udima
UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LAS UNIDADES 4, 5 Y 6

ASIGNATURA:	Estadística y Probabilidad / Estadística / Fundamentos de Estadística
Profesor responsable de la Asignatura:	Vanessa Fernández Chamorro
Tipo de actividad:	Actividad de Evaluación Continua de las Unidades 4, 5 y 6

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

La realización de esta actividad de evaluación continua va a permitir comprobar los avances realizados por el estudiante mediante la aplicación práctica de los conceptos teóricos desarrollados en las unidades correspondientes. El objetivo que se pretende conseguir es que el estudiante sea capaz de, a partir de un enunciado, encontrar las herramientas de Estadística necesarias para resolver el problema y que sea capaz de aplicarlas con éxito.

La evaluación de este trabajo tendrán en cuenta los siguientes puntos:

1. Correcta aplicación de las expresiones matemáticas asociadas a cada uno de los enunciados propuestos y relación de conceptos vistos en estas unidades.
2. Procedimiento utilizado para llevar a cabo dicha aplicación.
3. Conclusión alcanzada con el análisis de los resultados obtenidos en cada caso.

No hay que olvidar argumentar los pasos que se van dando. No basta con dar simplemente la solución.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

PROBLEMA 1

El 70% de los alumnos de un instituto tiene teléfono móvil.
¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 150 alumnos haya más de 100 con teléfono móvil?

Pista: Aproximar una Binomial a una Normal.

PROBLEMA 2

Calcular las siguientes probabilidades para distribuciones normales:

a) $P(X \leqslant 173)$ siendo X una variable N (173, 6)

b) $P(X = 174)$ siendo X una variable N (173, 6)

c) $P(174 < X < 180{,}5)$ siendo X una variable N (173, 6)

d) $P(X \geqslant 180{,}5)$ siendo X una variable N (173, 6)

PROBLEMA 3

El número de errores por factura que un contable comete es una variable aleatoria discreta de Distribución de Poisson de parámetro λ.

a) Calcular la probabilidad de que no cometa ningún error.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que cometa algún error?.

c) Sabiendo que se ha cometido al menos un error, ¿cuál es la probabilidad de que no cometa más de cinco?

PROBLEMA 4

Sea X la variable aleatoria que designa el número de coches vendidos cada semana en un establecimiento. Se sabe que X tiene la siguiente función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ó más
P(X=x)	0,04	0,04	K	0,11	0,3	0,23	0,1	0,05	0,03

a) Hallar el valor de K.

b) Determinar la Función de Distribución.

c) Calcular las siguientes probabilidades: $P(2 < X \leqslant 5)$; $P(X \geqslant 7)$; $P(X \leqslant 6 / X > 3)$

PROBLEMA 5

Sea X una variable aleatoria con función de densidad :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 2 \\ k & \text{para } 2 \leq x \leq 4 \\ 2\text{k} & \text{para } 4 < x \leq 6 \\ 0 & \text{para } x > 6 \end{cases}$$

a) Calcular el valor de k para que f sea Función de Densidad.

b) Hallar la expresión de la Función de Distribución.

c) Calcular $P(3 \leq X \leqslant 5)$

d) Calcular la Media de X.

e) Calcular la Mediana de X.

PROBLEMA 6

a) En una fábrica de placas solares, la probabilidad de que una determinada pieza esté defectuosa es de 0,01. Se toman 15 piezas de ese tipo. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa?

b) Sea X una variable aleatoria de N (0,1). Calcular K sabiendo $P(X \geq K)$ = 0,1762.

PROBLEMA 7

Una empresa que revende componentes toma una muestra de 80 unidades en cada lote que le envía un proveedor. Si en el lote no hay más de dos componentes defectuosos acepta el lote, en caso contrario lo rechaza. Un proveedor chino envía un lote en el que hay un 2 % de componentes defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa acepte el lote?
Pistas: a) Aproximar una Binomial a una Poisson.

PROBLEMA 8

Sean X e Y dos variables aleatorias con la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x) = \begin{cases} kx(x+y) & \text{para } 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & \text{para } el\ resto \end{cases}$$

a) Calcular el valor de K.

b) Calcular $P(X<0{,}7)$

c) Calcular $P(X<Y)$

d) Calcular $P(Y>0{,}5 / X>0{,}5)$

INSTRUCCIONES PARA LA REALIZACIÓN Y ENTREGA DE LA ACTIVIDAD

Criterios de Calificación

1. La presentación, portada con el nombre completo del alumno/a e índice.
2. El correcto planteamiento de los ejercicios.
3. La correcta solución de los ejercicios.
4. La solución esté bien argumentada.
5. Realización de forma individual.

Entrega y calificación

La actividad cumplimentada se envía al profesor a través del Buzón de entrega del Aula Virtual. En ese mismo buzón aparece la fecha límite de entrega.
Se recuerda la necesidad de identificar correctamente el documento de entrega con el nombre y apellido del alumno y el nombre de la AEC.

El formato más óptimo es .PDF

La calificación obtenida se podrá consultar con carácter permanente en el apartado CALIFICACIONES del Aula Virtual.

Problema 1

70% Teléfono móvil $= p = 0'70$

$n = 150$

$B(n, p) = B(150, 0'70)$

$X =$ v.a. los alumnos que tienen teléfono móvil.

$$P(X \geq 100) = \binom{150}{100} \cdot (0'70)^{100} \cdot (0'30)^{150-100} + \dots +$$

$$\binom{150}{150} \cdot (0'70)^{150} \cdot (0'30)^{0}$$

Si lo hacemos así, hay que calcular 50 términos y es muy tediosa la suma.

Entonces aproximamos a la normal:

$np = \mu$ $\qquad \mu = 105$

$\sqrt{npq} = \sigma$ $\qquad \sigma = 5'61$

$N(105, 5'61)$

$$P(X \geq 100) \underset{\text{tipificamos}}{=} P\left(Z \geq \frac{100 - 105}{5'61}\right)$$

$$= P(Z \geq -0'89) = P(Z \leq 0'89) \underset{\text{miramos tabla.}}{=} 0'8133$$

Problema 2

$N(173, 6) \longrightarrow N(0,1)$ $\qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$z = \frac{x-173}{6}$

a) $P(X \leq 173) = P\left(Z \leq \frac{173-173}{6}\right) = P(Z \leq 0) =$
$= 0'50$ //

b) $P(X = 174) = 0$ //

c) $P(174 < X < 180'5) = P(X < 180'5) - P(X < 174) =$

$= P\left(Z < \frac{180'5-173}{6}\right) - P\left(Z < \frac{174-173}{6}\right)$

$= P(Z < 1'25) - P(Z < 0'17)$

$= 0'8944 - 0'5675 = 0'3269$ //

d) $P(X \geq 180'5) = P\left(Z \geq \frac{180'5-173}{6}\right) =$

$= P(Z \geq 1'25) = 1 - P(Z \leq 1'25) =$

$= 1 - 0'8944 = 0'1056$ //

Problema 3

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

a) $P(X=0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$ //

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0)$
$= 1 - e^{-\lambda}$

c) $P(X \leq 5 / X \geq 1) = \frac{P(1 \leq X \leq 5)}{P(X \geq 1)}$

$$= \frac{\sum_{1}^{5} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}}{1 - e^{-\lambda}} \quad //$$

Problema 4

a) $\sum_{0}^{\infty} P(X = x) = 1$

$$0'04 + 0'04 + k + 0'11 + 0'3 + 0'23 + 0'1 + 0'05 + 0'03 = 1$$

$\Longrightarrow k = 0'1$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0'04 & 0 \leq x < 1 \\ 0'08 & 1 \leq x < 2 \\ 0'18 & 2 \leq x < 3 \\ 0'29 & 3 \leq x \;\; 4 \\ 0'59 & 4 \leq x < 5 \\ 0'82 & 5 \leq x < 6 \\ 0'92 & 6 \leq x < 7 \\ 0'97 & 7 \leq x < 8 \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$

c) $P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = 0'82 - 0'18 =$

$= 0'64$

o

$P(2 < X \leq 5) = 0'11 + 0'3 + 0'23 = 0'64.$

$$P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X \geq 8) = 0'05 + 0'03 =$$
$$= 0'08.$$

o'

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6) =$$
$$= 1 - 0'92 =$$
$$= 0'08.$$

$$P(X \leq 6 / X > 3) = \frac{P(3 < X \leq 6)}{P(X > 3)} = \frac{F(6) - F(3)}{1 - F(3)}$$

$$= \frac{0'92 - 0'29}{1 - 0'29} = 0'8873.$$

Problema 5

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ k & 2 \leq x \leq 4 \\ 2k & 4 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6. \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ si es función de densidad $\Longrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{2} \cancel{0\,dx} + \int_{2}^{4} k\,dx + \int_{4}^{6} 2k\,dx + \int_{6}^{\infty} \cancel{0\,dx}$$

$$= kx\Big]_{2}^{4} + 2kx\Big]_{4}^{6} =$$

$$= k(4-2) + 2k(6-4) =$$

$$= (2k + 4k) = \underline{+6k}$$

$$+6k = 1 \Longrightarrow \boxed{k = \frac{+1}{6}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ kx - 2k & 2 \leq x \leq 4 \\ 2kx - 8k & 4 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases} \longrightarrow \int_2^t k\,dx = kx \Big]_2^t$$

$$= \underline{kt - 2k}.$$

$$P(3 \leq x \leq 5) = \int_3^4 \frac{1}{6}\,dx + \int_4^5 2 \cdot \frac{1}{6}\,dx$$

$$= \frac{1}{6} x \Big]_3^4 + \frac{1}{3} x \Big]_4^5 =$$

$$= \frac{1}{6}(4-3) + \frac{1}{3}(5-4)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} //.$$

$$\text{Media} = \mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$$

$$E(x) = \int_2^4 \frac{1}{6} x\, dx + \int_4^6 \frac{1}{3} x\, dx$$

$$= \frac{1}{6} \frac{x^2}{2} \Big]_2^4 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} \Big]_4^6 =$$

$$\frac{16}{12} - \frac{4}{12} + \frac{36}{6} - \frac{16}{6} = 1 + \frac{20}{6} =$$

$$= 1 + \frac{10}{3}$$

$$= \frac{13}{3} = 4'\overline{3}$$

la Mediana

$$\int_2^{Me} \frac{1}{6}\, dx = 0'5$$

$$\frac{1}{6} x \Big]_2^{Me} = 0'5$$

$$\frac{1}{6} Me - \frac{1}{6} \cdot 2 = 0'5$$

$$\frac{1}{6} Me - \frac{1}{3} = 0'5$$

$$Me - 2 = 3$$

$$Me = 5 \notin [2,4]$$

$$\int_4^{Me} \frac{1}{3}\, dx = 0'5$$

$$\frac{1}{3} x \Big]_4^{Me} = 0'5$$

$$\frac{1}{3} Me - \frac{1}{3} \cdot 4 = 0'5$$

$$Me - 4 = 1'5$$

$$\boxed{Me = 5'5 \in [4,6]}$$

$$\int_2^4 k\, dx + \int_4^{Me} 2k\, dx = 0'5 \implies Me = 4'5$$

Problema 6

a) $p = 0'01$

$n = 15$

$X =$ nº defectuosa $\rightsquigarrow B(15, 0'01)$

$$P(X=0) = \binom{15}{0} \cdot 0'01^{0} \cdot 0'99^{15}$$

$$= 0'8601 \; //$$

b) $X \rightsquigarrow N(0,1)$

$$P(X \geq k) = 0'1762$$

$$1 - P(X \leq k) = 0'1762$$

$$1 - 0'1762 = P(X \leq k)$$

$$0'8238 = P(X \leq k)$$

$$\underline{\underline{k = 0'93}}$$

Problema 7

$n = 80$

$p = 0'02$

$np = 1'6 < 5$
$\quad\quad\; \| $
$\quad\quad\; \lambda$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P(X \leq 2) =$$

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \frac{1'6^0}{0!} e^{-1'6} + \frac{1'6^1}{1!} e^{-1'6} +$$

$$+ \frac{1'6^2}{2!} e^{-1'6} =$$

$$= e^{-1'6} \left[1 + 1'6 + 1'28 \right] =$$

$$= e^{-1'6} \cdot 3'88 = 0'7834 \; //$$

Problema 8

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(x+y) & 0<x<1 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff \int_0^1\int_0^1 k\,x(x+y)\,dx\,dy = 1$$

$$\iff \int_0^1\int_0^1 (kx^2 + kxy)\,dx\,dy = 1 \iff$$

$$\int_0^1 \frac{kx^3}{3} + \frac{kx^2}{2}y \Big]_0^1 dy = 1 \iff$$

$$\int_0^1 \left(\frac{k}{3} + \frac{ky}{2}\right) dy = 1 \iff$$

$$\frac{k}{3}y + \frac{k}{2}\,y^2/2 \Big]_0^1 = 1 \iff$$

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \implies \frac{7k}{12} = 1 \iff k = 12/7.$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{12}{7}x(x+y)\,dy = \frac{12x^2y}{7} + \frac{12xy^2}{7\cdot 2}\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{12x^2}{7} + \frac{12x}{14} \quad 0<x<1.$$

$$P(X<0'7) = \int_0^{0'7} \left(\frac{12x^2}{7} + \frac{12x}{14}\right) dx = \frac{12x^3}{21} + \frac{12x^2}{28}\Big]_0^{0'7} =$$

$$= 0'406$$

$$P(X < Y) = \int_0^1 \int_0^y \frac{12}{7} x(x+y)\,dx\,dy =$$

$$= 0'357$$

$$P(Y > 0'5 / X > 0'5) = \frac{P(Y > 0'5,\ X > 0'5)}{P(X > 0'5)}$$

$$P(Y > 0'5,\ X > 0'5) = \int_{0'5}^1 \int_{0'5}^1 \frac{12}{7} x(x+y)\,dy\,dx$$

$$= 0'491.$$

$$P(X > 0'5) = \int_{0'5}^1 \frac{12}{7} x\left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 0'821$$

$$P(Y > 0'5 / X > 0'5) = \frac{0'491}{0'821} = 0'598.$$