UNIDAD DIDÁCTICA

9 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS II

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Conocer el concepto de ecuación diferencial de segundo orden.
- Saber resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales.
- Conocer cómo resolver problemas en la frontera para ecuaciones diferenciales lineales.
- Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a circuitos y otros sistemas físicos.
- Uso de la técnica de transformada de Laplace para resolver ecuaciones de diferenciales que incluyan funciones no continuas.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales se dividen en dos grandes grupos: ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Para las primeras, que son más sencillas, se cuenta con métodos y técnicas para la obtención de las soluciones en muchos casos. La situación se invierte en las no lineales, para las que casi nunca podremos encontrar sus soluciones, aunque estas existan. El tema de las ecuaciones no lineales, más allá de las de primer orden, se escapa de los objetivos de estas notas, así que nos centraremos en las lineales. Ahora, en concreto, vamos a ver las ecuaciones lineales de segundo orden.

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden en su forma estándar será así:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$$

A las funciones $a(t)$ y $b(t)$ se las denomina coeficientes. En el caso de que haya una función de t que multiplique al primer sumando, siempre podremos dividir todos los sumandos por esa función para obtener su forma estándar.

Una de estas ecuaciones será homogénea si la función f es igual a cero:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

Y será de coeficientes constantes si las funciones $a(t)$ y $b(t)$ no son funciones de t, sino solo números,

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 1

La ecuación $y'' + 3y = 0$ es una ecuación lineal de segundo orden de coeficientes constantes homogénea.

.../...

.../...

Mientras que $y'' - y' + t^2y = e^t \cos t$ no es de coeficientes constantes ni homogénea, pero sí lineal.

Finalmente, la ecuación $yy'' - t^2y = 0$ no es lineal.

Para ecuaciones con coeficientes no constantes veremos unas propiedades generales y también cómo conseguir en algunos casos las soluciones. Para el caso de coeficientes constantes veremos todos los casos habituales con los que nos podemos encontrar.

2. ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Vamos a ver previamente unas propiedades generales que podremos incluso aplicar al caso de coeficientes constantes.

2.1. SUPERPOSICIÓN LINEAL

Se puede demostrar que si tenemos dos soluciones particulares y_1 e y_2 cualesquiera y distintas (en concreto, «distintas» significa aquí que sean linealmente independientes) de la ecuación homogénea

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,$$

entonces cualquier combinación lineal de ellas, es decir, del tipo

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

es también solución de la homogénea, en donde c_1 y c_2 son constantes. Esto es lo que a veces se llama **principio de superposición** o **principio de linealidad**. Además, esa solución se llamará **solución general de la ecuación homogénea**.

El que esas dos soluciones particulares sean linealmente independientes quiere decir, en este caso, que una no se puede obtener de la otra mediante su multiplicación con una escalar.

Hay que tener cuidado de no aplicar este resultado a ecuaciones no lineales o a ecuaciones lineales no homogéneas, pues en esos casos este resultado no se mantiene.

Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 2

Por simple inspección se puede comprobar que

$$y_1 = e^t, \qquad y_2 = e^{-t}$$

son soluciones particulares de la ecuación lineal homogénea

$$y'' - y = 0,$$

pues para el primer caso

$$y'_1 = e^t \qquad \rightarrow \qquad y''_1 = e^t \qquad \Rightarrow \qquad y'' - y = e^t - e^t = 0$$

Lo mismo se puede decir para la otra solución con solo tener en cuenta el signo menos. Entonces, por ejemplo, la combinación lineal de esas dos soluciones

$$y = 2y_1 - 3y_2 = 2e^t - 3e^{-t}$$

es también solución, pues

$$y' = 2e^t + 3e^{-t} \qquad \rightarrow \qquad y'' = 2e^t - 3e^{-t},$$

que sustituida en la ecuación se obtiene una expresión coherente:

$$(2e^t - 3e^{-t}) - (2e^t - 3e^{-t}) = 0$$

2.2. PROBLEMA DE VALORES INICIALES

En epígrafes previos vimos que una ecuación de primer orden tiene muchas curvas que son solución de la misma y que la solución en concreto que tengamos depende del dato inicial, que en ese caso era el valor de y para un tiempo igual a cero u otro punto a partir del cual la solución evoluciona. Esto se traducía en que obteníamos una familia de soluciones que dependía de una constante C y que el valor de esa constante se fijaba para la condición inicial dada.

Ahora tendremos una situación similar, solo que habrá que fijar el valor de dos constantes a través de una condición inicial tanto de y como de su derivada en un punto inicial (que no necesariamente es el origen de coordenada ni $t = 0$). Digamos que fijamos desde dónde parte la curva solución y la pendiente (inclinación) con la que lo hace, ya que necesitamos esos datos para fijar una única trayectoria.

De hecho, la solución de una ecuación de segundo orden homogénea siempre tendrá la forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

y la condición inicial

$$y(t_0) = K_0, \qquad y'(t_0) = K_1$$

nos permite saber los valores de c_1 y c_2.

EJEMPLO 3

Hallar la solución para el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución

Hemos visto previamente que una combinación lineal de un par de soluciones es solución. Además, hemos averiguado esa solución general para este caso en concreto, que es de la forma:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Su derivada primera es

$$y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

.../...

.../...

Ahora usamos las condiciones iniciales y obtenemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas en el que la primera ecuación proviene de la condición en y y la segunda de su derivada sin más que sustituir t por el punto inicial, que en este caso es cero. Nos queda:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

Este sistema tiene como soluciones

$$c_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad c_2 = -\frac{1}{2},$$

así que la solución de la homogénea para esas condiciones iniciales será:

$$y = \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t}$$

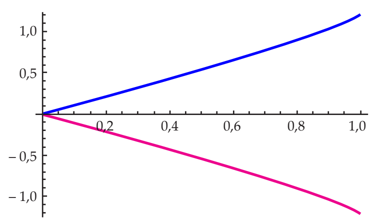
Análogamente, si en el ejemplo anterior hubiéramos tenido un problema de valores iniciales en el que solo cambiamos la condición inicial para la primera derivada:

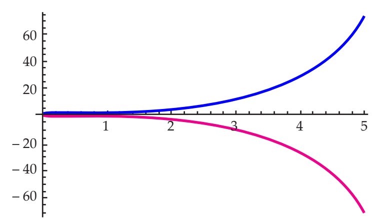
$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Es decir, que la pendiente de salida fuera – 1 en lugar de 1, entonces la solución sería

$$y = -\frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t}$$

Podemos representar ambas soluciones para dos intervalos de t distintos (gráfica de la izquierda entre 0 y 1 y la de la derecha entre 0 y 5) para ver el comportamiento de estas dos soluciones:





.../...

.../...

En el cuadrante superior está representada la primera solución y en el cuadrante inferior la segunda. Obsérvese que ambas empiezan en el mismo punto, que es el origen, y esto viene dado por la condición $y(0) = 0$, pero las pendientes son distintas. En el primer caso, la curva empieza de manera casi lineal con pendiente 1 (gráfica de la izquierda), hasta que para valores superiores de t (gráfica de la derecha) la exponencial gana y los valores de y crecen muy rápidamente. Para el segundo caso la situación es muy parecida, solo que para valores negativos, pues se empieza con pendiente – 1. Nótese que los ejes vertical y horizontal no están a escala en ninguna de las dos gráficas.

Recapitulemos un poco antes de continuar. Cada una de las soluciones y_1 e y_2 de las que hemos hablado es una **solución particular** y para formar la **solución general de la ecuación homogénea** tienen que ser linealmente independientes. Hay que tener cuidado en este punto porque la solución general de la ecuación homogénea

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

no es la solución general de la ecuación no homogénea

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t),$$

ni esta ecuación no homogénea tiene que tener soluciones particulares que sean y_1 o y_2, pese a que la diferencia entre esas dos ecuaciones sea solo la función $f(t)$ y todo lo demás sea igual.

Sin embargo, se puede demostrar que si tenemos la solución general de la ecuación homogénea

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

y una solución particular y_p cualesquiera de su correspondiente no homogénea, entonces la **solución general de la ecuación no homogénea** es la suma de las dos:

$$y = y_h + y_p$$

Todo esto es aplicable tanto a ecuaciones diferenciales de segundo orden de coeficientes no constantes como de coeficientes constantes, ya que estas son un subgrupo de las anteriores. También se pueden generalizar todos estos resultados a ecuaciones lineales de cualquier orden.

Obviamente, el problema es hallar esas soluciones particulares de uno u otro tipo, algo que en el caso más general posible no es trivial. Vamos a ver que para el caso de coeficientes constantes gran parte de los casos están tabulados, sin embargo, si somos capaces de obtener solo una solución particular de la homogénea, se puede conseguir otra que sea linealmente independiente a ella con un método que vamos a ver a continuación.

2.3. OBTENCIÓN DE UNA SOLUCIÓN PARTICULAR SI SE CONOCE YA OTRA

A veces podemos obtener una solución de la ecuación homogénea por simple inspección o por ensayo y error. Conseguir una segunda por esta misma técnica no es fácil, pero existe un procedimiento mediante el cual podemos obtener una segunda solución particular a partir de una primera de una manera sistemática.

De este modo, si tenemos una solución particular y_1, podemos asumir que una segunda será de la forma

$$y_2 = uy_1,$$

en donde u es una función desconocida que podemos averiguar.

Se puede demostrar que cuando tenemos una ecuación lineal homogénea de la forma

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

entonces esa función u será

$$u = \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int a(t)\, dt}\, dt$$

y, por tanto, la solución general de la homogénea será

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

en donde

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int a(t)\, dt}\, dt$$

EJEMPLO 4

Calcular una segunda solución y, por tanto, la solución general de la ecuación homogénea:

$$t^2y'' - ty' + y = 0$$

si una solución particular es $y_1 = t$.

Solución

Lo primero que tenemos que hacer en este caso es operar sobre la ecuación para que el coeficiente que multiplica a la segunda derivada de y sea 1:

$$y'' - \frac{1}{t}\,y' + \frac{1}{t^2}\,y = 0$$

lo que nos dice que

$$a(t) = -\frac{1}{t}$$

Ahora solo tenemos que calcular u:

$$u = \int \frac{1}{t^2}\,e^{\int \frac{1}{t}dt}dt = \int \frac{1}{t^2}\,e^{\ln t}\,dt = \int \frac{1}{t^2}\,tdt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t$$

Así que la segunda solución particular es

$$y_2 = t \ln t$$

y la solución general de la homogénea será:

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1t + c_2t \ln t$$

3. ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN DE COEFICIENTES CONSTANTES

Las ecuaciones lineales de coeficientes constantes se pueden solucionar siempre, sobre todo si son homogéneas. Sus soluciones están tabuladas, solo hay que ver en qué situación nos encontramos y aplicar la «receta» correspondiente.

Además hay muchos casos, como por ejemplo en el circuito eléctrico, donde nos encontramos con este tipo de ecuaciones.

Nos plantean en concreto una ecuación del tipo

$$y'' + ay' + by = 0$$

sobre la que definimos el polinomio característico de esa ecuación como

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

es decir:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

Entonces solo hay tres casos posibles:

3.1. CASO A) CUANDO SE OBTIENEN DOS RAÍCES REALES

Si $a^2 - 4b > 0$, tenemos dos raíces reales:

$$\lambda_1, \lambda_2$$

Se puede demostrar que la solución general de la ecuación homogénea para este caso es siempre:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Veámoslo con un ejemplo sencillo. Si nos piden calcular la solución general de la ecuación

$$y'' - y = 0$$

vemos rápidamente que se trata de una ecuación homogénea lineal de coeficientes constantes de segundo grado. Según la notación que hemos visto sabemos que $a = -1$ y $b = 0$, así que el polinomio característico es en este caso

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

que tiene dos raíces reales y distintas:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1$$

Por consiguiente, la solución general de la homogénea es:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

EJEMPLO 5

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

Solución

Es una ecuación homogénea de coeficientes constantes y su polinomio característico es

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Calculemos las raíces:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Es decir, las raíces son

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2,$$

que son reales y distintas y, por tanto, la solución general de la homogénea es:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

.../...

.../...

Ahora nos falta aplicar los valores iniciales. La condición para y en el origen nos da

$$8 = c_1 + c_2$$

y la condición para su derivada

$$-4 = c_1 - 2c_2$$

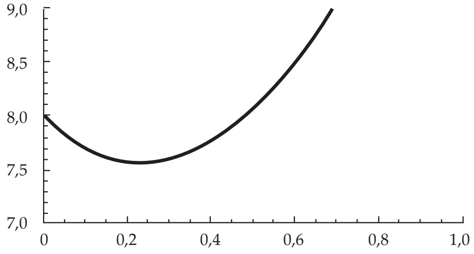
Resolviendo el sistema algebraico de ecuaciones obtenemos que

$$c_1 = c_2 = 4,$$

así que la solución para esos valores iniciales es

$$y = 4e^t + 4e^{-2t}$$

Si dibujamos la curva, vemos que comienza en (0, 8), tal y como dicta la condición inicial, y que la pendiente en ese punto es negativa (tal y como dicta la condición inicial), por lo que la curva va hacia abajo. Sin embargo, al cabo de un tiempo, la exponencial gana y la curva se dispara hacia arriba. Obsérvese que los ejes no están a escala.



3.2. CASO B) CUANDO SE OBTIENE UNA RAÍZ DOBLE

Si $a^2 - 4b = 0$, tenemos una raíz doble:

$$\lambda = -\frac{1}{2}a$$

Sabemos que la solución general de la homogénea es del tipo:

$$y = y_1 + y_2$$

Si la raíz es doble, está claro que una posible solución es

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}t},$$

pues la raíz es

$$\lambda = -\frac{a}{2},$$

pero nos falta una segunda. Es aquí donde podemos echar mano del método para encontrar una segunda solución si conocemos una primera que vimos anteriormente. Si aplicamos ese procedimiento, obtenemos la segunda solución, que es:

$$y_2 = te^{-\frac{a}{2}t}$$

Por tanto, la solución general de la homogénea para este caso será:

$$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{a}{2}t}$$

EJEMPLO 6

Encontrar la solución al siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} 9y'' + 6y' + y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -7/3 \end{cases}$$

Solución

En este caso el polinomio característico es

$$\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9} = 0,$$

que tiene una única raíz doble $\lambda = -1/3$. Al mismo resultado podemos llegar si consideramos

$$9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0,$$

.../...

Sumario

.../...

ya que es un problema totalmente equivalente. El caso es que la solución es del tipo:

$$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{1}{3}t}$$

Si ahora consideramos la condición inicial, llegamos al sistema de ecuaciones de resolución trivial:

$$\begin{cases} 4 = c_1 - \dfrac{0}{3} & & \rightarrow \quad c_1 = 4 \\ \dfrac{-7}{3} = c_2 + c_1 \dfrac{-1}{3} e^0 & \rightarrow \quad \dfrac{-7}{3} = c_2 + \dfrac{-c_1}{3} & \rightarrow \quad c_2 = -1 \end{cases}$$

Así que la solución es:

$$y = (4 - t)\, e^{-\frac{1}{3}t}$$

3.3. CASO C) CUANDO SE OBTIENEN DOS RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS

Si $a^2 - 4b < 0$, tenemos dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + i\omega, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}a - i\omega$$

El problema que tenemos en este caso es que a la hora de hallar los valores para los que se anula el polinomio característico vemos que la raíz cuadrada de $a_2 - 4b$ no tiene valor real, sino imaginario, y las dos raíces serán, por tanto, complejas conjugadas.

Vemos además que tienen tanto parte real como imaginaria (lo que va con i).

Naturalmente, la solución será otra vez una combinación lineal de exponenciales:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

que en este caso es:

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}a + i\omega t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}a - i\omega t}$$

La parte real puede ponerse perfectamente como una exponencial, pero ¿cómo es la exponencial de un número complejo? Es aquí cuando podemos usar los conocimientos de variable compleja y echar mano de la fórmula de Euler, que dice que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

o bien que

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

Esta fórmula nos lleva, por ejemplo, a una de las relaciones más bellas de las matemáticas. Si tomamos $x = \pi$ y pasamos todo al lado izquierdo de la igualdad, el resultado que se obtiene nos relaciona los números más famosos de esta disciplina. Contemplemos en todo su esplendor y en solitario esta relación:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Volviendo a nuestro problema de solucionar el caso c), se puede demostrar, gracias a esta fórmula de Euler, que la solución general para este caso es la siguiente:

$$y = e^{-\frac{a}{2}t}\left(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t\right)$$

Es decir, para este caso c) las soluciones serán oscilantes con una frecuencia de oscilación circular ω, pero estarán moduladas por una exponencial.

Habrá casos, como cuando $a = 0$, en los que la solución será puramente oscilante, como por ejemplo para

$$y'' + 4y = 0,$$

cuyo polinomio característico es

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Este polinomio tiene como raíces $\lambda = \pm 2i$ y una frecuencia circular $\omega = 2$, así que la solución general de esta ecuación es:

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

EJEMPLO 7

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución

El polinomio característico es en este caso:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

que tiene como raíces

$$\lambda = -1 \pm i,$$

por lo que la frecuencia circular es $\omega = 1$ y, además, $a = 2$.

Así que la solución general es

$$y = e^{-t} (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$$

y su derivada:

$$y' = -c_1 e^{-t} \cos t - c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t - e^{-t} c_1 \operatorname{sen} t + e^{-t} c_2 \cos t$$
$$y' = (e^{-t} c_2 \cos t - c_1 e^{-t} \cos t) + (-c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t - e^{-t} c_1 \operatorname{sen} t)$$
$$y' = (c_2 - c_1) e^{-t} \cos t + (-c_2 - c_1) e^{-t} \operatorname{sen} t$$

Si tenemos en cuenta el valor inicial $y(0) = 0$, vemos que

$$0 = (c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0)\, e^0 \qquad \rightarrow \qquad c_1 = 0$$

.../...

.../...

Si tenemos en cuenta el valor inicial en la derivada $y'(0) = 1$, comprobamos que

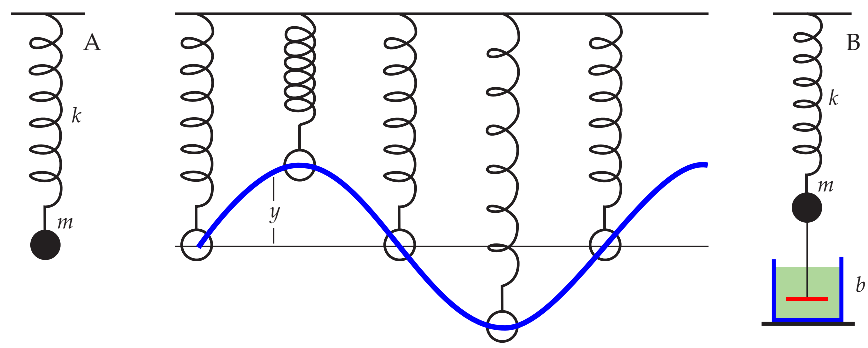
$$1 = (c_2)\, e^0 \cos 0 + (-\, c_2)\, e^0 \operatorname{sen} 0 \qquad \rightarrow \qquad c_2 = 1$$

Obtenemos finalmente la solución, que es:

$$y = e^{-t} \operatorname{sen} t$$

3.4. OSCILADOR ARMÓNICO

Un prototipo de problema solucionable por este tipo de técnicas es el del oscilador armónico. Básicamente consiste en un muelle vertical sujeto a un techo al que se le añade un peso a su extremo final.



La mecánica newtoniana nos dice que la suma de fuerzas es igual al producto de la masa por la aceleración. Como siempre, la aceleración será la derivada segunda de la distancia. Además, en este caso, hay una fuerza que es proporcional a la distancia, respecto al punto de reposo, a partir de la cual se alarga el muelle. La constante de proporcionalidad k dependerá de lo «rígido» o «blando» que sea el muelle.

Si el oscilador no está amortiguado, lo que corresponde a la opción A de la figura[1] de la página anterior, la ecuación diferencial que modeliza este sistema es:

$$my'' + ky = 0$$

Pero esta ecuación, con solo reescribirla, es casi igual que la que hemos resuelto antes, pues es

$$y'' + (k/m)\,y = 0$$

y su solución es

$$y = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t,$$

en donde la frecuencia circular viene dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esta solución corresponde a oscilaciones sinusoidales en torno al punto de reposo que se prolongan durante un tiempo infinito, tal y como se representa en el dibujo anterior (parte central).

En el caso más realista tendremos un oscilador con un rozamiento (opción B de la figura de la página anterior) que irá frenando el sistema. Es lo que se denomina un **oscilador amortiguado**. Esto lo podemos visualizar como una chapa que se mueve en un fluido y lo podemos modelizar como una fuerza que se opone al movimiento que es proporcional a la velocidad. La constante de proporcionalidad dependerá de la viscosidad del fluido y de la forma y tamaño de la chapa.

En este caso, la ecuación para este modelo será entonces:

$$my'' - cy' + ky = 0$$

O lo que es lo mismo

$$y'' - \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0,$$

1 Esta figura procede de Wikimedia Commons.

que es una ecuación lineal de coeficientes constantes. Las raíces del polinomio característico serán:

$$\lambda_{1,2} = \frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

Según sean los valores de las constantes, darán tres casos posibles:

- Caso sobreamortiguado: si $c^2 > 4mk$.
- Caso de amortiguamiento crítico: si $c^2 = 4mk$.
- Caso débilmente amortiguado: si $c^2 < 4mk$.

Obviamente se sigue el mismo esquema de dos raíces reales, una raíz doble y dos raíces complejas conjugadas de los casos a), b) y c) vistos anteriormente.

Para el primer caso tendremos dos raíces reales distintas y la solución, como ya sabemos, será

$$y(t) = c_1\, e^{-(\alpha - \beta)\, t} + c_2\, e^{-(\alpha + \beta)\, t},$$

en la que hemos usado la notación:

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \qquad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

Este caso nos dice que el rozamiento es tan grande que al sistema no le da tiempo a oscilar y rápidamente el movimiento decae exponencialmente.

En el segundo caso, el crítico, el sistema está justo al límite de poder oscilar, pero no llega a hacerlo.

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\alpha t}$$

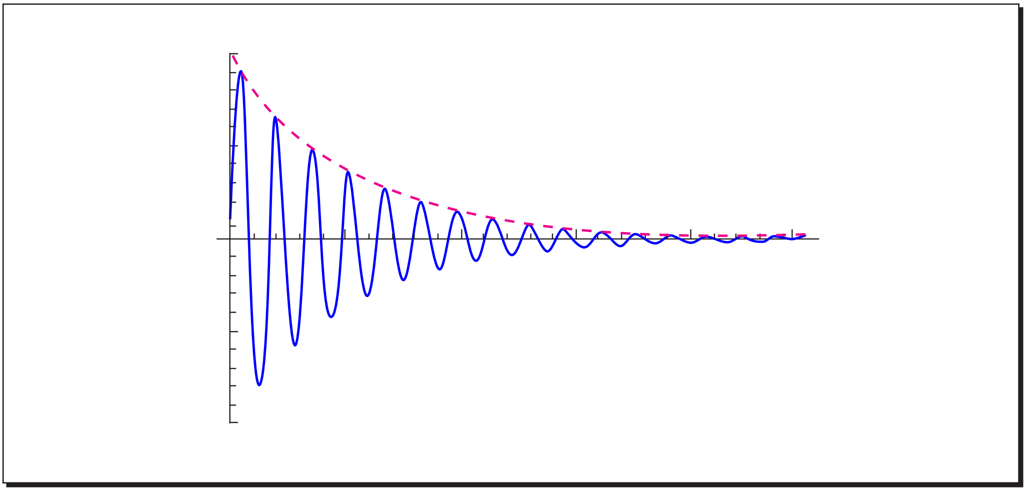
Si en este caso se reduce un poco el amortiguamiento, el sistema se acerca más rápidamente a la posición de equilibrio, pero sobrepasa esa posición de equilibrio y oscila en torno a ese punto. En este tercer caso tenemos raíces complejas y la solución será

$$y(t) = e^{-\alpha t}\,(A \cos \omega_a t + B \operatorname{sen} \omega_a t) = C\, e^{-\alpha t} \cos(\omega_a t - \delta),$$

en donde

$$\omega_a = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}, \qquad C^2 = A^2 + B^2 \qquad \text{y} \qquad \delta = B/A$$

Esto nos dice que el oscilador oscila de manera sinusoidal, pero modulado por una exponencial decreciente de la siguiente manera:



Los mismos principios se aplican a determinados circuitos eléctricos, ya que las ecuaciones que los describen son prácticamente las mismas o similares. Nos quedaría por ver el caso en el que al oscilador armónico amortiguado le sometemos a un fuerza externa periódica. Pero, de momento, no sabemos cómo resolver ecuaciones no homogéneas de este tipo, así que lo dejamos para más adelante.

3.5. PROBLEMAS DE CONTORNO

Hasta ahora solo hemos considerado el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

en el que además de la ecuación nos dan su valor en un momento dado y la pendiente de la curva que describe su trayectoria en ese mismo momento (sea o no para $t_0 = 0$). Pero también nos pueden plantear un problema de contorno en el que nos den el valor de y para dos puntos distintos del espacio.

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

La solución general es exactamente la misma que en el caso anterior, y las soluciones estacionarias para esas condiciones de contorno se pueden obtener de la misma manera despejando las constantes c_1 y c_2 del sistema algebraico correspondiente. Obsérvese que hemos usado la variable independiente x en lugar de la t para enfatizar que se trata de un problema geométrico con valores fijos en la frontera.

EJEMPLO 8

Resolver el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Solución

Es casi el mismo caso que hemos visto previamente, cuyo polinomio característico era

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

con raíces

$$\lambda = -1 \pm i$$

y en donde $\omega = 1$ y $a = 2$. Así que la solución general es

$$y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$$

.../...

.../...

El sistema de ecuaciones para esas condiciones en la frontera y sus soluciones serán:

$$\begin{cases} 1 = e^{0} (c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 & \rightarrow \quad c_1 = 1 \\ 0 = e^{-\pi/2} (c_1 \cos \pi/2 + c_2 \operatorname{sen} \pi/2) & \rightarrow \quad c_2 = 0 \end{cases}$$

Así que la solución del problema de contorno es en este caso:

$$y(x) = e^{-x} \cos x$$

3.6. ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA

Sabemos que una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea tiene la forma estándar:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \qquad \textbf{[2]}$$

La diferencia con lo visto hasta ahora para el caso homogéneo

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad \textbf{[1]}$$

es la función $f(t)$. Los resultados que hemos vistos hasta el momento no se pueden aplicar directamente a este caso, sin embargo, vamos a ver que sí se puede encontrar la solución de **[2]** a partir de la solución de **[1]**.

Se puede demostrar que la solución general de **[2]** es la suma de la solución general de la homogénea (de **[1]**) más una solución particular de **[2]**, es decir, que la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

en donde:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

como ya hemos visto.

Esto es, que para resolver **[2]** primero resolvemos su correspondiente ecuación homogénea **[1]** y luego le sumamos una solución particular. Ya sabemos cómo realizar el primer paso, así que solo nos queda ver cómo podemos encontrar una solución particular.

En principio se puede intentar encontrar esa solución por simple inspección o por ensayo y error si la ecuación es muy sencilla, pero en general este método no es efectivo.

El sistema más simple de hallar una solución particular es cuando la función $f(t)$ es sencilla y pertenece a ciertos tipos de funciones ya tabuladas, casos para los que se pueden ensayar soluciones particulares. En concreto, los casos más comunes están en la siguiente tabla:

$f(t)$	Solución particular a ensayar
$ke^{\alpha t}$	$Ce^{\alpha t}$
kt^n, $(n = 0, 1,...)$	$K_n t^n + K_{n-a} t^{n-1} + ... + K_1 t + K_0$
$k \cos \omega t$	$K \cos \omega t + M \operatorname{sen} \omega t$
$k \operatorname{sen} \omega t$	$K \cos \omega t + M \operatorname{sen} \omega t$
$ke^{\alpha t} \cos \omega t$	$e^{\alpha t}\, K \cos \omega t + M \operatorname{sen} \omega t$
$ke^{\alpha t} \operatorname{sen} \omega t$	$e^{\alpha t}\, K \cos \omega t + M \operatorname{sen} \omega t$

Básicamente hay que ensayar las funciones propuestas en la ecuación no homogénea y determinar los valores de las constantes K, M o C que aparecen en la tabla. Si $f(x)$ está compuesta por sumas de esos posibles casos, habrá que proponer entonces las sumas de sus correspondientes propuestas. Veamos unos ejemplos de funciones $f(x)$ y las correspondientes soluciones particulares que debemos ensayar:

$$f(x) = e^{7t} \quad \rightarrow \quad y_p = Ce^{7t}$$

$$f(x) = 8t^2 \quad \rightarrow \quad y_p = K_2 t^2 + K_1 t + K_0$$

$$f(x) = 3e^{-2t} + \cos 4t + 2 \operatorname{sen} 4t \quad \rightarrow \quad y_p = Ce^{-2t} + K \cos 4t + M \operatorname{sen} 4t$$

$$f(x) = 9t + 5 \cos 3t \quad \rightarrow \quad y_p = K_1 t + K_0 + K \cos 3t + M \operatorname{sen} 3t$$

Veamos esto con un ejemplo. Si tenemos la ecuación no homogénea:

$$3y'' + 10y' + 3y = 9t + 5 \cos t$$

podemos calcular su polinomio característico:

$$3\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0$$

cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1/3 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Así que la solución general de la homogénea será

$$y_h = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-3t}$$

y la solución particular a ensayar será

$$y_p = K_1 t + K_0 + K \cos t + M \operatorname{sen} t$$

Las constantes c_1 y c_2 las obtendríamos de los valores iniciales, pero los valores de K_1, K_0, K y M hay que obtenerlos por ensayo en la ecuación no homogénea. Para ello tenemos que averiguar su derivada primera y segunda y sustituirla en la ecuación. Así que si sustituimos

$$y_p = K_1 t + K_0 + K \cos t + M \operatorname{sen} t$$

$$y'_p = K_1 - K \operatorname{sen} t + M \cos t$$

$$y''_p = -K \cos t - M \operatorname{sen} t$$

en la no homogénea:

$$3\,(-K \cos t - M \operatorname{sen} t) + 10\,(K_1 - K \operatorname{sen} t + M \cos t) +$$
$$+ 3\,(K_1 t + K_0 + K \cos t + M \operatorname{sen} t) = 9t + 5 \cos t$$

y operamos un poco, obtenemos:

$$-3K \cos t - 3M \operatorname{sen} t + 10K_1 - 10K \operatorname{sen} t + 10M \cos t +$$
$$+ 3K_1 t + 3K_0 + 3K \cos t + 3M \operatorname{sen} t = 9t + 5 \cos t$$

Ahora consideramos todos los términos independientes, los que vayan con t, los que vayan con t^2 (ninguno en este caso), los que vayan con seno y los que vayan con coseno por separado. De este llegamos a lo siguiente:

$$3K_1 t = 9\,t \qquad \rightarrow \qquad K_1 = 3$$

$$10K_1 + 3K_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad K_0 = -\,10$$

$$\left.\begin{array}{l} -\,3K\ \cos t + 10M \cos t + 3K \cos t\ = 5 \cos t \\[2ex] -\,3M \text{ sen } t - 10K \text{ sen } t + 3M \text{ sen } t \quad\ 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} M = \dfrac{1}{2} \\[2ex] K\ =\ 0 \end{array}$$

Por tanto, una solución particular de la no homogénea es

$$y_p = 3t - 10 + \frac{1}{2} \text{ sen } t$$

y la solución general de la no homogénea es finalmente:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-3t} + 3t - 10 + \frac{1}{2} \text{ sen } t$$

Si tuviéramos condiciones iniciales, solo necesitaríamos usarlas para obtener c_1 y c_2.

A) Caso de coincidencia con una de las raíces

El primer problema que se observa es qué pasa cuando la función $f(t)$ es de tipo exponencial ($ke^{\alpha t}$)y α es precisamente una raíz del polinomio característico. Una solución particular como la propuesta,

$$y_p = Ce^{\alpha t},$$

solo añade una información que ya teníamos, no es una solución que sea linealmente independiente respecto a las de la homogénea. Entonces hay que proponer otra solución particular que será el producto de la habitual por t. Si por ejemplo tenemos que $f(x) = e^t$ y resulta que $\lambda_1 = 1$, entonces la solución particular que hay que ensayar será:

$$y_p = Cte^t$$

B) Caso de raíz doble

La situación se puede complicar aún más si α coincide con una raíz doble; entonces la solución particular a ensayar será:

$$y_p = (c_0 + c_1 t)\, e^{\alpha t}$$

La moraleja es que si vamos a ensayar una solución particular y resulta que ya está en la solución general de la homogénea, habrá que multiplicar la solución particular propuesta por t o por t^2.

EJEMPLO 9

Hallar la solución general de la ecuación:

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2t}$$

Solución

El polinomio característico

$$3\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$, así que la solución de la homogénea es

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

y, debido a que 2 es raíz del polinomio característico, una solución particular a proponer será

$$y_p \;=\; Cte^{2t},$$

que podemos derivar sucesivamente:

$$y'_p = Ce^{2t} + 2Cte^{2t}$$
$$y'_p = 2Ce^{2t} + 2Ce^{2t} + 4Cte^{2t}$$

y sustituir en la ecuación no homogénea original y obtener que $C = 1$, así que:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + te^{2t}$$

3.6.1. Método de variación de las constantes

Lo malo es que $f(x)$ no sea ninguna de las funciones tabuladas. En ese caso la fórmula de variación de las constantes viene en nuestra ayuda, pues nos permite obtener siempre una solución particular de la ecuación no homogénea si somos capaces de resolver un par de integrales. Esa fórmula nos dice que una solución particular de **[2]** es de la forma:

$$y_p(t) = -y_1 \int \frac{y_2\, f(t)}{|W|}\, dt + y_2 \int \frac{y_1\, f(t)}{|W|}\, dt$$

en donde, obviamente $f(t)$ es la función que aparece al lado derecho de la igualdad en **[2]**, y_1 e y_2 son las soluciones que provienen de resolver la homogénea. La W es lo que se denomina wronskiano y $|W|$ será su determinante, en concreto:

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Antes de aplicar este método hay que tener cuidado de que la ecuación **[2]** esté escrita en su forma estándar y de que no haya ninguna función de t o constante que multiplique a y''; de otro modo no funcionaría.

Además, nótese que las integrales no tienen que ser necesariamente triviales y que nunca hay que recurrir a este método si podemos aplicar el anterior, que no requiere de ninguna integración.

Un teorema nos garantiza que para el problema de valores iniciales siguientes:

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(t_0) = K_0 \\ y'(t_0) = K_1 \end{cases}$$

en el que las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son continuas en un intervalo abierto I, las soluciones y_1 e y_2 sobre ese intervalo son linealmente dependientes si, y solo si, $|W| = 0$ en algún punto t_0 del intervalo I.

EJEMPLO 10

Resolver la ecuación:

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2t}}{t}$$

Solución

La raíz del polinomio es doble, $\lambda = 2$, así que

$$y_h = (c_1 + c_2 t)\, e^{2t}$$

Pero la función $f(x)$ no está entre las tabuladas, así que tendremos que usar el método de variación de las constantes para averiguar una solución particular. Como

$$\begin{aligned} y_1 &= te^{2t}, & y_2 &= e^{2t} \\ y_1' &= e^{2t} + 2te^{2t}, & y_2' &= 2e^{2t} \end{aligned}$$

el determinante del wronskiano será

$$|W| = -\, e^{2t}\, e^{2t}$$

y una solución particular será entonces:

$$y_p = -\, te^{2t} \int \frac{e^{2t}\, e^{2t}/t}{-\, e^{2t}\, e^{2t}}\, dt + e^{2t} \int \frac{te^{2t}\, e^{2t}/t}{-\, e^{2t}\, e^{2t}}\, dt$$

$$y_p = te^{2t} \int \frac{1}{t}\, dt - e^{2t} \int dt = te^{2t} \ln|t| - te^{2t}$$

Por tanto, la solución general de la no homogénea es la siguiente:

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 t)\, e^{2t} + te^{2t} \ln|t| - te^{2t}$$

3.7. OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO FORZADO

Ahora que ya disponemos de artillería suficiente como para resolver ecuaciones lineales no homogéneas, podemos enfrentarnos al caso del oscilador armónico amortiguado, que ya hemos visto anteriormente, pero al que sometemos a una fuerza externa oscilante, que es un caso muy interesante. Para ello basta con colocar al otro lado de la igualdad la expresión de esa fuerza en forma sinusoidal, que tendrá una amplitud máxima F_0 y una frecuencia circular $\omega = 2\pi v = 2\pi f$.

$$my'' - cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$

Como siempre en dinámica hemos usado la segunda ley de Newton, que dice que la suma de fuerzas es igual a la masa por la aceleración.

La solución de la homogénea ya la tenemos, pero nos falta encontrar una solución particular. En este caso estamos de suerte porque las funciones sinusoidales sí están entre los casos tabulados y la solución que hay que ensayar es:

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$$

Sus derivadas primera y segunda serán:

$$y'_p(t) = -\omega a \operatorname{sen} \omega t + \omega b \cos \omega t$$
$$y''_p(t) = -\omega^2 a \cos \omega t + \omega^2 b \operatorname{sen} \omega t$$

Si introducimos estas tres expresiones en sus correspondientes lugares en la ecuación diferencial no homogénea y separamos lo que va con el seno de lo que va con el coseno, podemos llegar al sistema de ecuaciones algebraicas ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} (k - m\omega^2)a + \omega cb = F_0 \\ -\omega ca + (k - m\omega^2)\, b = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene como solución (se puede usar, por ejemplo, la regla de Cramer para hallarla):

$$a = \frac{F_0\, m\, (\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \qquad b = \frac{F_0\, \omega c}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

en donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, que es frecuencia propia del sistema y que en general no es igual a ω, pues esta última proviene de la fuerza exterior que aplicamos al sistema. En todo caso, la solución general será $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ para la que anteriormente ya hemos averiguado $y_h(t)$ para distintos casos.

3.7.1. Oscilador sin amortiguamiento

Si consideramos que no hay amortiguamiento, entonces $c = 0$, las expresiones se simplifican enormemente y la solución es la siguiente:

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Son dos movimientos armónicos superpuestos de frecuencia natural $f = \omega_0/2\pi$ y $\hat{f} = \omega/2\pi$ (en ciclos por segundo en lugar de radianes por segundo) y cuya máxima amplitud es

$$A = \frac{F_0}{k(1 - (\omega/\omega_0)^2)}$$

Lo interesante es cuando la frecuencia a la que forzamos el sistema es igual a la propia del sistema $\omega = \omega_0$. Esto es conocido como **resonancia**. La ecuación diferencial nos queda, si no hay amortiguamiento, del modo siguiente:

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$$

En ella podemos ensayar la solución particular

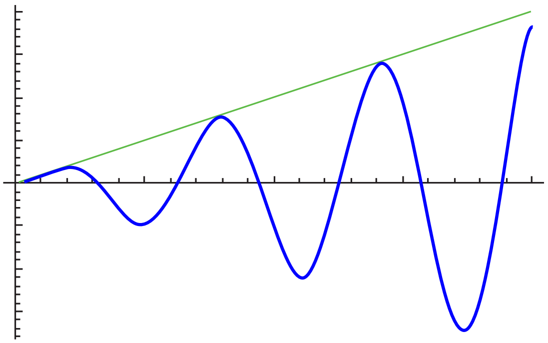
$$y_p(t) = t(a \cos \omega_0 t + b \operatorname{sen} \omega_0 t),$$

que sustituida en la ecuación original nos lleva a

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m} t \operatorname{sen} \omega_0 t,$$

que independientemente de la parte correspondiente a la homogénea nos dice que la solución son oscilaciones de frecuencia $f = \omega_0/2\pi$ cuya amplitud crece sin límite y linealmente con t.

Es el mismo efecto que cuando columpiamos a un niño. Si aplicamos empujones justo en el momento adecuado (con la frecuencia propia de oscilación del columpio), las oscilaciones crecen sin parar (o hasta que el niño grite aterrorizado).

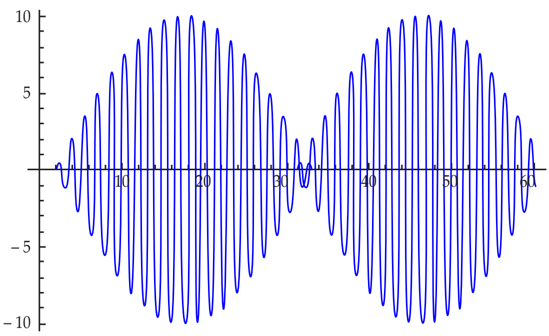


Otra solución interesante es cuando ω está muy cerca de ω_0. En ese caso, para los valores iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ tenemos:

$$y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t) =$$

$$= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right),$$

que son dos oscilaciones de distinta frecuencia que coexisten de tal modo que un movimiento sinusoidal modula al otro.



3.7.2. Oscilador amortiguado

Ya vimos en su momento que para el caso de existencia de amortiguamiento la solución de la homogénea era

$$y_h(t) = e^{-\alpha t}\,(A \cos \omega_a t + B \operatorname{sen} \omega_a t) = Ce^{-\alpha t} \cos (\omega_a t - \delta),$$

en donde

$$\omega_a = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}\,, \qquad \alpha = \frac{c}{2m} > 0\,, \qquad C^2 = A^2 + B^2 \qquad \text{y} \qquad \delta = B/A$$

Como siempre la solución general de la no homogénea

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

será la suma de esa solución de la homogénea más una solución particular que podemos hallar con el método ya visto. Esta solución $y(t)$ será una solución transitoria porque tarde o temprano el comportamiento del sistema se aproxima a una solución estacionaria que viene dada por:

$$y_p(t) = C^* \cos (\omega t - \eta)$$

En un tiempo infinito la solución es puramente sinusoidal con la misma frecuencia que la fuerza aplicada. Su amplitud será precisamente:

$$C^*(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}$$

Esta amplitud alcanza el máximo cuando

$$c^2 = 2m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Algo que se puede averiguar fácilmente derivando la expresión respecto a ω e igualando a cero.

Si el amortiguamiento es muy grande y, por tanto, $c^2 > 2m^2\omega_0^2 = 2mk$, esta última función no tiene soluciones reales y C^* decrece monótonamente según aumenta ω. Si por el contrario $c^2 < 2mk$, entonces tiene una solución real $\omega = \omega_{max}$ que aumenta según decrece c y que se aproxima a ω_0 según c tiende a cero. Además, la amplitud C^* tiene su máximo en $\omega = \omega_{max}$ y tendremos:

$$C^* (\omega_{max}) = \frac{2m F_0}{c \sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

Definimos la **amplificación** como la razón entre la amplitud de salida y la de entrada:

$$C^* (\omega_{max})/F_0 = \frac{2m}{c \sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

Por otro lado, η mide el desfase entre la entrada y la salida y viene definida por:

$$\tan \eta = \frac{b}{a} = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Si $\omega < \omega_0$, este desfase es menor de $\pi/2$; si $\omega = \omega_0$, entonces $\eta = \pi/2$, y si $\omega > \omega_0$, entonces $\eta > \pi/2$.

3.8. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En ingeniería una de las aplicaciones típicas de las ecuaciones diferenciales ordinarias es para el estudio de circuitos eléctricos. En un circuito eléctrico podemos interconectar diversos tipos de elementos de distintas maneras. El conjunto de los distintos tipos de elementos de los que disponemos es bastante limitado. Tendremos siempre una fuente de alimentación que proporcionará corriente al sistema, que puede ser tanto alterna como continua, junto con un interruptor que supondremos que funciona de manera instantánea.

La corriente eléctrica se mide en amperios (A), que es una unidad bastante grande. La intensidad de corriente nos dice más o menos la «cantidad de cargas» que circulan por un cable conductor. Para poder medir esa corriente tenemos que cortar el cable y hacer que la corriente pase por un galvanómetro. Además, dos puntos distintos de ese cable pueden estar a distinto potencial, de tal modo que si ponemos las sondas de un voltímetro en esos puntos (sin interrumpir el circuito), nos da la diferencia de potencial entre esos dos puntos. La diferencia de potencial se mide en voltios (V) y siempre será un medida relativa al comparar el potencial entre dos puntos distintos.

En cuanto a los elementos activos que podemos tener, están la resistencia óhmica, el solenoide y el condensador o capacitancia.

- La **resistencia** es un mal conductor (o un aislante débil) que disipa energía al pasar una corriente eléctrica a su través. Se simboliza con una R y su unidad es el ohmio (Ω). El valor de esa resistencia sigue la ley de Ohm:

$$R = \frac{V}{I}$$

Según la cual la diferencia de potencial en sus extremos es igual al producto de la corriente que circula por él y la resistencia, así que la caída de potencial que se produce es:

$$V_{1,2} = RI$$

- El **solenoide** es una bobina de cable conductor enrollado que produce un campo magnético. Si la corriente es continua, no tendrá mucho efecto a largo plazo sobre el circuito, salvo el de la propia resistencia óhmica. Pero si la corriente es alterna, al haber una variación en el tiempo de la corriente, se producirá una variación del voltaje en sus extremos proporcional a esa variación. La constante de proporcionalidad dependerá de la geometría y número de espiras de la bobina. Se simboliza con una L y su unidad es el henrio (H).

$$L = \frac{d\Phi_B}{dI}$$

La caída de potencial que produce es:

$$V_{1,2} = L\,\frac{dI}{dt}$$

Acabamos de ver cómo nos aparece nuestro primer símbolo diferencial.

- El último componente tradicional que nos queda es el **condensador**, cuya capacidad se mide en faradios (una unidad extremadamente grande representada por F) y se simboliza con una C. Los condensadores interrumpen la corriente al cabo de muy poco tiempo en un circuito eléctrico si la alimentación es por corriente continua, pero dejan pasar la corriente alterna (pero no las cargas a su través).

$$\frac{1}{C} = \frac{dV}{dq}$$

La caída de potencial que producen es

$$V_{1,2} = \frac{Q}{C},$$

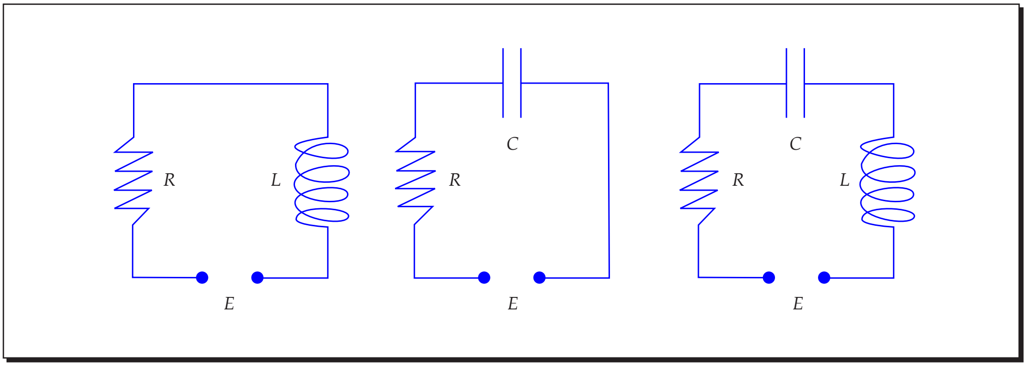
en donde Q es la carga total que se mide en culombios (C).

Todos estos elementos se conocen desde el siglo XIX. Pero por simetría faltaría uno que sería un elemento cuya resistencia variable dependería de la carga que pasa a su través. Es el llamado memristor, que se postuló en 1971 y que recientemente (2008) se ha descubierto cómo fabricarlo. Proporciona la caída de potencial:

$$V_{1,2} = I\,M(q) = I\,\frac{d\Phi_m}{dq}$$

en donde ϕ_m es un flujo de carga. En estas notas nos circunscribiremos a los elementos tradicionales.

Los circuitos básicos que vamos a ver serán el circuito *RL*, el circuito *RC* y el circuito *RCL*, que se representan respectivamente en la siguiente figura:



Sumario

3.8.1. Circuito RL

Para poder modelizar circuitos sencillos solo tenemos que montar una ecuación diferencial que sume las contribuciones en caídas de potencial de todos los elementos que hay instalados. Esto viene dado por la ley de Kirchhoff, que dice que la suma algebraica cae a cero en todo circuito cerrado o que la suma de los voltajes en una parte del circuito es igual a la suma de los voltajes en el resto del circuito. Es equivalente a la segunda ley de Newton de la dinámica, pero aplicado a circuitos.

Si tenemos solamente una resistencia y un solenoide, la ecuación será entonces:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

En donde $E(t)$ es el voltaje de entrada proporcionado por la fuente de alimentación o «fuerza electromotriz», que también se puede simbolizar como $V(t)$. Vemos que la ecuación resultante es lineal de primer orden; tipo de ecuación que ya sabemos solucionar.

EJEMPLO 11

Estudiar el comportamiento de un circuito *RL* en el que la autoinducción vale 0,1 henrios, la resistencia es de 5 ohmios y está alimentado con una pila de 9 voltios de fuerza electromotriz.

Solución

Sin más que sustituir los valores en la ecuación anterior, tenemos

$$0{,}1\frac{dI}{dt} + 3\,\mathrm{I} = 9 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dI}{dt} + 30\,I = 90,$$

cuya solución es:

$$e^{30t}\,I = \frac{90}{30}e^{30t} + C = 3e^{30t} + K \qquad \Rightarrow \qquad I = 3 + Ke^{-30t}$$

.../...

.../...

La solución constante ($dI/dt = 0$ en la ecuación diferencial) será justo:

$$I_c = \frac{E_0}{R} = 3\ A$$

que será a la que asintóticamente tiendan las soluciones para todas las condiciones iniciales cuando el tiempo tiende a infinito. La corriente caerá exponencialmente hasta que el sistema entre en régimen estacionario justo cuando más o menos llegue a ese valor (o crecerá hasta alcanzar ese valor si consideramos una corriente inicial por debajo de ella).

Podemos generalizar el caso RL sin más que solucionar la ecuación

$$\frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E(t)}{L},$$

tanto para el caso de corriente continua

$$E(t) = E_0,$$

como corriente alterna periódica

$$E(t) = E_0 \text{ sen } \omega t$$

En el primer caso

$$I(t) = \frac{E_0}{R} + K\, e^{\frac{R}{L}t},$$

que para la condición inicial $I(0) = 0$ será

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\,(1 - e^{\frac{t}{\tau_L}}),$$

en donde $\tau_L = \dfrac{L}{R}$ es el tiempo inductivo del circuito.

Para el caso de corriente alterna, tendremos la ecuación siguiente:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E_0}{L} \text{ sen } \omega t,$$

cuya solución será

$$I(t) = K\, e^{\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\,(R \text{ sen } \omega t - \omega\, L \cos \omega t),$$

.../...

.../...

que además se puede reescribir así:

$$I(t) = K\, e^{\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta),$$

en donde δ es un desfase que nos da la diferencia de fase entre la corriente de alimentación original y la que recorre el circuito. El primer término representa una corriente que disminuye con el tiempo y el segundo, una corriente alterna. Esta solución viene a decir que la señal sinusoidal está modulada por una exponencial que hace que, para un tiempo lo suficientemente largo, la solución sea una función sinusoidal periódica. A la vez, el desfase va desapareciendo y las oscilaciones de la corriente en el circuito oscilan sincrónicamente con las de la corriente de alimentación con la misma frecuencia y fase, pero con intensidad distinta.

3.8.2. Circuito RC

En este caso tendremos

$$RI + \frac{1}{C}\int I\, dt = E(t),$$

que podemos escribir en forma diferencial así:

$$R\,\frac{I}{dt} + \frac{1}{C}\,I = \frac{dE(t)}{dt}$$

y cuya solución es:

$$I(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\frac{1}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\,\frac{dE}{dt}\,dt + K\right)$$

Para el caso de corriente continua, tendremos que

$$I(t) = K\, e^{-\frac{1}{RC}t} = e^{-\frac{t}{\tau_c}},$$

en donde $\tau_c = RC$ es el tiempo capacitivo del circuito.

Y si la corriente es alterna:

$$I(t) = K\,e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{\omega\,E_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \delta)$$

El desfase está representado por $\delta = -1/(\omega RC)$. El primer término representa una corriente que disminuye con el tiempo y el segundo, una corriente alterna. Con el avance del tiempo pasa igual que en el caso anterior, el desfase va desapareciendo y tenemos una corriente que oscila con la misma frecuencia y en fase con la corriente de alimentación (aunque no con la misma intensidad).

3.8.3. Circuito RCL

De nuevo aplicamos la ley de Kirchhoff a un circuito alimentado con una corriente alterna:

$$LI' + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = E_0\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Que podemos escribir de manera diferencial de la misma manera que el caso anterior:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega\,E_0\cos\omega t$$

Es el caso que hemos visto hasta ahora, que es una ecuación lineal de segundo grado, lo que justifica la inclusión de los circuitos en este epígrafe.

Lo interesante es que hay una correspondencia biunívoca entre el circuito RCL y el oscilador armónico amortiguado que ya hemos visto. La corriente $I(t)$ es equivalente al desplazamiento $y(t)$; la inductancia L es equivalente a la masa m; la resistencia R, a la constante c de amortiguamiento; la inversa de la capacitancia $1/C$ lo es a la constante k del muelle, y la derivada de la fuerza electromotriz $E_0\,\omega\cos\omega t$ es equivalente a la fuerza aplicada $F_0\cos\omega t$.

Nos quedaría por ver qué pasa cuando no tenemos una corriente alterna, sino un pulso eléctrico o una onda cuadrada, situaciones que se pueden presentar en el mundo real.

4. ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEN ARBITRARIO

Hasta ahora hemos visto, a lo más, ecuaciones de orden 2, pero se pueden tener ecuaciones de orden superior. El caso más general posible, de orden *n*, se puede escribir de la siguiente forma:

$$y^{n)} + p_{n-1}(t)\, y^{n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = f(t)$$

Si se trata de un problema de valor iniciales, se tendrán tantas condiciones en el origen como el orden de la ecuación.

En el caso más sencillo de las ecuaciones líneas de coeficientes constantes se tendrán soluciones que se obtienen de la misma manera que para el caso de orden 2. De este modo, se tendrá un polinomio característico del mismo orden que la ecuación diferencial que, en el mejor de los casos, tendrá tantas raíces reales y distintas como ese orden.

EJEMPLO 12

Encontrar la solución general de la ecuación homogénea siguiente:

$$y''' + 2y'' - y - 2 = 0$$

Solución

El polinomio característico es en este caso

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

que tiene las raíces (obtenibles fácilmente por Ruffini):

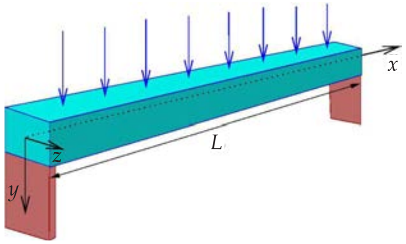
$$\lambda = -2, -1, 1$$

Así que la solución general de la homogénea será:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{t}$$

Naturalmente, también se pueden dar casos de ecuaciones diferenciales de orden superior a 2 en problemas de contorno. Vamos a ver un caso típico que aparece en ingeniería a continuación: el caso de la viga.

EJEMPLO 13



Consideremos una viga homogénea de longitud L y sección constante hecha de un material, por ejemplo acero, que es relativamente elástico. Si se sujeta por los extremos y se le aplica una carga, por ejemplo su propio peso o un peso extra, la viga se comba bajo esa carga una distancia y respecto al eje x (eje longitudinal a lo largo de la viga), que será distinta para cada punto considerado. Hallar la ecuación de la curva resultante que describe esa deformación, o curva elástica C, bajo una carga uniforme si la viga está solamente apoyada en sus dos extremos.

Solución

Según la teoría de la elasticidad, el momento de deformación $M(x)$ es proporcional a la curvatura $k(x)$ de C. Si asumimos que la viga se comba poco, de tal modo que el desplazamiento $y(x)$ como su derivada $y'(x)$, que es tangente a C, son pequeños, entonces podemos hacer la aproximación

$$k = y''/(1 + (y')^2)^{3/2} \approx y''$$

y considerar que

$$M(x) = E\, I\, y''\,(x),$$

en donde E es el módulo de Young de elasticidad del material e I, el momento de inercia de la sección a lo largo del eje z. Además, según la teoría de la elasticidad

$$M''(x) = f(x),$$

siendo $f(x)$ la carga por unidad de longitud. Así que si juntamos todo, tendremos

$$E\, I\, y^{iv} = f(x)$$

que es, al fin y al cabo, lo que nos interesa desde el punto de vista matemático. Si la carga es constante a lo largo de toda la viga, como por ejemplo la debida solamente a su propio peso, tenemos que $f(x) = f_0$. Si además llamamos $k = f_0/EI$, tendremos:

$$y^{iv} = k$$

.../...

.../...

Ahora consideremos las distintas condiciones de contorno. Si $y = 0$, significa que no hay desplazamiento alguno; si $y' = 0$, significa que no hay tangente horizontal; si $y'' = 0$, que no hay momento de combado, y si $y''' = 0$, que no hay fuerza de cizalladura. Entonces, para el caso en el que la viga esté apoyada en los dos extremos, tendremos las condiciones de contorno siguientes:

$$y(0) = y(0)'' = 0, \qquad y(L) = y(L)'' = 0$$

Alternativamente también podríamos haber considerado que la viga está sujeta tanto por arriba como por abajo (por ejemplo, cuando está instalada entre dos paredes) y tendríamos las condiciones:

$$y(0) = y(0)' = 0, \qquad y(L) = y(L)' = 0$$

O bien que la viga estuviera sujeta solo por un extremo y el otro se encontrara suspendido, entonces tendríamos:

$$y(0) = y(0)'' = 0, \qquad y''(L) = y'''(L)' = 0$$

Como la ecuación es extremadamente sencilla, bastan dos integraciones para obtener:

$$y'' = \frac{k}{2}\, x^2 + c_1 x + c_2,$$

que para el caso de las condiciones de contorno establecidas obtenemos $c_2 = 0$, $c_1 = -\,kL/2$, de la condición sobre las segundas derivadas, así que

$$y'' = \frac{k}{2}\,(x^2 - Lx)$$

Integrando otra vez obtendremos que

$$y = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{12}\, x^4 - \frac{L}{6}\, x^3 + c_3 x + c_4\right)$$

y teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$ y el valor de k, tenemos finalmente:

$$y = \frac{f_0}{24EI}\,(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x),$$

que nos dice cómo es la curva que describe el perfil de la viga.

5. ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES NO CONSTANTES

El caso más sencillo de ecuaciones lineales es en el que los coeficientes son constantes y no funciones. Es el caso que hemos visto hasta ahora. En general una ecuación de segundo grado homogénea es de la forma:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

No hay métodos generales para resolver esas ecuaciones, y los que hay se escapan de las ambiciones de estas notas. Merece la pena, eso sí, ver la existencia y unicidad de esas ecuaciones y un caso especial, el de la ecuación de Euler-Cauchy, que por su sencillez y facilidad de resolución vamos a ver a continuación.

5.1. ECUACIÓN DE EULER-CAUCHY

Diremos que una ecuación del tipo

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

es una ecuación diferencial lineal homogénea de Euler-Cauchy cuando sea de la forma:

$$t^2y'' + aty' + by = 0$$

Si en esa ecuación ensayamos soluciones del tipo

$$y = t^m,$$

encontramos que

$$t^2m(m-1)\, t^{m-2} + atmt^{m-1} + bt^m = 0$$

y sacando a t^m como factor común, llegamos a la ecuación auxiliar

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

para así determinar el valor de m. Volvemos a tener solo tres casos posibles:

- Caso I. Dos raíces reales y distintas:

$$y = c_1t^{m_1} + c_2t^{m_2}$$

- Caso II. Una raíz doble $m = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$:

$$y = (c_1 + c_2 \ln t)\, t^{(1-\alpha)/2}$$

- Caso III. Dos raíces complejas conjugadas $m = \mu \pm iv$:

$$y = t^{\mu}\, [A \cos (v \ln t) + B \,\text{sen}\, (v \ln t)]$$

EJEMPLO 14

Resolver la siguiente ecuación:

$$t^2 y'' - 9ty' + 25y = 0$$

Solución

La ecuación auxiliar es en este caso

$$m^2 - 10m + 25 = 0,$$

que tiene como raíz a 5, que además es doble. Así que la solución pedida es:

$$y = (c_1 + c_2 \ln t)\, t^5$$

5.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD

La existencia y unicidad para el caso de ecuaciones lineales de coeficientes constantes y para la ecuación de Euler-Cauchy siempre se da. Así que no es necesario elaborar una teoría para esos casos. Sin embargo, para el caso más general de problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(t_0) = K_0 \\ y'(t_0) = K_1 \end{cases}$$

se puede demostrar que si las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en un intervalo abierto I y t_0 está en ese intervalo, entonces ese problema de valores iniciales tiene una única solución en ese intervalo I.

6. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Hay varios tipos de transformadas que permiten pasar de un problema diferencial a un problema algebraico. De este modo, a partir de una ecuación diferencial podemos obtener una ecuación ordinaria que puede ser resuelta fácilmente. A esta rama que usa este tipo de operaciones se le suele llamar cálculo operacional y es un área importante en matemática aplicada y en ingeniería. Se usa mucho, por ejemplo, en análisis de señal. Es particularmente interesante cuando en lugar de tener las habituales corrientes sinusoidales, tenemos ondas cuadradas o impulsos eléctricos. Se suelen considerar dos tipos de transformaciones: la transformada de Fourier y la transformada de Laplace. En estas notas vamos a considerar solo la segunda porque es más práctica y su uso ilustra problemas importantes de ingeniería.

6.1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Sea $f(t)$ una función continua a trozos en el intervalo $[0, \infty)$, se llama transformada de Laplace de f a la función $L[f] = F$ definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

para todo s tal que la integral converge.

Este operador $L : f \to F$ es claramente lineal. Además podemos definir el operador $L^{-1} : F \to f$. Este operador $L^{-1}[F] = f$, al que llamaremos transformada inversa de Laplace de F, también es lineal.

La propiedad de la linealidad nos será muy útil, pues nos permite calcular la transformada (o antitransformada) de una suma como la suma de las transformadas (o antitransformada), es decir:

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f] + bL[g]$$

Esta propiedad de linealidad se deduce trivialmente de la propiedad de linealidad de la integral, pues la integral de una suma es la suma de las integrales y un escalar que multiplique al integrando puede sacarse fuera del símbolo integral.

Obsérvese que esta transformada está definida como una integral en t, así que una vez aplicada nos quedará una expresión en s. Además, como convenio hemos considerado que la transformada de una variable va en mayúsculas. De este modo, $L[y] = Y$.

Es fácil deducir a partir de la propia definición la transformada de una integral:

$$L\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

O la transformada inversa:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = L^{-1}\left[\frac{1}{s} F(s)\right]$$

Así que podemos tratar problemas integrales. Pero la gran utilidad de la transformada de Laplace es para problemas en derivadas. Así, se puede demostrar que para la derivada n-ésima:

$$L[y^{n)}] = s^n\, Y(s) - s^{n-1}\, y(0) - s^{n-2}\, y'(0) - \ldots - y^{n-1)}(0)$$

lo que hace desaparecer todo rastro de las derivadas, pues todos los sumandos al lado derecho de la igualdad que aparecen después del primero dependen de los valores iniciales para $t = 0$. Veámoslo con un ejemplo.

EJEMPLO 15

Calcular la transformada de Laplace del problema de valores iniciales siguiente:

$$y''' - 2y'' + y' = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 1$$

vemos fácilmente que:

$$s^3Y - 2s^2Y + sY - y''(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3Y - 2s^2Y + sY - 1 = 0$$

pues los demás términos son nulos.

.../...

.../...

Se puede demostrar que para ciertas funciones notables sus transformadas de Laplace son las que están expresadas en la tabla siguiente:

$f(t)$	$L(f)$	$f(t)$	$L(f)$
1	$\frac{1}{s}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$t^n,\ n=1,2,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$t^r,\ r>0$	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega}$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$

Donde las definiciones de seno y coseno hiperbólicos son las habituales:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La tabla anterior no cubre todos los casos posibles. Además, normalmente nos aparecerán expresiones algo más complicadas que las que aparecen en ella, pero podremos reducirlas a combinaciones de estas otras más sencillas o calcularlas gracias a ciertas propiedades como las siguientes:

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a), \qquad L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{n)}(s)$$

Por último, si definimos la convolución de dos funciones f y g como una nueva función tal que

$$(f * g)(t) = \int_0^t (t-u)g(u)du = g * f$$

.../...

.../...

entonces:

$$L[f * g] = L[f] \times L[g]$$

Con esta artillería ya se pueden resolver muchos problemas de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, sean homogéneos o no. Sobre todo si las funciones $f(t)$ que aparecen son productos o sumas de exponenciales, funciones sinusoidales, etc. Pero además nos permitirá resolver casos en los que esas funciones son discontinuas, como para la función paso o la función delta de Dirac, casos en los que las técnicas vistas con anterioridad no se pueden emplear.

Teorema de existencia y unicidad

Sea la función $f(t)$ una función continua a trozos sobre cada intervalo finito que satisface

$$|f(t)| \leq Me^{-kt}$$

para todo t, tal que $t \geq 0$ y alguna constate k y M. Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ existe para todo $s > k$. Además, si la transformada de una función existe, está determinada de manera única.

Este teorema nos garantiza la existencia y unicidad de la transformada de una función para muchos casos, incluso para casos que intuitivamente podemos pensar que no existe, como para funciones discontinuas o construidas a trozos. Vamos a ver los casos más importantes de «trozos», casos a partir de los cuales se pueden hallar otras transformadas de funciones discontinuas, siempre que sean continuas a trozos.

- **Función paso.** La función paso o función *heavyside* consiste en una función que es nula desde $-\infty$ hasta que abruptamente vale 1 a partir de un punto a, es decir:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < a \\ 1 \text{ si } t \geq a \end{cases}$$

tal como se representa en la parte a) de la figura de la página siguiente.

- **Delta de Dirac.** La delta de Dirac, que simbolizaremos como $\delta\,(t - a)$, se puede definir de varias formas. Una de ellas consiste [parte b) de la figura siguiente] en tomar el «límite» cuando n tiende a infinito de la función:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \left[a - \dfrac{1}{2n}, a + \dfrac{1}{2n}\right] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

que como se puede apreciar no es más que una función que es nula para todos los valores del eje horizontal salvo en un segmento centrado en a en el que tiene un valor constante no nulo. El límite hace ese segmento cada más estrecho y más alto hasta que en el infinito se obtiene una delta de Dirac. Esta nueva «función» (en realidad una distribución) está centrada en a y vale infinito en ese punto, pero cero en el resto [parte c) de la figura siguiente].

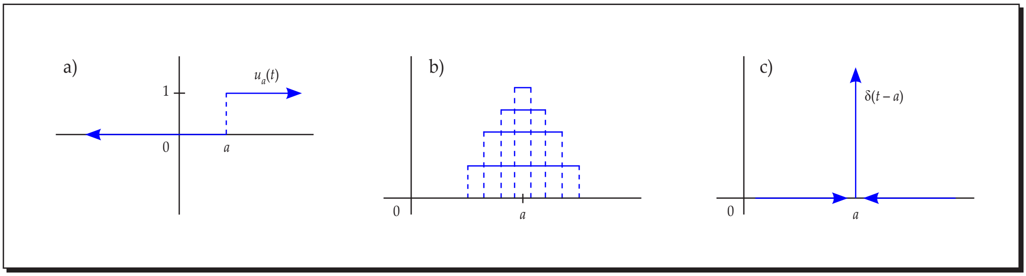
Además, la delta de Dirac será la derivada de la función paso

$$\frac{d}{dt}\, u_a(t) = \delta(t - a)$$

y

$$\int_b^c f(t)\delta(t-a)\, dt = \begin{cases} f(a) \text{ si } a \in [b, c] \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Aunque la delta de Dirac parezca muy abstracta en nuestro caso, simbolizará un pulso intenso de duración muy pequeña (un pulso eléctrico, por ejemplo).



Muchas funciones discontinuas pero continuas a trozos pueden expresarse como combinaciones de funciones paso o deltas de Dirac. Veamos cuáles son las transformadas de Laplace de estas funciones extrañas.

Teorema

Si a > 0, entonces:

$$L[u_a(t)] = \frac{1}{s} e^{-as}, \qquad L[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

y además:

$$L[u_a(t)\, f(t-a)] = e^{-as} F(a), \qquad L^{-1}[e^{-as} F(s)] = u_a(t)\, f(t-a)$$

Este teorema nos permite tratar casos de ecuaciones diferenciales en los que aparezcan este tipo de funciones u otro tipo de funciones discontinuas que se pueden construir a partir de ellas (onda cuadrada, función peine, etc.).

EJEMPLO 16

Si consideramos, por ejemplo, los casos de una función cuadrada de altura h y anchura a y una función triangular asimétrica:

$$f(t) = \begin{cases} h \text{ si } t \in [0, a] \\ 0 \text{ si } t \notin [0, a] \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} t+1 \text{ si } t \in [0, 1] \\ 3-t \text{ si } t \in [1, \infty) \end{cases}$$

Podemos reescribir la primera del siguiente modo:

$$f(t) = h(u_0(t) - u_a(t))$$

y su transformada será:

$$L[f] = F(s) = \frac{h\,(1 - e^{-as})}{s}$$

y en el segundo caso:

$$g(t) = (t+1) - (t+1)\, u_1(t) + (-t+3)\, u_1(t) = t + 1 + (-2\,(t-1))\, u_1(t)$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2} - 2\, e^{-s} \frac{1}{s^2}$$

EJEMPLO 17

Hallar la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 6t \text{ si } 0 \le t < 1 \\ 0 \text{ si } 1 \le t \end{cases}$$

Solución

Como podemos ver, se trata de una función que es una línea recta de pendiente 6 entre 0 y 1 y vale cero para todo $t > 1$. Esto lo podemos expresar gracias a una función paso que pega el salto en 1 y está multiplicada por $6t$, que es una recta igual a la primera pero corrida una unidad hacia la derecha:

$$f(t) = 6[t - tu_1(t)]$$

Su transformada de Laplace será una suma de transformadas:

$$L[f(t)] = 6L[t] - 6L[tu_1(t)]$$

Por un lado tenemos:

$$L[t] = \frac{1}{s^2}$$

Además, por otro lado, usando las propiedades que acabamos de ver:

$$L[tu_1] = -\frac{d}{ds}L[u_1] = \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

O bien:

$$L[tu_1] = L[(t-1)\,u_1 + u_1] = e^{-s}\,L[t] + L[u_1] = e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

La suma de ambas multiplicadas por 6 es:

$$L[f] = L[6(t - tu_1)] = \frac{6}{s^2} - 6e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

Obsérvese que, por superflua, nos hemos ahorrado en la notación especificar cuándo una función es función de t; de este modo $f(t)$ o $u_1(t)$ quedan simplemente como f y u_1.

6.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR TRANSFORMADA DE LAPLACE

El uso de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales se hace en tres pasos:

- En un primer paso usaremos las propiedades que acabamos de ver para convertir la ecuación en un problema algebraico cuya variable será s. Para ello nos ayudaremos de tablas que nos digan la correspondencia algebraica de las funciones que aparezcan en la ecuación diferencial, incluso si son distribuciones como la delta de Dirac o funciones discontinuas de tipo paso, onda cuadrada, etc.
- En un segundo paso resolveremos el problema algebraico que se nos plantea. Esto es algo que será relativamente sencillo. Básicamente se trata de despejar Y, que será la transformada de nuestra y original, en función de s.
- El tercer paso es el más complicado. En el paso anterior solo hemos obtenido la solución de un problema algebraico, que no es la solución de nuestro problema diferencial. Para poder recuperar las variables originales y y t y, por consiguiente, obtener la solución que buscamos, tenemos que aplicar una antitransformada de Laplace, que no es más que la operación contraria a la efectuada. Realizar este paso a la fuerza bruta no suele dar buenos resultados y normalmente tenemos un problema mayor que el de partida. Lo ideal es usar de nuevo las tablas en las que vienen tabulados muchos casos de los que suelen aparecer y, además, tener cierta astucia. Normalmente, el resultado del segundo paso viene en una forma en la que se puede descomponer en sumandos que sí suelen venir en las tablas. Lo más habitual es usar, por ejemplo, la descomposición en fracciones simples (la técnica usada en cálculo para hallar primitivas de funciones racionales), que es una técnica típica usada en integración.

Toda la tarea será mucho más sencilla si se trata de ecuaciones o sistemas lineales de coeficientes constantes, sean homogéneos o no.

EJEMPLO 18

Podemos seguir con el ejemplo que ya empezamos anteriormente del problema de valores iniciales:

$$y''' - 2y'' + y' = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 1$$

.../...

.../...

para el que ya realizamos el primer paso de la metodología que acabamos de describir, obteniendo:

$$s^3Y - 2s^2Y + sY - 1 = 0$$

Tenemos ahora un problema puramente algebraico. Agrupando, sacando factor común:

$$(s^3 - 2s^2 + s)\ Y = 1$$

y despejando Y obtenemos:

$$Y = \frac{1}{s^3 - 2s^2 + s}$$

Con lo que ya hemos realizado el segundo paso. Ahora solo necesitaríamos calcular la antitransformada para realizar el tercer paso. Lo mejor es que antes de eso descompongamos la fracción anterior en fracciones simples, sumandos que quizás podamos encontrar en las tablas:

$$Y = \frac{1}{s^3 - 2s^2 + s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

A continuación, podemos calcular las antitransformadas de esos tres sumandos para así tener la solución de la ecuación diferencial original. Podemos emplear la tabla ya vista, pero usándola al revés, para calcular dichas antitransformadas:

$$L^{-1} = \left[\frac{1}{s}\right] = 1, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^t, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = te^t$$

Así que como

$$Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

y como $L^{-1}[Y] = y$, entonces la solución de la ecuación original es:

$$y = 1 - e^t + te^t = 1 + (t - 1)\ e^t$$

Y con esto terminamos el tercer paso y último y hallamos la solución.

6.2.1. El problema de cómo calcular la antitransformada

Como ya hemos comentado, el paso más difícil a la hora de resolver ecuaciones diferenciales por Laplace es el tercero, en donde hay que hacer la transformada inversa o antitransformada de una función en la variable *s* para recuperar la *t*. Para ello nos podemos valer de la tabla vista anteriormente, pero leída al revés. De este modo, las propiedades principales que se utilizarán serán las siguientes:

Tabla inversa (resumen)

$$L^{-1}\left[c\,\frac{1}{(s-a)^k}\right] = e^{at}\,\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \qquad L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^n$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos \omega t \qquad L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \text{sen}\ \omega t$$

$$L^{-1}\,[F(s-a)] = e^{at}\,L^{-1}\,[F(s)] \qquad L^{-1}\,[e^{-as}\,F(s)] = u_a(t)\,f(t-a)$$

Un caso típico es en el que nos encontremos, o tengamos que buscar, binomios del tipo $(s - a)$. Así, por ejemplo, imaginemos que tenemos una expresión del tipo

$$\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$$

sobre la cual tenemos que averiguar su antifransformada. Como vemos, aparece $(s - 2)$, así que podemos usar la quinta expresión ($L^{-1}\,[F(s-a)] = e^{at}\,L^{-1}\,[F(s)]$) de la tabla anterior y obtener:

$$L^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right] = e^{2t}\,L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] = e^{2t}\,L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right]$$

Expresión, esta última, sobre la que podemos aplicar la propiedad tercera de la tabla anterior:

$$e^{2t}\,L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right] = e^{2t}\cos 3t$$

Otro ejemplo típico de manipulación puede ser el siguiente:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^4}\right] = e^{3t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = e^{3t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^{3+1}}\right] =$$

$$= e^{3t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^{3+1}} \cdot \frac{3!}{3!}\right] = \frac{e^{3t}}{3!} L^{-1}\left[\frac{3!}{s^{3+1}}\right] = \frac{e^{3t}}{3!} t^3$$

en donde hemos manipulado poco a poco hasta conseguir que aparezca la relación segunda de la tabla anterior. Lo importante es saber hacia dónde vamos y no realizar operaciones a lo loco sin meta alguna.

Normalmente no aparece ya todo tan mascado espontáneamente y hay que manipular previamente. Así, por ejemplo, puede que una vez que hayamos hecho una descomposición en fracciones simples no podamos reducir mucho más y tengamos polinomios de grado mayor que uno, como en:

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

En estas situaciones hay que forzar que aparezca algún $(s - a)$ por algún lado. Pero como $(s-1)^2 = s^2 - 2s + 1$, podemos entonces escribir lo siguiente:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 2s + 2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2 + 1}\right] = e^t L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = e^t \operatorname{sen} t$$

Otro ejemplo de este estilo sobre el que calcular la antitransformada puede ser:

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}\right]$$

Obsérvese que el polinomio del denominador no tiene raíces reales, así que no se puede poner en forma de binomios, no se puede simplificar más y esa fracción es la más sencilla posible en ese caso. Podría haber aparecido a partir de, por ejemplo, esta descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2s^3+4s^2+4s+2}{s^2(s^2+2s+2)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+2}+\frac{Es+F}{(s^2+2s+2)^2}=$$
$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

En todo caso, podemos ver que el término complicado en cuestión se parece a la expresión en coseno de la tabla, pero necesitamos sacar un $(s+1)$ en el denominador para extraer una exponencial fuera de la antitransformada y que nos quede justo la expresión del coseno que aparece en la tabla. Esto se puede conseguir teniendo en cuenta que $(s+1)^2=s^2+2s+1$, elemento que se coloca en el denominador añadiendo la constante que necesitemos para mantener la igualdad.

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right]=L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=e^{-t}\cos t$$

De nuevo, lo importante es saber hacia dónde vamos para así operar adecuadamente.

Si tenemos una expresión en s que es producto de dos, siempre podemos echar mano de la convolución, como en este caso:

$$L^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+1)}\cdot\frac{s}{(s^2+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+1)}\right]*L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right],$$

de la que obtenemos:

$$L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+1)}\right]*L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right]=2\operatorname{sen} t*\cos t=2\int_0^t \operatorname{sen}(t-u)\cos u\,du=t\operatorname{sen} t.$$

Por último, puede aparecer una expresión con una exponencial. Esto es una pista de que posiblemente haya que usar una función paso y manipularemos para llegar a esa meta. Por ejemplo,

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right]$$

se parece a $L^{-1}[e^{-as}F(s)] = u_a(t)\, f(t-a)$ en la que $a = 1$. Además sabemos que

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = e^{-t}\, L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = te^{t} = f(t).$$

Así que el resultado será la función paso por $f(t)$ en la que sustituimos t por $(t-1)$:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right] = L^{-1}\left[e^{-s}\,\frac{1}{(s+1)^2}\right] = u_1(t)\,(t-1)e^{-(t-1)} = u_1(t)\,(t-1)e^{1-t}$$

6.3. CASO LINEAL NO HOMOGÉNEO DE SEGUNDO ORDEN

Una situación típica con la que nos podemos encontrar es el problema de valores iniciales siguiente:

$$y'' + ay' + by = f(t), \qquad y(0) = K_0, \qquad y'(0) = K_1$$

Si aplicamos la transformada de Laplace, nos queda:

$$s^2Y(s) - sK_0 - K_1 + a(sY(s) - K_0) + bY(s) = F(s)$$

Expresión que podemos reordenar del siguiente modo:

$$(s^2 + as + b)\, Y(s) = (s + a)\, K_0 + K_1 + F(s)$$

y despejar $Y(s)$ de manera trivial:

$$Y(s) = \{(s + a)\, K_0 + K_1\}\, Q(s) + F(s)\, Q(s)$$

en donde hemos usado la notación:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Obsérvese que Q no depende ni de la función f ni de los valores en el inicio.

Para el caso particular en el que

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0,$$

la expresión anterior es aún más sencilla:

$$Y(s) = F(s)\ Q(s)$$

y su antitransformada se puede hallar fácilmente por descomposición en fracciones simples.

6.4. ALGUNOS CASOS PRÁCTICOS

EJEMPLO 19

Vamos a resolver el problema:

$$\begin{cases} y'' - y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

usando transformada de Laplace. Como podemos observar, se trata de un caso de segundo orden en el que $a = 0$, $b = -1$, $f(t) = t$ y $K_1 = K_2 = 1$, según la notación que acabamos de ver. Así que

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \qquad \text{y} \qquad F(s) = \frac{1}{s^2},$$

por lo que

$$Y(s) = \{(s - a)\ K_0 + K_1\}\ Q(s) + F(s)\ Q(s)$$

y finalmente queda:

$$Y(s) = \{(s - 0) + 1\} \frac{1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{s + 1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2\,(s^2 - 1)}$$

.../...

.../...

Si operamos el primer sumando y descomponemos la última expresión en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}$$

y, buscando sus antitransformadas, obtenemos el resultado final:

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]$$

que es igual a:

$$e^t + \operatorname{senh} t - t = \frac{3e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} - t$$

EJEMPLO 20

Ahora vamos a resolver el problema de valores iniciales siguiente:

$$\begin{cases} y''' - y'' = f(t) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3 \\ y''(0) = -6 \end{cases}$$

en el que la función $f(t)$ es

$$f(t) = \begin{cases} 6t \text{ si } 0 \le t < 1 \\ 0 \text{ si } 1 \le t \end{cases}$$

Ya calculamos la antitransformada de este caso anteriormente:

$$L[f] = \frac{6}{s^2} - 6e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

.../...

.../...

Por tanto, si aplicamos transformadas de Laplace a la ecuación completa y tenemos en cuenta las condiciones en el origen, entonces obtenemos:

$$s^3 Y + s^2 3s + 6 + s^2 Y + s - 3 = \frac{6}{s^2} - 6e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

Si «masajeamos» un poco esa expresión, nos queda que

$$Y = \frac{-s^4 + 2s^3 - 3s^2 + 6}{(s+1)\, s^4} - e^{-s}\frac{6}{s^4}$$

y descomponiendo en fracciones simples:

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^4} - e^{-s}\frac{6}{s^4}$$

Si ahora tomamos la antitransformada de cada sumando, ya tenemos la solución:

$$y = -1 + 3t - 3t^2 + t^3 - u_1(t)\,(t-1)^3$$

Es decir, la solución es un polinomio de tercer grado al que se le resta la función:

$$u_1(t)\,(t-1)^3 = \begin{cases} (t-1)^3 \text{ si } t \leq 1 \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 21

Supongamos ahora que tenemos un circuito RC alimentado por un pulso de corriente cuadrado cuyo voltaje vale V_0, solo cuando t está entre a y b, y vale cero en el resto. Podemos plantear la ecuación y resolverla por Laplace. De entrada sabemos que un circuito RC obedece a esta ecuación:

$$R\, i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, d\tau = V(t)$$

.../...

.../...

en donde hemos sustituido la habitual notación para la corriente por una notación en minúscula y así reservamos la mayúscula para su transformada. Además, el voltaje es en este caso un pulso ancho de tipo cuadrado que se puede poner como una combinación de funciones paso de este modo:

$$V(t) = V_0 \{u_a(t) - u_b(t)\}$$

Entonces, aplicando transformadas, se llega a la expresión:

$$R\, I(s) + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V_0}{s} \left\{e^{-as} - e^{-bs}\right\}$$

que podemos resolver algebraicamente:

$$I(t) = F(s)\,(e^{-as} - e^{-bs}), \qquad \text{con } F(s) = \frac{\dfrac{V_0}{R}}{\dfrac{s+1}{(RC)}}$$

Como

$$L^{-1}[F] = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/(RC)}$$

la corriente solución será:

$$i(t) = L^{-1}\,[I(s)] = L - 1\,[e^{-as}\,F(s)] - L - 1\,[e^{-bs}\,F(s)] = \frac{V_0}{R}\,\{e^{-(t-a)/(RC)}\,u_a(t) - e^{-(t-b)/(RC)}\,u_b(t)\}$$

Así que finalmente, si expandimos esa expresión en su escritura a trozos:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ Ae^{-t/(RC)} & \text{si} \quad a < t < b \\ (A - B)\, e^{-t/(RC)} & \text{si} \quad t > b \end{cases}$$

siendo:

$$A = \frac{V_0\, e^{a/(RC)}}{R}, \qquad B = \frac{V_0\, e^{b/(RC)}}{R}$$

EJEMPLO 22

Supongamos ahora un oscilador armónico amortiguado al que le damos un impulso lo suficientemente corto como para que sea representado por una delta de Dirac:

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

Aplicando transformadas:

$$s^2 Y + 3sY + 2Y = e^{-s}$$

$$Y = e^{-s}\, F(s), \text{ siendo } F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

y como

$$f(t) = L^{-1}\,[F(s)] = e^{-t} - e^{-2t}$$

entonces:

$$y(t) = L^{-1}\left[e^{-s}\, F(s)\right] = f(t-1)\; u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; 0 \le t < 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} & \text{si } \; t > 1 \end{cases}$$

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Ecuación diferencial de segundo orden.
- Tipología de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- Osciladores.
- Ecuación de Euler-Cauchy.
- Teorema de existencia y unicidad.
- Transformada de Laplace.
- Delta de Dirac, funciones paso y combinaciones de funciones discontinuas.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Resolver el siguiente problema de valores en la frontera:

$$\begin{cases} 3y'' - 8y' - 3y = 0 \\ y(-3) = 1 \\ y(3) = 1/e^2 \end{cases}$$

Enunciado 2

Proporcionar las soluciones generales de estas dos ecuaciones:

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$$

$$t^2y'' + 7ty' + 13y = 0$$

Enunciado 3

Hallar la solución de la ecuación diferencial siguiente:

$$y'' + 4y = 8t^2$$

Enunciado 4

Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 4e^{3t} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Enunciado 5

Usar el método de variación de parámetros para resolver la ecuación:

$$y'' + y = \sec t$$

Enunciado 6

Resolver la siguiente ecuación:

$$y'' + 4y = \operatorname{sen} 3t$$

Enunciado 7

Averiguar la solución general de la ecuación homogénea siguiente:

$$y^{iv} - 16y = 0$$

Enunciado 8

Averiguar la solución general de la ecuación homogénea siguiente:

$$y^{iv} + 2y'' + y = 0$$

Enunciado 9

Resolver por transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Enunciado 10

Resolver para los valores iniciales $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ el problema:

$$y'' + y' = \begin{cases} t + 1 \text{ si } t \in [0, 1] \\ 3 - t \text{ si } t \in [1, \infty) \end{cases}$$

Solución 1

$$y = e^{-\frac{1}{3}x - 1}$$

Solución 2

$$y = (c_1 + c_2 \ln t)\, t^2$$
$$y = t^{-3}\left\{A \cos (2 \ln t) + B \operatorname{sen} (2 \ln t)\right\}$$

Solución 3

$$y = A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t + 2t^2 - 1$$

Solución 4

$$y = e^{3t} (\cos 2t - \operatorname{sen} 2t) + e^{3t}$$

Solución 5

$$y = A \cos t + B \operatorname{sen} t + \cos t \cdot \ln |\cos t| + t \operatorname{sen} t$$

Solución 6

$$y = A \cos 2t + B \cos 2t - \frac{1}{5} \operatorname{sen} 3t$$

Solución 7

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + A \operatorname{sen} 2t + B \cos 2t$$

Solución 8

$$y = (A + Bt) \cos t + (c + Dt) \operatorname{sen} t$$

Solución 9

$$y = \left(\frac{1}{2} t^2 - 1 \right) e^{-t}$$

Solución 10

$$(s^2 + s)\, Y + s + 1 = \frac{s+1}{s} - 2e^{-s} \frac{1}{s^2}$$

$$Y = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^3 (s+1)}$$

$$Y = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} - 2e^{-s} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1} \right\}$$

$$y = \frac{t^2}{2} - 1 - 2u_1(t) \left\{ 1 - (t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} - e^{1-t} \right\}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa.

Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Belmont: Interamericana.

Elsgoltz, L. (1992). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Moscú: Mir.

Fernández, C., Vázquez, F. J. y Vegas, J. M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Madrid: Paraninfo

Guzmán, M. de. (1980). *Ecuaciones diferenciales ordinarias:teoría de estabilidad y control*. Madrid: Alhambra.

Hirsch, M. W. y Smale, S. (1983). *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Madrid: Alianza.

Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. (1979). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Moscú: MIR.

Kreyszig, E. (2006). *Advanced engineering mathematics*. Nueva York: John Wiley and Sons.

Plaat, O. (1974). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Barcelona: Reverté.

Ross, S. L. (1992). *Ecuaciones diferenciales*. Barcelona: Reverté.

Simmons, G. F. (1988). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Madrid: McGraw-Hill.