UNIDAD DIDÁCTICA

8

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Introducción
    - 1.1. Significado de las derivadas en las ecuaciones diferenciales
    - 1.2. Tipos de ecuaciones diferenciales
    - 1.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias
    - 1.4. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales
    - 1.5. Orden de una ecuación diferencial
2. Modelización de problemas
    - 2.1. Modelización de un problema: la caída del paracaidista
    - 2.2. Caso práctico: la apocalipsis zombi
    - 2.3. Otros casos similares
3. Comprobación de resultados
4. Métodos elementales de resolución
    - 4.1. Ecuaciones diferenciales separables
    - 4.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas
    - 4.3. Otro tipo de ecuación resoluble por cambio de variable
    - 4.4. El paracaidista
5. Ecuaciones exactas
    - 5.1. Factores integrantes

6. Ecuaciones lineales de primer orden
    6.1. Solución de una ecuación lineal
7. Ecuaciones reducibles a lineales
    7.1. Ecuación de Bernoulli
    7.2. Ecuaciones de Riccati
8. Dibujo aproximado de soluciones
9. Existencia y unicidad, prolongabilidad y estabilidad
    9.1. Existencia, unicidad y prolongabilidad
    9.2. Estabilidad
10. Ecuaciones autónomas
    10.1. Definición y propiedades
    10.2. Ejemplos

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER
ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Conocer el concepto de ecuación diferencial.
- Adquirir la capacidad de poder modelar problemas para que sean resolubles mediante ecuaciones diferenciales en derivadas ordinarias.
- Saber distinguir entre distintos tipos de ecuaciones diferenciales sencillas de primer orden.
- Aplicar los algoritmos adecuados para así resolver las ecuaciones diferenciales en derivadas ordinarias tipificadas de primer orden.
- Saber dibujar las soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Saber determinar la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales sencillas de primer orden.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales son el campo de las matemáticas en el que probablemente se siente con más fuerza la influencia mutua de la física y la ingeniería. Muchas leyes físicas están enunciadas como una ecuación diferencial o un conjunto de ecuaciones diferenciales. Así, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo o la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica son ecuaciones diferenciales.

La rama de las ecuaciones diferenciales empezó a desarrollarse con rapidez a partir de los tiempos de Euler y no ha dejado de hacerlo desde entonces. Sirven para enunciar leyes físicas o describir casi cualquier proceso continuo, desde el lanzamiento de la jabalina en los juegos olímpicos a la producción de helado en una factoría, pasando por el comportamiento del perfil del ala de un avión.

El lector debe tener en cuenta varios aspectos en este campo antes de empezar. El primero es que una ecuación diferencial que pretenda describir un problema real no es más que un modelo de realidad y, por tanto, no es el único posible. El modelo elegido dependerá de varios factores, como la capacidad que tengamos de resolver la ecuación diferencial correspondiente o la precisión que necesitemos.

Otra aspecto importante es darse cuenta de que, a diferencia de los problemas algebraicos, la solución de una ecuación diferencial no es un número o un conjunto de números, sino un conjunto de funciones. Cada una de estas «funciones solución» se corresponderá a unas condiciones iniciales y de frontera específicas.

La capacidad de inventar ecuaciones diferenciales es muy superior a nuestra capacidad para resolverlas analíticamente (con lápiz y papel). Solo se saben resolver analíticamente unos determinados tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, de los cuales las lineales son las más sencillas. Para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, la situación es incluso bastante peor en este aspecto. Aunque siempre podemos usar una técnica computacional para resolver numéricamente un problema de ecuaciones diferenciales que previamente se ha discretizado. Para los cálculos de aerodinámica sobre el perfil del ala de un avión, por ejemplo, se emplean este tipo de técnicas numéricas.

1.1. SIGNIFICADO DE LAS DERIVADAS EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Una **ecuación diferencial** no es más que una expresión en donde aparecen derivadas. Así, por ejemplo, la expresión

$$\frac{dx}{dt} = x'$$

se lee como «derivada de *x* respecto a *t*», se simboliza con una *x* con apóstrofo y nos dice cómo varía *x* respecto a *t*, que en este caso es el tiempo. Nos da la variación de una distancia (por ejemplo) respecto al tiempo, es decir, que representa la velocidad. Si representamos gráficamente la variable dependiente *x* y la variable independiente *t*, nos da la pendiente de la curva que forman las dos variables, como la derivada de cualquier función.

Una derivada es equivalente en el caso discreto a cuando tenemos incrementos:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{dx}{dt}$$

En el caso de que aparezcan derivadas respecto al tiempo, a veces se cambia un poco el convenio usando puntos en lugar de apóstrofos en los superíndices:

$$\frac{dx}{dt} = x' = \dot{x} = v$$

o se puede usar *y* en lugar de *x*:

$$\frac{dy}{dt} = y' = \dot{y} = v$$

Una **distancia** (o el **tiempo**) es una cantidad real que se puede subdividir infinitamente, y entonces el cálculo infinitesimal cobra todo su sentido. Pero, a veces, un problema discreto, como uno que involucre personas o átomos, puede aproximarse a un modelo continuo en que la población de personas o átomos varíe continuamente, aunque no haya medias personas ni cuartos de átomo. Solo se necesita que el número de átomos o personas sea lo suficientemente alto. Por tanto, podemos modelizar también esos sistemas discretos con ecuaciones diferenciales.

Para un problema de cinemática (un problema continuo), la expresión anterior sería la variación de la distancia respecto al tiempo o, lo que es lo mismo, la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = x' = v$$

La derivada segunda de x respecto a t nos dice cómo varía la «variación» de la distancia respecto al tiempo o, lo que es lo mismo, nos da la variación de la velocidad respecto al tiempo, que es la aceleración:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = v' = \dot{v} = a$$

Tenemos una situación muy similar para otros caso no cinemáticos, como corrientes en un circuito, transmisión de calor a lo largo de un sólido, etc. Para cada caso suele haber convenios acerca de los nombres que se dan a las variables. De este modo, las distancias pueden expresarse con otra letra como la y, o que en su lugar lo que varía sea la temperatura, la altura del nivel de agua, el campo magnético, la densidad de aire en el ala de un avión, la función de ondas de un electrón, etc.

Veremos algunos ejemplos sobre este punto en epígrafes inmediatamente posteriores. Incluso la x puede jugar el papel del tiempo, sobre todo en libros de matemáticas en los que una ecuación diferencial puede enunciarse sin que haga referencia a ningún caso físico del mundo real.

Siempre que en un sistema ciertas entidades varíen respecto a otras y sepamos cómo lo hacen, podremos expresar (si somos inteligentes) la evolución o comportamiento de dicho sistema con un modelo basado en ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 1

La segunda ley de Newton explica qué ocurre si sobre un cuerpo en movimiento actúa una fuerza neta. Esta fuerza modificará el estado de movimiento, cambiando la velocidad en módulo y/o dirección. Podemos expresar esta ley en forma diferencial del siguiente modo:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

.../...

.../...

es decir, que la fuerza (o suma de fuerzas) es igual a la variación del momento *p* o cantidad de movimiento (básicamente el producto de la masa por su velocidad) respecto al tiempo. La belleza de esta expresión está en que lo mismo nos sirve para describir las órbitas de los planetas (que tienen una masa fija) como para describir el movimiento de un cohete que va perdiendo masa y es, por tanto, más general que otras expresiones más habituales en las que la masa es fija:

$$F = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = mx'' = m\ddot{x} = ma$$

1.2. TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Una **ecuación diferencial** es un tipo de ecuación matemática en la que intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales. En las primeras hay derivadas respecto a una sola variable y en las segundas se deriva respecto a dos o más variables. Veámoslo a continuación.

1.3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Supongamos que tenemos una función f que es función de x y de ninguna otra variable, es decir, $f(x)$. Entonces, si en una ecuación diferencial aparecen términos de este tipo:

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \frac{d^4f}{dx^4} \ldots$$

diremos que es una **ecuación diferencial ordinaria**.

De este modo, una ecuación diferencial ordinaria muy sencilla (sin condiciones iniciales ni de contorno) puede, por ejemplo, ser así:

$$\frac{df}{dx} = x^2 + 3$$

Naturalmente podemos dar los nombres que queramos a nuestras funciones y variables. De este modo podemos usar una función *y* que sea función de *x* y que así nos quede una notación más relajada a la vista:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \ldots$$

Incluso podemos escribir expresiones más compactas si usamos unos apóstrofos («primas») como superíndice:

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y''', \frac{d^4y}{dx^4} = y^{iv} \ldots$$

Con esta notación la ecuación diferencial del ejemplo anterior quedaría así:

$$y' = x^2 + 3$$

En estas Unidades didácticas veremos solamente este tipo de ecuaciones diferenciales, que es el más sencillo.

La realidad del mundo físico suele ser complicada. Los sistemas modelizados por ecuaciones diferenciales ordinarias suelen ser sencillos, aunque no por ello menos importantes.

Tenemos, por ejemplo,

$$LI'' + RI + \frac{1}{C} I = E_0 \omega \cos \omega t,$$

que es la ecuación que describe un circuito con una resistencia, un condensador y un solenoide (o circuito RCL), por el que circula una corriente *I* y que es alimentado por una corriente alterna de frecuencia ω.

O tenemos la ecuación de Langevin en la que una masa está sometida a una fricción μ y a un ruido guassiano η que sirve para modelizar el movimiento browniano o el ruido térmico en un resistencia eléctrica:

$$m\ddot{x}(t) = -\mu\dot{x}(t) + \eta(t)$$

Las posibilidades de las ecuaciones ordinarias para describir la realidad son limitadas al ser funciones de una sola variable. Pero su capacidad se puede expandir si consideramos sistemas de ecuaciones. Un ejemplo lo podemos tener con las ecuaciones de Lotka-Volterra, que nos describen dos especies animales en las que una es depredador y la otra, presa:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\,y(\gamma - \delta x) \end{cases}$$

o con las ecuaciones de Lorenz, que nos describen el tiempo meteorológico:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

y que son el típico ejemplo de caos determinista. El caos determinista nos dice que hay sistemas que son predeciblemente impredecibles y que, por tanto, no sabremos qué tiempo hará con semanas de anticipación. El caos determinista nos impone límites al conocimiento que podamos tener sobre la realidad que no dependen de nuestras capacidades por muy inteligentes que seamos.

En todo caso, nuestra inteligencia se basa, en última instancia, en las conexiones neuronales de nuestro cerebro. Incluso esto se puede modelizar parcialmente con ecuaciones diferenciales, como con el modelo de Hodgkin-Huxley, que describe cómo se inician y se propagan los potenciales de acción en las neuronas:

$$\begin{cases} g_n(V_m) = \bar{g}_n\, \phi^{\alpha}\, \chi^{\beta} \\[2ex] \dot{\varphi}(V_m) = \dfrac{1}{T_{\varphi}}\,(\varphi_{\infty} - \varphi) \\[2ex] \dot{\chi}(V_m) = \dfrac{1}{T_{\chi}}\,(\chi_{\infty} - \chi) \end{cases}$$

Naturalmente los modelos y ecuaciones aquí expuestos están, de momento, a título ilustrativo.

1.4. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

En una ecuación diferencial en derivadas parciales aparecerán términos del tipo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \ldots$$

en donde ahora tenemos una función que es función de dos o más variables $f\,(x, y\ldots)$.

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones puede ser la ecuación del calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

en la que de nuevo no hemos puesto condiciones iniciales ni, en este caso, las necesarias condiciones de contorno o de frontera. Obsérvese que para la ecuación diferencial en derivadas parciales hemos cambiado la *d* de derivada por el símbolo de derivada parcial (∂).

En estas Unidades didácticas nos circunscribiremos a las ecuaciones diferenciales ordinarias, como ya hemos mencionado, pero merece la pena señalar algunos ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales, ya que permiten modelos más complejos de la realidad. Desgraciadamente la capacidad de resolver este tipo de ecuaciones es mucho más limitada. En la mayoría de las situaciones no dispondremos de soluciones analíticas y hay que conformarse con soluciones numéricas.

Tenemos ejemplos de este tipo de ecuaciones en economía, como la ecuación de Black-Scholes, que trata de describir la evolución del precio V de una acción en bolsa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Una de las ecuaciones en derivadas parciales más bonitas es la ecuación de Schrödinger, que en mecánica cuántica describe la evolución en el tiempo de la función de onda de un sistema con hamiltoniano H para unas condiciones de contorno dadas:

$$H\Psi(\overline{x}, t) = i\,\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\overline{x}, t)$$

A veces la escritura utilizada es muy compacta, como en la ecuación de Poisson de la electrostática:

$$\Delta\, \phi(\overline{x}) = f(\overline{x})$$

que expandida es:

$$\Delta\,\phi(\overline{x}) = \nabla^2\,\phi(\overline{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, z) = f(x, y, z) = f(\overline{x})$$

Uno de los casos más compactos es el de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general, que en unidades geometrizadas se escribe:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\, T_{\mu\nu}$$

Nos dice que la geometría del espacio-tiempo (a la izquierda de la igualdad) es proporcional al tensor de energía-momento. O lo que es lo mismo, y leída de derecha a izquierda, una masa gravitatoria curva el espacio a su alrededor y altera el transcurso del tiempo. Este caso es uno de los más bonitos de la física y permite, por ejemplo, elaborar modelos cosmológicos de todo el universo. Aunque se conocen muy pocas soluciones analíticas de las ecuaciones de Einstein.

1.5. ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Se llama **orden de una ecuación diferencial** al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. Así, por ejemplo,

$$y' = 2ty^2, \qquad y' = -y + e^{2t}, \qquad y' = \cos x, \qquad mv' = mg - kv^2$$

son ecuaciones de primer orden y

$$my'' + cy' + ky = 0, \qquad y'' + \omega^2\, y = \cos \omega t, \qquad LI'' + RI' + I = E_0\, \omega \text{ cost } \omega t$$

son ecuaciones de segundo orden.

Como se puede ver en estos ejemplos, a veces las variables hacen referencia a algún observable físico, como pueda ser la velocidad de un cuerpo con masa que cae dentro de un fluido (tercer ejemplo), una corriente eléctrica en un circuito (último ejemplo) o el movimiento de un cuerpo con masa. Además, en algunos casos, las derivadas pueden ser respecto al tiempo y por esta razón aparece la letra *t*. También aparecen constantes y parámetros, así como funciones más o menos complicadas, como puedan ser las funciones trigonométricas u otras.

Si tenemos en cuenta la notación de puntos para designar las derivadas temporales, una ecuación como

$$mx'' = -kx - bx'$$

quedaría entonces así:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

o incluso así:

$$m\dot{v} = -kx - bv,$$

que naturalmente es equivalente a

$$mv' = -kx - bv$$

En estas Unidades didácticas no usaremos esa notación de puntos, pero quizás el lector pueda leer alguna referencia en donde sí se utilicen, así que no se asuste.

Es conveniente que el lector se habitúe a la notación y estética. Gran parte de las dificultades a la hora de comprender las matemáticas se deben a la simbología que se usa en las mismas. Las matemáticas usan un lenguaje con sus propios códigos, y familiarizarse con ellos es fundamental a la hora de avanzar en la materia.

2. MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS

Una vez sabemos expresar las variaciones de unas entidades físicas respecto a otras, como pueda ser la velocidad respecto al tiempo o la temperatura respecto a una distancia, por ejemplo, podemos intentar modelizar un sistema físico o ingenieril usando una ecuación diferencial. Veámoslo con unos ejemplos sencillos.

2.1. MODELIZACIÓN DE UN PROBLEMA: LA CAÍDA DEL PARACAIDISTA

Supongamos que queremos modelizar la caída de un grave en un medio, como pueda ser un paracaidista que se lanza en caída libre a través del aire. Este señor se verá atraído hacia el suelo con un fuerza que será igual al producto de su masa por la aceleración de la gravedad (g), es decir, mg. Obviamente solo consideramos el eje vertical de caída y despreciamos el movimiento horizontal. Se opondrá a esa caída una fuerza que podemos modelizar como que es proporcional al cuadrado de la velocidad que lleva (kv^2).

Fuente: proskydiving.com.

Esta es la parte de interpretación del modelo y dependerá de cómo de bien conozcamos la naturaleza del problema o cómo de sencillo queramos describir el sistema, pues cuanto más complicada hagamos la ecuación diferencial, más difícil será de resolver. Nuestro modelo será más o menos complicado y más o menos preciso, pero estará dentro de la gama de aplicabilidad y, asumiendo cierto error, será igualmente válido. No hay una «ley universal de caída de graves en un medio» que sea «única y verdadera», sino modelos de esa «realidad». En este caso, asumir que la fuerza de frenado es proporcional al cuadrado de la velocidad es lo más habitual y sencillo, aunque si quisiéramos algo más preciso, habría que asumir un polinomio de grado n con n constantes (lo que nos daría una ecuación diferencial mucho más difícil de resolver). En el caso aquí elegido, tenemos un sola constante k que depende de la forma y tamaño del cuerpo (o paracaídas), y tendrá un valor muy alto si el paracaídas se abre y muy bajo si no se abre; o lo mismo si el señor en caída libre extiende sus miembros o cae de cabeza. Además, como es una fuerza de frenado y hemos asumido como positivo el sentido de caída, entonces la fuerza de frenado tendrá signo negativo.

Finalmente, por la ley de Newton sabemos que la suma de fuerzas debe ser igual a la masa por la aceleración (o a la masa por la derivada de la velocidad), así que finalmente nuestra ecuación diferencial será la siguiente:

$$mg - kv^2 = mv', \qquad v(0) = 0$$

Como podemos apreciar, a esta ecuación le hemos añadido la condición inicial de que en el momento $t = 0$ (cuando el individuo se tira del avión) su velocidad es nula respecto a la vertical. Naturalmente nos quedaría resolver dicha ecuación, pero para ello necesitaríamos usar cierta artillería matemática que veremos más adelante. De momento nos

Sumario

conformaremos con un ejemplo aún más sencillo y ameno que veremos a continuación, pero podemos adelantar que un cuerpo en caída libre dentro de la atmósfera aumenta su velocidad con el tiempo y la distancia vertical recorrida hasta que llega un momento en el que adquiere una velocidad «terminal» que no superará por mucho que siga cayendo. En el caso de un cuerpo humano con los miembros extendidos, dicha velocidad terminal es de unos 55 m/s (200 km/h), lo que prácticamente garantiza la muerte del individuo cuando este alcanza el suelo si no se abre el paracaídas.

Veamos cómo podemos calcular esta velocidad terminal. Podemos dividir todos los términos por la masa y dar la vuelta a la ecuación, lo que nos deja:

$$v' = g - \frac{k}{m} v^2$$

La velocidad terminal debe ser constante por definición, pues, cuando el paracaidista la alcanza, no aumenta su velocidad, así que su velocidad no varía. Por tanto, la derivada de la velocidad respecto al tiempo tiene que ser nula en este caso y nos quedará un problema meramente algebraico en lugar de diferencial:

$$0 = g - \frac{k}{m} v_t^2$$

Solo necesitamos despejar la velocidad terminal para llegar a la siguiente expresión:

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

que para un hombre con un peso de 75 kilogramos, una aceleración de la gravedad, $g =$ $= 9{,}8$ m/s^2, y una $k = 0{,}243$ kg/m, efectivamente, nos da una velocidad de 55 m/s. Con este procedimiento no hemos resuelto realmente la ecuación diferencial, para ello necesitaríamos obtener una función que nos dé para cada momento la posición del cuerpo en caída libre, pero hemos conseguido extraer una información interesante.

Este ejemplo demuestra, además, que el famoso experimento de las bolas que se dejaban caer desde la torre de Pisa, y que se supone que propuso Galileo, no fue en realidad realizado, pues si se hubiese efectuado habría salido mal y la bola más pesada hubiera tocado antes el suelo. Los cuerpos solo caen con la misma velocidad independientemente de su masa si lo hacen en el vacío, como los astronautas del Apolo XV ya demostraron en su día en la luna dejando caer una pluma y un martillo.

2.2. CASO PRÁCTICO: LA APOCALIPSIS ZOMBI

Fuente: Lindsey Turner (www.flickr.com/people/theogeo/).

Jennifer Ouellette propone en uno de sus libros un caso ameno de aplicación de una ecuación diferencial. Se plantea si los zombis podrían vivir en armonía con los humanos y llega a la conclusión de que no podría ser. Podemos incluso partir de una base «científica» y asumir que la causa de la «zombificación» es un virus infeccioso que al entrar en el organismo a través de una mordedura altera el sistema nervioso de tal modo que el individuo infectado se comporta como un zombi. Al fin y al cabo, tenemos el ejemplo de la rabia, y hay casos de hongos que «zombifican» hormigas o gusanos que hacen lo mismo con saltamontes.

La diferencia entre un zombi y un humano afectado por una enfermedad infecciosa convencional, que puede morir o curarse, es que el zombi «vuelve a la vida» y no desaparece de escena, pudiendo infectar a más humanos. Según la regla de oro tradicional de las películas del género, como *La noche de los muertos vivientes*, solo se puede acabar con un zombi cortándole la cabeza o destruyendo su cerebro.

La aplicación de modelos epidemiológicos a una invasión zombi quizás parezca idiota, pero no es muy diferente de los modelos que pretenden estudiar la propagación de la gripe A, la gripe aviar o el sida.

La situación de los zombis no es muy distinta de los infectados por VIH, que pueden seguir transmitiendo la enfermedad muchos años después de haber sido infectados. Es también el caso de las infecciones de parásitos que no matan a sus víctimas (casi todos), como la leishmaniasis o la dracunculiasis. Una enfermedad infecciosa que mate rápidamente puede ser menos efectiva a la hora de propagarse que otra que mate más lentamente.

Los modelos, obviamente, suelen ser más complicados que el que vamos a ver aquí. El contagio puede depender de la frecuencia de contactos entre individuos y de la complejidad de la red social de la que forman parte. Un buen modelo tiene que tener en cuenta todo eso y mucho más.

En un modelo sofisticado realizado por Robert Smith (Universidad de Ottawa) para describir la propagación de enfermedades, y adaptado por sus estudiantes a petición de él para el caso de los zombis, se estimaba que la población humana rápidamente se hacía insostenible y que en solo cuatro días todos los humanos terminaban convertidos en zombis. La estrategia de lucha que su modelo predecía como la más efectiva era atacar duro, y, frecuentemente, de otro modo, el escenario con el que nos encontramos es como el descrito en la película *Zombieland* o en la serie *The walking dead*, donde casi toda la población de Estados Unidos se ha «zombificado». Aquí vamos a seguir un modelo mucho más sencillo que nos ayude a resolver el problema de cómo sobrevivir a un apocalipsis zombi.

Vamos a considerar un modelo muy sencillo sujeto a ciertas aproximaciones. Si la infección por zombis es lo suficientemente rápida, el ritmo de nacimientos y muertes de personas sanas es insignificante y puede ser despreciado en nuestro modelo. Además, podemos asumir que los zombis son relativamente tontos y simplemente se mueven erráticamente hasta que encuentran a un humano sano, tal y como se describe en muchas películas.

En nuestro modelo, la cantidad de zombis nuevos que aparezcan dependerá de la población que haya de zombis en un momento dado: a más cantidad, es más probable que un humano sano sea mordido por uno de ellos y se convierta en zombi. Por tanto, es razonable pensar que la variación de la población de zombis será proporcional a la población de zombis que haya en un momento dado:

$$\frac{dz}{dt} = k\,z$$

en donde la constante k dependerá de la rapidez de multiplicación de los zombis.

Ya tenemos nuestra ecuación diferencial, que en este caso es muy fácil de resolver. Aunque la parte a la izquierda de la igualdad no es una fracción, puede manipularse algebraicamente y tratar las diferenciales de manera independiente. Se pueden pasar, por ejemplo, a un lado y a otro de la igualdad. De este modo, podemos pasar dt a la derecha (que pasa multiplicando) y pasar z a la izquierda (que pasa dividiendo). Por tanto nos queda:

$$\frac{dz}{z} = k\,dt$$

Obsérvese que ahora estamos en una situación ideal en la que todo lo relativo a z está a un lado de la igualdad y todo lo relativo a t, al otro lado. La hemos resuelto por «separación de variables». Esta situación es muy difícil de conseguir en una ecuación diferencial arbitraria.

Ahora el problema diferencial puede resolverse simplemente integrando a un lado y a otro de la igualdad:

$$\int \frac{dz}{z} = k \int dt$$

Estas dos integrales son triviales, una en z y otra en t, así que nos queda la expresión

$$\ln z = kt + cte$$

a la que podemos tomar exponenciales para así despejar la z:

$$z = e^{kt+cte} = C\, e^{kt}$$

Como hemos usado integrales indefinidas nos ha aparecido una constante C que dependerá en última instancia de las condiciones iniciales. Además, tampoco conocemos, en principio, el valor de k, que habrá que extraer de los datos experimentales. Supongamos que en el día 0 tenemos 20 zombis, por lo que la condición inicial es $z\,(0) = 20$ y, por tanto, $C = 20$. Si además en el día 10 hay 200 zombis, entonces para $t = 10$ tendremos $z = 200$, así que nos quedará:

$$200 = 20\, e^{10k}$$

y para partir de este punto podemos averiguar el valor de k con la ayuda de una calculadora, que es 0,23025. Finalmente, la solución buscada es:

$$z = 20\, e^{0{,}23025t}$$

Al cabo de un mes, esta expresión nos da 19.995 zombis y al cabo de dos meses, 19.989.791 zombis. Al poco tiempo, en el tercer mes, toda la población mundial ha sucumbido. Es lo que tiene el crecimiento exponencial, que crece muy rápidamente. Si llega el apocalipsis zombi, la única manera de sobrevivir es huir.

2.3. OTROS CASOS SIMILARES

Aunque el ejemplo de los zombis es un poco ridículo, la matemática empleada es prácticamente la misma que en otros caos, como para solucionar el problema de la desintegración de un elemento radiactivo, por ejemplo, el isótopo 14 del carbono (C14). Este isótopo es producido en la atmósfera terrestre por los rayos cósmicos a un ritmo fijo y los seres vivos tienen en sus cuerpos, por tanto, una proporción fija de él frente al isótopo normal C12 mientras sigan vivos. Una vez mueren, el C14 se va desintegrando y su cantidad disminuye exponencialmente, mientras que el C12 no. En 5.730 años, la cantidad de C14 se reduce a la mitad, que es lo que se conoce como periodo de semidesintegración. Se puede usar este dato para obtener la constate k de decaimiento.

En este caso, la ecuación diferencial difiere en un signo menos respecto a la de los zombis, pues el C14 disminuye en el tiempo, pero es básicamente la misma y su resolución también:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

La solución de esta ecuación, incorporando la constate de decaimiento si contamos el tiempo en años, es finalmente:

$$N(t) = N(0)\, e^{-(0{,}0001216)t}$$

Solo será necesario saber la cantidad inicial y el tiempo transcurrido para saber lo que queda. O sabiendo la cantidad inicial y final (o lo que es lo mismo, las proporciones entre los dos isótopos de carbono), despejar el tiempo y saber así los años transcurridos.

El sistema de radiocarbono es muy útil para datar huesos y restos de materiales orgánicos. Así, por ejemplo, el hueso de Ishango de la foto fue datado en 20.000 años. Este hueso tiene marcas rayadas por humanos que representan operaciones aritméticas que incluyen rudimentarias operaciones de multiplicación y división. Fue hallado cerca de la zona donde nace el río Nilo, entre la frontera de Uganda y la República Democrática del Congo.

Hueso de Ishango

Fuente: Wikimedia Commons.

Puede servir para datar restos orgánicos de todo tipo, sean animales o vegetales, siempre que no tengan mucha antigüedad, pues llegado un momento casi todo el C14 ha desaparecido. Entonces habrá que recurrir a otros isótopos.

EJEMPLO 2

Supongamos que unos arqueólogos encuentran unos huesos humanos en un yacimiento y tras el análisis de radiocarbono llegan a la conclusión de que esos huesos contienen solo una sexta parte del C14 presente en los huesos actuales. ¿Qué edad tienen los huesos?

Solución

Si tomamos $t = 0$ como el momento de la muerte del individuo, para el tiempo transcurrido desde entonces, tendremos:

$$N(t_1) = \frac{N(0)}{6}$$

que podemos introducir en la ecuación previa:

$$\frac{N(0)}{6} = N(0)\, e^{-(0{,}0001216)t_1}$$

de donde simplificando y tomando logaritmos obtenemos:

$$t_1 = \frac{\ln 6}{0{,}0001216} = 14.734{,}9$$

Es decir, que los restos humanos encontrados tienen unos 14.735 años de edad.

EJEMPLO 3

En un proceso industrial de salazón usado para curar jamones se dispone de un contenedor con 800 litros de agua en el que en un principio hay disueltos 20 kilogramos de sal. A él llega un flujo constante y uniforme de 20 litros de salmuera por minuto en el que hay disuelto 1 kilogramo de sal

.../...

.../...

por litro. Un sistema de agitación mantiene siempre la mezcla del contenedor uniforme y el líquido sale del contenedor al mismo ritmo que entra. El sistema es más o menos como se indica en la figura. Encontrar la cantidad de sal disuelta presente en cada momento t en el contenedor.

Solución

Vamos a simbolizar la cantidad de sal disuelta como $y(t)$. La variación del contenido de sal será igual a la que entra menos la que sale. Entran 20 litros por minuto y hay 1 kilo de sal por litro, por lo que entran 20 kilos de sal. Así que:

$$y' = \text{In} - \text{Out} = 20 - \text{Out}$$

Como el contenedor tiene 800 litros de capacidad y sale el mismo flujo que entra, entonces la sal que sale contenida por litro es $y/800$ y como salen 20 litros por minuto la cantidad de sal que sale por minuto es:

$$\text{Out} = \frac{20}{800}\, y \;=\; 0{,}025y$$

Por tanto:

$$y' = 20 - 0{,}025y,$$

que se puede reescribir y separar sus variables como en los casos anteriores:

$$y' = -\,0{,}025\,(y - 800)\,y \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y - 800} = -\,0{,}025dt$$

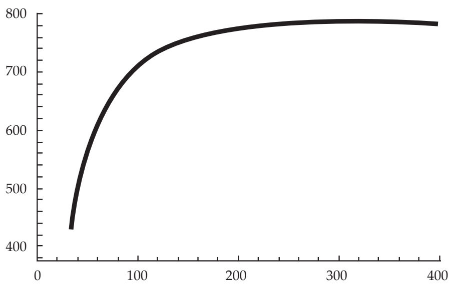
Integrando y tomando exponenciales nos da

$$y - 800 = C\,e^{-0{,}025t}$$

y como justo al comienzo sabemos que $y(0) = 20$ (es la condición inicial), entonces $C = -\,780$ y nos queda finalmente:

$$y = 800 - 780\,e^{-0{,}025t}$$

La cantidad de sal en el tanque empieza en 20 kilogramos y crece en el tiempo hasta que en un momento lo suficientemente alejado llega prácticamente a 800 kilogramos.



EJEMPLO 4

Vamos ahora a resolver un problema térmico. Supongamos que usted en su casa desconecta la calefacción a las 10 de la noche y se va a la cama 2 horas más tarde. Antes de la desconexión, el termostato ha mantenido la temperatura interior de su vivienda a unos constantes 20 grados centígrados, pero cuando se va a la cama comprueba que la temperatura ha caído hasta los 16 grados. Si la temperatura exterior es 6 grados, ¿qué temperatura hará en el interior de su casa a las 8 de la mañana cuando se levante al día siguiente?

Solución

Para poder solucionar este problema podemos valernos de la ley de enfriamiento de Newton, que dice que la tasa temporal de cambio en la temperatura de un cuerpo a temperatura T que está en un medio a temperatura T_A, siendo $T > T_A$, es proporcional a esa diferencia de temperatura. Es decir, al principio, cuando la temperatura del cuerpo es mucho más alta que la del ambiente, el objeto se enfriará mucho más rápidamente que cuando su temperatura se acerca a la del medio en el que se encuentra.

A una casa con calefacción le pasará algo similar. Una vez desconectada, cuanto más caliente esté, más rápidamente se enfriará, hasta que llegue a una temperatura igual a la del exterior (termaliza, en el lenguaje de la termodinámica). Podemos modelar entonces la ley anterior y aplicarla a nuestro caso del siguiente modo:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-6)$$

Es una ecuación solucionable por separación de variables:

$$\frac{dT}{T-6} = kdt$$

que se puede integrar fácilmente:

$$\ln|T - 6| = kt + cte \quad \rightarrow \quad T(t) = 6 + Ce^{kt}$$

en donde hemos considerado que $C = e^{cte}$. Podemos considerar el origen de tiempos ($t = 0$) cuando desconectamos la calefacción, así que la condición inicial será $T(0) = 20$, que usada en la solución que acabamos de obtener nos da:

$$T(0) = 6 + C = 20 \quad \rightarrow \quad C = 14 \quad \rightarrow \quad T(t) = 6 + 14e^{kt}$$

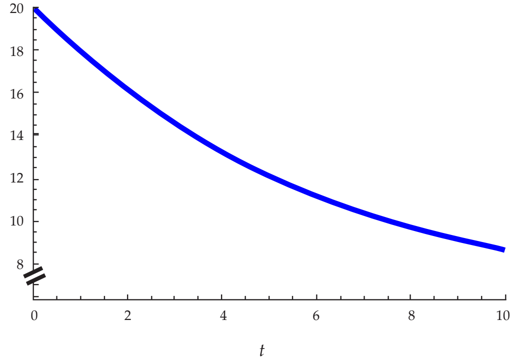
.../...

.../...

Además, podemos tomar como unidad de tiempos la hora y usar el dato que nos dice que 2 unidades más tarde, después de desconectar la calefacción, tenemos una temperatura de 16 grados para así obtener el valor de la constante k.

$$T(2) = 6 + 14e^{2k} = 16 \quad \rightarrow \quad e^{2k} = \frac{16-6}{14} = 0{,}7143 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\ln 0{,}7143 = -\,0{,}1682$$

Una vez tenemos C y k ya podemos escribir la solución y obtener la temperatura a lo largo de toda la noche.



La solución queda finalmente de este modo:

$$T(t) = 6 + 14e^{-0{,}1682t}$$

que corresponde a la gráfica de al lado. A las 8 de la mañana esa expresión nos indica que la temperatura será:

$$T(10) = 6 + 14e^{-1{,}682} = 8{,}6\ °\mathrm{C}$$

Quizás sea una temperatura un poco baja para ducharse.

3. COMPROBACIÓN DE RESULTADOS

Siempre que alcancemos la solución general de una ecuación diferencial, sea del tipo que sea y sea del orden que sea, podremos comprobar si es correcta o no. Basta tomar esa solución e introducirla en la ecuación diferencial original derivándola las veces que sea necesario y ver si la igualdad es consistente. Veámoslo con un ejemplo.

Sea la ecuación:

$$y'' + y = 0$$

que es una ecuación de segundo orden que ni siquiera aprenderemos a resolver en esta Unidad didáctica (ni nos importa en este momento), pero para la cual nos proporcionan la siguiente supuesta solución general:

$$y = A \cos t + B \operatorname{sen} t$$

Como aparece la derivada dos veces de y, tenemos que derivar dos veces la supuesta solución:

$$y' = -A \operatorname{sen} t + B \cos t$$

$$y'' = -A \cos t - B \operatorname{sen} t$$

y sustituirla en la ecuación original en la que además aparece y, que también podemos sustituir por la solución proporcionada:

$$(-A \cos t - B \operatorname{sen} t) + (A \cos t + B \operatorname{sen} t) = 0$$

que nos da:

$$A \cos t - A \cos t + B \operatorname{sen} t - B \operatorname{sen} t = 0$$

es decir, 0 = 0, luego es consistente y esa solución es correcta.

Este método nos sirve para saber si una expresión puede ser una solución particular de una ecuación diferencial. Por ejemplo, para la ecuación del caso anterior nos podrían haber pedido que comprobáramos si la expresión

$$y = \cos t$$

es una solución particular.

Podemos sustituir $y'' = -\cos t$ e $y = \cos t$ en la ecuación original:

$$-\cos t + \cos t = 0$$

y llegar a la conclusión de que la igualdad se cumple y que, por tanto, esa expresión es una solución particular.

En el caso de que hubiera una condición inicial y tuviéramos que comprobar la solución obtenida, tendríamos que comprobar este mismo punto y además ver que cumple la condición inicial.

Se puede comprobar, por ejemplo, que $y = \operatorname{sen} t$; es solución para el problema de valores iniciales siguiente:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 5

Comprobar que la expresión

$$y = Ce^{-t} + t^2 - 2t$$

es solución de la ecuación diferencial

$$y' + y = t^2 - 2$$

Solución

La derivada respecto a t de esa solución es

$$y' = -Ce^{-t} + 2t - 2,$$

que junto a la expresión para y podemos sustituirlas en la ecuación diferencial:

$$(-Ce^{-t} + 2t - 2) + (Ce^{-t} + t^2 - 2t) = t^2 - 2$$

y que simplificando nos queda:

$$2t - 2 + t^2 - 2t = t^2 - 2 \qquad \rightarrow \qquad t^2 - 2 = t^2 - 2$$

que es coherente y, por tanto, la solución dada es correcta.

4. MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN

En este epígrafe vamos a ver los métodos más frecuentes y sencillos que se disponen para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es decir, aquellas que son de la forma

$$F(t, y, y') = 0$$

o incluso de la forma aún más sencilla

$$y' = f(t, y)$$

Con esta notación estamos asumiendo que la y será la variable dependiente y t es la variable independiente, aunque se podría escoger otro tipo de notaciones con y y x o incluso x y t.

La resolución de este tipo de ecuaciones se puede alcanzar en contadas ocasiones, incluso para estas ecuaciones de primer orden. Vamos a ver cómo conseguir la solución general de unos pocos tipos de ecuaciones resolubles, como puedan ser las ecuaciones separables, las lineales, las exactas y otras que se puedan transformar en ellas gracias a algún cambio de variable.

Cuando no tenemos una condición inicial, la solución general será en realidad una familia de soluciones que podemos intentar representar gráficamente (incluso solo aproximadamente) como curvas en una espacio de t e y.

Si el problema es un problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

además de tener que obtener la solución particular para esa condición inicial, se puede estudiar si existe solución y si esta es única (teoremas de existencia y unicidad). Además, se puede ver si la solución es estable o asintóticamente estable; es decir, si la condición inicial y_0 varía un poco, ¿varía igualmente poco la solución $y(t)$ al cabo de un tiempo o se dispara hacia cualquier otro valor muy distinto?

En estos epígrafes a veces aparecerán ejemplos abstractos que no se corresponden con modelos de la realidad, pero que tienen valor didáctico y son fáciles de resolver.

4.1. ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Vamos a definir nuestro primer tipo sencillo de ecuación diferencial.

Definición

Una **ecuación diferencial** se dice **separable** si se puede escribir como:

$$y' = \frac{f(t)}{g(y)}$$

en donde f y g son unas funciones cualesquiera.

Si una ecuación se puede escribir de esa manera, tendremos una ventaja increíble a la hora de intentar solucionarla, pues podremos pasar todo lo que va con la variable y a un lado de la igualdad y todo lo que está con t al otro lado (incluyendo sus diferenciales respectivas) e integrar. Si recordamos un poco, es justo lo que hicimos en el caso de los zombis o el radiocarbono. Naturalmente, habrá otro problema posterior, que será la resolución de las integrales, que no tienen que ser necesariamente tan triviales como en esos casos.

Además, quizás disponemos de una condición inicial que nos permita calcular el valor de la constante fruto de las integraciones. Para definir completamente la solución de una ecuación diferencial de primer orden, bastará con una condición inicial: para ecuaciones diferenciales de orden dos, necesitaremos dos condiciones iniciales, tanto en y como en su derivada primera, y así sucesivamente.

Podemos entonces obtener la solución general de la ecuación separable, que vendrá de la siguiente integración:

$$\int g(y)\,dy = \int f(t)\,dt + C$$

y que será:

$$G(y) = F(t) + C$$

siendo esas funciones las correspondientes primitivas.

EJEMPLO 6

Resolver la siguiente ecuación diferencial para la condición inicial dada:

$$y' = ty^2, \qquad y(1) = 1$$

Solución

Podemos identificar las funciones f y g en este caso como

$$g(y) = y^{-2}, \qquad f(t) = t$$

así que la solución general vendrá dada por:

$$\int y^{-2}\,dy = \int t\,dt + C \quad \rightarrow \quad -y^{-1} = \frac{1}{2}\,t^2 + C$$

Para esta condición inicial tendremos que

$$-1^{-1} = \frac{1}{2}\,1^2 + C \quad \rightarrow \quad C = \frac{-3}{2}$$

así que la solución particular para esa condición inicial es

$$-y^{-1} = \frac{1}{2}\,t^2 - \frac{3}{2}$$

que se puede reescribir como

$$y = \frac{-2}{t^2 - 3}$$

EJEMPLO 7

Interpretar geométricamente la familia de soluciones de la ecuación diferencial siguiente:

$$9y\,y' + 4x = 0$$

en la que usamos x en lugar de t para facilitar la visualización.

.../...

.../...

Solución

Separamos las variables e integramos:

$$9y\,dy = -4x\,dx \qquad \rightarrow \qquad \int 9y\,dy = \int -4x\,dx \qquad \rightarrow \qquad \frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + cte$$

Podemos reescribir la última expresión como

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = C,$$

que precisamente es la ecuación de una elipse. Así que, geométricamente, la solución general de la ecuación diferencial será una familia de elipses.

El que una ecuación diferencial de primer orden sea separable no significa que necesariamente sepamos resolverla. Las integrales pueden ser muy difíciles de hallar o incluso pueden no tener primitiva, como en el ejemplo que viene a continuación.

EJEMPLO 8

Resolver la siguiente ecuación diferencial con su correspondiente condición inicial:

$$y' = e^{y-t^2}, \qquad y(0) = 0$$

Solución

Tal cual está escrita esta ecuación, vemos que la función exponencial contiene tanto a la y como a la t, pero es fácil reescribirla para separar las variables:

$$y' = \frac{e^y}{e^{t^2}}$$

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^{-t^2}\,dt \qquad \rightarrow \qquad e^{-y} = \int e^{-t^2}\,dt + C$$

.../...

.../...

En este caso nos encontramos con un problema grave, y es que la última integral no tiene primitiva, pero podemos escribir una solución formal general tomando logaritmos naturales a ambos lados:

$$y = -\ln\left[C - \int e^{-t^2}\, dt\right]$$

Como la condición inicial dada es $y(0) = 0$, podemos imponer límites a esa integral:

$$0 = -\ln\left[C - \int_0^t e^{-s^2}\, ds\right]$$

Lo que nos da:

$$0 = -\ln(C - 0) \qquad \rightarrow \qquad C = -1$$

Al final la solución particular para esa condición inicial se puede escribir formalmente como:

$$y = -\ln\left[-1 - \int e^{-t^2}\, dt\right]$$

4.2. ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Definición

Diremos que una **ecuación diferencial** es **homogénea** si es de la forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

La gran ventaja de una ecuación diferencial homogénea de este tipo es que se convierte en separable bajo el cambio de variable

$$z = \frac{y}{t},$$

ya que

$$y = tz \quad \rightarrow \quad y' = tz' + z = f(z) \quad \rightarrow \quad \frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{t} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln |t| + C,$$

donde en el primer paso simplemente hemos derivado, en el segundo hemos reordenado los términos y en el tercero hemos pasado todo lo que va con z a la izquierda de la igualdad, lo que va con t a la derecha y hemos integrado.

Esa última expresión nos servirá de receta para resolver cualquier ecuación diferencial de este tipo sin más que introducir la función $f(z)$ y resolviendo la integral (si podemos). Al final habrá que deshacer el cambio de variable y sustituir z por y/t.

Las ecuaciones homogéneas típicas son aquellas en las que $f(t, y)$ es un cociente entre polinomios homogéneos del mismo grado, y de ahí el nombre.

EJEMPLO 9

Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$2tyy' = y^2 - t^2$$

Solución

A primera vista no parece una ecuación homogénea, pero si dividimos ambos miembros de la igualdad por $2ty$ obtenemos:

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty} = \frac{y^2}{2ty} - \frac{t^2}{2ty} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{t} - \frac{t}{y}\right),$$

que ya está en la forma deseada, así que en este caso la función f será:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

Por tanto, la solución es

$$\int \frac{dz}{\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) - z} = \ln |t| + C^*,$$

.../...

.../...

que se puede simplificar:

$$\int \frac{-2z}{z^2 + 1}\, dz = \ln |t| + C^*$$

e integrar fácilmente:

$$-\ln(1 + z^2) = \ln |t| + C^*$$

Podemos operar y simplificar un poco el resultado:

$$\ln(1 + z^2) = -\ln |t| - C^* = \ln \frac{1}{|t|} - C^* \quad \rightarrow \quad 1 + z^2 = \frac{C}{t}$$

y reemplazar z por las variables originales:

$$t^2 + y^2 = Ct$$

Son familias de circunferencias cuyos centros se sitúan a lo largo del eje t.

4.3. OTRO TIPO DE ECUACIÓN RESOLUBLE POR CAMBIO DE VARIABLE

Si tenemos una ecuación del tipo

$$y' = f(at + cy)$$

en la que tanto a como c son constantes, puede resolverse usando el cambio de variable

$$z = at + cy,$$

pues se tiene:

$$z' = a + cy' = a + cf(z) \quad \rightarrow \quad \int \frac{dz}{a + cf(z)} = t + C$$

EJEMPLO 10

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(2t - 4y)\, y' + t - 2y + 2 = 0$$

Solución

Por inspección se sugiere que el cambio de variable

$$z = t - 2y$$

podría funcionar. Si es así, y teniendo en cuenta la notación anterior, las constantes serían:

$$a = 1 \quad \text{y} \quad c = -2$$

El cambio de variable sugerido nos dará:

$$2zy' + z + 2 = 0$$

Así que reordenando un poco, tendremos:

$$y' = -\frac{z+2}{2z} = f(z)$$

que según la receta que acabamos de ver para este caso:

$$\int \frac{dz}{1 + 2\left(\dfrac{z+2}{2z}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{z}{z+1} = t + C$$

Resolviendo la integral obtenemos:

$$\frac{1}{2}\left(z - \ln(z+1)\right) = t + C$$

Y deshaciendo el cambio:

$$\frac{1}{2}\left[t - 2y - \ln(t - 2y + 1)\right] = t + C$$

Obsérvese que en este caso no podemos despejar la y en función de t, así que dejamos el resultado como una familia de ecuaciones implícitas.

4.4. EL PARACAIDISTA

Armados con nuestros nuevos conocimientos ya podemos resolver la ecuación diferencial para la caída de un grave en el aire, como en el caso del paracaidista visto en un epígrafe previo:

$$\begin{cases} v' = g - (k/m)\, v^2 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 11

Utilizaremos el caso del paracaidista.

Solución

Reordenando los términos y diferenciales podemos tomar integrales:

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m} v^2} = \int dt$$

que resolviéndolas nos da:

$$\sqrt{\frac{m}{kg}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) = t + C$$

Teniendo en cuenta la definición de velocidad terminal y la condición inicial de que la velocidad inicial es 0, nos da la siguiente expresión:

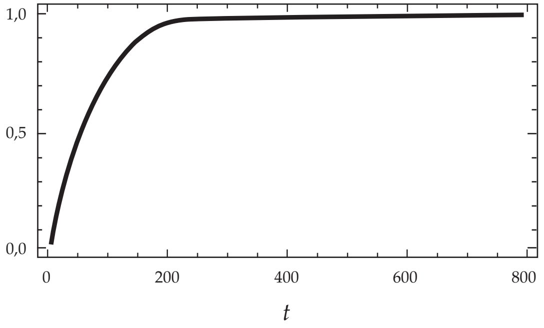
$$v_t \tanh^{-1}(v_t^{-1}\, v) = g^4\, t$$

En el gráfico siguiente (en unidades arbitrarias y obtenido a través de una aplicación informática), se puede apreciar cómo es el comportamiento de esta función y, por tanto, del objeto en caída libre.

Al principio aumenta muy rápidamente su velocidad hasta que casi alcanza la velocidad terminal y ya baja a casi esa velocidad hasta que toca el suelo. El comportamiento es asintótico y, en teoría, se necesitaría un tiempo infinito para alcanzar esa velocidad terminal, pero a efectos prácticos no importa ese aspecto, pues pronto se alcanza una velocidad muy cercana a la terminal.

.../...

.../...



EJEMPLO 12

Resolver la ecuación:

$$y' = \frac{t^3 y + y^4}{t^4}$$

Solución

Es un cociente entre polinomios que se puede reescribir como

$$y' = \frac{t^3 y + y^4}{t^4} = \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t} \right)^4,$$

luego es una ecuación homogénea que con el cambio de variable:

$$z = \frac{y}{t}$$

se nos transforma en una expresión que podemos resolver con la receta ya vista:

$$tz' + z = z + z^4 \quad \rightarrow \quad z^{-3} = C - 3 \ln |3| = \frac{t^3}{y^3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{t}{\sqrt[3]{C - 3 \ln |t|}}$$

5. ECUACIONES EXACTAS

Definición

Si tenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$M(t, y) + N(t, y)\, y' = 0$$

o bien de la forma:

$$M(t, y)\, dt + N(t, y)\, dy = 0$$

diremos que es **exacta** si existe una función $U(t, y)$ tal que

$$M = U_t \qquad \text{y} \qquad N = U_y$$

siendo cada una de ellas la derivada respecto a t e y respectivamente. En el lenguaje de la física decimos en este caso que es exacta si existe una función potencial U para el campo vectorial (M, N).

Procedimiento:

La solución general de este tipo de ecuación es

$$U(t, y) = C,$$

pues para cualquier función derivable $y(t)$ tenemos:

$$0 = \frac{d}{dt} U(t, y(t)) = U_t + U_y\, y' = M + Ny'$$

y para que exista U debe ocurrir que $M_y = N_t$. Una vez comprobada la existencia de U, se puede intentar hallar la solución. Primero se hallan M_y o N_t (que deben ser lo mismo) y luego se ve qué deben cumplir simultáneamente tanto U_t como U_y para encontrar la función U. Lo ideal es verlo a través de un ejemplo.

EJEMPLO 13

Resolver la ecuación diferencial siguiente:

$$y' = -\frac{6t^2 + 6ty^2}{6t^2 y + 3y^2}$$

Solución

Esa ecuación se puede reescribir del siguiente modo:

$$(6t^2 + 6ty^2) + (6t^2 y + 3y^2)\, y' = 0$$

es decir, que es de la forma:

$$M(t, y) + N(t, y)\, y' = 0$$

y, por tanto, según la notación que hemos elegido:

$$M = 6t^2 + 6ty^2, \qquad N = 6t^2 y + 3y^2$$

Para ver si es exacta, derivamos $M(t, y)$ respecto a y y $N(t, y)$ respecto a t; entonces podemos ver si coinciden:

$$M_y = 12ty = N_t$$

luego en este caso es exacta.

La función U debe cumplir:

$$U_t = 6t^2 + 6ty^2 \qquad \rightarrow \qquad U = 2t^3 + 3t^2 y^2 + p(y)$$

en donde $p(y)$ es una función de y. Además:

$$U_y = 6t^2 y + 3y^2 \qquad \rightarrow \qquad U = 3t^2 y^2 + y^3 + q(t)$$

en donde $q\,(t)$ es una función de t.

Lo que tiene una expresión le falta a la otra y viceversa, deduciéndose que

$$U = 3t^2 y^2 + 2t^3 + y^3$$

Así que finalmente la solución es:

$$3t^2 y^2 + 2t^3 + y^3 = C$$

5.1. FACTORES INTEGRANTES

Lo más habitual es que, aunque lo parezca a primera vista, la ecuación diferencial no sea exacta. Es mucha casualidad que ocurra que $M_y = N_t$. Sin embargo, se puede intentar encontrar una función $g(t, y)$, a la que llamaremos **factor integrante de la ecuación**, tal que la nueva ecuación

$$gM + gNy' = 0$$

sí sea exacta. Si es así, entonces se puede demostrar que debería cumplirse:

$$(gM)_y = \frac{d}{dy}(gM) = \frac{d}{dt}(gN) = (gN)_t$$

lo que nos llevaría hacia una ecuación diferencial en derivadas parciales aún más difícil de resolver que la ecuación original. Pero podemos tratar de encontrar un factor integrante que sea solo función de t, es decir, $g(t)$, y entonces llegamos para $C = 1$ a la expresión:

$$g'(t) = \frac{M_y - N_t}{N} g(t) \qquad \rightarrow \qquad g(t) = e^{\int [M_y - N_t]/N\, dt} = e^{\int R dt}$$

Se puede obtener una expresión análoga para cuando el factor integrante es función solo de y.

De todos modos es también difícil que haya una factor integrante que sea función solamente de una de las variables. Aunque se podrían buscar factores del tipo $g(y + t)$ o $g(yt)$, generalmente no merecerá la pena porque lo normal es que no sea resoluble.

EJEMPLO 14

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} 2 \operatorname{sen} y^2 dt + ty \cos y^2 dy = 0 \\ y(2) = \sqrt{\pi/2} \end{cases}$$

.../...

.../...

Solución

Comprobemos si es exacta:

$$M = 2 \text{ sen } y^2 \rightarrow M_y = 4y \cos y^2 \qquad N = ty \cos y^2 \rightarrow N_t = y \cos y^2$$

Como

$$4y \cos y^2 \neq y \cos y^2$$

entonces no es exacta, pero podemos intentar buscar un factor integrante. Según la notación vista anteriormente

$$R = \frac{1}{ty \cos y^2}(4y \cos y^2 - y \cos y^2) = \frac{3}{t}$$

y el factor integrante será

$$g(t) = e^{\int \frac{3}{t} dt} = e^{3 \ln t} = t^3$$

y ahora la ecuación será

$$2t^3 \text{ sen } y^2 \, dt + t^4 \, y \cos y^2 \, dy = 0,$$

que ya es exacta

$$M_y = 4yt^3 \cos y^2 \qquad N_t = 4yt^3 \cos y^2$$

Ahora tenemos que hallar la U, que sabemos que tiene que cumplir estas dos condiciones:

$$U = \int M \, dt + p(y) = \int 2t^3 \text{ sen } y^2 \, dt + p(y) = \frac{t^4}{2} \text{ sen } y^2 + p(y)$$

$$U = \int N \, dy + q(t) = \int t^4 \, y \cos y^2 \, dy + q(t) = \frac{t^4}{2} \text{ sen } y^2 + q(t)$$

Para que se cumplan debe ocurrir que $q(t) = p(y) = cte$, por lo que la U y la solución son:

$$U = \frac{t^4}{2} \text{ sen } y^2 + C^* = C^{**} \quad \rightarrow \quad \frac{t^4}{2} \text{ sen } y^2 = C$$

.../...

.../...

como $y(2) = \sqrt{\pi/2}$, necesariamente $C = 8$, y finalmente la solución particular para esa condición inicial será:

$$\frac{t^4}{2} \operatorname{sen} y^2 = 8$$

6. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

En este epígrafe veremos uno de los tipos más sencillos de ecuaciones diferenciales y otras que, aunque no lo sean, pueden transformarse en una de ellas y entonces ser resueltas.

Definición

Diremos que una ecuación diferencial de primer orden es **lineal** cuando es de la forma

$$y' = a(t)y + b(t)$$

Como se puede apreciar, las funciones a y b pueden ser cualesquiera, pero la variable y aparece sin más; no está al cuadrado ni nada similar; la relación de y es «lineal».

Si además es una ecuación lineal homogénea, entonces es de la forma:

$$y' = a(t)y$$

6.1. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL

Si la ecuación es lineal homogénea, entonces es separable y, por consiguiente, tiene una solución fácil de hallar:

$$\ln |y| = \int a(t)\, dt + C \quad \rightarrow \quad |y| = e^C\, e^{\int a(t)\, dt}$$

Por tanto:

$$y = C\, e^{\int a(t)\, dt}$$

Si la ecuación es lineal no homogénea, se puede hallar su solución sustituyendo la C de la solución general de la homogénea por una función $C(t)$ en lo que se llama método de variación de las constantes. Este método es aplicable a situaciones más generales, pero aquí nos proporciona justo la solución general que estamos buscando:

$$y = C\, e^{\int a(t)\, dt} + e^{\int a(t)\, dt} \int e^{-\int a(t)\, dt}\, b(t)\, dt$$

que en el fondo es la suma de la solución general de la homogénea y de una solución particular de la no homogénea. Esta fórmula es la que se llama **fórmula de la variación de las constantes**.

A veces se puede escribir de una manera más compacta si tomamos

$$h(t) = \int a(t)\, dt,$$

pues nos queda:

$$y = C\, e^{h(t)} + e^{h(t)} \int e^{-h(t)}\, b(t)\, dt$$

Esto puede facilitar la tarea de resolver este tipo de ecuaciones. Primero averiguamos $h(x)$ y luego lo introducimos en la ecuación anterior, así no tenemos que acarrear toda la expresión y se reducen las posibilidades de cometer un error.

Si nos piden la solución particular de una ecuación lineal no homogénea para la condición inicial $y(t_0) = y_0$, entonces la fórmula será:

$$y = y_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(t)\, dt} + e^{\int_{t_0}^{t} a(t)\, dt} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)\, du}\, b(s)\, ds$$

Y si la ecuación lineal es de «coeficientes constantes», de tal modo que la función $a(t)$ es un valor constante $a(t) = a$, entonces tenemos esta otra expresión:

$$y = C\, e^{at} + e^{at} \int e^{-at}\, b(t)\, dt$$

EJEMPLO 15

Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y' = -y/t + e^t$$

Solución

Vemos que es una ecuación lineal (de primer orden) en la que

$$a(t) = \frac{-1}{t} \quad \text{y} \quad b(t) = e^t$$

Podemos sustituir

$$h(t) = \int \frac{-1}{t}\, dt = -\ln t$$

en la expresión de antes

$$y = C\, e^{h(t)} + e^{h(t)} \int e^{-h(t)}\, b(t)dt = C\, e^{-\ln t} + e^{-\ln t} \int e^{\ln t}\, e^t\, dt$$

y obtener la solución:

$$y = C\frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{t}} \int te^t\, dt = C\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\,[e^t\,(t-1)] = C\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\,[te^t - e^t] = \frac{C}{t} + e^t - \frac{1}{t}\,e^t$$

EJEMPLO 16

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y' - y = e^{2t}$$

Solución

En este caso tenemos que

$$a(t) = 1 \quad \text{y} \quad b(t) = e^{2t}$$

.../...

.../...

Así que si aplicamos el procedimiento, nos da:

$$y = C\,e^{\int dt} + e^{\int dt} \int e^{-\int dt}\, e^{2t}\, dt$$

que operando nos lleva a:

$$y = C\,e^{t} + e^{t} \int e^{-t}\, e^{2t}\, dt$$

que es precisamente lo que nos dice la receta cuando $a(t)$ es constante. Si seguimos operando, finalmente obtenemos:

$$C\,e^{t} + e^{t} \int e^{t}\, dt = C\,e^{t} + e^{t}\, e^{t} = C\,e^{t} + e^{2t}$$

Los ejemplos anteriores son ejemplos más o menos abstractos y ya proporcionan la ecuación diferencial que hay que resolver. Sin embargo, puede ocurrir que tengamos que modelizar un sistema a partir de los datos disponibles y proponer una ecuación diferencial y resolverla.

EJEMPLO 17

En un proceso industrial de salazón usado para curar jamones se dispone de un contenedor con 4.000 litros de agua en el que en un principio hay disueltos 100 kilogramos de sal. A él llega un flujo de 200 litros de salmuera en el que hay disueltos

$$\frac{1}{2}\,(1 + \cos t)$$

kilogramos de sal. Un sistema de agitación mantiene siempre la mezcla del contenedor uniforme y el líquido sale del contenedor al mismo ritmo que entra. El sistema es más o menos como se indica en la figura.

Encontrar la cantidad de sal disuelta presente en cada momento t en el contenedor.

.../...

.../...

Solución

Vamos a simbolizar la cantidad de sal disuelta como $y(t)$. La variación del contenido de sal será igual a la que entra menos la que sale:

$$y' = \text{In} - \text{Out} = \frac{200}{2}(1 + \cos t) - \text{Out}$$

Como el contenedor tiene 4.000 litros de capacidad y como sale el mismo flujo que entra, entonces la sal que sale es

$$\text{Out} = \frac{200}{4.000}\, y = 0{,}05y$$

que es la cantidad de sal por litro ($y/4.000$) por 200 litros, así que:

$$y' = 100\,(1 + \cos t) - 0{,}05y$$

que se puede escribir como lineal de coeficiente constante e inhomogénea:

$$y' = -\,0{,}05y + 100\,(1 + \cos t),$$

con $a = -\,0{,}05$, $b(t) = 100\,(1 + \cos t)$ y con la condición inicial $y(0) = 100$.

Su solución es:

$$y = C\,e^{-0{,}05t} + e^{-0{,}05t}\int 100\,e^{0{,}05t}\,(1 + \cos t)\,dt$$

$$y = C\,e^{-0{,}05t} + 100\,\frac{a^2 \cos t + a^2 + a \operatorname{sen} t + 1}{a^3 + a}$$

Usando la condición inicial y redondeando llegamos a la expresión:

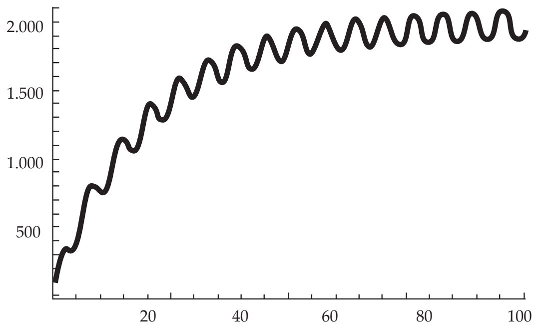
$$y = 1.905\,e^{-0{,}05t} + (5 \cos t + 100 \operatorname{sen} t + 2.000)$$

El gráfico representa la solución de este problema. Como se puede ver, la solución es muy parecida al problema similar ya visto con anterioridad de flujo de entrada constante.

La cantidad de sal aumenta en el tiempo y tiende asintóticamente a un valor determinado, pero en este caso siempre se nota la oscilación en la cantidad de sal del flujo de entrada.

.../...

.../...



7. ECUACIONES REDUCIBLES A LINEALES

El caso ideal es tener una ecuación lo más sencilla posible en la que tenemos una ecuación separable, lineal o algo similar, pero por desgracia lo habitual es encontrarse con casos más complicados que, en general, no sabremos resolver. Sin embargo, si de alguna manera podemos transformar nuestra ecuación en una que sí sepamos resolver, entonces habremos solucionado nuestro problema.

Siempre ha sido un campo de investigación en esta rama de las matemáticas encontrar cambios de variables (estudiando por ejemplo las simetrías) que permitan algo así.

En nuestro caso, solo vamos a ver unos pocos casos históricos de ecuaciones reducibles a lineales que además llevan los nombres de quienes trabajaron sobre ellas.

7.1. ECUACIÓN DE BERNOULLI

Definición

Diremos que una ecuación diferencial es de Bernoulli si es de la forma

$$y' = a(t)y + b(t)y^p,$$

siendo p cualquier número entero.

Procedimiento:

Como se puede observar aparece un término de y elevado a p, así que no es lineal salvo que $p = 1$. Pero se puede utilizar el cambio de variable para convertirla en lineal:

$$z = y^{1-p}$$

Es decir, que con ese cambio nos queda la ecuación lineal:

$$z' = (1 - p)\, a(t)z + (1 - p)\, b(t)$$

que sí sabemos resolver. Naturalmente, al final hay que deshacer el cambio de variable introducido.

EJEMPLO 18

Resolver la siguiente ecuación:

$$y' = Ay - By^2$$

Solución

Es de Bernoulli de coeficientes constantes para $p = 2$, así que el cambio es:

$$z = y^{(1-2)} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

y nos queda una ecuación lineal en z de la forma

$$z' = -\,Az + B$$

que es línea de coeficientes constantes, así que su solución es:

$$z = C\, e^{-At} + e^{-At} \int e^{At}\, Bdt = C\, e^{-At} + e^{-At}\, A^{-1}\, e^{At}\, B = C\, e^{-At} + B/A$$

Ahora podemos deshacer el cambio para recuperar la expresión en y:

$$y = \frac{1}{C\, e^{-At} + B/A}$$

.../...

.../...

A esta última ecuación se la conoce como la **ecuación logística de crecimiento de población**, en donde t representa el tiempo e y la población. Para $B = 0$ representa un crecimiento exponencial:

$$y = C^* e^{At}$$

o ley de Malthus. Por tanto el término $-By^2$ de la ecuación original es un término que evita un crecimiento sin límites. En la ecuación logística se puede ver fácilmente que para poblaciones iniciales pequeñas, $0 < y(0) < A/B$, la población aumenta monótonamente a A/B, mientras que para poblaciones iniciales grandes, $y(0) > A/B$, decrece monótonamente hacia el mismo límite.

La ecuación logística se ha aplicado en estudios sobre poblaciones humanas y animales.

EJEMPLO 19

Resolver la siguiente ecuación de Bernoulli:

$$y' + y = -t/y$$

Solución

Podemos reescribirla para que se parezca más al prototipo de Bernoulli:

$$y' = -y - ty^{-1}$$

En este caso tenemos que $p = -1$, así que $1 - p = 2$ y el cambio es

$$z = y^2,$$

que nos proporciona la siguiente ecuación lineal en z:

$$z' = -2z - 2t$$

Cuya solución es para $a = -2$ la siguiente:

$$z = C e^{-2t} + e^{-2t} \int e^{2t} (-2t)\, dt = C e^{-2t} + e^{-2t} (-2) \int te^{2t}\, dt$$

.../...

.../...

Resolviendo la integral y simplificando nos da la solución en *z:*

$$z = C\,e^{2t} + e^{2t}\,(-\,2)\,[(1/4)\,e^{-2t}\,(2t-1)]$$

$$= C\,e^{2t} - e^{2t}\left[\frac{1}{2}\,e^{-2t}\,(2t-1)\right]$$

$$= C\,e^{2t} - \frac{1}{2}\,(2t-1)$$

Ahora ya podemos recuperar la variable original y obtener una expresión de y:

$$y = \sqrt{C\,e^{2t} - t + \frac{1}{2}}$$

7.2. ECUACIONES DE RICCATI

Definición

Diremos que una ecuación diferencial es de Riccati si es de la forma

$$y' = a(t)y + b(t)y^2 + c(t)$$

Como podemos ver, es casi una de tipo Bernoulli para $p = 2$ a la que se ha añadido otra función de t.

Procedimiento

La resolución de este tipo de ecuación se basa en la misma técnica de antes. Hay una cambio de variable, en concreto

$$u = y - y_p,$$

que la convierte en una de tipo Bernoulli para $p = 2$. Lo malo es que hay que encontrar una solución particular y_p que no necesariamente es fácil de hallar. De hecho, no hay métodos sistemáticos para la búsqueda de esas soluciones particulares. Aunque si en la ecuación original aparecen polinomios, entonces se puede intentar buscar una de ellas por tanteo.

En todo caso, este cambio nos proporciona la siguiente ecuación:

$$u' = [a(t) + 2b(t)y_p\,(t)]u + b(t)u^2$$

que se convierte en lineal con $z = y^{-1}$, como ya se ha descrito en el apartado anterior.

EJEMPLO 20

Resolver la ecuación:

$$\begin{cases} (1 + t^3)\, y' + 2ty^2 + t^2y + 1 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Solución

La ecuación es de Riccati porque aparece un término en y, otro y^2 y una función $f(t)$. A simple vista no parece que haya soluciones constantes, así que podemos intentar tantear con casos sencillo como

$$y = At,$$

que podemos sustituir en la ecuación para ver si funciona y extraer el valor de A:

$$A + At^3 + 2A^2t^3 + At^3 + 1 = 0$$

Esto nos proporciona términos en t de la misma potencia e implica que debe cumplirse simultáneamente que

$$A + 1 = 0$$

y además que

$$2A + 2A^2 = 0,$$

algo que se da para $A = -1$, así que una solución particular que podemos usar es $y = -t$.

.../...

.../...

Nótese que la ecuación está pensada para que sea resuelta a partir de una ecuación particular que se puede hallar fácilmente. Si en la ecuación original apareciera t al cuadrado en lugar de al cubo o un 2 en lugar del último 1, la situación sería distinta.

El cambio de variable que podemos efectuar es entonces $u = y + t$, que nos hará desaparecer el término independiente:

$$u' = -\frac{2t}{1+t^3}(u-t)^2 - \frac{t^2}{1+t^3}(u-t)$$

Convirtiéndose así en una ecuación de Bernoulli tras breves operaciones:

$$u' = \frac{3t^2}{1+t^3}u - \frac{2t}{1+t^3}u^2$$

que podemos transformar con otro cambio de variable, en concreto $z = u^{-1}$, en una lineal:

$$z' = -\frac{3t^2}{1+t^3}z + \frac{2t}{1+t^3}$$

que ya sabemos resolver:

$$z = \frac{C}{1+t^3} + \frac{1}{1+t^3}\int 2t\,dt = \frac{t^2+C}{1+t^3}$$

Ya solo queda deshacer los cambios:

$$y = \frac{1-Ct}{C+t^2}$$

Para la condición inicial dada obtenemos que $C = 0$ y la solución particular para esta condición inicial es, por tanto, la siguiente:

$$y = \frac{1}{t^2}$$

8. DIBUJO APROXIMADO DE SOLUCIONES

A veces no podemos encontrar una solución analítica a la ecuación diferencial que se nos plantee debido a que no se corresponde con ningún tipo de los vistos aquí u a otros tipos para los cuales se conoce cómo hallar su solución. En esos casos tenemos dos opciones, o bien tratamos de hallar soluciones numéricas con algún tipo de algoritmo de integración usando un programa específico y un ordenador o bien nos conformamos con un dibujo aproximado de las soluciones, que en algunos casos puede ser suficiente como para saber el comportamiento del sistema. En este epígrafe vamos a ver precisamente cómo obtener esos dibujos aproximados, método que está basado en la técnica de las isoclinas.

Si consideramos que nuestra ecuación es del tipo

$$[D] \quad y' = f(t, y),$$

cada una de sus soluciones posibles, que dependerán de una condición inicial, tendrá una pendiente en el plano (t, y) que viene dada exactamente por la función $f(t, y)$. Entonces, podemos asociar a cada punto del plano (t, y) un pequeño segmento de pendiente $f(t, y)$. Este conjunto de segmentos se denomina **campo de direcciones de [*D*]**. Esto se puede realizar sin necesidad de resolver la ecuación correspondiente.

Una vez se dispone de este campo de direcciones, las soluciones de $[D]$ serán curvas que serán tangentes a cada uno de esos segmentos del campo de direcciones.

Llenar desorganizadamente el plano (t, y) no es una buena idea, así que hay que recurrir a un procedimiento que nos ayude en nuestra tarea de dibujar aproximadamente las soluciones. Lo ideal es ir dando valores a las pendientes P, de tal modo que podamos dibujar otras curvas a lo largo de las cuales los segmentos en cuestión tienen la misma inclinación, es decir, se trata de representar curvas que son funciones del tipo

$$P = f(t, y)$$

para distintos valores de P. A estas otras curvas se les denomina isoclinas. Todos los segmentos que dibujemos sobre ellas deben ser paralelos entre sí por definición.

Lo ideal es empezar con valores «interesantes» de P, como $P = 0, 1, -1, \infty$... Así, para $P = 0$, tendremos segmentos horizontales (pendiente cero, es decir, máximos y mínimos de las soluciones) y para $P = \infty$, segmentos verticales. Aunque no podamos dibujar isoclinas en ciertas regiones del plano (t, y), siempre podremos rellenarlas con segmentos para determinados puntos (t, y).

Otras pistas a la hora de dibujar las soluciones nos las pueden dar las zonas de crecimiento y decrecimiento de las soluciones, que corresponderán respectivamente a

$$f(t, y) > 0 \qquad \text{y} \qquad f(t, y) < 0$$

o las curvas en donde hay puntos de inflexión, que es donde se anula y'':

$$y'' = f_t(t, y) + f_y(t, y)\, f(t, y) = 0$$

Un vez tengamos todo esto, podemos atrevernos a dibujar las soluciones que deben obedecer a las limitaciones que acabamos de averiguar y ser tangentes a los segmentos.

Para realizar más cómodamente esta técnica es útil usar un papel cuadriculado o milimetrado.

Aunque sí dispongamos de las soluciones del problema D, esta manera de estudiar gráficamente las soluciones puede ayudarnos a saber el comportamiento del sistema. Puede que incluso las soluciones analíticas que tengamos sean difíciles de dibujar o sean funciones implícitas, y esta técnica nos puede ayudar a visualizarlas, siendo, por tanto, complementaria.

Veamos todo esto con un ejemplo prototípico sencillo, que es el dibujo de las soluciones de la ecuación:

$$y' = -\frac{t}{y}$$

Vamos a ir dando valores a las pendientes P:

$$P = -\frac{t}{y}$$

En este caso nuestras isoclinas serán líneas rectas que a su vez tienen pendiente $-1/P$:

$$y = -\frac{1}{P}\, t$$

Así que para segmentos de pendiente 1, tendremos isoclinas que son rectas de pendiente – 1:

$$y = -\mathrm{t}$$

Las soluciones tendrán pendiente 1 al cruzar esa isoclina.

Para distintos valores de P tendremos las siguientes isoclinas:

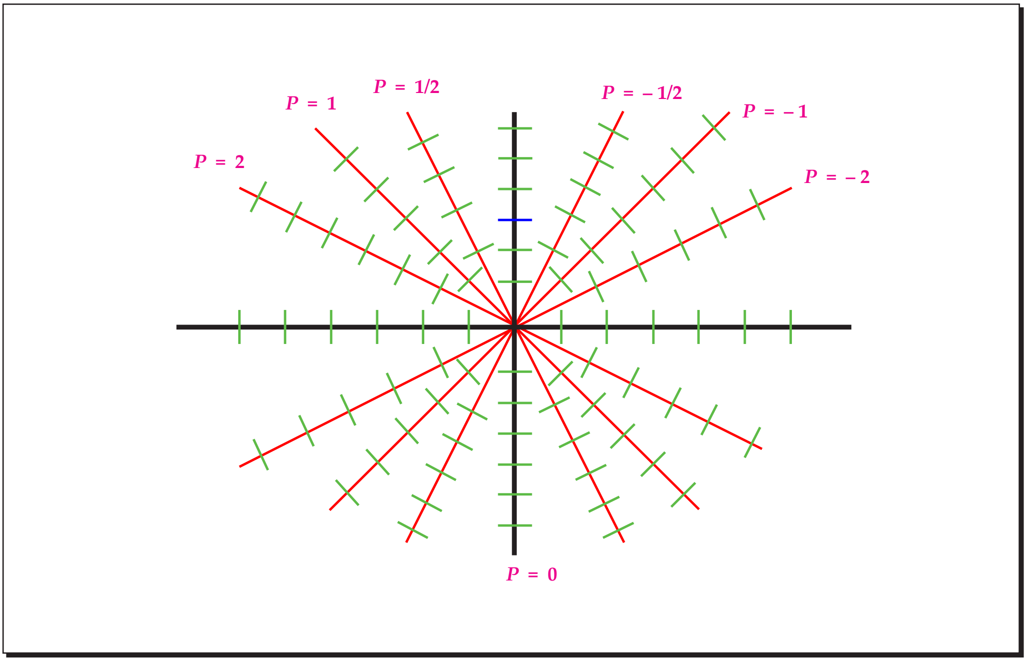
$$
\begin{array}{lcl}
P = 1 & \rightarrow & y = -\,t \\
P = 2 & \rightarrow & y = -\,(1/2)\,t \\
P = -\,1 & \rightarrow & y = t \\
P = -\,2 & \rightarrow & y = (1/2)\,t \\
P = \infty & \rightarrow & y = 0 \\
P = 0 & \rightarrow & t = 0
\end{array}
$$

Obsérvese que el último caso es trivial si damos la vuelta a la ecuación, pues

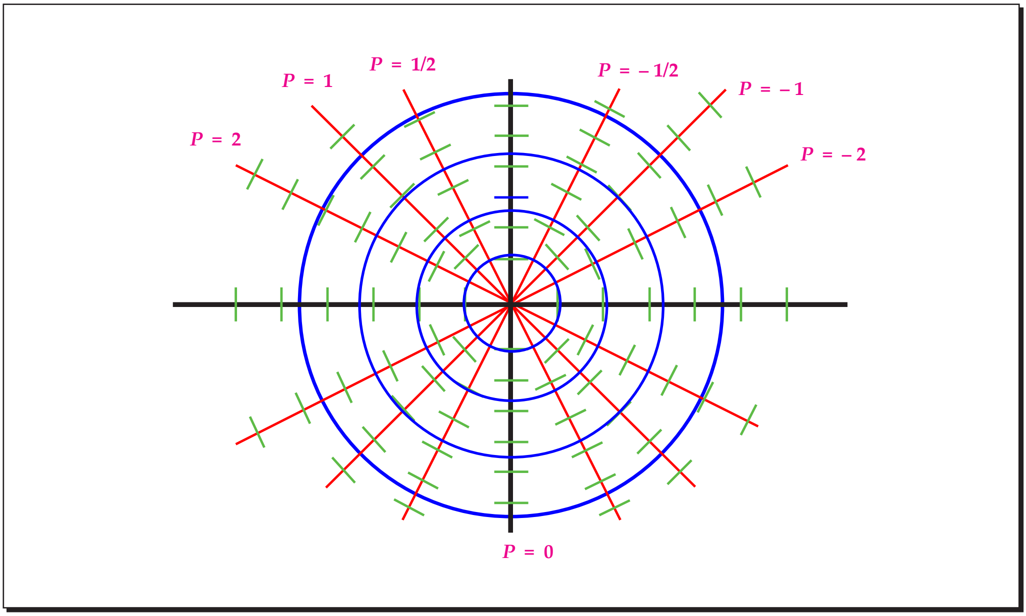
$$t = -\,Py$$

y cuando $P = 0$, necesariamente $t = 0$, es decir, que la isoclina en este caso es el eje vertical y.

En la siguiente figura representamos las isoclinas en magenta, mientras que los segmentos correspondientes a las pendientes van en verde:



Ahora ya podemos intentar representar las soluciones (en este caso en azul):



El sistema es un método aproximado y está sujeto a los defectos que podamos introducir cuando dibujamos. Por esta razón el uso de papel cuadriculado o similar puede ser de ayuda. Si empleamos un programa de diseño gráfico (como en este caso), lo ideal es usar algún tipo de mallado, aunque a la hora de volcar la imagen lo hagamos desaparecer. Las isoclinas, en general, pueden ser cualquier tipo de curva sobre el plano y no necesariamente son líneas rectas como en el ejemplo anterior.

9. EXISTENCIA Y UNICIDAD, PROLONGABILIDAD Y ESTABILIDAD

9.1. EXISTENCIA, UNICIDAD Y PROLONGABILIDAD

Consideremos el típico problema de valores iniciales:

$$[P] \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Este problema nos debería dar una única solución particular. Pero en realidad da pie a tres situaciones distintas. Puede ser que no tengamos solución, que solo haya una o que haya infinitas. Así que en este tipo de problemas nos podemos plantear dos preguntas. La primera (problema de existencia) es: ¿bajo qué condiciones tiene un problema de valores iniciales al menos una solución? La segunda (problema de unicidad) es: ¿bajo qué condiciones tiene el problema de valores iniciales como máximo una solución?

Para dar respuesta a estas preguntas se dedujeron una serie de teoremas, pues por simple inspección no se pueden encontrar las respuestas a dichas preguntas. Esto es especialmente importante cuando no podemos obtener una solución analítica y tenemos que usar un método numérico. Hay que estar seguro de que nuestro modelo tiene una solución y de que esta es única antes de correrlo en el computador.

Teorema de existencia

Si $f(t, y)$ es continua en todos los puntos (x, y) de la región rectangular R:

$$|t - t_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

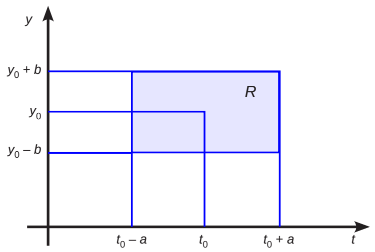
es decir

$$R = (t_0 - a, t_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$$

y f acotada de tal modo que

$$|f(t, y)| \leq K$$

para todos los puntos de esa región R.



Entonces podemos decir que el problema de valores iniciales [*P*] tiene al menos una solución $y(t)$ que está al menos definida para todo el intervalo $|t - t_0| < \alpha$, donde α es el valor más pequeño de los números a y b/K.

Teorema de unicidad

Si $f(t, y)$ y $df/dy = f_y$ son continuas para todo punto (x, y) en la región R definida anteriormente y

$$|f| \leq K, \qquad |f_y| = \left|\frac{df}{dy}\right| \leq M$$

entonces el problema de valores iniciales [*P*] tiene como máximo una solución $y(t)$. Y, por tanto, según el teorema de existencia, tiene una única solución que está definida en el intervalo $|t - t_0| < \alpha$.

EJEMPLO 21

Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

en la región

$$R = (-5, 5) \times (-3, 3)$$

Solución

El dominio que nos dicen está centrado en el origen y delimitado entre $t = -5$ y $t = 5$ para el eje horizontal y entre $y = -3$ y $y = 3$ para el eje vertical. Según la notación empleada, entonces:

$$a = 5, \qquad b = 3$$

Además

$$|f| = |1 + y^2| \leq K = 10, \qquad |\partial f/\partial y| = 2\,|y| \leq M = 6$$

y como $b/K = 0{,}3$, $a = 5$ y el más pequeño es el primero, entonces

$$\alpha = b/K = 0{,}3 < a$$

Vemos que un entorno de radio α en torno al origen es mucho más pequeño que el dominio dado, así que no hay solución en ese dominio.

Lo bonito es que hemos sabido todo ello sin necesidad de resolver la ecuación. Si tenemos curiosidad, vemos que su solución es efectivamente $y = tg\ t$ que es discontinua para $x = \pm\,\pi/2$, puntos que están dentro del dominio propuesto.

EJEMPLO 22

Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones del problema de valores iniciales siguiente:

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{ty^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

.../...

.../...

Solución

Existe solución para todo, $t_0 > 0$, pues $f(t, y)$ y f_y son continuas en toda región de ese semiplano. Para $t_0 < 0$, la función f ni siquiera está definida en los reales.

La ecuación es separable y puede resolverse con facilidad:

$$-\frac{1}{y} = 2t^{3/2} + C \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{C - 2t^{3/2}}$$

Si consideramos la condición inicial $y\,(0) = y_0$, tenemos:

$$y = \frac{y_0}{1 - 2y_0 t^{3/2}},$$

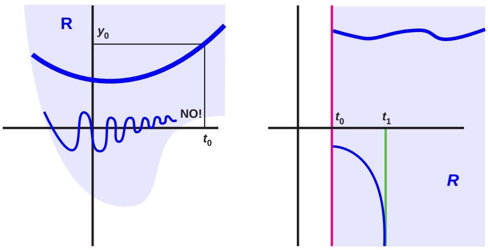
que nos dice que las soluciones están definidas para $t_0 \geq 0$, pero no hay soluciones para $t_0 < 0$, como ya nos habían dicho los teoremas de existencia y unicidad.

Hasta ahora podemos saber si existe solución y si esta es única en una región dada, aunque no sepamos resolver la ecuación diferencial. Pero no sabemos cómo es esa solución, ¿se agota la solución en un momento dado dentro de una región?, ¿se dispara a infinito en algún punto? El teorema de prolongabilidad permite saber sobre este aspecto.

Teorema de prolongabilidad

Si f y f_y son continuas en una región arbitraria R, la gráfica de la solución del problema [P] no se para en el interior de esa región R.

En particular, si R es el semiplano $t \geq t_0$ o bien $y(t)$ está definida para todo $[t_0, \infty)$ o bien existe un $t_1 > t_0$, tal que $|y(t)|$ tiende a infinito cuando t tiende a t_1.



EJEMPLO 23

Estudiar la prolongabilidad de la solución del problema siguiente:

$$[P] \quad \begin{cases} y' = \text{sen}\,(t + y^4) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Solución

Básicamente, como f y f_y son continuas en todo el plano $\mathbb{R}^2$, entonces solo hay dos posibilidades. O bien la solución, que existe y es única según teoremas previos, llega a infinito ($\pm\infty$) o explota (es decir, tiene una asíntota). Si fuera la segunda posibilidad, tanto $y(t)$ como su pendiente tenderían a infinito, pero como el valor absoluto de la derivada de y está siempre acotado, pues

$$|y'(t)| \leq 1,$$

entonces no hay tal comportamiento asintótico y la solución no explota, y está definida para todo t.

9.2. ESTABILIDAD

¿Hasta qué punto podemos predecir el comportamiento futuro de un sistema dada una situación inicial? Decía Laplace (1749-1827) que si se conoce el estado actual del universo con total precisión, uno podría predecir cualquier evento en el futuro. Este determinismo causal estaba inspirado por el éxito del mecanicismo de la física de su época. Se podían predecir las posiciones de los planetas con siglos de anticipación o describir el comportamiento de muchos sistemas. En el siglo XX se descubrió la mecánica cuántica, que impuso límites a ese conocimiento. Pero también en mecánica clásica, incluso para sistemas muy sencillos, la predicción de su comportamiento futuro es casi imposible en la práctica. Determinados sistemas son inestables y a no ser que tengamos una precisión infinita en la medida de las condiciones iniciales y en el cálculo, no podremos saber qué estado tendrá en el futuro.

En español vernáculo, la trayectoria de un objeto se dice que es estable si un pequeño cambio de sus condiciones iniciales modifica poco su evolución desde ese instante aunque pase cierto tiempo. En matemáticas hay unas definiciones más rigurosas que nos describen la estabilidad.

Definición

Si el problema

$$[P]\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_0, \infty)$, se dice que $y(t)$ es estable si para todo $\epsilon >$ > 0 y $\delta > 0$, tal que toda solución $y^*(t)$ con $|y_0 - y_0^*| < \delta$ satisface los siguientes puntos:

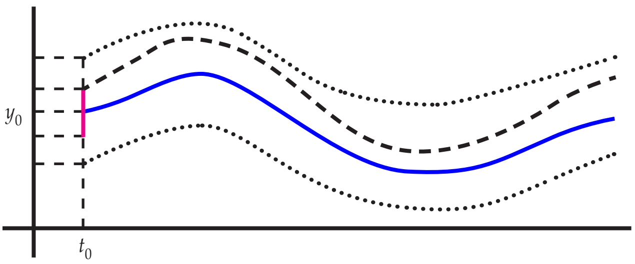
- $y^*(t)$ existe y está definida en $[t_0, \infty)$,
- $|y(t) - y^*(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Y decimos que es **asintóticamente estable** si además:

- $|y(t) - y^*(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Una solución que no es estable se dice que es **inestable**.

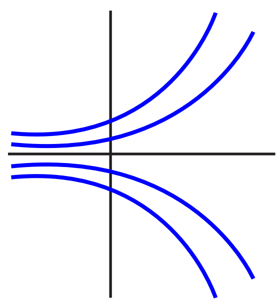
Esta definición parece un poco abstracta, pero no nos debemos asustar. Gráficamente podemos ver que una solución $y(t)$ es estable si para cualquier banda de anchura 2ϵ en torno a ella existe un segmento de altura 2δ en torno a y_0 tal que las soluciones que parten de él permanecen para todo $t \geq t_0$ dentro de la banda.



Obsérvese la poca utilidad práctica de la definición anterior si no somos capaces de obtener las soluciones a un problema dado, pues a partir de la ecuación diferencial y su condición inicial se puede decir poca cosa. Lamentablemente tendremos en muchos casos que resolver la ecuación para poder emitir juicios sobre la estabilidad de las soluciones.

Otro aspecto importante es darse cuenta de que, en general, no se puede hablar de estabilidad de una ecuación diferencial, sino de estabilidad de sus soluciones. Para una misma ecuación y distintas condiciones iniciales puede haber soluciones que sean estables y otras que sean inestables.

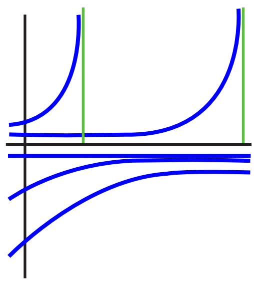
Básicamente, si el eje *t* (que en muchas ocasiones simboliza el tiempo) corre de izquierda a derecha, vemos que si las soluciones son inestables, entonces las soluciones para una condición inicial dada y para otra ligeramente diferente divergen en el tiempo hasta que la situación final es muy distinta (situación representada a la izquierda), por lo que una variación de las condiciones iniciales es crítica. Mientras que si es estable (situación representada a la derecha), las dos soluciones tienden a converger y una variación sobre las condiciones iniciales no es crítica.



EJEMPLO 24

Estudiar la estabilidad de las soluciones de:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$



Solución

Las soluciones explotan para $y_0 > 0$ y no tiene sentido hablar de estabilidad. La solución $y = 0$ es claramente inestable, pues las soluciones que partan inmediatamente por encima ni siquiera están definidas para todo t.

.../...

.../...

Toda solución con $y_0 < 0$ está definida y es asintóticamente estable. Veamos qué pasa si comparamos dos soluciones con condiciones iniciales próximas en esa región. Si $y - y^*$ es pequeño, y^* llega hasta el infinito y además:

$$|y - y^*| = \left| \frac{y_0}{1 - ty_0} - \frac{y_0^*}{1 - ty_0^*} \right| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

EJEMPLO 25

Estudiar la estabilidad de las soluciones de:

$$\begin{cases} y' = -y^3/t^3 \\ y(1) = a \end{cases}$$

Solución

Es una ecuación separable que puede resolverse por simple integración:

$$\frac{dy}{y^3} = -\frac{dt}{t^3}$$

y cuyas soluciones son:

$$y_a = at\,[a^2\,(t^2 - 1) + t^2]^{-1/2}$$

Todas estas soluciones están definidas para todo a si $t \geq 1$, pero

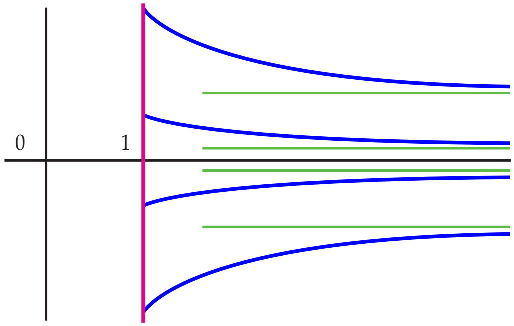
$$y_a \xrightarrow[t \to \infty]{} a\,[a^2 + 1]^{-1/2} \neq 0,$$

por tanto, no son asintóticamente estables.

Pero sí son estables, ya que para todo ϵ tomando $\delta = \epsilon$ se tiene que si

$$|a| < \delta \quad \text{es} \quad |y_a| \leq |a| < \epsilon \quad \forall t \geq 1$$

Se puede ver de una manera más intuitiva sin necesidad se hallar las soluciones, pues las soluciones decrecen en el primer cuadrante a partir de $t = 1$ y crecen en el cuarto a partir del mismo punto. A partir de ese punto las soluciones están entre las rectas $y = 0$ e $y = a$ y llegan hasta infinito.



Teorema

La solución del problema:

$$[P] \begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

es estable si, y solo si,

$$e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

está acotada. Y es asintóticamente estable si, y solo si,

$$e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \quad \rightarrow \quad 0$$

cuando t tiende a infinito.

Lo interesante es que para este problema el teorema nos dice que la estabilidad no depende de $b(t)$ ni de t_0 si a y b son continuas a partir de ese punto. En este caso, es decir, para una ecuación lineal, se puede hablar de estabilidad de la propia ecuación.

Del teorema anterior se desprende el siguiente corolario:

Si la ecuación es de coeficientes constantes

$$y' = ay + b(t),$$

entonces será asintóticamente estable, estable (no asintótica) o inestable si $a < 0$, $a = 0$ y $a > 0$, respectivamente.

EJEMPLO 26

¿Son estables las soluciones de la ecuación siguiente?

$$y' = -\frac{y}{t} + \cos\left[\ln(1 + t^2)\right]$$

Solución

Es lineal y, por tanto, la estabilidad de sus soluciones solo dependerá de la función:

$$a(t) = -\frac{1}{\mathrm{t}}$$

Según el teorema, como para todo $t > 0$:

$$e^{-\int \frac{1}{t}} = \frac{1}{t}$$

es acotada e y tiende a 0 cuando t tiende a infinito. Por tanto, la solución será asintóticamente estable para cualquier condición inicial $y(t_0) = y_0$.

10. ECUACIONES AUTÓNOMAS

10.1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Diremos que una ecuación diferencial de primer orden es autónoma si tiene la forma siguiente:

$$y' = f(y) \qquad \textbf{[1]}$$

Básicamente significa que la variable independiente t no aparece explícitamente al lado derecho de la igualdad. En la ecuación solo tenemos una función de y y su derivada. Ya hemos visto un ejemplo de este tipo de ecuaciones. La ecuación que nos describía la caída del paracaidista era autónoma.

Lo interesante de este tipo de ecuaciones es que es relativamente fácil extraer soluciones constantes. Estas soluciones constantes se darán para determinados valores fijos de y y se obtienen igualando la derivada a cero. Es decir, son soluciones de

$$f(y) = 0,$$

siendo esa $f(y)$ la función que aparece al lado derecho de la igualdad. Esto es obvio porque lo que hacemos igualando la derivada a cero es imponer una pendiente nula, por lo que esas soluciones son líneas horizontales. De nuevo, es lo que hicimos en un principio con el caso del paracaidista.

Las soluciones constantes son soluciones de la ecuación, pero no son las únicas posibles, de hecho, en realidad son soluciones límite para cuando t tiende a infinito o menos infinito. Gracias a ellas es muy fácil dibujar soluciones aproximadas. Si las demás soluciones se separan con t (o explotan en algún punto) de esas soluciones constantes, entonces serán claramente inestables. Por el contrario, si esas otras soluciones tienden a acercarse a las soluciones constantes, entonces serán estables.

Veamos unas propiedades que nos facilitan el dibujo aproximado de soluciones de las ecuaciones autónomas.

Teorema

- Si $y(t)$ es solución de **[1]**, entonces $y = (t + C)$ es también solución.
- Si $a \in R$ es tal que $f(a) = 0$, entonces $y(t) = a$, es solución de **[1]**.
- Cada solución de **[1]** o bien es constante o bien estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente.
- Toda solución acotada por la derecha de un determinado t_0 tiende a una solución de equilibrio cuando t tiende a infinito y si lo está por la izquierda lo hace cuando $t \to -\infty$.

Como podemos ver, este teorema nos restringe mucho el tipo de soluciones que podemos tener en una ecuación autónoma, pues estarán delimitadas por las soluciones constantes, salvo que exploten en algún punto (comportamiento asintótico para ciertos valores de t). En ese caso, el teorema siguiente nos puede servir de ayuda:

Teorema

Si tenemos que

$$\frac{f(y)}{g(y)} \to C$$

cuando y tiende a infinito, siendo C una constante positiva, entonces las soluciones no acotadas de $y' = f(y)$ tienen asíntotas si, y solo si, las tienen las de $y' = g(y)$.

En particular, explotarán todas las soluciones no acotadas de $y' = p(y)$ si $p(y)$ es un polinomio de mayor grado que 1.

Por último, el teorema siguiente nos dará la estabilidad de esas soluciones constantes, que aunque no diga mucho, nos prepara el terreno para cuando veamos sistemas autónomos.

Teorema

Si tenemos una solución constante tal que $f(a) = 0$, entonces:

- Si $f'(a) < 0$ entones $y(t) = a$, es asintóticamente estable.
- Si $f'(a) > 0$ entones $y(t) = a$, es inestable.
- Si $f'(a) = 0$ entonces $y(t) = a$, puede ser estable, asintóticamente estable o inestable.

Digamos que si las pendientes de las soluciones son negativas por encima de la solución constante, tenderán hacia esa solución y serán estables; mientras que si son positivas, se separan de esa solución según aumenta t, así que serán inestables. La situación es al contrario si estamos por debajo de esa solución constante.

Lo ideal para asimilar todo esto es ver unos ejemplos. Y nada mejor que volver sobre nuestro paracaidista:

$$v' = g - \frac{k}{m} v^2$$

Aquí nuestra variable se llama *v* en lugar de *y*, pero todo es exactamente lo mismo. Las soluciones constantes las obtenemos igualando a cero y despejando la *y*, obteniéndose:

$$v_C = \pm \sqrt{\frac{mg}{k}} = \pm a,$$

que es nuestra famosa velocidad terminal.

Así que para cada valor de la masa y forma del objeto tenemos solo dos soluciones constantes con el mismo valor absoluto y signo cambiado. Sin embargo, solo las soluciones positivas ($v > 0$) tienen sentido físico, es decir, cuando el cuerpo está cayendo. De otro modo, la fuerza de rozamiento siempre apunta hacia arriba, incluso si el cuerpo subiese, lo que no tiene sentido.

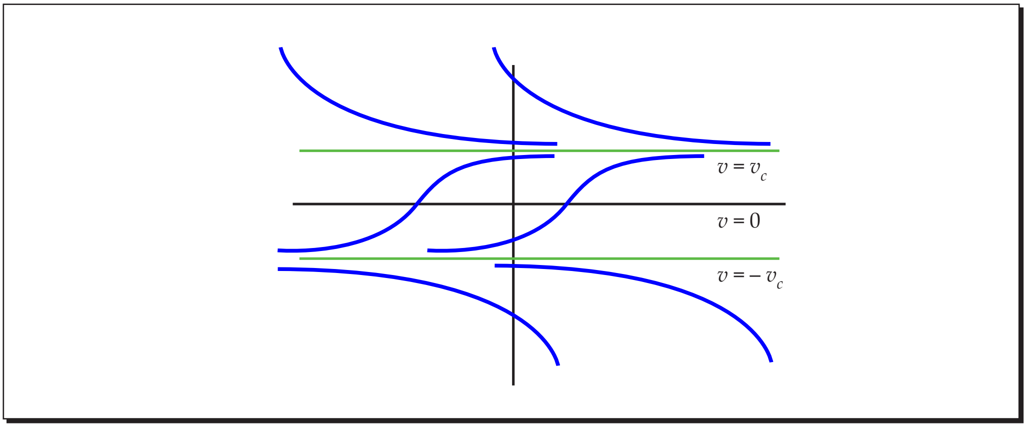
La solución constante positiva será estable, ya que

$$f'(y) = -\frac{2k}{m}v \quad \rightarrow \quad f'(a) = -\frac{2k}{m}a < 0$$

Además, las soluciones que están por encima decrecen al crecer *t* y las que están por debajo crecen al crecer *t*. La solución constante negativa será inestable pues

$$f'(-a) = \frac{2k}{m}a > 0$$

y las soluciones por debajo y por encima de ella se separan según crece *t*. Si dibujamos esas soluciones, tendrán la siguiente forma aproximada:



10.2. EJEMPLOS

EJEMPLO 27

Si nos piden dibujar aproximadamente las soluciones de la ecuación autónoma

$$y' = y^3 - y^2,$$

lo primero que tenemos que hacer es buscar sus soluciones constantes

$$y^3 - y^2 = y^2 (y - 1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = 0, \quad y = 1$$

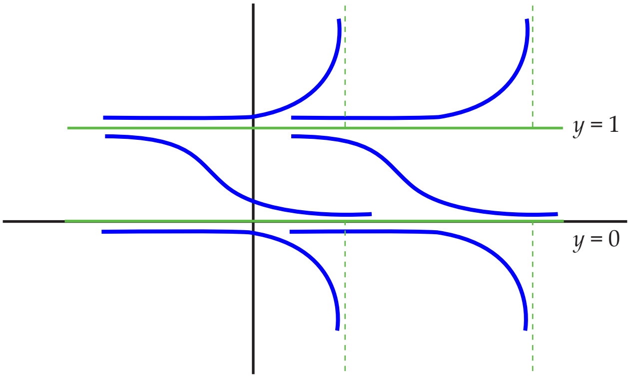
Además, vemos que $y^2 (y - 1) > 0$ si $y > 1$, así que las soluciones decrecen por encima de la solución constante $y = 1$. Por otro lado, $y^2 (y - 1) < 0$ si $y < 1$, así que las soluciones decrecen tanto entre $y = 1$ e $y = 0$ como por debajo de $y = 0$. Y como

$$f'(y) = 3y^2 - 2y$$

la solución constante $y = 1$ es inestable ya que $f'(1) = 1 > 0$, pero este criterio no nos dice nada sobre la estabilidad de la solución $y = 0$.

Además, las soluciones por encima de $y = 1$ llegan a infinito, pues si estuvieran acotadas tenderían a una solución constante que no existe. A las soluciones que hay por debajo de $y = 0$ también les pasa lo mismo y se van a $-\infty$. Solo las soluciones entre las dos soluciones constantes están acotadas y no se disparan a infinito.

Ya solo tenemos que tener en cuenta que cualquier solución trasladada a la izquierda o derecha es también solución para así dibujar una familia de soluciones. Tengamos en cuenta que no tenemos una condición en el inicio y, por tanto, hay toda una familia de soluciones.



EJEMPLO 28

Intentemos aplicar esta técnica a una ecuación que ya hemos resuelto. En concreto sobre la ecuación logística, que podemos reescribir un poco:

$$y' = Ay - By^2 = By\,(A/B - y) = By\,(M - y)$$

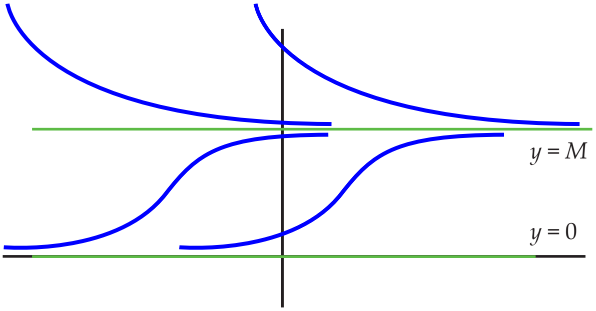
Las soluciones constantes cumplen $By\,(M - y) = 0$ y esto se da para $y = 0$ e $y = M$. Por encima de $y = M$ las soluciones decrecen y por debajo crecen, así que esa solución será estable, algo que nos dice el criterio ya visto, pues

$$f'(y) = BM - By \qquad \rightarrow \qquad f'(M) = BM - BM = 0$$

pero sí nos habla de la inestabilidad de $y = 0$, ya que

$$f'(0) = BM > 0$$

Además, podemos apreciar que entre $y = 0$ e $y = M$ las soluciones crecen. Por tanto, el dibujo aproximado de soluciones es



Este modelo nos sirve para describir, por ejemplo, una población de peces de un lago de montaña, población que simbolizamos con y. No habrá soluciones negativas y la población siempre tenderá a estabilizarse en torno a $y = M$. No hay depredadores y la población $y = M$ es la que puede soportar el sistema. Si está por encima, disminuye en el tiempo, y si está por debajo, aumenta.

Supongamos ahora que en el sistema metemos a un pescador que pesca esos peces y planteamos dos situaciones.

En la primera, el pescador pesca peces a un ritmo proporcional a la población de peces que hay; entonces la ecuación será:

$$y' = By\,(M - y) - ry, \qquad \textbf{[1]}$$

.../...

.../...

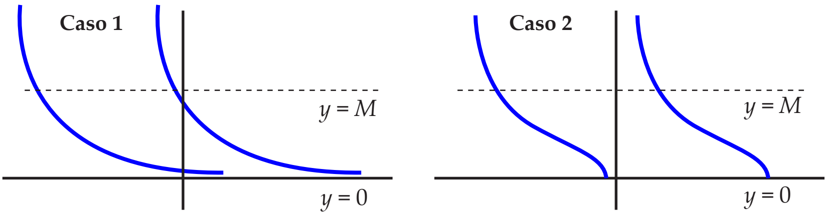
que tendrá como soluciones de equilibrio $y = 0$ e $y = M - r/B$. Pero si lo hace a un ritmo que es independiente de los peces que haya, entonces la ecuación será:

$$y' = By\,(M - y) - r, \qquad \textbf{[2]}$$

que tendrá como soluciones de equilibrio o constantes:

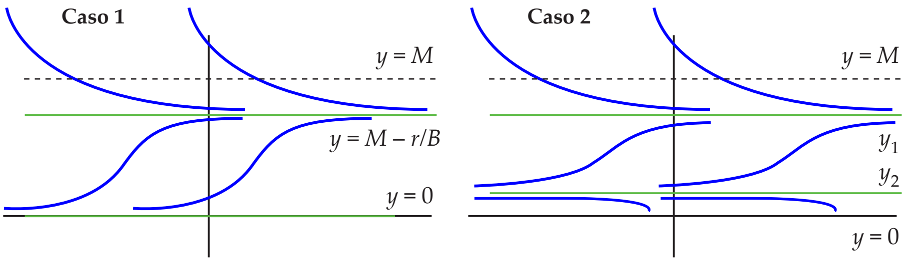
$$y = \frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{r}{B}}$$

Si el pescador es muy bueno y, por tanto, r es grande, la segunda solución constante de **[1]** es negativa, así que solo nos quedan soluciones que tienen a $y = 0$. Es decir, que acaba con todos los peces. Para **[2]** sus dos soluciones son complejas y el destino de los peces es también la extinción.



Esto es lo que está ocurriendo en los mares del mundo en un ejemplo perfecto de la tragedia de los bienes comunales.

Si el pescador no es tan bueno, o simplemente, controla el número de peces que pesca para no acabar con el recurso, vemos que la población de peces se estabiliza en un valor justo por debajo del punto de equilibrio original $y = M$. Para el caso **[1]** y para el caso **[2]** aparecen dos soluciones de equilibrio que están por debajo de $y = M$; la superior es estable y la inferior inestable:



EJEMPLO 29

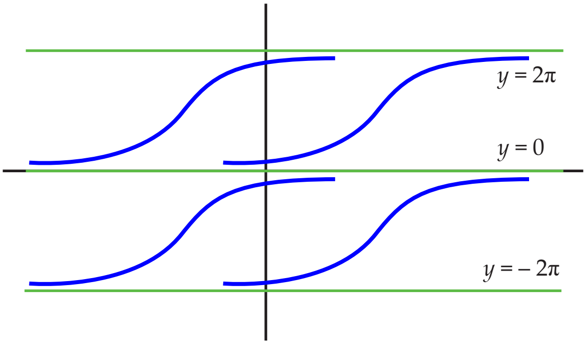
Dibujar aproximadamente las soluciones de:

$$y' = 1 - \cos y$$

En este caso las soluciones constantes serán aquellas para las que $\cos y = 1$, es decir, para $y = 2n\pi$. Como

$$f'(y) = \operatorname{sen} y \quad \rightarrow \quad f'(2n\pi) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0$$

el criterio habitual no funciona, pero como las soluciones siempre serán soluciones crecientes, pues $y' > 0$, las soluciones constantes serán necesariamente inestables. El dibujo nos queda así:



EJEMPLO 30

Dibujar aproximadamente las soluciones de:

$$y' = \begin{cases} -y \ln y & \text{si} \quad y > 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

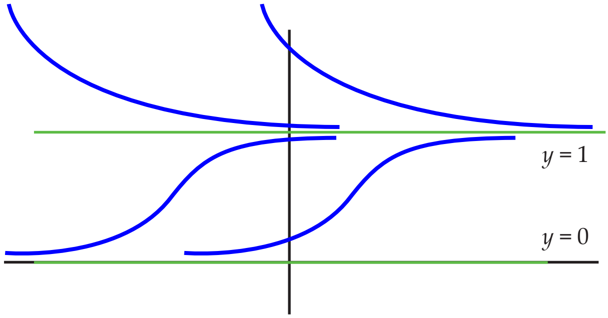
En este caso las soluciones constantes son $y = 0$ e $y = 1$. Por encima de $y = 1$ las soluciones son decrecientes ($y' < 0$) y entre esas dos soluciones constantes serán crecientes ($y' > 0$). Por debajo de $y = 0$ no hay soluciones definidas. La solución constante $y = 1$ es estable según el criterio, pues

$$f'(y) = -\ln y - 1 \quad \rightarrow \quad f'(1) = -\ln 1 - 1 = -1 < 0$$

.../...

.../...

Finalmente el dibujo aproximado nos queda:



Si integramos, podemos llegar fácilmente a la solución:

$$\begin{cases} -\ln(\ln y) = t + C & \rightarrow \quad y = e^{e^{-(t+C)}} \quad \text{si} \quad y > 1 \\ -\ln(-\ln y) = t + C & \rightarrow \quad y = e^{-e^{-(t+C)}} \quad \text{si} \quad y < 1 \end{cases}$$

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Ecuación diferencial de primer orden.
- Ecuación separable.
- Ecuación lineal.
- Ecuación exacta.
- Ecuación homogénea y su dibujo aproximado de soluciones.
- Ecuaciaciones de Bernoulli y de Riccati.
- Teorema de existencia, unicidad y prolongabilidad.
- Isoclinas.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = ty^3$$

Enunciado 2

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 1 + 0{,}01\, y^2$$

Enunciado 3

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = ty/2$$

Enunciado 4

Resolver la siguiente ecuación diferencial (pista: $z = y/t$):

$$ty' = y^2 + y$$

Enunciado 5

Resolver la siguiente ecuación diferencial (pista: $z = y/t$):

$$y' = (t^2 + y^2)/ty$$

Enunciado 6

Hallar la solución de la ecuación diferencial siguiente:

$$\begin{cases} y' = (y + 2t)^{-2} - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Enunciado 7

Resolver la siguiente ecuación diferencial exacta:

$$y' = -\frac{3t^2 + 6ty^2}{6t^2y + 4y3}$$

Enunciado 8

Resolver la siguiente ecuación de Bernoulli:

$$y' = \frac{2y}{t} + \frac{t}{y}$$

Enunciado 9

Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$y' - y = 4, \qquad y' + 3ty = 0$$

Enunciado 10

Dibujar de manera aproximada las soluciones de:

$$y' = t^2$$

Solución 1

$$y = \pm\, [C - t^2]^{-1/2}$$

Solución 2

$$y = 10 \tan (0{,}1t + c)$$

Solución 3

$$y = ce^{t^2/4}$$

Solución 4

$$y = \frac{t}{c - x}$$

Solución 5

$$y = t\sqrt{2 \ln |t| + c}$$

Solución 6

En este caso podemos probar el cambio de variable

$$z = y + 2t$$

quedando

$$z' = z^{-2} + 1 \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{z^2\, dz}{1 + z^2} = z - \arctan z = t + C,$$

aunque al final no se puede despejar y, podemos expresar la solución como:

$$y + t - \arctan y + 2t = C$$

Para la condición inicial dada nos queda esta ecuación implícita:

$$y + t - \arctan y + 2t = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Solución 7

$$t^3 + 3t^2y^2 + y4 = C$$

Solución 8

$$y = \pm\, t\sqrt{Ct^2 - 1}$$

Solución 9

$$y = Ce^t - 4$$
$$y = Ce^{-3t^2/2}$$

Solución 10

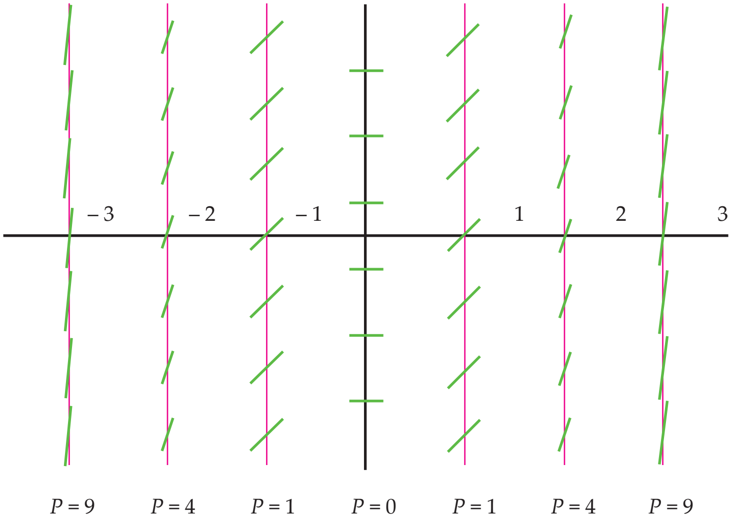
Las isoclinas vendrán dadas por las rectas verticales:

$$t = \pm\sqrt{P}$$

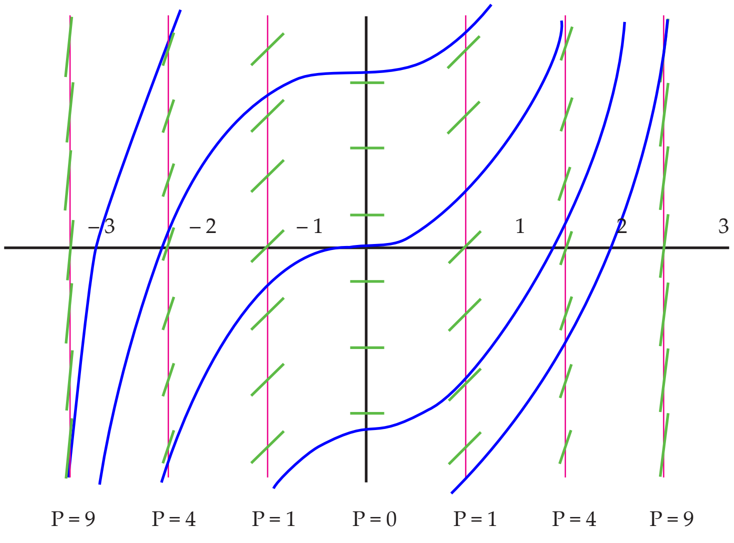
en donde P es la pendiente de las curvas, solución al cruzar la isoclina correspondiente:

$$\begin{array}{lcl} P = 0 & \rightarrow & t = 0 \\ P = 1 & \rightarrow & t = \pm\, 1 \\ P = 4 & \rightarrow & t = \pm\, 2 \\ P = 9 & \rightarrow & t = \pm\, 3 \end{array}$$

Dibujamos esas isoclinas (en magenta) tanto para la parte positiva como negativa de t con sus respectivos segmentos (en verde) correspondientes a la inclinación de las curvas:



Ahora solo nos queda dibujar las curvas-solución:



Si revolvemos la ecuación, vemos que sus soluciones son del tipo

$$y = t^3/3 + C,$$

que son justo las curvas de tercer grado que hemos dibujado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa.

Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Belmont: Interamericana.

Elsgoltz, L. (1992). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Moscú: Mir.

Fernández, C., Vázquez, F. J. y Vegas, J. M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Madrid: Paraninfo

Guzmán, M. de. (1980). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de estabilidad y control*. Madrid: Alhambra.

Hirsch, M. W. y Smale, S. (1983). *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Madrid: Alianza.

Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. (1979). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Moscú: Mir.

Kreyszig, E. (2006). *Advanced engineering mathematics*. Nueva York: John Wiley and Sons.

Plaat, O. (1974). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Barcelona: Reverté.

Ross, S. L. (1992). *Ecuaciones diferenciales*. Barcelona: Reverté.

Simmons, G. F. (1988). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Madrid: McGraw-Hill.