transformador en función del factor de potencia y del índice de carga:

$$\eta = \frac{C S_{2n} \cos \varphi_2}{C S_{2n} \cos \varphi_2 + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

Determinar las pérdidas en el hierro ( $P_0$ ) y las pérdidas en el cobre a plena carga ( $P_{cu}$ ) de un transformador monofásico de 100 kVA, sabiendo que tiene los siguientes puntos de trabajo en función de las características de la carga:

	Punto 1	Punto 2
Factor de potencia .....	0,8	0,9
Índice de carga .....	0,75	0,5
Rendimiento .....	0,94	0,95

### Solución

Sustituyendo los valores en la ecuación del rendimiento para los dos puntos de trabajo proporcionados:

$$0,94 = \frac{0,75 \cdot 100.000 \cdot 0,8}{0,75 \cdot 100.000 \cdot 0,8 + P_0 + 0,75^2 \cdot P_{cc}}$$

$$0,95 = \frac{0,5 \cdot 100.000 \cdot 0,9}{0,5 \cdot 100.000 \cdot 0,9 + P_0 + 0,5^2 \cdot P_{cc}}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $P_0$ ,  $P_{cc}$ ), cuya solución es:

$$P_{cc} = 4.676,37 \quad P_0 = 1.199,33 \text{ W}$$

**4** Los resultados de los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador monofásico de potencia nominal 200 kVA y relación de transformación 2.000/200 V son los siguientes:

- Ensayo de vacío realizado en el lado de baja tensión:

$$U_{20} = 200 \text{ V}; I_{20} = 100 \text{ A}; P_0 = 5.000 \text{ W}$$

- Ensayo de cortocircuito realizado en el lado de alta tensión:

$$U_{cc} = 200 \text{ V}; I_{cc} = 100 \text{ A}; P_{cc} = 7.000 \text{ W}$$

Determinar el valor de la tensión en bornes del secundario cuando el primario se alimenta con una tensión de 2.000 V y en el secundario se conecta una carga de impedancia  $Z = 0,3 - j0,4 \Omega$ .

### Solución

En primer lugar, calculamos los parámetros del circuito equivalente a partir de los ensayos. La relación de transformación es:

$$r_t = \frac{2.000}{200} = 10$$

Como el ensayo de vacío se ha realizado en el secundario, hay que pasar los parámetros al primario:

$$U_{10} = r_t U_2 = 10 \cdot 200 = 2.000 \text{ V} \quad I_{10} = \frac{I_{20}}{r_t} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

Como:

$$P_0 = U_{10} I_0 \cos \varphi_0$$

$$5.000 = 2.000 \cdot 10 \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,25 \Rightarrow \sin \varphi_0 = 0,968$$

Y

$$R_{Fe} = \frac{U_{10}}{I_0 \cos \varphi_0} = \frac{2.000}{10 \cdot 0,25} = 800 \Omega \quad X_m = \frac{U_{10}}{I_0 \sin \varphi_0} = \frac{2.000}{10 \cdot 0,968} = 206,61 \Omega$$



Del ensayo de cortocircuito:

$$Z_{cc} = \frac{U_{1cc}}{I_{1cc}} = \frac{200}{100} = 2 \Omega$$

$$P_{cc} = U_{1cc} I_{1cc} \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,35 \Rightarrow \sin \varphi_{cc} = 0,937$$

$$R_{cc} = Z_{cc} \cos \varphi_{cc} = 2 \cdot 0,35 = 0,7 \Omega$$

$$X_{cc} = Z_{cc} \sin \varphi_{cc} = 2 \cdot 0,937 = 1,873 \Omega$$

Una vez caracterizado el circuito equivalente del transformador, pasamos la impedancia de la carga del secundario al primario, aplicando la siguiente ecuación:

$$\bar{Z}'_c = r_t^2 \bar{Z}_c$$

$$\bar{Z}'_c = 10^2(0,3 - j0,4) = 30 - j40 \Omega = 50 \angle -53,13^\circ \Omega$$

Para determinar la intensidad, resolvemos el circuito equivalente tomando la tensión en el primario en el origen de fases y despreciando la rama en paralelo:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}'_2 \cdot (R_{cc} + jX_{cc}) + \bar{U}'_2$$

$$\bar{I}'_2 = \frac{2.000 \angle 0^\circ}{(0,7 + j1,873 + 30 - j40)} = \frac{2.000 \angle 0^\circ}{48,95 \angle -51,16^\circ} = 40,86 \angle 51,16^\circ \text{ A}$$

Por tanto:

$$\bar{U}'_2 = \bar{I}'_2 \cdot \bar{Z}'_c = 40,86 \angle 51,16^\circ \cdot 50 \angle -53,13^\circ = 2.043 \angle -1,19^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_2 = \frac{\bar{U}'_2}{r_t} = \frac{2.043 \angle -1,19^\circ}{10} = 204,3 \angle -1,19^\circ \text{ V}$$

**5** Una factoría dispone de una red de distribución interna de 20 kV conectada a un centro de transformación que da servicio en baja tensión a la nave de producción. El transformador instalado tiene una potencia nominal de 60 kVA, conexión Yy, relación de tensiones 20 kV/400 V. La impedancia de cortocircuito del transformador es  $\bar{Z}'_{cc} = 520 + j700 \Omega$ . La alimentación se realiza a través de una línea cuya impedancia es  $\bar{Z}_{\text{línea}} = 0,05 + j0,08 \Omega$ . En el interior de la nave hay una serie de demandas como iluminación, sistemas de transporte y distribución de materiales, etc., que se han modelado mediante la siguiente impedancia:  $\bar{Z}_{\text{nave}} = 1 + j3$ .

Realizar el circuito monofásico equivalente y calcular la tensión de línea a la que se alimentan las cargas de la nave de producción.

## Solución

A partir de los datos del transformador y sabiendo que la conexión es estrella-estrella, determinamos la relación de transformación:

$$r_t = \frac{20.000}{400} = 50$$

Para trabajar con el circuito equivalente, determinamos la tensión de fase en el primario, tomándola como referencia de fase:

$$\bar{U}_{1 \text{ fase}} = \frac{U_{1 \text{ línea}}}{\sqrt{3}} = \frac{20.000}{\sqrt{3}} = 11.547 \angle 0^\circ \text{ V}$$

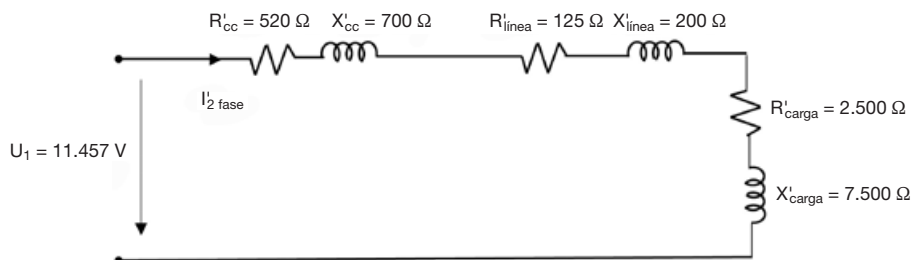
Calculamos los equivalentes de las impedancias de las cargas de la línea y de la nave para el monofásico equivalente del primario, empleando la siguiente expresión:

$$\bar{Z}'_i = r_t^2 \bar{Z}_i$$

$$\bar{Z}'_{\text{nave}} = 50^2(1 + j3) = 2.500 + j7.500 \, \Omega$$

$$\bar{Z}'_{\text{línea}} = 50^2(0,05 + j0,08) = 125 + j200 \, \Omega$$

El circuito equivalente que se debe resolver, despreciando la rama en paralelo, es el que se muestra a continuación:



Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff:

$$\bar{U}_{1 \text{ fase}} = \bar{I}'_{2 \text{ fase}} \cdot (\bar{Z}'_{cc} + \bar{Z}'_{\text{línea}} + \bar{Z}'_{\text{nave}}) = \bar{I}'_{2 \text{ fase}} \cdot (520 + j700 + 125 + j200 + 2.500 + j7.500)$$

$$\bar{I}'_{2 \text{ fase}} = \frac{11.547 \angle 0^\circ}{(3.145 + j8.400)} = \frac{11.547 \angle 0^\circ}{8.969,45 \angle 69,47^\circ} = 1,287 \angle -69,47^\circ \text{ A}$$

Siendo la intensidad de fase en el secundario:

$$\bar{I}_{2 \text{ fase}} = r_t \bar{I}_{2 \text{ fase}}^i = 50 \cdot 1,287 \angle -69,47^\circ = 64,35 \angle -69,47^\circ \text{ A}$$

Que coincidirá con la intensidad de línea al estar las cargas conectadas en estrella.

La tensión de línea que alimenta a las cargas de la nave se determina del siguiente modo:

$$\bar{U}_{2 \text{ fase}}^i = \bar{I}_{2 \text{ fase}} \cdot \bar{Z}_{\text{nave}}^i = 1,287 \angle -69,47^\circ \cdot 7.905,69 \angle 71,56^\circ = 10.174,62 \angle 2,09^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_{2 \text{ fase}} = \frac{U_{2 \text{ fase}}^i}{r_t} = 203,49 \angle 2,09^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_{2 \text{ línea}} = \sqrt{3} \bar{U}_{2 \text{ fase}} \angle 30^\circ = 352,45 \angle 32,09^\circ \text{ V}$$

## Actividades de repaso

**1** Un transformador monofásico de potencia nominal 125 kVA, relación de tensiones 13,2 kV/230 V, tiene unas pérdidas en el hierro de 1,1 kW y en el cobre a plena carga de 1,8 kW. Si las resistencias y reactancias que permiten modelar el transformador son:  $R_{Fe}$  158 kΩ,  $X_m$  145 kΩ,  $R_{cc}$  20 Ω y  $X_{cc}$  82 Ω, calcular:

1. El rendimiento cuando funciona a plena carga ( $C = 1$ ) con un factor de potencia de 0,83.
2. El rendimiento máximo que se puede obtener y el índice de carga en ese punto.
3. El rendimiento cuando funciona al 75 % de la carga nominal, con un factor de potencia de 0,75.
4. En las condiciones del apartado 1, qué potencia debiera tener la carga alimentada para alcanzar el rendimiento máximo, si se mantiene fijo el factor de potencia.

### Solución

1.  $\eta = 97,28 \%$ .
2.  $C_{\text{opt}} = 0,782$ ,  $\eta_{\text{max}} = 97,36 \%$ .
3.  $\eta = 97,08 \%$ .
4.  $S_{\eta, \text{max}} = 97,75 \text{ kVA}$

**2** Un transformador monofásico de 10 kVA, 220/380 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

- Ensayo de vacío:  $U_{20} = 220 \text{ V}$ ;  $I_0 = 2 \text{ A}$ ;  $P_0 = 150 \text{ W}$  (medidos en el lado de baja tensión, es decir, el primario).
- Ensayo de cortocircuito:  $U_{cc} = 10 \text{ V}$ ;  $I_{cc} = 26,32 \text{ A}$ ;  $P_{cc} = 75 \text{ W}$  (medidos en el lado de tensión más alta, es decir, en el secundario).

Determinar los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario.

### Solución

$$R_{Fe} = 322,6 \, \Omega$$

$$X_m = 117,02 \, \Omega$$

$$R_1 = R'_2 = 0,018 \, \Omega$$

$$X_1 = X'_2 = 0,061 \, \Omega$$

- 3** Los resultados de un ensayo de cortocircuito realizado en el primario de un transformador monofásico de 50 kVA, 4.400/220 V son los siguientes:

$$U_{1cc} = 120 \text{ V}; I_{cc} = 10,8 \text{ A}; P_{cc} = 544 \text{ W}$$

Determinar la tensión que debe aplicarse en el primario cuando el transformador trabaja a plena carga con un factor de potencia 0,8 inductivo para que la tensión en el secundario sea 220 V. Se puede despreciar la rama en paralelo del circuito equivalente del transformador.

### Solución

$$U_1 = 4.511,9 \text{ V}$$

- 4** Un transformador trifásico de 120 MVA y relación de tensiones 235/20 kV tiene una reactancia de cortocircuito de  $46 \, \Omega$  referida al primario. Se conecta a una red de 235 kV en el primario, alimentando en el secundario a tres cargas iguales conectadas en triángulo de  $15 \, \Omega$  cada una y factor de potencia 0,8 inductivo. Determinar la tensión de salida en el secundario del transformador.

### Solución

$$U_{2\text{línea}} = 19,2 \text{ kV}$$

5 Un transformador trifásico tiene las siguientes características:

- Conexión Yy.
- $S = 100 \text{ kVA}$ .
- Relación de tensiones  $3.000/380 \text{ V}$ .
- $Z_{cc} = 9 \Omega$ .
- $\cos\varphi_{cc} = 0,6$ .

Si la tensión en el secundario se mantiene constante, calcular el valor de la tensión necesaria en el primario cuando el transformador alimenta una carga trifásica equilibrada de  $15 \text{ kW}$  por fase, con un factor de potencia  $0,6$  capacitivo.

### Solución

$$U_{\text{línea}} = 2.978,24 \text{ V}$$

## Bibliografía

Fraile Ardanuy, J. y Fraile Mora, J. (2005). *Problemas de máquinas eléctricas*. McGraw-Hill España.

Fraile Mora, J. (2008). *Máquinas eléctricas*. McGraw-Hill España.

Guirado Torres, R., Asensi Orosa, R., Jurado Melguizo, F. y Carpio Ibáñez, J. (2006). *Tecnología eléctrica*. McGraw-Hill.

