UNIDAD
DIDÁCTICA

10 CURSO CERO DE MATEMÁTICAS: LÍMITES

SUMARIO

ESQUEMA DE LOS CONTENIDOS

10.1. Introducción

En esta unidad vamos ver cómo se calculan límites de funciones reales. Empezaremos con el concepto de función y dominio de una función para pasar al concepto de límite de una función. Seguidamente aprenderemos a calcular límites inmediatos y luego diversas técnicas para calcular indeterminaciones. La parte interesante es que veremos cómo se comporta un función en el infinito o si tiende a infinito en algún punto.

10.2. Función de variable real

Una función real de variable real es una función que asigna a cada número real x perteneciente a un subconjunto D de $\mathbb{R}$ un número real y. De manera simbólica lo podemos escribir así.

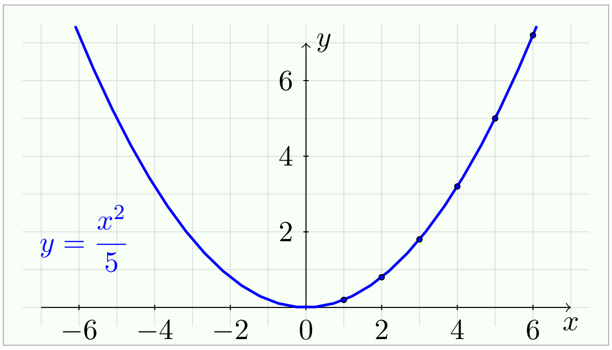
$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

La x será la variable independiente e y será la variable dependiente. Y D o $Dom(f)$ será el dominio sobre el cual la función está definida. El conjunto de todos los valores $f(x)$ será la imagen de f o $Img(f)$. No a todo x le corresponde necesariamente una y. Si todo x tiene una $y = f(x)$ entonces el dominio será todo $\mathbb{R}$. Tampoco necesariamente $Img(f) = \mathbb{R}$.
Una función real de una variable real puede representarse sobre un plano gracias a unos ejes coordenados. El conjunto de todos los valores (x, y) del plano para los cuales $y = f(x)$ se denomina gráfica de la función f.

Podemos, por ejemplo, considerar la función real siguiente

$$y = \frac{1}{5}x^2$$

Se trata de una parábola que podemos dibujar fácilmente dando valores a x. Así para $x = 0$ tendremos que $y = 0$, para $x = 1$ tendremos $y = 0{,}2$ y así sucesivamente. Lo curioso es que para valores negativos de x tendremos los mismos valores de y que para los valores positivos de x. En definitiva, tendremos los pares (0,0), (1,0.2), (2,0.8), (3,1.8), (4,3.2), (5,5.0), (6,7.2)... (-1,0.2), (-2,0.8), (-3,1.8), (-4,3.2), (-5,5.0), (-6,7.2)... En donde hemos tomado el convenio de un punto como si fuera una coma decimal. Si dibujamos la gráfica correspondiente nos saldrá los siguiente:



En este caso podremos introducir cualquier valor de x en la función, así que el dominio será $Dom(f) = \mathbb{R}$. Sin embargo, la imagen no será $\mathbb{R}$, pues no hay manera de que y tenga valor negativo si x es real. La imagen será solamente la parte positiva del eje y, es decir $Img(f) = \mathbb{R}^+$.

En general no necesitaremos dibujar la gráfica de una función para saber su domino e imagen. Bastará analizar la ecuación que nos define la función. Así por ejemplo, en la función

$$f(x) = \frac{1}{3-x}$$

vemos que hay problemas cuando $x = 3$, pues en ese caso tendremos una división por cero. Podemos usar cualquier valor de $\mathbb{R}$ salvo ese valor, así que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

En la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

habrá problemas cuando x^2 sea menor que 9, pues en ese caso tendremos la raíz cuadrada de un número negativo y eso no está definido en $\mathbb{R}$ (sí en $\mathbb{C}$). El umbral para el que eso sucede es cuando $x^2 = 9$, es decir para $x = \pm 3$. Es decir, que el intervalo $(-3, 3)$ está excluido. Por tanto, en este caso, $Dom(f) = \mathbb{R} - (-3, 3)$.

Veamos otro ejemplo. La función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$$

no estará definida para cualquier valor que haga negativo lo que hay dentro de la raíz. Esto sucederá cuando x sea negativo o esté entre cero y 2. Tampoco está definida para $x = 2$, pues en ese caso tenemos una división por cero. Así que $Dom(f) = \mathbb{R} - (-\infty, 2]$.

10.3. Límite finito de una función en un punto

Consideremos una función real $f(x)$ definida en cierto dominio, aunque no necesariamente para $x = a$. Deseamos saber qué valor tiene esa función cuando nos aproximamos tanto como queramos a cierto punto $x = a$. Si tal valor L existe entonces lo simbolizaremos del siguiente modo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiene a a es igual a L.

Podemos además considerar el límite por la izquierda de a

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

y el límite por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Para que exista el límite de una función en un punto, tanto el límite por la izquierda como el límite por la derecha deben existir y coincidir.

Obviamente, cuando tenemos casos muy sencillos como para un punto $x = a$ que pertenece al dominio entonces L no será más que el valor de la función en ese punto. Así, para nuestro primer ejemplo tendremos que el límite para cuando x tiene a 1 es:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{5}x^2 = \frac{1}{5}1^2 = \frac{1}{5}.$$

No obstante no necesariamente el límite de una función en un punto tiene que coincidir con el valor de la función en ese punto, como veremos en los ejemplos posteriores.

Podemos enumerar algunas propiedades del límite en los siguientes puntos:

Propiedades

- Para que el límite de una función en un punto exista, tanto el límite por la izquierda como el límite por la derecha deben existir y coincidir.
- Cuando los límites de una función por la izquierda y por la derecha no coinciden entonces no existe límite de la función en dicho punto.
- El valor que toma una función en un punto no tiene que coincidir necesariamente con el valor del límite de esa función cuando se tiende a ese punto.
- Tampoco es necesario que exista imagen de una función en un punto para que exista el límite de esa función en ese punto.

EJEMPLO 1

Calcular el límite cuando x tiende a 1 de la siguiente función

$$\text{f(x)}=\begin{cases} 5-2x & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Solución:

Obsérvese que la función no está definida para $x = 1$, pues tenemos valores asignados para valores mayores y menores a 1, pero no para exactamente 1. Es decir, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

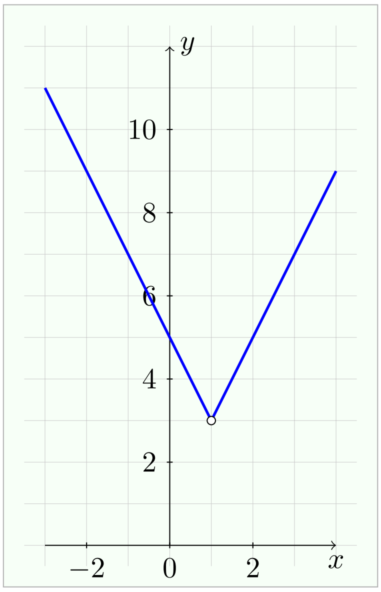
Los valores de x más pequeños que 1 según nos aproximamos a por la izquierda 1 nos darán el límite por la izquierda de 1 .

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

Los valores de x más grandes que 1 según x tiende hacia 1 por la derecha nos darán el límite por la derecha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3.$$

Ambos límites coinciden, así que



$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

Por tanto existe el límite en ese punto, aunque la función no tiene imagen en ese punto.

EJEMPLO 2

Calcular el límite cuando x tiene a 1 de la siguiente función

$$\text{f(x)}=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 9 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Solución:
Los valores de x más pequeños que 1 según nos aproximamos a 1 por la izquierda nos darán el límite por la izquierda de $f(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

Los valores de x más grandes que 1 según x tiende a 1 por la derecha nos darán el límite por la derecha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3.$$

Ambos límites coinciden, así que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

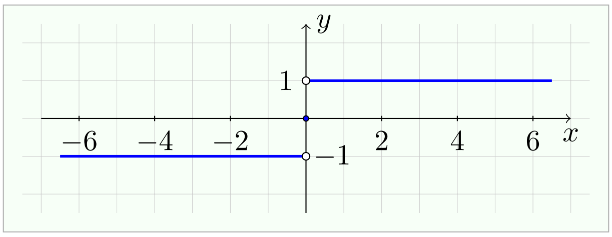
Sin embargo, 3 no es el valor de la función en ese punto, sino 9.

EJEMPLO 3

Calcular el límite cuando x tiene a 0 de la siguiente función:

$$\text{f(x)}=\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:
En este caso vemos que la función está definida para $x = 0$, pero este valor no coincidirá con los límites por la izquierda y por derecha.



Los valores de x más pequeños que cero según nos aproximamos a 0 por la izquierda nos darán el límite por la izquierda

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

Los valores de x más grandes que 0 según se tiende a 0 por la derecha nos darán el límite por la derecha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$$

Los límites no coinciden, así que no existe el límite de la función en 0.

10.3.1. Definición de límite finito de una función en un punto

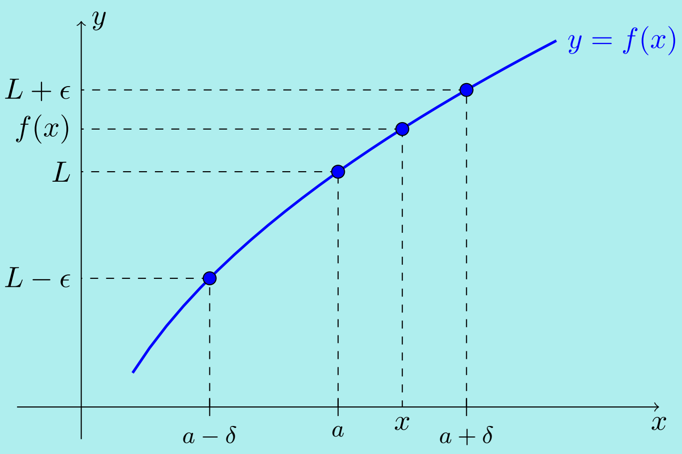
Lo que acabamos de ver nos da una muy buena idea de lo que es el límite finito de una función en un punto. Sin embargo si queremos ser rigurosos hay que usar una definición matemática al uso de "tipo épsilon-delta". Básicamente la delta nos da una pequeña variación a un lado y otro de un punto del eje x, mientras el épsilon nos da sus imágenes.

Definición

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiene a un valor finito a es el número real L, si sólo si, para todo $\epsilon > 0$, tan pequeño como deseemos, existe un $\delta > 0$, tal que si $a - \delta < x < a + \delta$ y $x \neq a$, entonces se cumple que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.
Entonces lo escribimos simbólicamente de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

que leemos como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L".



Si nos fijamos en la gráfica anterior vemos que si el valor de ϵ disminuye tanto como se desee entonces también disminuye el valor de δ con lo cual los intervalos $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ y $(a - \delta, a + \delta)$ se hacen más estrechos, pero si x pertenece al último intervalo y $x \neq a$, su imagen $f(x)$ seguirá perteneciendo al intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.
Esta definición abstracta se puede usar a la hora de calcular este tipo de límites, aunque en general no será necesario.

10.4. Límite infinito de una función en un punto

Hemos visto que en circunstancias normales el límite de una función en un punto suele ser el valor de esa función en ese punto y que ese valor del límite es finito. Sin embargo esto no siempre es así. Puede ocurrir, por ejemplo, que la función crezca cada vez más conforme nos acercamos a un punto de tal modo que el límite ese punto sea infinito. Es decir, que el "valor de la función" en ese punto sea infinito. Esto suele denotar un comportamiento asintótico, en concreto la existencia de una asíntota vertical en un punto a si el límite de la función cuando x tiende a ese a es infinito.
Aunque aquí estamos usando gráficas de funciones para ejemplificar el concepto de límite de distinto tipo, la situación suele ser la contraria y sucede que si sabemos calcular límites esto nos permitirá representar funciones con mayor rigurosidad.

Podemos encontrarnos con tres situaciones distintas para el límite infinito de una función real $y = f(x)$ cuando $x \to a$. En todos estos casos diremos que hay una asíntota en $x = a$.

- **Caso** $+\infty$
  En este caso el valor de la función crece sin parar según nos aproximamos hacia a tanto por la izquierda como por la derecha. Es decir, tanto el límite por la izquierda como el límite por la

derecha es $+\infty$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

Así que como ambos límites coinciden y el límite existe

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Es la situación dibujada en la parte (a) de la gráfica siguiente, en la que la asíntota ha sido representa por una línea en a.

- **Caso** $-\infty$
  En este caso el valor de $f(x)$ disminuye cada vez más según nos acercamos hacia a tanto por la izquierda como por la derecha, así que

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

  y por tanto

  $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

  Es la situación representada en la parte (b) de la figura.

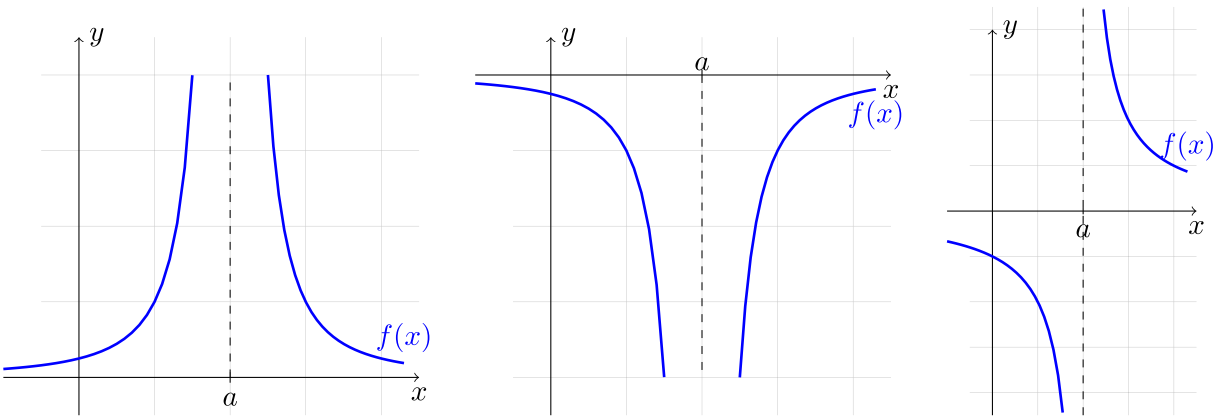
- **Caso** $-\infty$ **y** $+\infty$
  En este caso la tendencia por una lado y por otro es distinta. Así que o bien

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty,$$

  que es la situación representada en la parte (c) de la figura, o bien

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

  que es la contraria. Por tanto, como los límites no coinciden, diremos que no existe límite cuando $x \to a$ en ambos casos.



(a) (b) (c)

10.4.1. Definición de límite infinito de una función en un punto

De nuevo podemos escribir una definición formal rigurosa de tipo épsilon-delta.

Definición

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiene a un valor finito a es $+\infty$ si sólo si para todo número positivo M, que puede ser tan grande como se desee, existe un $\delta > 0$, tal que si $a-\delta < x < a+\delta$ y $x \neq a$, se cumple que $f(x) > M$. En este caso lo escribiremo simbólicamente de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

y es la situación representa en la parte (a) de la siguiente figura.

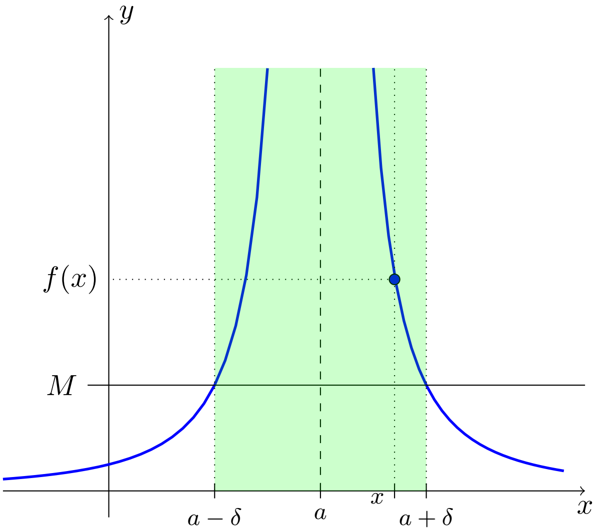
Naturalmente habrá una definición equivalente para el caso contrario.

Definición

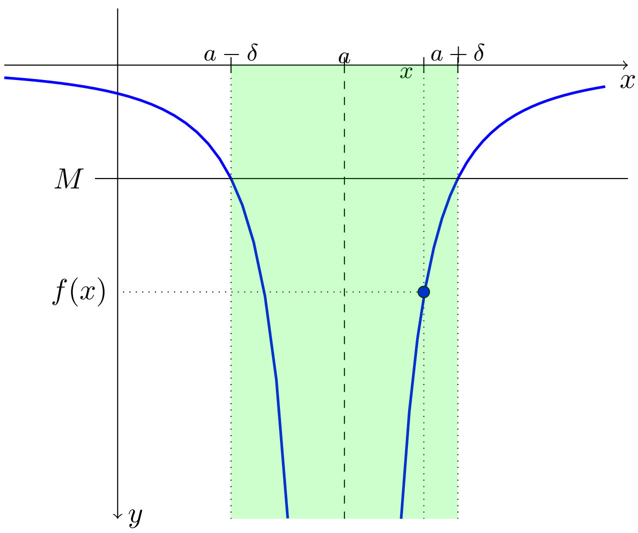
El límite de una función $f(x)$ cuando x tiene a un valor finito a es $-\infty$ si sólo si para todo número negativo M, que puede ser tan pequeño como se desee, existe un $\delta > 0$, tal que si $a-\delta < x < a+\delta$ y $x \neq a$, se cumple que $f(x) < M$. En este caso lo escribiremo simbólicamente de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

y es la situación representa en la parte (b) de la siguiente figura.



(a)



(b)

Si nos fijamos en las figuras, en a habrá asíntotas verticales (líneas discontinuas). La función nunca llegará a tocar esas asíntotas. Si nos movemos hacia a en el eje x, tanto por una lado como por el otro, la función se aproximarán más a esas asíntotas conforme nos acercamos al punto a, pero nunca la alcanzará, salvo en a, valor para el cual la gráfica de la función toca la asíntota pero sólo cuando alcanza un valor infinito. Esto es lo que queremos expresar con el valor del límite en ese punto.

EJEMPLO 4

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2}$$

Solución:
La función tiene un problema para $x = 5$ pues ahí no está definida al darse una división por cero. Como el numerador es fijo, lo que está denotando está situación es que cuando más nos acerquemos a 5 más pequeño será el denominador y por tanto mayor será el valor de $f(x)$. El límite será infinito, porque además el cuadrado nos garantizará que tanto la situación por la izquierda como por la derecha sea la misma. Así que

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$$

Corresponde al caso (a) de la figura anterior, en la que $a = 5$.

———.———

Esta situación en la que se divide por cero para algún valor suele ser habitual y corresponde a la presencia de asíntotas verticales. Un manera de encontrar esta el punto en el que tenemos la asíntota vertical es buscar cuándo se anula el denominador. Por ejemplo, si tenemos

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - 5}$$

Buscaremos las raíces (soluciones) de la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$, que es una ecuación de segundo grado (si es un polinomio de mayor grado podemos probar por Ruffini a la hora de obtener raíces enteras). Es fácil ver que tiene como soluciones $x = -5$ y $x = 1$, así que en esos dos puntos tendremos asíntotas verticales.

En este caso no hay límites en esos puntos porque los límites por la izquierda y por la derecha en ambos puntos no coinciden:

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{1}{x^2 + 4x - 5} = +\infty, \quad \lim_{x \to -5^+} \frac{1}{x^2 + 4x - 5} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 + 4x - 5} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 + 4x - 5} = +\infty$$

Si en lugar de esa función tenemos esta otra

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5},$$

al no tener $x^2 + 4x + 5 = 0$ soluciones reales (sí las tiene complejas) no tenemos puntos en donde haya asíntotas verticales.

10.5. Límite de una función en el infinito

Muchas veces una función crecerá según aumentamos el valor de x. Es fácil ver que cuando esa x tiende a un valor arbitrariamente grande el valor de la función $y = f(x)$ también lo hace. En el límite en el que x tiende a infinito el valor de la función será entonces infinito.
Esto pasa por ejemplo para $f(x) = x + 1$ o para $f(x) = x^2 + 3$. Según aumentamos el valor de x lo hace el de $f(x)$ y en el infinito tendremos que

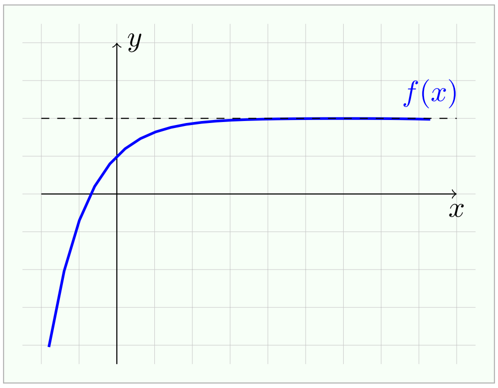
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

Naturalmente puede ocurrir que el valor de la función disminuya según aumentamos x de tal modo que en el infinito el valor de la función es $-\infty$. Eso ocurre, por ejemplo, para $f(x) = -x^2 + 3$. En ese caso lo expresaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

El caso más interesante se da cuando la función tiende hacia un valor fijo según aumentamos x. Pero ese valor sólo podrá ser alcanzado en el infinito. Esta situación denota la presencia de una asíntota horizontal. Nos podemos acercar todo lo que queramos a ese valor, pero nunca lo alcanzaremos, así que la gráfica de la función nunca tocará la asíntota horizontal.

Un ejemplo de este caso lo podemos ver en la siguiente figura para la función $f(x) = 2 - e^{-x}$. Según nos movemos hacia valores más grandes de x la función se acerca cada vez más a 2.



Esto el lógico porque la parte de la exponencial es cada vez más pequeña hasta que es casi cero, siendo el 2 del primer sumando de la función el que más contribuye. En el infinito la parte de la exponencial es cero y nos queda solamente 2. Así que podemos decir que

$$\lim_{x\to\infty} (2 - e^{-x}) = 2$$

Por último, tendremos la situación en la que no existirá límite en el infinito, por ejemplo cuando a lo largo del eje x tenemos situadas una infinidad de asíntotas verticales, como pueda ser para $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Como siempre tendremos unas definiciones rigurosas. para las dos primeras situaciones

Definición

Tendremos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si sólo si para cualquier número positivo M, tan grande como se desee, existe otro número positivo N tal que si $x > N$, se cumple que $f(x) > M$.

Tendremos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

si sólo si para cualquier número negativo M, tan pequeño como se desee, existe otro número positivo N tal que si $x > N$, se cumple que $f(x) < M$.

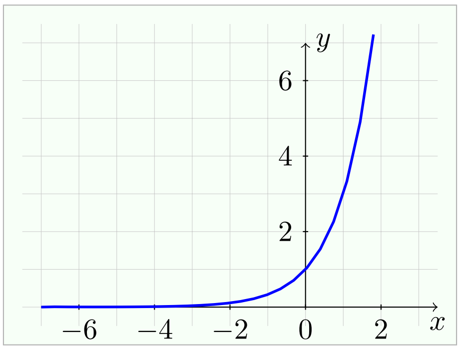
EJEMPLO 5

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to+\infty} 3^x$$

Solución:
la función, que es una exponencial de base 3, crece sin parar conforme aumentamos x, o lo que es lo mismo 3 elevado a infinito es obviamente infinito, así que

$$\lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$$



EJEMPLO 6

Calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x}$$

Solución:
Como podemos ver, se trata de la misma función. Pero nos piden dos límites distinto.
En el primer caso vemos que para $x = 0$ el denominar se anula mientras el numerador vale 2, así que habrá un comportamiento asintótico vertical en ese punto. Es fácil comprobar que por la izquierda el valor de la función disminuye según nos acercamos a $x = 0$ y por la derecha aumenta. Así que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x} = \infty,$$

Como ambos límites no coinciden entonces no existe límite para cuando x tiende a cero.

En el segundo caso nos encontramos con una situación novedosa. Si directamente metemos un infinito en donde ponga x obtendremos $\frac{\infty}{\infty}$. Pero podemos evitar esta indeterminación manipulando un poco la función

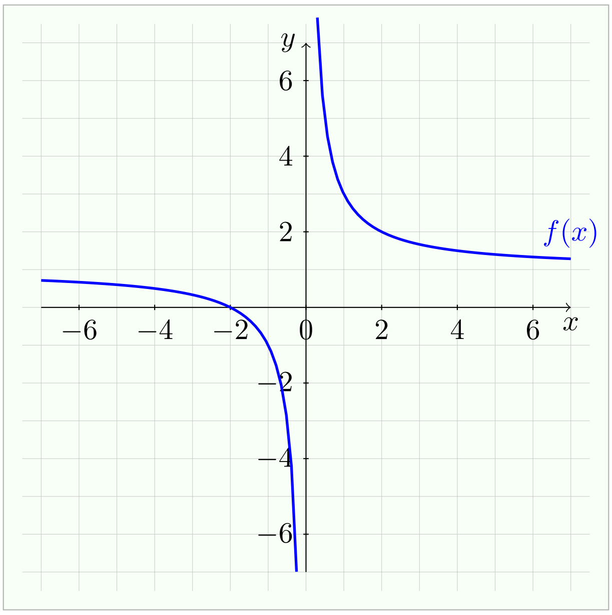
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

El segundo sumando es obviamente cero pues cualquier número fijo dividido por infinito es cero y sólo nos queda el 1 así que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$$

Es frecuente que nos encontremos con este tipo de situaciones. Si directamente no podemos calcular un límite de una función lo ideal es que manipulemos primero esa función hasta que adopte una forma en la que sí sea posible calcular su límite.

A partir de los resultados anteriores podemos finalmente dibujar la gráfica de la función:



10.6. Cálculo de límites

Básicamente ya hemos visto todos los casos con los que nos podremos encontrar, aunque no sepamos solucionar algunos de ellos. Para esta tarea nos podemos vales de una serie de propiedades que nos faciliten el cálculo.

Propiedades

El límite de una suma es la suma de sus límites

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

El límite de un producto es el producto de sus límites

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

El límite de un cociente es el cociente de sus límites

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{pero para que exista } \lim_{x\to a} g(x) = L_2 \neq 0$$

Análogamente para el límite de una potencia

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)} = L_1^{L_2}, \text{pero para que exista } \lim_{x\to a} f(x) = L_1 \geqq 0$$

Finalmente, si $f(x) > 0$ para todo $x \in Dom(f)$ y $b > 0,\ b \neq 1$ se cumple

$$\lim_{x\to a} [\log_b f(x)] = \log_b[\lim_{x\to a} f(x)] = \log_b L_1$$

10.7. Resolución de indeterminaciones

Desgraciadamente no siempre nos encontramos con situaciones que podamos resolver fácilmente, a veces nos enfrentamos a indeterminaciones que nos impiden calcular un límite de forma inmediata. Para los casos vistos en las propiedades anteriores nos podemos encontrar con las siguientes indeterminaciones:

$$\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty$$

Si nos encontramos con alguna de estas indeterminaciones no significa necesariamente que el límite no exista, sino que es indeterminado de forma inmediata y que tendremos usar algún método para hallarlo. Para cada tipo de indeterminación podremos aplicar un método.

10.7.1. Indeterminación $\infty - \infty$

En este caso suele bastar con realizar la operación indicada para que desaparezca la indeterminación. Si aparecen radicales entonces basta con multiplicar y dividir por la expresión conjugada. Veamos los distintos casos uno por uno.

EJEMPLO 7

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x^2}{x^2-4} \right)$$

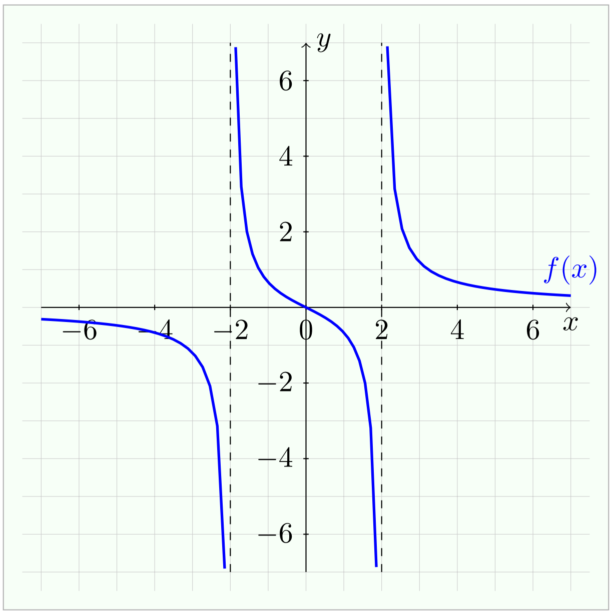
Solución:
Directamente obtenemos la indeterminación $\infty - \infty$, pero si hacemos esa resta

$$\left(\frac{x}{x-2} - \frac{x^2}{x^2-4} \right) = \frac{x^2+2x-x^2}{x^2-4} = \frac{2x}{x^2-4}$$

Aún así el límite no existe, pues

$$\lim_{x\to 2^-} = \frac{2x}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} = \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$$

La situación la podemos ver claramente si representamos la gráfica de esa función :



EJEMPLO 8

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$$

Solución:
Claramente es un indeterminación $\infty-\infty$. Si multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada no alternamos el valor de la expresiín, pero podemos así eliminar la indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$$

10.7.2. Indeterminación $0\cdot\infty$

Podemos intentar eliminar este tipo de indeterminación efectuado las operaciones indicadas. Puede que salga otro tipo de indeterminación pero en ese caso aplicaremos el método correspondiente.

EJEMPLO 9

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)\frac{1}{x}\right]$$

Solución:
Es claramente una indeterminación $0\cdot\infty$. Si efectuamos las operaciones

$$\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}\right)=\frac{0}{0},$$

que es la indeterminación que vamos a ver justo a continuación.

10.7.3. Indeterminación $\frac{0}{0}$

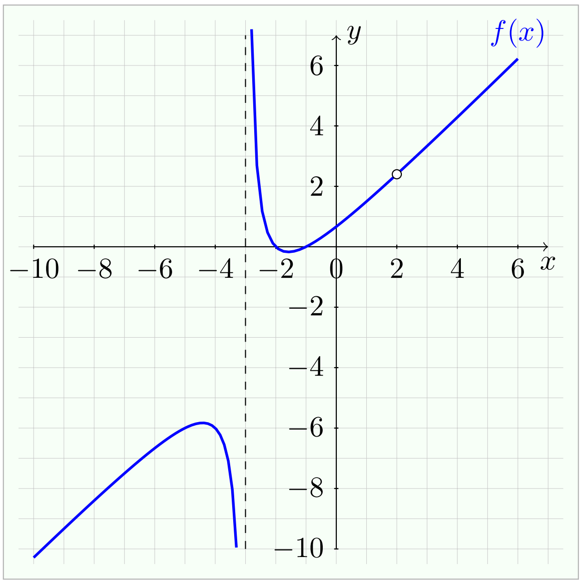
En este caso habría que diferenciar dos posibilidades. La primera será cuando tengamos un cociente de polinomios y la segunda un cociente de radicales.
Si se trata de un cociente de polinomios hay que intentar descomponer alguno de ellos en binomios, algo que se puede hacer fácilmente si tiene raíces reales. Si se trata de un cociente entre radicales hay que multiplicar y dividir por la expresión conjugada correspondiente.

EJEMPLO 10

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-6}$$

Solución:
Es claramente una indeterminación $\frac{0}{0}$ con sólo introducir un 2 en cada una de las x. De hecho, la función no está definida en ese punto. Si representamos gráficamente esa función será algo así:



Obsérvese el círculo blanco que denota la falta de imagen para $x = 2$. Sin embargo, se puede intentar obtener su límite. Como $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ tiene como raíz a 2 podemos respresarlo como

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(x^2 + 3x + 2)$$

y lo mismo para el polinomio del denominador

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Así que

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 2)(x^2 + 3x + 2)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{(x^2 + 3x + 2)}{(x + 3)}$$

y

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 3x + 2)}{(x + 3)} = \frac{12}{5}$$

Por tanto, pese a que la función no está definida en ese punto, sí que existe límite cuando x tiende a ese punto.

EJEMPLO 11

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} \right)$$

Solución:
Es justamente el caso con el que nos encontramos antes.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$$

Si multiplicamos arriba y abajo por $1 + \sqrt{x+1}$ y operamos obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{x\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{1 \cdot (1 + \sqrt{1})} = -\frac{1}{2}$$

10.7.4. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Suele tratarse de dos expresiones del mismo tipo, como por ejemplo polinómicas, exponenciales o radicales. Si es el caso polinómico haremos desaparecer la indeterminación dividiendo numerador y denominador por la potencia de x que sea mayor. Si es una exponencial dividiremos numerador y denominador por la potencia respectiva y si se trata de radicales se manipulará la expresión de tal modo que en lugar de un cociente de raíces se tenga la raíz de un cociente y así poder aplicar la propiedad de que el límite de una raíz es la raíz del límite. En este último caso puede que tengamos que aplicar también el primer sistema.
Veamos algunos ejemplos ilustrativos.

EJEMPLO 12

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+3}{3x^2-5x}$$

Solución:
Claramente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+3}{3x^2-5x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Pero, como hemos comentado antes, esta indeterminación desaparece si dividimos por la potencia de x más grande, que en este caso será la potencia 2. Es decir, si dividimos numerador y denominador por x^2 obtendremos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+3}{3x^2-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2/x^2+3/x^2}{3x^2/x^2-5x/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6+3/x^2}{3-5x/x^2} = \frac{6+0}{3-0} = 2$$

EJEMPLO 13

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-2}{2^x+2}$$

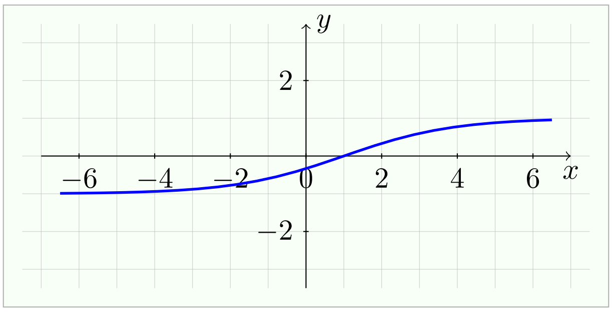
Solución:
Es una caso de exponenciales de base 2, que se resuelve dividiendo nummerador y denominador por la exponencial correspondiente. De este modo, aunque en un principio tenemos esta indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-2}{2^x+2} = \frac{\infty}{\infty},$$

si dividimos numerador y denominador por 2^x

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-2}{2^x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x/2^x-2/2^x}{2^x/2^x+2/2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2/2^x}{1+2/2^x} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

La interpretación es clara. Según x tiene a infinito la función tiene a 1, como se muestra en la siguiente gráfica:



EJEMPLO 14

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

Solución:
Nuevamente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Es el límite de una función que es un cociente de raíces, pero podemos expresar esa función como la raíz de un cociente y entonces tomar la raíz del límite de ese cociente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2}},$$

que es justo el primer caso que hemos visto para este tipo de indeterminación, así que dividimos numerador y denominador por x^2 y obteneos el límite:

$$\sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2/x^2 - 2x/x^2}{x^2/x^2 + 2/x^2}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 2/x}{1 + 2/x^2}} = \sqrt{\frac{2-0}{1+0}} = \sqrt{2}$$

10.7.5. Indeterminación 1^∞

En este caso si a es un número real o bien $\pm\infty$ y

$$\lim_{x \to a} F(x) = +\infty$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \left(1 + \frac{1}{F(x)}\right)^{F(x)} = e,$$

que es el famoso número e, base del logaritmo natural. Veamos un ejemplo de cómo usar esta propiedad a la hora de resolver este tipo de indeterminaciones.

EJEMPLO 15

Calcular el límite siguiente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x = 1^\infty$$

Pero si escribimos esa expresión en la forma

$$\left(1+\frac{1}{F(x)}\right)^{F(x)}$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = e^2$$

10.8. Límites de funciones trigonométricas

En este caso nos valdremos de las siguientes propiedades de límites de las funciones trigonométricas. Distinguiremos varios casos. El primero corresponderá a los casos en los que x tiende a un valor a real que esté en el dominio. Para ese caso se cumple que

$$\lim_{x\to a}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a, \quad \lim_{x\to a}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$$

En los casos en los x tienda a infinito las funciones trigonométricas per se no tienen límite ni cuando cuando $x\to+\infty$ ni cuando $x\to-\infty$, pero obviamente sí existirán dichos límites cuando esas funciones están divididas por alguna expresión en x como, por ejemplo, en estas dos funciones:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$$

El caso en el que x tiende a cero corresponde al primer caso que acabamos de ver y son límites directos que se pueden calcular sin más que calcular el valor de la función correspondiente en el cero. Pero las siguientes posibilidades

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

pueden sernos útiles a la hora de calcular límites complicados del tipo $x\to 0$ en los que aparezcan este tipo de funciones. Sólo queda recordar que para el caso del coseno no existe dicho límite pues

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x} = \infty$$

EJEMPLO 16

Resolver el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 1 \cdot 2 = 2$$

EJEMPLO 17

Resolver el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} 3x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \cdot \frac{4x}{3x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4x}{3x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

10.9. Nota final

Por último conviene recordar que no hemos visto todas las situaciones posibles con las que nos podemos encontrar a la hora de calcular límites, ni tampoco todos los sistemas de resolución. Esta unidad sólo trata de dar una visión sobre los casos más sencillos.