

UNIDAD  
DIDÁCTICA

10

## GESTIÓN DE COLAS DE ESPERA

### OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Introducción a la teoría de colas
2. Análisis de colas de espera a través de las gráficas del sistema
  - 2.1. Gráficas de velocidad de entrada y salida de un sistema
    - 2.1.1. Caso práctico. Número de cajas de un supermercado
  - 2.2. Curva de cola de espera
  - 2.3. Curva input-output del sistema
  - 2.4. Cómo mejorar la cola de espera de un sistema

### CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

### ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

### EJERCICIOS VOLUNTARIOS

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS



## OBJETIVOS DE LA UNIDAD

En esta Unidad didáctica vamos a introducirnos en la gestión de colas de espera, tanto para empresas industriales como de servicios. En la prestación de un servicio, la gestión eficiente de las colas de espera es un tema muy importante, ya que los clientes son cada vez más exigentes y existen una gran cantidad de empresas competidoras. Si un cliente tiene que esperar siempre una gran cantidad de tiempo para ser atendido, es muy probable que busque otra empresa que le proporcione el producto o servicio.

Para hacer frente a esta cuestión surgió la rama de teoría de colas, de cara a poder realizar un análisis estadístico de las mismas y determinar cómo mejorarlas. Aun siendo unos modelos muy fiables, su aplicación en una empresa suele tener cierta complejidad, por lo que no se utilizan tanto como podría ser posible.

De cara a poder analizar las colas de espera de un sistema existe la posibilidad de analizar las gráficas que representan a este sistema:

- Gráfica de velocidad de entrada.
- Gráfica de velocidad de salida.
- Curva de cola de espera.
- Curva *input-output*.

A partir de las mismas se tomarán las acciones de mejora oportunas.

## 1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE COLAS

Todos las empresas, tanto industriales como de servicios, tienen colas de espera en algún lugar de su sistema productivo o de prestación del servicio. En la prestación de un servicio, la gestión eficiente de las colas de espera es un tema muy importante, ya que los clientes son cada vez más exigentes y existen una gran cantidad de empresas competidoras. Si un cliente tiene que esperar siempre una gran cantidad de tiempo para ser atendido, es muy probable que busque otra empresa que le proporcione el producto o servicio. Por otro lado, en sistemas industriales ayuda a mejorar la cantidad de inventario existente.

Para hacer frente a esta cuestión surgió la rama de teoría de colas, de cara a poder realizar un análisis estadístico de las mismas y determinar cómo mejorárlas. El proceso de una cola de espera es el siguiente: un cliente procedente de una fuente de entrada llega al sistema y se pone en cola de espera para ser atendido por los servidores. Los **clientes** llegan siguiendo unos intervalos de tiempo definidos normalmente por una distribución de probabilidad (exponencial, general, etc.).

El **tamaño de la cola de espera** en los modelos se puede tomar finita, si existe alguna restricción que afecta a la cantidad de clientes que pueden estar en la misma, o infinita.

La cola de espera se regirá por lo que se llama **disciplina de colas**, que es el orden en que se van a atender. Los métodos más utilizados son:

- **FIFO (*first in first out*)**. Se atiende por orden estricto de llegada.
- **LIFO (*last in first out*)**. Se atiende en orden inverso del orden de llegada. Suele ser típico en sistemas productivos y la cola de espera es de ciertos componentes que se almacenan en un único sitio.
- **Aleatorio.**

Una vez que se atiende al cliente, existe un **tiempo de servicio** que también es definido por una distribución de probabilidad, normalmente la exponencial.

La **notación** que se suele utilizar es la siguiente: DTLL/DTS/NS.

Siendo:

- **DTLL:** distribución de tiempos entre llegadas.
- **DTS:** distribución de tiempos de servicios.
- **NS:** número de servidores disponibles en el sistema.

La expresión que determina el número de clientes en el sistema en un momento dado viene definida por la **ley de Little**:

$$L = \lambda \cdot W$$

Siendo:

$L$  = Número esperado de clientes en el sistema.

$\lambda$  = Tasa media de llegada de clientes al sistema.

$W$  = Tiempo del cliente en el sistema.

En función principalmente de la distribución de tiempo entre llegadas, la distribución de tiempo de servicio, el número de servidores, la tasa media de llegadas, el número de clientes en el sistema, la probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema y la tasa media del servicio, existen numerosos modelos estadísticos que permiten predecir el comportamiento de las colas de espera en un sistema. Aun siendo unos modelos muy fiables, su aplicación en una empresa suele tener cierta complejidad, por lo que no se utilizan tanto como podría ser posible.

## 2. ANÁLISIS DE COLAS DE ESPERA A TRAVÉS DE LAS GRÁFICAS DEL SISTEMA

En el epígrafe anterior se han descrito los fundamentos de la teoría de colas. Aunque sus resultados son muy buenos, resultan bastante complejos de aplicar. De cara a poder analizar las colas de espera de un sistema existe la posibilidad de analizar las gráficas que representan a este sistema:

- Gráfica de velocidad de entrada.
- Gráfica de velocidad de salida.

- Curva de cola de espera.
- Curva *input-output*.

Todas estas gráficas van a dar la información que caracteriza al sistema desde el punto de vista de analizar su comportamiento y cola de espera asociada. Se van a estudiar las entradas al mismo, sus salidas en función de la capacidad disponible, la cola de espera y la relación que existe entre las entradas y las salidas para cada periodo analizado.

Este análisis es relativamente sencillo de realizar con ayuda de las hojas de cálculo y permite obtener una panorámica de la situación actual, así como la propuesta de mejoras de una manera rápida. En los siguientes epígrafes de esta Unidad se va a detallar cómo obtener cada una de ellas y qué información aportan.

## 2.1. GRÁFICAS DE VELOCIDAD DE ENTRADA Y SALIDA DE UN SISTEMA

Lo primero que hay que realizar cuando se está haciendo un análisis de la cola de espera de un sistema es comprobar las entradas y salidas del mismo en los intervalos de tiempo que interese medir. Para realizarlo se van a representar mediante una gráfica de barras las dos magnitudes, y se llamarán respectivamente las gráficas de velocidad de entrada y de velocidad de salida.

La gráfica de velocidad de entrada se realiza a partir de los datos de las entradas, por lo que se puede hacer de manera rápida, mientras que para realizar la gráfica de velocidad de salida habrá que hacer un análisis periodo a periodo de la capacidad disponible y de la cola de espera. Con esos datos se obtendrán las salidas del sistema necesarias para realizar la gráfica.

A continuación vamos a mostrar cómo se realizarían para el siguiente caso práctico.

### 2.1.1. Caso práctico. Número de cajas de un supermercado

Un supermercado quiere analizar el flujo de clientes atendidos y las colas de espera de sus cajas en función del número de cajeros que hay cada hora en un día de diario, que abre en un horario de 8:00 a 16:00. En la siguiente tabla se especifican los clientes que llegan de media a las cajas cada hora y el número de cajas abiertas. La capacidad estimada de una caja en clientes atendidos por hora es de 12.

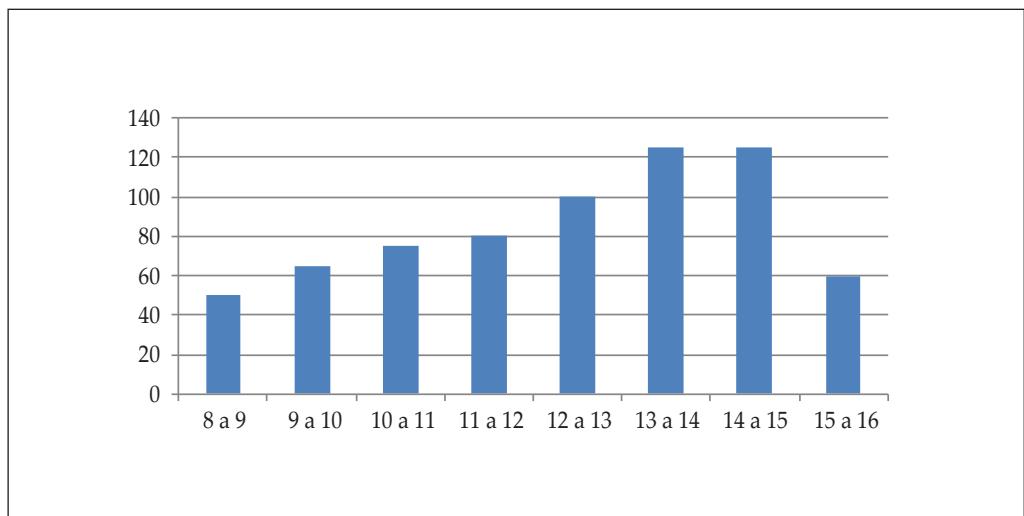
Horas	8 a 9	9 a 10	10 a 11	11 a 12	12 a 13	13 a 14	14 a 15	15 a 16
Llegadas de clientes	50	65	75	80	100	125	125	60
Número de cajas abiertas	4	4	6	6	10	10	8	8

*A) Gráfica de velocidad de entrada de los clientes*

Representándolo en forma de gráfica de barras, quedaría:

Horas	8 a 9	9 a 10	10 a 11	11 a 12	12 a 13	13 a 14	14 a 15	15 a 16
Llegadas de clientes	50	65	75	80	100	125	125	60

Figura 1. Gráfica de velocidad de entrada al supermercado



*B) Gráfica de velocidad de salida de los clientes*

Para ver la velocidad de salida habrá que determinar cuántos clientes son atendidos por hora en la línea de cajas, obteniendo también la cola de espera que existirá.

En función del número de cajas abiertas se obtiene la capacidad de las salidas (en clientes/hora), simplemente multiplicando el número de cajas por la capacidad de una caja por hora:

- Para 4 cajas:  $4 \cdot 12 = 48$  clientes/hora.
- Para 6 cajas:  $6 \cdot 12 = 72$  clientes/hora.
- Para 8 cajas:  $8 \cdot 12 = 96$  clientes/hora.
- Para 10 cajas:  $10 \cdot 12 = 120$  clientes/hora.

Una vez que se sabe para cada hora el número de las llegadas y la capacidad disponible, ya se podrán obtener las salidas (los clientes atendidos), así como los clientes que habrá en cola de espera.

Horas	8 a 9	9 a 10	10 a 11	11 a 12	12 a 13	13 a 14	14 a 15	15 a 16
Llegadas de clientes	50	65	75	80	100	125	125	60
Número de cajas abiertas	4	4	6	6	10	10	8	8
Capacidad de salidas	48	48	72	72	120	120	96	96
Salidas de clientes	48	48	72	72	120	120	96	96
Cola de espera (stock)	2	19	22	30	10	15	44	8

Vamos a explicar detalladamente cómo se han obtenido estos valores:

- **De 8:00 a 9:00 (primera hora).**

Salidas de clientes. Como la capacidad de las salidas es menor que las llegadas, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 48.

$$\text{Cola de espera} = \text{Llegadas} - \text{Salidas} = 50 - 48 = 2$$

- **De 9:00 a 10:00.**

Salidas de clientes. Los clientes que accederán a las cajas serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas =  $2 + 65 = 67$ . Como la capacidad

de las salidas (48) es menor, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 48.

$$\begin{aligned}\text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} \\ &= 2 + 65 - 48 = 19\end{aligned}$$

- **De 10:00 a 11:00.**

Salidas de clientes. Los clientes que accederán a las cajas serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas =  $19 + 75 = 94$ . Como la capacidad de las salidas (72) es menor, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 72.

$$\begin{aligned}\text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} \\ &= 19 + 75 - 72 = 22\end{aligned}$$

- **De 11:00 a 12:00.**

Salidas de clientes. Los clientes que accederán a las cajas serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas =  $22 + 80 = 102$ . Como la capacidad de las salidas (72) es menor, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 72.

$$\begin{aligned}\text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} \\ &= 22 + 80 - 72 = 30\end{aligned}$$

- **De 12:00 a 13:00.**

Salidas de clientes. Los clientes que accederán a las cajas serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas =  $30 + 100 = 130$ . Como la capacidad de las salidas (120) es menor, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 120.

$$\begin{aligned}\text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} \\ &= 30 + 100 - 120 = 10\end{aligned}$$

- **De 13:00 a 14:00.**

Salidas de clientes. Los clientes que accederán a las cajas serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas =  $10 + 125 = 135$ . Como la capacidad de las salidas (120) es menor, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 120.

$$\begin{aligned}\text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} \\ &= 10 + 125 - 120 = 15\end{aligned}$$

- **De 14:00 a 15:00.**

Salidas de clientes. Los clientes que accederán a las cajas serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas =  $15 + 125 = 140$ . Como la capacidad de las salidas (96) es menor, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 96.

$$\begin{aligned} \text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} = \\ &= 15 + 125 - 96 = 44 \end{aligned}$$

- **De 15:00 a 16:00.**

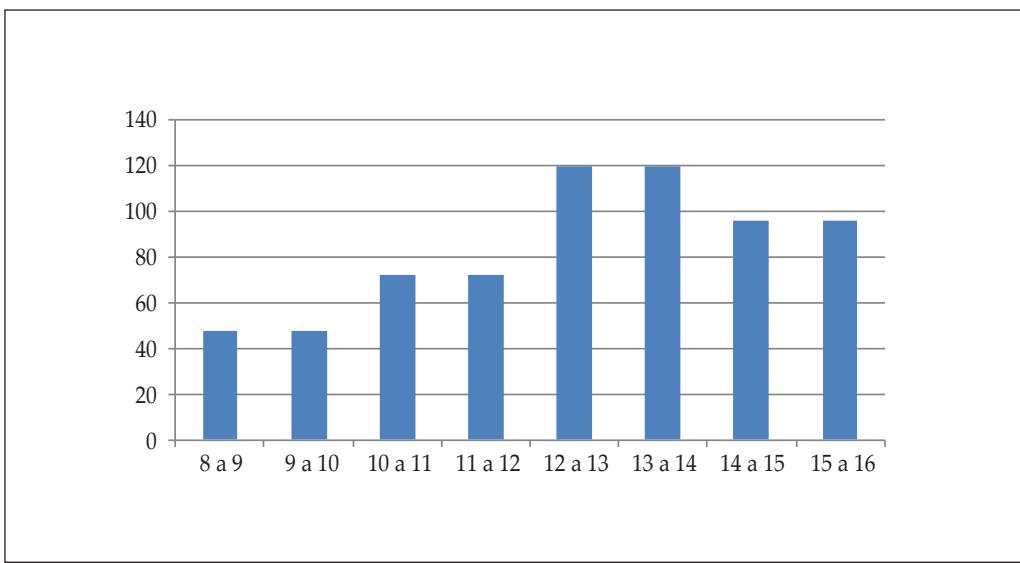
Salidas de clientes. Los clientes que accederán a las cajas serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas =  $44 + 60 = 104$ . Como la capacidad de las salidas (96) es menor, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 96.

$$\begin{aligned} \text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} = \\ &= 44 + 60 - 96 = 8 \end{aligned}$$

Lo que implica que al final habrá 8 clientes a los que no se les podrá atender.

Con la fila de salidas de clientes se realiza la gráfica de barras de velocidad de salida.

Figura 2. Gráfica de velocidad de salida del supermercado



## 2.2. CURVA DE COLA DE ESPERA

Esta gráfica representa la evolución de la cola de espera en los períodos analizados, tomando como dato para cada periodo la cola de espera al final de ese periodo. También es conocida como **curva de nivel de stock**. En lugar de ser una gráfica de barras, en este caso es una gráfica de línea, donde se van a ir uniendo los puntos correspondientes a la cola de espera de cada periodo.

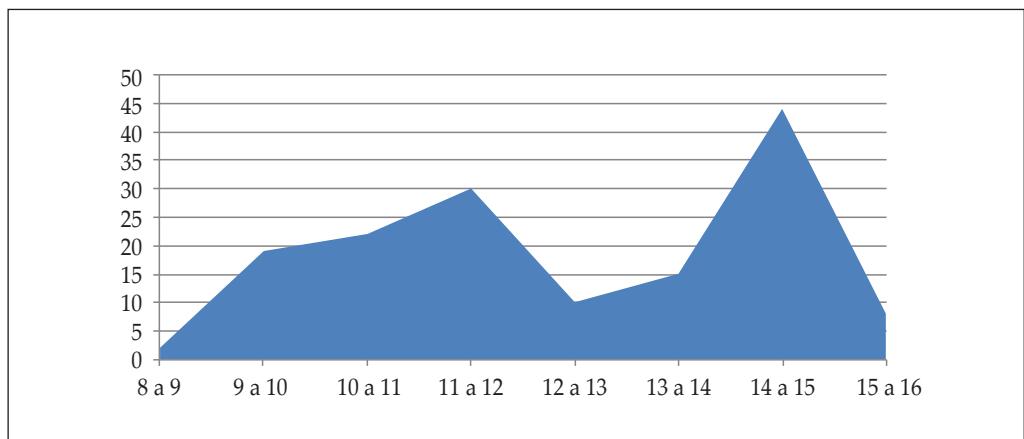
La información que va a suministrar esta gráfica va a ser la siguiente:

- Se comprueban rápidamente aquellos períodos en los que existe un pico en la cola de espera.
- El área total bajo la curva, dividido entre el número de períodos, es un indicativo de la cola de espera media que existe en el sistema.
- Permite detectar tendencias o ciclo en la evolución de la cola de espera.

Para el caso práctico anterior se va a representar la cola de espera en función de la fila de cola de espera (*stock*) obtenida anteriormente.

Horas	8 a 9	9 a 10	10 a 11	11 a 12	12 a 13	13 a 14	14 a 15	15 a 16
Cola de espera (stock)	2	19	22	30	10	15	44	8

Figura 3. Curva de cola de espera (*stock*) del supermercado



Se observa que existe una cola de espera elevada, teniendo un pico a las 12:00 y otro pico más acusado a las 15:00.

## 2.3. CURVA INPUT-OUTPUT DEL SISTEMA

Una última gráfica que va a ayudar a analizar la cola de espera de un sistema es la gráfica *input-output*. Muestra la evolución acumulada de las entradas (*input*) y de las salidas (*output*) en una misma gráfica. Cuando el sistema parte de cero, la curva de *input* siempre estará por encima o igual que la de *output*.

La **información** que va a dar esta curva es la siguiente:

- Muestra las diferentes pendientes de las curvas en función de los períodos.
- Da información de la cola de espera en cada momento puntual del tiempo. Es la diferencia en vertical entre la curva de *input* y la de *output*.
- Da información del tiempo de estancia en la cola para cualquier momento. Es la diferencia en horizontal entre la curva de *input* y la de *output*.

Para el caso práctico que se está analizando, hay que obtener los *inputs* (entradas acumuladas) y los *outputs* (salidas acumuladas) por hora:

Horas	8 a 9	9 a 10	10 a 11	11 a 12	12 a 13	13 a 14	14 a 15	15 a 16
Llegadas de clientes	50	65	75	80	100	125	125	60
Número de cajas abiertas	4	4	6	6	10	10	8	8
Capacidad de salidas	48	48	72	72	120	120	96	96
Salidas de clientes	48	48	72	72	120	120	96	96
Cola de espera	2	19	22	30	10	15	44	8
<i>Input</i>	50	115	190	270	370	495	620	680
<i>Output</i>	48	96	168	240	360	480	576	672

Número total de cajas abiertas en intervalos de 1 hora: 56.

Se obtienen sus valores de la siguiente forma:

- **De 8:00 a 9:00 (primera hora).**

*Input*: coincide con las llegadas de clientes, ya que es la primera hora = 50.

*Output*: coincide con las salidas de clientes, ya que es la primera hora = 48.

- **De 9:00 a 10:00.**

*Input*: *input* del periodo anterior más las nuevas llegadas =  $50 + 65 = 115$ .

*Output*: *output* del periodo anterior más las nuevas salidas =  $48 + 48 = 96$ .

- **De 10:00 a 11:00.**

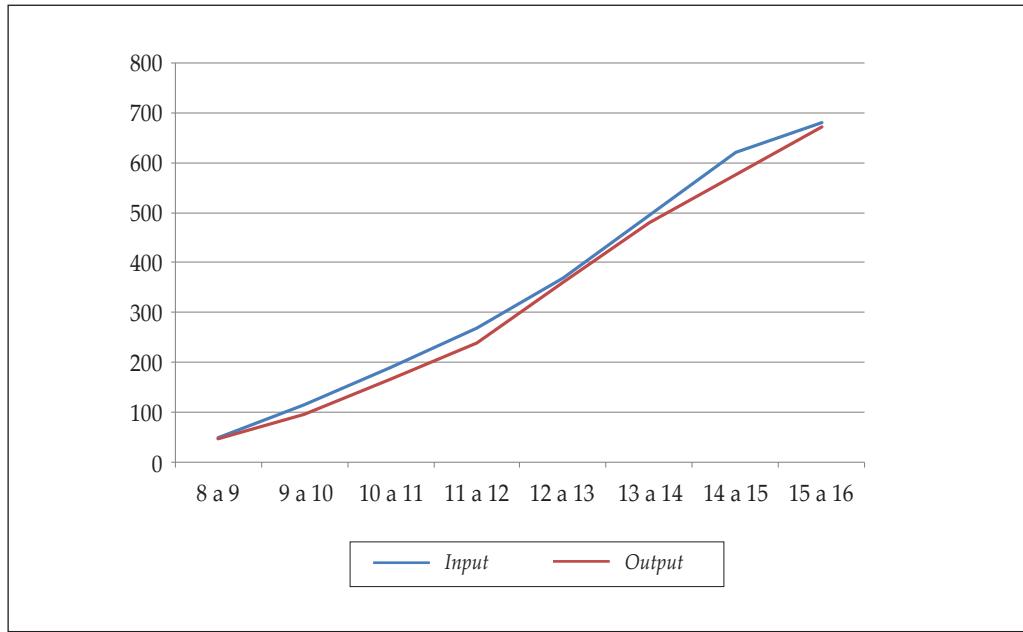
*Input*: *input* del periodo anterior más las nuevas llegadas =  $115 + 75 = 190$ .

*Output*: *output* del periodo anterior más las nuevas salidas =  $96 + 72 = 168$ .

Y así sucesivamente con todas las horas.

La curva *input-output* quedaría:

Figura 4. Curva *input-output* del supermercado



Se observa que al final la curva de *input* está ligeramente por encima de la de *output*, ya que existe una cola de espera de 8 personas.

Existen periodos en los que hay una diferencia considerable entre el *input* y el *output*, como, por ejemplo, de 11:00 a 12:00 y de 14:00 a 15:00.

Mirando la diferencia en horizontal, se observa que de 14:00 a 15:00 el tiempo de estancia en la cola de espera es de casi media hora.

## 2.4. CÓMO MEJORAR LA COLA DE ESPERA DE UN SISTEMA

A partir del análisis realizado con todas las gráficas antes vistas, en muchas ocasiones se verá que es necesario reducir o eliminar la cola de espera para dar un mejor servicio.

Las opciones que se tendrán en cuenta de cara a mejorar la cola de espera serán:

- Aumentar las capacidades de las salidas periodo a periodo para adecuarlas a las necesidades.
- Redistribuir las entradas del sistema. Esta posibilidad suele tener una mayor dificultad para implementarla, ya que en muchas ocasiones depende de factores externos.

Otro aspecto importante que hay que destacar es que se pueden realizar muchas mejoras distintas en un mismo sistema. Para poder determinar la bondad de las mismas habrá que fijarse unos objetivos que hay que conseguir con la mejora, como, por ejemplo, que la cola de espera no exceda de cierto número o que el tiempo máximo en la misma esté acotado, etc.

Para el ejemplo analizado, las mejoras pueden ser numerosas. En este caso se van a poner exactamente el número de cajas necesarias para que los cajeros no se queden desocupados, y así que la cola de espera sea mínima. Al final no debe haber cola de espera.

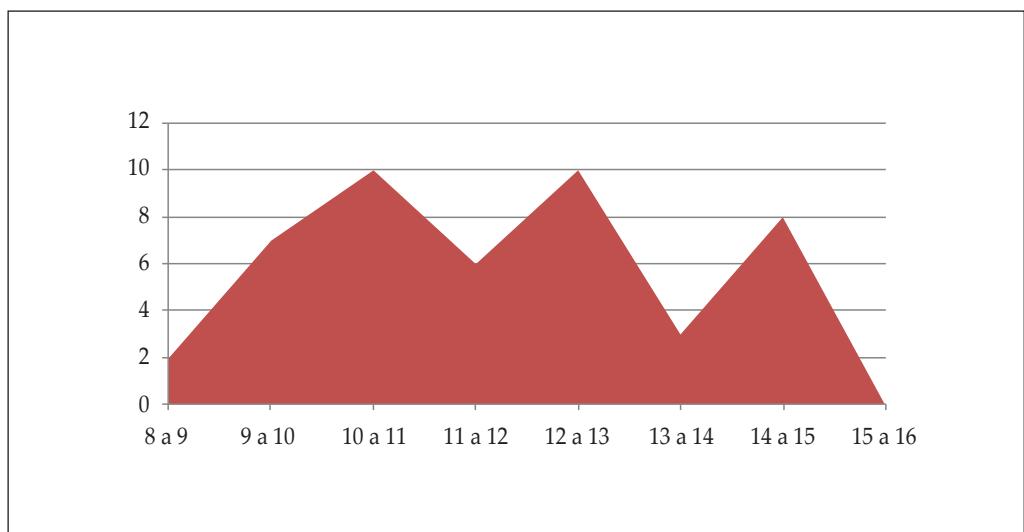
Con todas estas premisas tenemos la siguiente tabla, donde se han añadido cajeros de 9:00 a 10:00, de 11:00 a 12:00, de 13:00 a 14:00 y de 14:00 a 15:00. Por el contrario, se han suprimido cajeros de 12:00 a 13:00 y de 15:00 a 16:00.

Horas	8 a 9	9 a 10	10 a 11	11 a 12	12 a 13	13 a 14	14 a 15	15 a 16
Llegadas de clientes	50	65	75	80	100	125	125	60
Número de cajas abiertas	4	5	6	7	8	11	10	6
Capacidad de salidas	48	60	72	84	96	132	120	72
Salidas de clientes	48	60	72	84	96	132	120	68
Cola de espera	2	7	10	6	10	3	8	0
<i>Input</i>	50	115	190	270	370	495	620	680
<i>Output</i>	48	108	180	264	360	492	612	680

Como un cajero puede atender 12 clientes por hora, la cola máxima debe ser de 11 clientes.

La gráfica de nivel de *stock* sería:

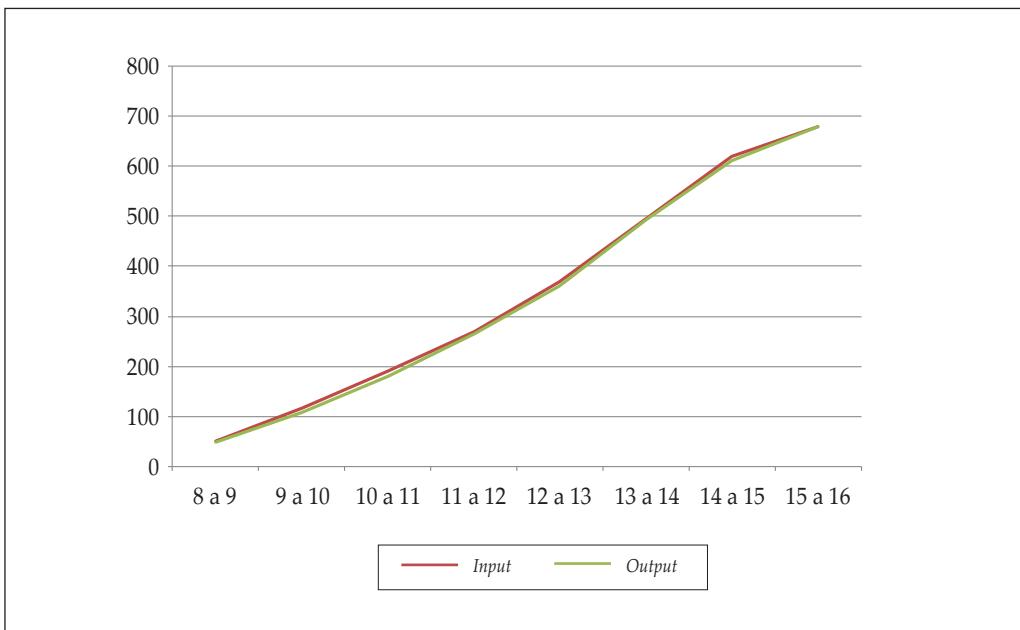
Figura 5. Curva de cola de espera (*stock*) mejorada del supermercado



Se observa que ahora el *stock* es mucho menor que en la situación inicial, siendo ahora el mayor pico de 10 personas, mientras que antes era de 44 personas.

La curva de *input-output* quedaría de la siguiente manera:

Figura 6. Curva *input-output* mejorada del supermercado



En este caso se observa que están realmente ajustadas y que acaban en el mismo punto.

El número total de cajas abiertas en intervalos de 1 hora ahora es de 57, lo que significa que, con aumentar únicamente en 1, se ha mejorado de manera muy visible la cola de espera y se da servicio a todos los clientes.

### EJEMPLO 1. Autobús Shuttle

Se quieren analizar los flujos existentes de viajeros en la siguiente situación. El autobús Shuttle que va desde el aeropuerto de Charleroi a Bruselas es la opción más rápida y económica para realizar el trayecto. En la tabla situada a continuación se detallan las llegadas de pasajeros a la terminal de autobuses del aeropuerto para realizar este trayecto. También se detalla el número de autobuses disponibles para cada periodo. Hay que tener en cuenta que en cada autobús entran 50 pasajeros.

.../...

.../...

Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Clientes que llegan a la terminal	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60
Número de autobuses/hora	2	2	2	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	2	2	2

1. Realiza la gráfica de velocidad de entrada.
2. Realiza la gráfica de velocidad de salida.
3. Realiza la gráfica de cola de espera para los autobuses actuales.
4. Realiza la curva de *input-output*.
5. Mejoras que hay que introducir en el sistema.

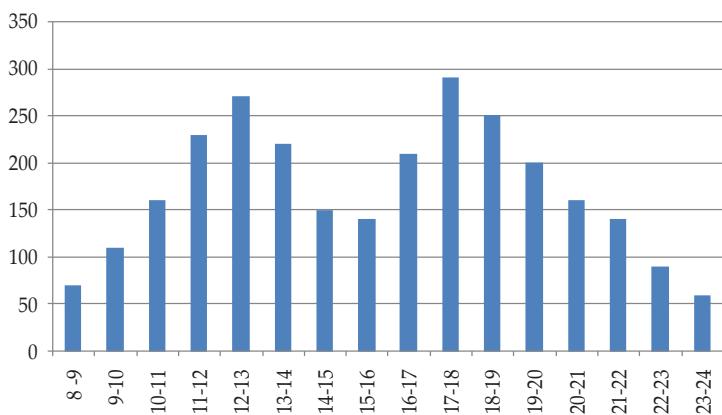
## Solución

### 1. Gráfica de velocidad de entrada

Para realizar esta gráfica, solo se necesitan los clientes que entran en nuestro sistema:

Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Clientes que llegan a la terminal	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60

Figura 7. Gráfica de velocidad de entrada de autobuses



.../...

.../...

## 2. Gráfica de velocidad de salida

Para realizar esta gráfica hay que ver cuántos viajeros somos capaces de transportar en cada franja horaria. Hay que considerar que por cada autobús que se tenga se pueden transportar 50 pasajeros. Por tanto, la capacidad de las salidas por hora se obtendrá multiplicando el número de autobuses por 50.

Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Entradas	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60
Número de autobuses/hora	2	2	2	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	2	2	2
Capacidad de salidas	100	100	100	200	200	200	200	200	250	250	250	250	200	100	100	100
Salidas	70	100	100	200	200	200	200	200	250	250	250	250	190	100	100	90
Cola de espera	0	10	70	100	170	190	140	80	40	80	80	30	0	40	30	0

Se va a explicar detalladamente cómo se han obtenido estos valores para las primeras horas.

- De 8:00 a 9:00 (primera hora).

Salidas de clientes. Como la capacidad de las salidas (100) es mayor que el número de llegadas (70), las salidas de los clientes coincidirán con las llegadas = 70.

$$\text{Cola de espera} = \text{Llegadas} - \text{Salidas} = 70 - 70 = 0$$

- De 9:00 a 10:00.

Salidas de clientes. Los clientes que quieren subir a los autobuses serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas = 0 + 110 = 110. Como la capacidad de las salidas (100) es menor que los clientes que quieren subir a los autobuses, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 100.

$$\begin{aligned}\text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} = \\ &= 0 + 110 - 100 = 10\end{aligned}$$

- De 10:00 a 11:00.

Salidas de clientes. Los clientes que quieren subir a los autobuses serán los de la cola de espera más las nuevas llegadas = 10 + 160 = 170. Como la capacidad de las salidas (100) es menor que el número de clientes que quieren subir a los autobuses, las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 100.

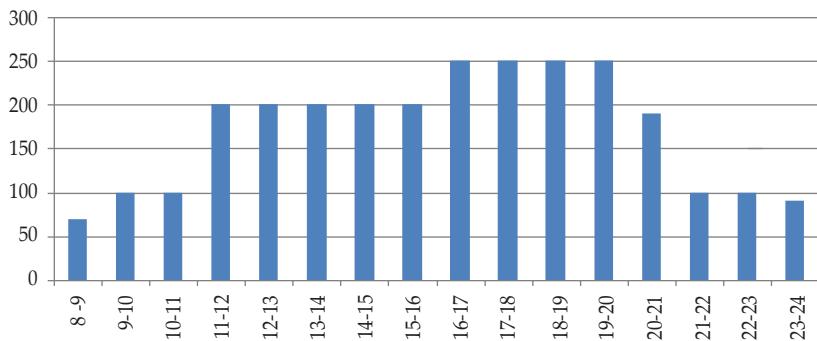
$$\begin{aligned}\text{Cola de espera} &= \text{Cola de espera periodo anterior} + \text{Llegadas} - \text{Salidas} = \\ &= 10 + 160 - 100 = 70\end{aligned}$$

.../...

.../...

Y así sucesivamente para el resto de horas. Con todo ello, la gráfica de velocidad de salida quedará:

Figura 8. Gráfica de velocidad de salida de autobuses

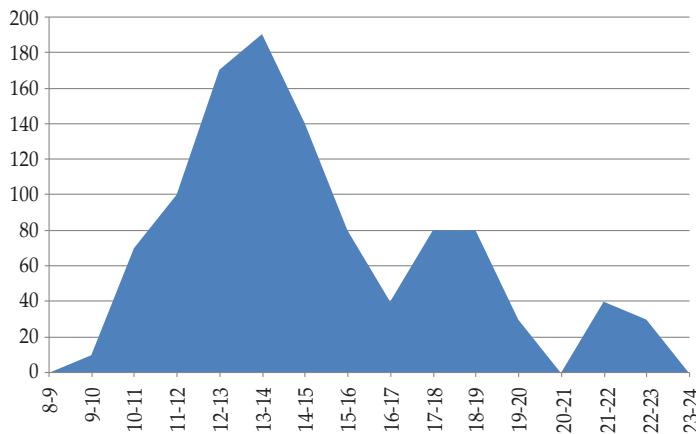


### 3. Gráfica de cola de espera para los autobuses actuales

Para realizar esta gráfica, lo que se debe representar es la cola de espera de los autobuses, que nos dirá el número de clientes que están esperando en nuestro sistema. Se obtiene de la tabla obtenida en el punto 2.

Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Cola de espera	0	10	70	100	170	190	140	80	40	80	80	30	0	40	30	0

Figura 9. Curva de cola de espera (stock) de autobuses



.../...

.../...

A partir de esta gráfica se observa perfectamente las horas del día en que hay un mayor problema de esperas. Aproximadamente, de 12:00 a 16:00, con un pico de 190 personas.

#### 4. Curva *input-output*

Se necesita obtener las entradas y salidas acumuladas a lo largo del tiempo.

Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Entradas	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60
Número de autobuses/hora	2	2	2	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	2	2	2
Salidas	70	100	100	200	200	200	200	200	250	250	250	250	190	100	100	90
Cola de espera	0	10	70	100	170	190	140	80	40	80	80	30	0	40	30	0
<i>Input</i> (entradas acumuladas)	70	180	340	570	840	1.060	1.210	1.350	1.560	1.850	2.100	2.300	2.460	2.600	2.690	2.750
<i>Output</i> (salidas acumuladas)	70	170	270	470	670	870	1.070	1.270	1.520	1.770	2.020	2.270	2.460	2.560	2.660	2.750

Se obtienen sus valores de la siguiente forma:

- De 8:00 a 9:00 (primera hora).
  - *Input*: coincide con las llegadas de clientes, ya que es la primera hora = 70.
  - *Output*: coincide con las salidas de clientes, ya que es la primera hora = 70.
- De 9:00 a 10:00.
  - *Input*: *input* del periodo anterior más las nuevas llegadas =  $70 + 110 = 180$ .
  - *Output*: *output* del periodo anterior más las nuevas salidas =  $70 + 100 = 170$ .
- De 10:00 a 11:00.
  - *Input*: *input* del periodo anterior más las nuevas llegadas =  $180 + 160 = 340$ .
  - *Output*: *output* del periodo anterior más las nuevas salidas =  $170 + 100 = 270$ .

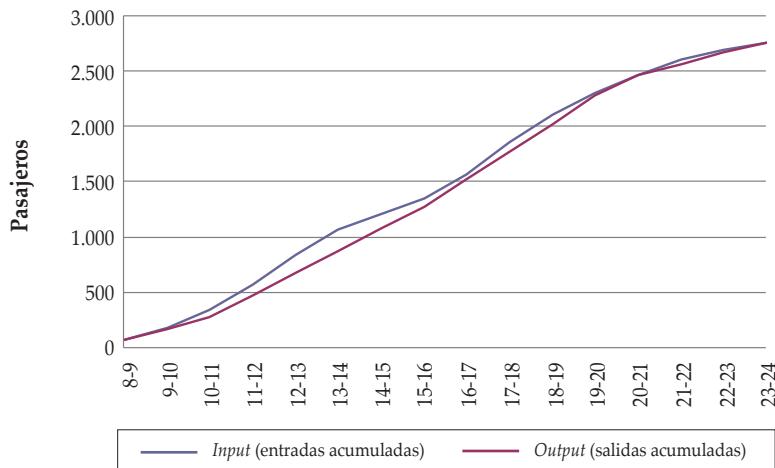
Y así sucesivamente.

.../...

.../...

La curva *input-output* quedaría:

Figura 10. Curva *input-output* de autobuses



Se observa que al final se transporta a todos los posibles pasajeros, pero que hay unas grandes colas de espera, existiendo momentos en los que se tiene que esperar casi 1 hora (de 12:00 a 14:00).

## 5. Mejoras

De cara a mejorar el sistema hay que realizar una redistribución de los autobuses que se van a necesitar por hora. Si nos marcamos el objetivo de que la cola máxima sea como mucho de 50 personas, y que al final todos los pasajeros puedan tomar el autobús, una posible distribución de autobuses sería:

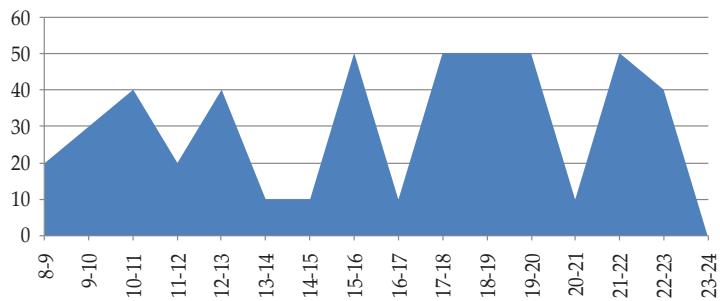
Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Entradas	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60
Número de autobuses/hora	1	2	3	5	5	5	3	2	5	5	5	4	4	2	2	2
Salidas	50	100	150	250	250	250	150	100	250	250	250	200	200	100	100	100
Cola de espera	20	30	40	20	40	10	10	50	10	50	50	50	10	50	40	0
<i>Input</i>	70	180	340	570	840	1.060	1.210	1.350	1.560	1.850	2.100	2.300	2.460	2.600	2.690	2.750
<i>Output</i>	50	150	300	550	800	1.050	1.200	1.300	1.550	1.800	2.050	2.250	2.450	2.550	2.650	2.750

.../...

.../...

Se ve que se cumple el requisito de tener como máximo 50 clientes en cola. Para ello se han necesitado 55 turnos de autobús. La gráfica del nivel de *stock* que refleja la cola de espera será:

Figura 11. Curva de cola de espera (*stock*) 1 mejorada de autobuses



Veamos que con el mismo número de autobuses se puede lograr el objetivo propuesto, pero disminuyendo la cola de espera:

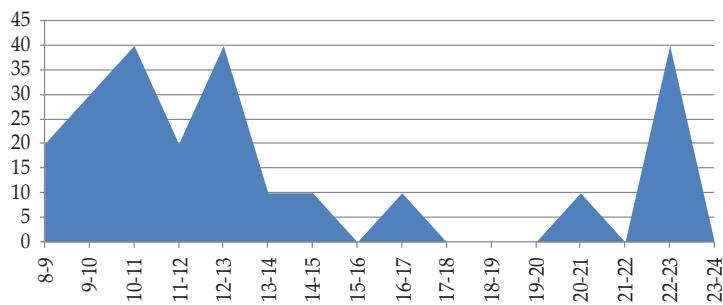
Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Entradas	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60
Número de autobuses/hora	1	2	3	5	5	5	3	3	4	6	5	4	3	3	1	2
Salidas	50	100	150	250	250	250	150	150	200	300	250	200	150	150	50	100
Cola de espera	20	30	40	20	40	10	10	0	10	0	0	0	10	0	40	0
<i>Input</i>	70	180	340	570	840	1.060	1.210	1.350	1.560	1.850	2.100	2.300	2.460	2.600	2.690	2.750
<i>Output</i>	50	150	300	550	800	1.050	1.200	1.350	1.550	1.850	2.100	2.300	2.450	2.600	2.650	2.750

Se han adelantado algunos autobuses cuando interesa, ya que la cola de espera es de 50 pasajeros.

Siendo su gráfica de nivel de *stock* o cola de espera:

.../...

.../...

Figura 12. Curva de cola de espera (*stock*) 2 mejorada de autobuses

Si se quisiera lograr que al final de cada periodo no hubiera cola de espera, ya que se quiere dar un mejor servicio que la competencia, el número de turnos de autobuses pasaría a 62:

Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Entradas	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60
Número de autobuses/hora	2	3	4	5	6	5	3	3	5	6	5	4	4	3	2	2
Salidas	70	110	160	230	270	220	150	140	210	290	250	200	160	140	90	60
Cola de espera	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>Input</i>	70	180	340	570	840	1.060	1.210	1.350	1.560	1.850	2.100	2.300	2.460	2.600	2.690	2.750
<i>Output</i>	70	180	340	570	840	1.060	1.210	1.350	1.560	1.850	2.100	2.300	2.460	2.600	2.690	2.750



## CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Cliente.
- Cola de espera.
- Cola finita.
- Cola infinita.
- Curva de cola de espera.
- Curva *input-output*.
- Disciplina de colas.
- Distribución de tiempos de servicios.
- Distribución de tiempos entre llegadas.
- FIFO (*first in first out*).
- Gráfica de velocidad de entrada.
- Gráfica de velocidad de salida.
- Ley de Little.
- LIFO (*last in first out*).
- Número esperado de clientes en el sistema.
- Servidores.
- Tamaño de la cola de espera.
- Tiempo del cliente en el sistema.



## ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

## Enunciado 1

¿Qué gráficas hay que realizar para analizar la cola de espera de un sistema?

## Enunciado 2

De una empresa fabricante de zapatos se quiere hacer el análisis de los flujos existentes en su nuevo centro logístico que se va a abrir en Madrid. Se van a analizar los pares de zapatos que pasan por el centro. En la siguiente tabla se muestran los pares de zapatos (en miles) que van a llegar cada mes al centro desde las distintas fábricas, así como los camiones que hay disponibles cada mes para realizar el reparto de la mercancía:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Llegadas (miles)	200	200	220	180	180	150	150	250	300	250	200	200
Camiones	12	12	12	12	12	12	14	14	14	15	15	15

Cada camión puede llevar una carga que ocupe unos  $90\text{ m}^3$ , lo que equivale a 15.000 pares de zapatos.

Los apartados que hay que desarrollar son los siguientes:

1. Realiza la gráfica de velocidad de entrada.
2. Realiza la gráfica de velocidad de salida.
3. Realiza la gráfica de nivel de stock.
4. Realiza la curva de *input-output*.
5. Haz unas propuestas de mejora del sistema. Realiza las nuevas curvas de stock, y de *input-output*, acordes a tus propuestas de mejora.

## Solución 1

De cara a poder analizar las colas de espera de un sistema hay que realizar las gráficas que representan a este sistema: gráfica de velocidad de entrada, gráfica de velocidad de salida, curva de cola de espera y curva *input-output*.

## Solución 2

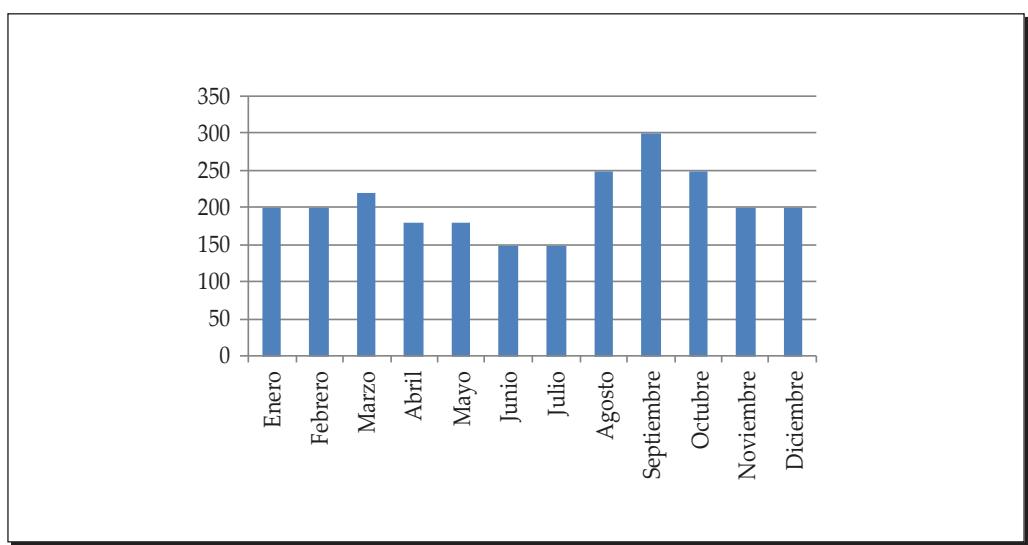
### 1. Gráfica de velocidad de entrada

Los datos se van a dar en miles de pares de zapatos para todos los apartados.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Llegadas (miles)	200	200	220	180	180	150	150	250	300	250	200	200

La representación en una gráfica de barras será la siguiente:

Figura 13. Gráfica de velocidad de entrada de zapatos



## 2. Gráfica de velocidad de salida

Para realizarla, habrá que obtener las salidas y el *stock* (cola de espera) que va a existir en el sistema. La capacidad de las salidas cada mes se obtendrá multiplicando el número de camiones por su capacidad (15):

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Llegadas	200	200	220	180	180	150	150	250	300	250	200	200
Camiones	12	12	12	12	12	12	14	14	14	15	15	15
Capacidad de salidas	180	180	180	180	180	180	210	210	210	225	225	225
Salidas	180	180	180	180	180	180	200	210	210	225	225	225
Stock	20	40	80	80	80	50	0	40	130	155	130	105

Vamos a explicar detalladamente cómo se han obtenido estos valores para los primeros meses.

- **Enero (primer mes).**

Salidas de pares de zapatos (en miles). Como la capacidad de las salidas (180) es menor que las llegadas (200), las salidas de los clientes coincidirán con la capacidad = 180.

$$\begin{aligned} Stock \text{ (cola de espera)} &= \text{Llegadas} - \text{Salidas} = \\ &= 200 - 180 = 20 \end{aligned}$$

- **Febrero.**

Salidas de pares de zapatos (en miles). Los pares de zapatos que están listos para su distribución serán los del *stock* del mes anterior más las nuevas llegadas =  $20 + 200 = 220$ . Como la capacidad de las salidas (180) es menor

que los pares de zapatos (en miles) que están listos para su distribución, las salidas coincidirán con la capacidad = 180.

$$\begin{aligned} Stock \text{ (cola de espera)} &= Stock \text{ (cola de espera periodo anterior)} + \\ &+ \text{Llegadas} - \text{Salidas} = 20 + 200 - 180 = 40 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Lo vamos a realizar también para el mes de julio, ya que es un poco diferente:

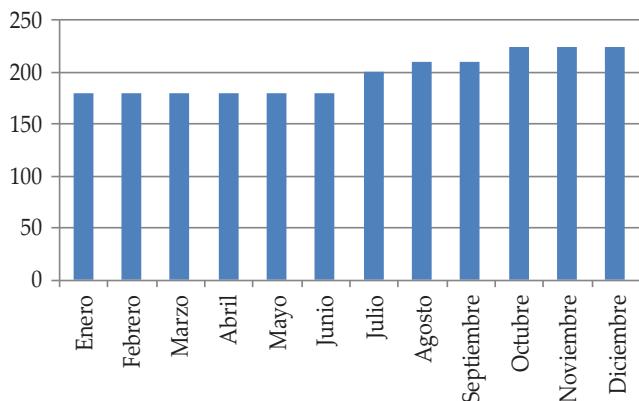
- **Julio.**

Salidas de pares de zapatos (en miles). Los pares de zapatos que están listos para su distribución serán los del *stock* del mes anterior más las nuevas llegadas =  $50 + 150 = 200$ . Como la capacidad de las salidas (210) es mayor que los pares de zapatos (en miles) que están listos para su distribución, las salidas coincidirán con los pares de zapatos que están listos = 200.

$$\begin{aligned} Stock \text{ (cola de espera)} &= Stock \text{ (cola de espera periodo anterior)} + \\ &+ \text{Llegadas} - \text{Salidas} = 50 + 150 - 200 = 0 \end{aligned}$$

La gráfica de velocidad de salida será:

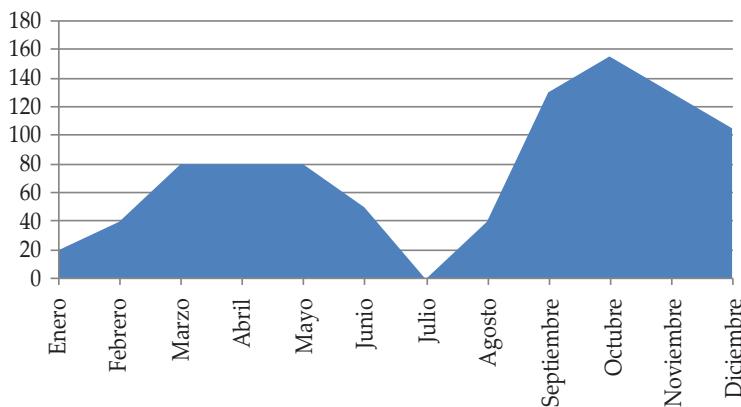
Figura 14. Gráfica de velocidad de salida de zapatos



### 3. Gráfica de cola de espera

Con los datos de la tabla del punto 2, se tendrá:

Figura 15. Curva de cola de espera (*stock*) de zapatos



Se observan varias circunstancias preocupantes:

- Existe un alto nivel de *stock* (80) durante varios meses consecutivos, de marzo a mayo.
- Existe un pico muy considerable en octubre de 155.
- El nivel del *stock* a final de año no es cero, sino que tiene un valor realmente alto, 105.

### 4. Curva *input-output*

Hay que obtener los *inputs* (entradas acumuladas), así como los *outputs* (salidas acumuladas):

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Total
Llegadas	200	200	220	180	180	150	150	250	300	250	200	200	2.480
Camiones	12	12	12	12	12	12	14	14	14	15	15	15	159
Capacidad de salidas	180	180	180	180	180	180	210	210	210	225	225	225	
Salidas	180	180	180	180	180	180	200	210	210	225	225	225	2.375
Stock	20	40	80	80	80	50	0	40	130	155	130	105	
Input	200	400	620	800	980	1.130	1.280	1.530	1.830	2.080	2.280	2.480	
Output	180	360	540	720	900	1.080	1.280	1.490	1.700	1.925	2.150	2.375	

Se obtienen sus valores de la siguiente forma:

- **Enero (primer mes).**

*Input*: coincide con las llegadas, ya que es el primer mes = 200.

*Output*: coincide con las salidas, ya que es el primer mes = 180.

- **Febrero.**

*Input*: *input* del periodo anterior más las nuevas llegadas =  $200 + 200 = 400$ .

*Output*: *output* del periodo anterior más las nuevas salidas =  $180 + 180 = 360$ .

- **Marzo.**

*Input*: *input* del periodo anterior más las nuevas llegadas =  $400 + 220 = 620$ .

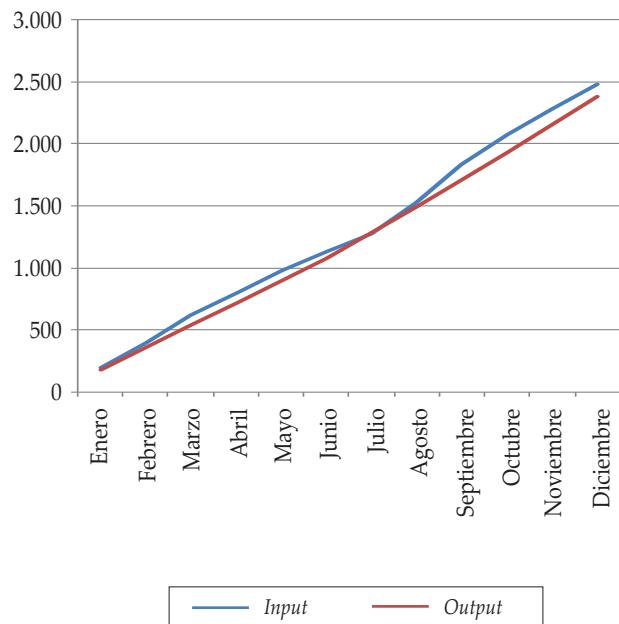
*Output*: *output* del periodo anterior más las nuevas salidas =  $360 + 180 = 540$ .

Y así sucesivamente.

La curva *input-output* sería la de la siguiente figura. Se observa que hay un momento a mitad de año en el cual el sistema está nivelado, pero a partir de septiembre la curva

de *input* está muy claramente por encima de la de *output*, y se llega finalmente a una situación a final de año con mucho *stock*. Si no se corrige esta situación, según vayan pasando los meses se irá agudizando cada vez más el problema:

Figura 16. Curva *input-output* de zapatos



## 5. Propuestas de mejora del sistema. Nuevas curvas de *stock*, y de *input-output*, acordes a las propuestas de mejora

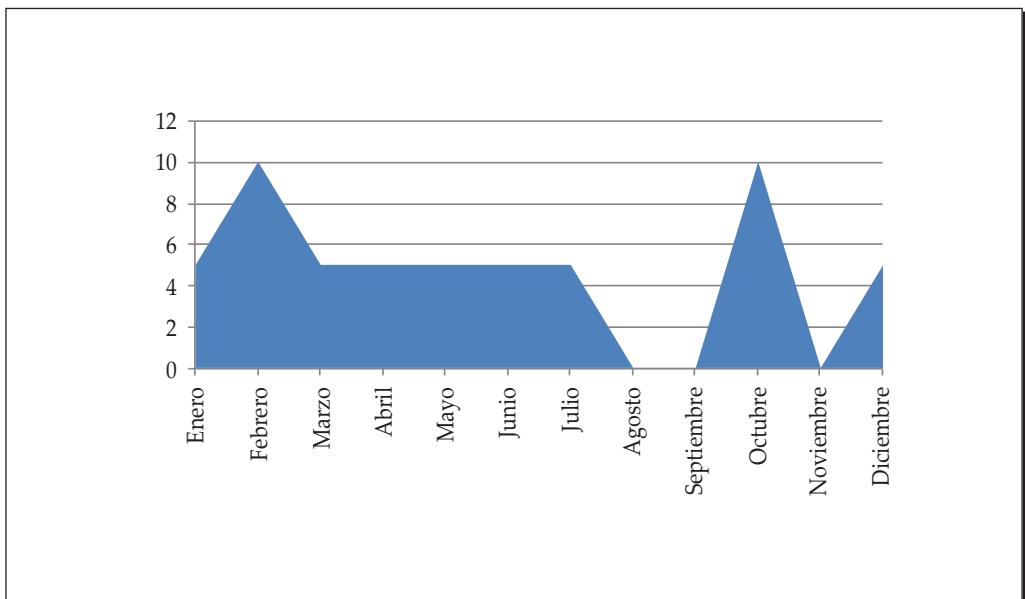
De cara a realizar las mejoras, habrá que marcarse un objetivo. En este caso, el objetivo será que el *stock* máximo a final de cada mes sea de 10.000 pares de zapatos, utilizando el mínimo número de camiones. Una posible solución sería:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Llegadas	200	200	220	180	180	150	150	250	300	250	200	200
Camiones	13	13	15	12	12	10	10	17	20	16	14	13
Capacidad de salidas	195	195	225	180	180	150	150	255	300	240	210	195
Salidas	195	195	225	180	180	150	150	255	300	240	210	195
Stock	5	10	5	5	5	5	5	0	0	10	0	5
Input	200	400	620	800	980	1.130	1.280	1.530	1.830	2.080	2.280	2.480
Output	195	390	615	795	975	1.125	1.275	1.530	1.830	2.070	2.280	2.475

Para lograrlo se han necesitado 165 camiones a lo largo del año en lugar de 159.

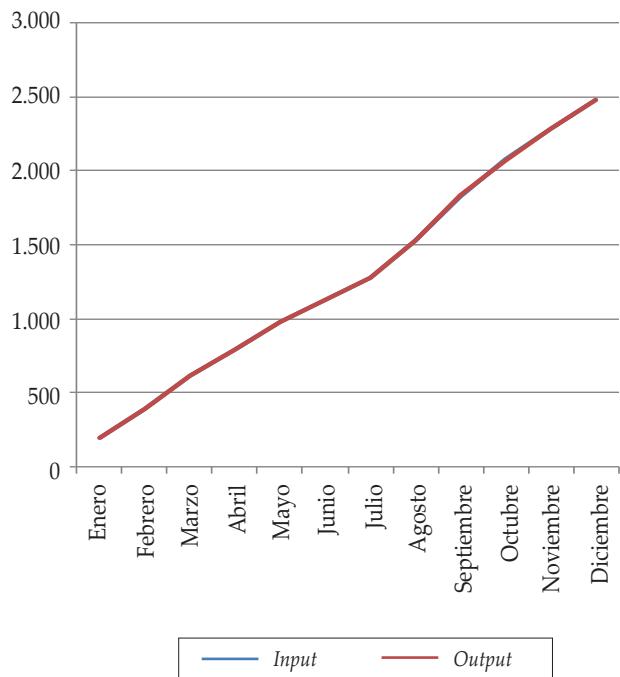
La nueva curva de *stock* (cola de espera) será:

Figura 17. Curva de cola espera (*stock*) mejorada de zapatos



Siendo la curva *input-output*:

Figura 18. Curva *input-output* mejorada de zapatos



Se ve que con esta nueva configuración se tiene una cola de espera mínima y que existe un gran ajuste entre el *input* y el *output* del sistema.



## EJERCICIOS VOLUNTARIOS

Tras el estudio de esta Unidad didáctica, el estudiante puede hacer, por su cuenta, una serie de ejercicios voluntarios, como los siguientes:

1. ¿Qué información suministra la curva de cola de espera?
2. ¿Cómo se puede mejorar un sistema de colas de espera?
3. ¿Qué información suministra la curva *input-output*?
4. ¿Qué tipo de gráficos son los de velocidad de entrada y de salida?



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### Básica

- HILLIER, F. S. y LIEBERMAN, G. J.: *Introducción a la investigación de operaciones*, McGraw-Hill, 2010.
- TAHA, H. A.: *Investigación de operaciones*, México, Editorial Pearson, 2004.
- MUÑOZ, B. y RIVEROLA, J.: *Del buen pensar y mejor hacer*, México, Editorial McGraw-Hill, 2003.

### Avanzada

- BRONSON, R. y NAADIMUTHU, G.: *Schaum's outlines of theory and problems of operations research*, New York, McGraw-Hill, 1982.
- CÓRDOBA, M.: *Metodología para la toma de decisiones*, Delta Publicaciones, Madrid, 2004.
- SERRA DE LA FIGUERA, D.: *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones*, Gestión 2000, 2004.
- RÍOS-INSUA, S.; MATEOS, A.; BIELZA, M.<sup>a</sup> C., y JIMÉNEZ, A.: *Investigación operativa*, Centro de Estudios Ramón Areces, 1996. Básica

