UNIDAD DIDÁCTICA

2 EL CAMPO ELECTROSTÁTICO (II): ENERGÍA Y POTENCIAL

Objetivos de la unidad

1. Introducción
2. Energía electrostática de una carga puntual en un campo electrostático
   - 2.1. Diferencia de energía potencial entre dos puntos
   - 2.2. Energía potencial en un punto cualquiera
   - 2.3. Independencia del camino elegido: el campo es conservativo
   - 2.4. Otras consecuencias de la independencia del camino
3. El potencial electrostático
   - 3.1. Primera visión: la consecuencia de los postulados
     - 3.1.1. Demostración breve
     - 3.1.2. Relación entre el campo y el potencial en términos matemáticos
   - 3.2. Segunda visión: una interpretación física del potencial
   - 3.3. Unidades del potencial
   - 3.4. Valor absoluto del potencial y otros potenciales
   - 3.5. Otras propiedades del potencial
4. Potencial, superficies equipotenciales y las líneas del campo
   - 4.1. Gradiente de una función escalar
   - 4.2. La altura del campo electrostático
     - 4.2.1. Un pozo de potencial

4.3. Lugares equipotenciales

4.3.1. Definición de una «superficie equipotencial»
4.3.2. El campo y las superficies equipotenciales
4.3.3. Potencial y líneas de nivel
4.3.4. Trabajo y lugares equipotenciales

5. Potencial asociado a una distribución de cargas

5.1. Potencial electrostático generado por una carga puntual
5.2. Potencial generado por una distribución de cargas discretas
5.3. Potencial creado por una distribución de carga continua

5.3.1. Ejemplo: potencial creado por un anillo cargado a lo largo de su eje

6. Otra forma de calcular el campo electrostático

6.1. El campo calculado desde el potencial

6.1.1. Campo generado por un disco cargado

6.2. Unicidad de la solución

7. Ecuaciones de Poisson y Laplace: el problema electrostático

7.1. El operador laplaciano en cartesianas
7.2. Ecuación de Poisson
7.3. Ecuación de Laplace
7.4. El problema electrostático
7.5. Potencial electrostático entre dos placas conductoras

7.5.1. Resolución de la ecuación de Laplace
7.5.2. Condiciones en la frontera
7.5.3. Cálculo del campo eléctrico

8. Conductores y el potencial electrostático

8.1. Diferencia de potencial entre dos puntos en el conductor
8.2. El conductor es un volumen equipotencial
8.3. Poner a tierra un conductor
8.4. Potencial de una esfera conductora cargada

9. Energía de una distribución de carga

9.1. Energía de una distribución de tres cargas puntuales
9.2. Las distribuciones almacenan energía
9.3. Energía positiva y energía negativa
9.4. Energía de una distribución discreta de cargas

9.5. Energía de una distribución continua de carga

9.5.1. ¿Qué quiere decir esta expresión?

9.5.2. Energía de una esfera conductora cargada

10. La energía almacenada en el campo

10.1. Demostración previa

10.2. Implicación 1: el campo tiene energía

10.3. Implicación 2: el campo mide una densidad de energía

10.4. Implicación 3: el campo como entidad propia

Actividades de autocomprobación

Referencias bibliográficas

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

La unidad 2 tiene como objetivo principal que seas capaz de manejar los conceptos de «energía» y «trabajo» que están asociados al campo electrostático, pero, sobre todo, el concepto de «potencial». Una vez que finalices la unidad, debes ser capaz de:

- Comprender el concepto de «energía potencial electrostática».
- Entender por qué el campo electrostático es conservativo.
- Entender el concepto de «potencial electrostático».
- Calcular el potencial electrostático generado por diversas distribuciones de carga.
- Entender la relación de los conductores ideales con la energía y potencial electrostático.
- Calcular la energía electrostática de una distribución de carga cualquiera.

1. INTRODUCCIÓN

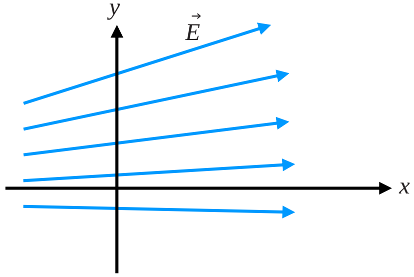
En la unidad 1 analizamos la interacción electrostática y vimos cómo las cargas se atraían y repelían siguiendo la ley de Coulomb. Además, dimos un paso más y comprendimos que una carga (o una distribución de carga) generaba, en el espacio, un campo vectorial que llamamos «campo electrostático» y decidimos cambiar la forma de interpretar la interacción electrostática, pasando de un problema de fuerzas a un problema de campos. Si lo piensas bien, analizamos toda la unidad en términos de campos y fuerzas, pero no estudiamos de ninguna manera el problema desde un punto de vista de trabajo y energía. En física, el trabajo y la energía están siempre presentes y, por tanto, analizar la electrostática desde este punto de vista nos va a dar una nueva forma de entender los problemas.

Seguro que en más de una ocasión has oído hablar de la «diferencia de potencial», de la «tensión eléctrica» o de que «algo está puesto a tierra». En esta segunda unidad comprenderemos estos conceptos en profundidad.

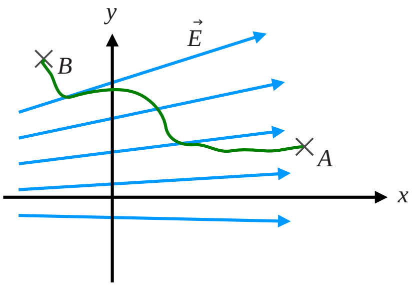
2. ENERGÍA ELECTROSTÁTICA DE UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

2.1. DIFERENCIA DE ENERGÍA POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS

Vamos a imaginar que en una zona del espacio hay un campo electrostático. No nos preocuparemos, por el momento, de cómo se ha generado este campo. La figura muestra las líneas de este campo electrostático en nuestra zona de interés:



Ahora imagínate que tenemos una pequeña carga eléctrica puntual, de valor q, en un punto A de la misma zona del espacio y que la queremos mover hasta otro punto del espacio, es decir, hasta B:



Para mover la carga q (que no está dibujada por no complicar el dibujo), lo haremos de una forma particular, que luego veremos que es importante: vamos a recorrer el camino verde (que llamaremos «camino C»). Lo haremos de tal forma que el módulo de su velocidad sea constante, es decir, sin que el cuerpo tenga variaciones de su energía cinética, lo que podría ser «poco a poco».

Pues bien, ¿qué ocurre al hacer esto? Ocurre que la carga q está sometida a una fuerza debida al campo eléctrico que ya conocíamos y que es:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

Para poder cumplir con la premisa de que moveremos la carga a velocidad constante, hemos de asegurarnos de que la fuerza total sobre la carga es 0 y, por lo tanto, estaremos obligados a contrarrestar la fuerza que el campo ejerce sobre la carga. Es decir, tendremos que hacer una fuerza sobre la carga que sea igual a la del campo, pero cambiada de signo:

$$\vec{F} = -\,q\,\vec{E}$$

Si recurrimos a nuestro conocimiento de física, nos acordaremos de que, cuando yo ejerzo una fuerza a lo largo de un desplazamiento, se produce un trabajo. Este trabajo, en forma de pequeño diferencial, se define como:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Donde dW es el diferencial de *work* o diferencial de trabajo. Por tanto, el trabajo total que tendremos que hacer para mover nuestra carga a lo largo de la línea verde (el camino C), desde el punto A hasta el B, será:

$$W_{A \to B} = \int_A^B - q\, \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Pues bien, por convenio, a este trabajo se le llama «energía potencial electrostática», y veremos la causa de este nombre un poco más adelante. Se denota así:

$$U_{AB} = -\, q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Y se lee así: U_{AB} es la energía potencial electrostática que una carga q adquiere al moverse de A a B a través de la línea C. Esta energía es el trabajo que hemos de aplicar contra el campo para hacer este movimiento de forma cuasiestática. Se mide en julios (J), como todo trabajo y energía.

2.2. ENERGÍA POTENCIAL EN UN PUNTO CUALQUIERA

Si queremos definir la energía potencial que una partícula cargada tiene en un punto del espacio donde hay un campo electrostático, tendremos algún que otro problema. En el apartado anterior solo hemos definido la diferencia de energía potencial entre dos puntos y, por lo tanto, no hemos definido esta magnitud en términos absolutos.

En muchas ocasiones, y por convenio, en realidad porque viene muy bien, se dice que la energía potencial electrostática del infinito es 0.

> De esta forma, podemos definir la **energía potencial** que una carga tiene dentro de un campo electrostático en un punto A como el trabajo que nos cuesta traer esta carga desde el infinito a este punto.

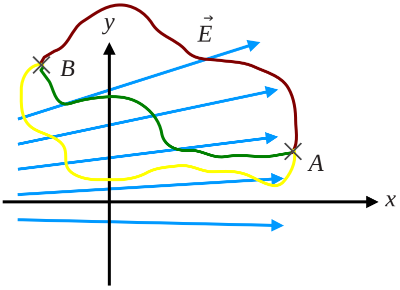
Así:

$$U_A = U_{\infty A} = -\, q \int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

2.3. INDEPENDENCIA DEL CAMINO ELEGIDO: EL CAMPO ES CONSERVATIVO

Pues bien, ahora la pregunta más importante que tenemos que responder es la siguiente: ¿esta integral depende del camino que sigamos?

Vamos a volver a la figura inicial:



Podríamos haber elegido cualquier camino para ir de *A* a *B*. En la figura hay dibujados, además del camino verde, uno marrón y uno amarillo. ¿El trabajo que me cuesta llevar la carga desde *A* hasta *B* depende de este camino elegido?

La respuesta es no. Y vamos a ver la razón.

Echando mano de la teoría de campos vectoriales, recordarás que la integral de línea del campo depende, en general, del camino elegido. Pero hay unos tipos de campos vectoriales especiales, que se llaman «campos conservativos», en los que la integral de línea no depende del camino elegido, sino solo del punto inicial y del punto final.

En la unidad 1, donde establecimos los postulados del campo electrostático, dijimos que el campo electrostático es un campo conservativo, ya que cumple que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Esto es válido para todos los puntos del espacio.

Decir esto es equivalente a decir que el trabajo no depende del camino elegido a la hora de mover la carga y, por lo tanto, **la energía es independiente del camino y solo depende del punto inicial y del punto final**.

2.4. OTRAS CONSECUENCIAS DE LA INDEPENDENCIA DEL CAMINO

Vamos a recordar aquí las propiedades que tiene un campo conservativo:

- Su rotacional en todo punto del espacio es 0:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

- El campo se puede expresar como un gradiente de una función escalar:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f$$

- La circulación, la integral de línea a lo largo de cualquier camino cerrado, es 0.
- La integral de línea solo depende del punto final e inicial y no depende del camino elegido.

Estas cuatro propiedades tienen una particularidad: si se cumple una de ellas, se cumplen las otras tres, sea cual sea la propiedad que se cumpla en primer lugar.

3. EL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

3.1. PRIMERA VISIÓN: LA CONSECUENCIA DE LOS POSTULADOS

Acabamos de verlo, pero, por la importancia que tiene, permíteme que lo vuelva a escribir aquí. Uno de los dos postulados fundamentales del campo electrostático es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Y también acabamos de decirlo, pero, de nuevo, lo escribiré aquí. Un campo cuyo rotacional es 0 es un campo conservativo, y un campo vectorial conservativo tiene una particularidad muy interesante; puede ser escrito como el gradiente de una función escalar:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

El signo menos de la expresión anterior tiene una explicación física que veremos luego, pero, desde el punto de vista matemático, es irrelevante. Lo que nos está diciendo la expresión anterior es que, aunque nuestro campo sea un campo vectorial y, por lo tanto, tenga módulo, dirección y sentido en cada punto del espacio, en realidad, es un campo «sencillo». Es sencillo en el sentido de que existe una función escalar (que no tiene ni dirección ni sentido) que define totalmente al campo. Solo hemos de tomar derivadas de esta función escalar, el gradiente, y tendremos el valor del campo en cada punto del espacio.

De esta manera, podemos decir que, según sea la distribución de cargas y otros materiales, en cualquier región del espacio, abierta o cerrada, existe una función escalar *V*, que llamamos «potencial electrostático», que define completamente al campo electrostático. Si fuésemos capaces de calcular la función potencial *V*, solo tendríamos que calcular el gradiente para obtener el campo.

3.1.1. Demostración breve

Podemos demostrar, en unas pocas líneas, que una función vectorial cuyo rotacional es nulo se puede escribir como un campo derivado de un potencial. Por simplicidad, operaremos en coordenadas cartesianas.

En primer lugar, escribimos el rotacional del campo, que ha de ser nulo en todos los puntos del espacio:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Este rotacional será 0 si lo son sus tres componentes, o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Si el campo procede de un gradiente:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad \rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Ahora bien, si introducimos las componentes de este campo en las ecuaciones de arriba, en la primera, por ejemplo:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial y}}{\partial z} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial z}}{\partial y}$$

En general, si la función V es derivable dos veces, las derivadas cruzadas son independientes del orden y, por tanto, la igualdad será cierta.

3.1.2. Relación entre el campo y el potencial en términos matemáticos

Como acabamos de ver, hemos demostrado que asociado a un campo electrostático, por sus características físicas, existe una función escalar, de la que aún sabemos poco, pero que nos permite calcular el campo. A esta función escalar la llamamos «función potencial del campo» o, simplemente, «potencial electrostático».

Si conociésemos el potencial, podríamos calcular el campo (recuerda que el signo negativo simplemente nos viene bien y que tiene una explicación física):

$$E = -\vec{\nabla} V$$

La operación contraria, dado el campo, encontrar la función potencial electrostática, no es una operación generalmente fácil, ya que requiere resolver la ecuación diferencial que encierra el gradiente, aunque en muchos caso sí que será razonablemente sencillo. Ahora bien, encontrar el valor numérico de la diferencia de potencial entre dos puntos, si conocemos el campo electrostático, es muy sencillo; solo hay que calcular la integral de línea entre ambos puntos:

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Conceptualmente, y en términos puramente matemáticos, esta es la relación que existe entre el campo y su potencial:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "-\vec{\nabla} V"] & \vec{E} \arrow[l, bend left, "-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}"] \end{tikzcd}$$

3.2. SEGUNDA VISIÓN: UNA INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL POTENCIAL

De la misma manera que acabamos de descubrir que asociado al campo electrostático existe una función potencial simplemente como consecuencia de los postulados del campo, también podemos darnos cuenta de cuál es su significado físico.

Vamos a intentar buscar esta función potencial y, para ello, usaremos la relación entre el campo electrostático y la energía potencial que una partícula cargada tiene en su interior. Además, en este apartado veremos el origen del signo negativo de la expresión del potencial que vimos anteriormente.

Sabemos que el campo electrostático es conservativo y, por tanto, cumple esta relación (por sencillez, el signo negativo está omitido en esta ocasión):

$$\vec{E} = \vec{\nabla} f$$

Como decíamos antes, podemos intentar despejar la función escalar f, pero no es una operación muy trivial.

Pero podemos usar otro camino, un camino más físico. Sabemos que, ya que E es conservativo, la energía de una carga q en cualquier punto solo depende del punto en particular; es decir:

$$U_a = \int_{infinito}^{a} -q\,\vec{E} \cdot d\vec{l} = f(a)$$

Si analizamos con cuidado esta integral, nos damos cuenta de que la energía potencial electrostática de una carga q en un campo (U) cumple que es una función escalar que solo depende de la posición (a). Esta función de energía potencial se parece mucho a lo que estamos buscando: una función escalar que solo depende del punto donde la mido y, por tanto, parece que es nuestro camino hacia el potencial V. Pero es que, si además jugamos un poco con la integral, podemos reescribirla así:

$$U_a = \int_{infinito}^{a} -q\,\vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_{infinito}^{a} -\vec{E}\cdot d\vec{l} = q\,V(a)$$

Al sacar la carga q de la integral, acabamos de encontrar una función V que cumple lo siguiente:

- Es escalar.
- Solo depende de la posición a.
- Se calcula como la integral de línea del campo electrostático.
- No depende de la carga q.

Además, si calculamos el gradiente de esta función, nos encontramos que obtenemos el campo electrostático, ya que es deshacer la operación integral de línea; por tanto:

$$\vec{E} = \vec{\nabla}(-V) = -\vec{\nabla}V$$

Perfecto. Con este razonamiento hemos conseguido dos cosas. Por un lado, hemos demostrado, mediante otro camino, que el potencial existe y que se puede calcular, como dedujimos en el apartado anterior. Pero, por otro lado, y aún más importante, le hemos dado al potencial una interpretación física y una justificación para su nombre: es la cantidad de energía potencial que tendría una carga test de 1 C situada en el interior del campo. Dicho de otra forma, el potencial electrostático también es el trabajo que tenemos que realizar para traer una partícula cargada de 1 C desde el infinito hasta el punto donde estamos calculando el potencial.

3.3. UNIDADES DEL POTENCIAL

Las unidades del potencial electrostático son:

$$\left[\frac{N\,m}{q}\right] = [V] = [J/C]$$

La unidad que se da al potencial electrostático, el voltio, es en honor a Volta, quien inventó la primera pila eléctrica. Los voltios, cuyas unidades fundamentales son las de julios por culombio, miden la energía por unidad de carga, pero esto ya lo sabíamos de la definición del potencial eléctrico, ¿verdad?

3.4. VALOR ABSOLUTO DEL POTENCIAL Y OTROS POTENCIALES

Voy a escribir de nuevo aquí la expresión que nos permite calcular el campo eléctrico desde la función potencial:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Vamos a ver qué pasa si sumamos al potencial una constante:

$$V_2 = V + C$$

Y calculemos de nuevo el campo electrostático:

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla} V_2 = -\vec{\nabla}(V + C) = -\vec{\nabla} V - \vec{\nabla} C$$

Pero es que, como C es constante, el gradiente de una constante es 0; por lo tanto:

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla} V - \vec{\nabla} C = -\vec{\nabla} V = \vec{E}$$

Es decir, el campo eléctrico que calculamos a partir de un potencial o un potencial al que le hemos sumado una constante es el mismo. No importa que al potencial le sumemos una constante; el campo que representa es el mismo. En realidad esto significa que asociado a un campo electrostático no hay solo una función potencial, sino que hay infinitas que solo se diferencian entre ellas en una constante aditiva.

Esta conclusión nos debería llevar a pensar lo siguiente: ¿existe un potencial absoluto, un potencial que defina de forma única la energía potencial de una partícula de 1 C en un punto en el interior de un campo? La respuesta, por más descorazonadora que parezca, es no. Recuerda que a cualquier potencial V le podemos sumar una constante C y sigue representando el mismo campo, lo que significa que el potencial absoluto de un punto no existe.

Pero sí que podemos hacer una cosa: fijar el potencial de algún punto del espacio y, entonces, tendremos fijado el valor del potencial en el resto de los puntos. Esta misma estrategia la seguimos cuando definimos la energía potencial de una partícula en un campo: en general, aunque no siempre será así, fijaremos el potencial del infinito como de 0 *V*.

En otras ocasiones, algún punto de la geometría del problema tendrá un valor fijo de potencial.

Aunque aún queda un poco para que analicemos los metales y su relación con el potencial, fíjate en este dibujo:

En él hemos fijado, con el símbolo de una tierra eléctrica, el potencial de esa chapa de metal a 0 *V*. Con ello, si estuviéramos resolviendo un problema, tendríamos fijado el potencial de una parte de la geometría a 0 *V*.

3.5. OTRAS PROPIEDADES DEL POTENCIAL

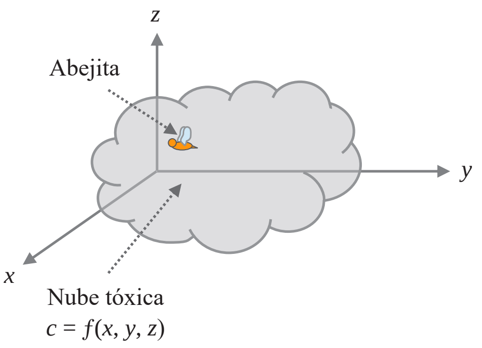
Al igual que el campo electrostático, el potencial cumple el principio de superposición: si en una región del espacio tenemos un potencial generado por una distribución de carga y añadimos una segunda distribución de carga, el potencial resultante es la suma de ambos potenciales.

4. POTENCIAL, SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES Y LAS LÍNEAS DEL CAMPO

Hay una interpretación que, en mi opinión, es clave para entender el campo electrostático y su potencial: el potencial es una función que mide, en cierta forma, la altura del campo. Pero antes de poder explicar esta interpretación, necesitamos hablar un poco más del gradiente.

4.1. GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Ya está claro que, si conocemos el potencial electrostático, podemos calcular el campo asociado simplemente calculando el gradiente, pero ¿qué significa el gradiente de una función escalar? Vamos a imaginarnos que tenemos una habitación llena de un humo tóxico y que hay una pequeña abejita en su interior:



La nube tóxica tiene una concentración diferente en cada punto, es decir, en algunos sitios es más tóxica que en otros, y la podemos escribir como una función escalar de toxicidad:

$$c = f(x, y, z)$$

La pregunta que se hará la abejita es la siguiente: ¿qué camino tengo que seguir para salir lo más rápido posible de esta nube sin intoxicarme?

Si calculamos el gradiente de la función que nos mide la concentración tóxica, obtenemos un vector en cada punto del espacio:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

Este campo vectorial nos mide, literalmente, cómo cambia la concentración en cada punto y, además, nos dice en qué dirección y sentido cambia más. Dicho de otra forma: si nuestra abejita calcula el gradiente de la concentración de la nube tóxica, lo que obtiene es un vector que le dice en qué dirección tiene que moverse para que aumente más la concentración de veneno.

Así, yendo en el sentido contrario del vector gradiente que acaba de calcular, nuestra abejita podrá estar segura de que sigue el camino en el que la concentración decrece más rápidamente. Es su mejor vía de escape fuera de la nube tóxica.

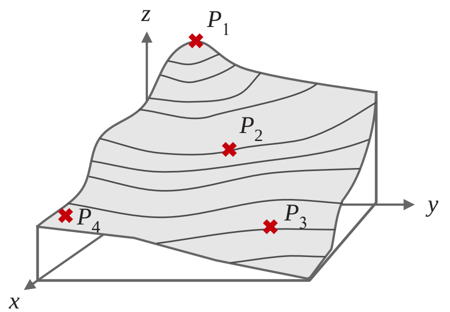
> De una manera más formal, el **gradiente** de una función escalar f es una función vectorial que indica el valor de la derivada máxima de la función f y la dirección y el sentido en el que la función f varía más en cada punto.

4.2. LA ALTURA DEL CAMPO ELECTROSTÁTICO

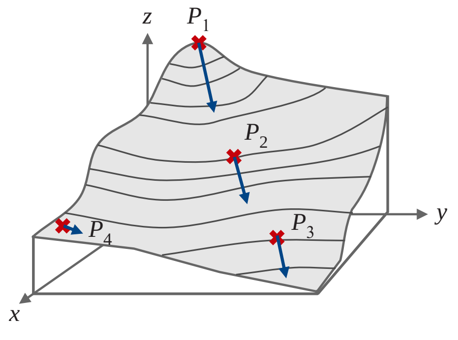
Ahora que ya sabemos que el gradiente de una función nos calcula un vector en que nos dice cómo varía la función escalar y hacia dónde lo hace más fuertemente, podemos analizar un símil gravitatorio muy interesante: el potencial electrostático es al campo eléctrico como la altura lo es a la gravedad.

Vamos a imaginarnos que tenemos un terreno, cuya superficie es lisa, como el que está en la primera figura de la derecha.

Ahora colocaremos mentalmente una canica en los cuatro puntos marcados con una cruz. ¿Hacia dónde se mueve la canica en cada punto? ¿En qué puntos se moverá la canica más rápidamente y en qué puntos se moverá más lentamente? Intuitivamente todos sabemos responder más o menos a estas preguntas. Por ejemplo, en el punto 4 la canica se moverá lentamente, pues está en una zona que es casi plana. Por el contrario, en los puntos 1 o 3 la canica irá muy rápidamente terreno abajo, pues está en una zona con más pendiente.



He dibujado los vectores que representan la fuerza que la gravedad hace sobre la canica en cada uno de los puntos (segunda figura de la derecha).



Está claro que, intuitivamente, ya teníamos la noción de gradiente de un escalar y su relación con la fuerza de un campo, y es que, si decimos que la altura del terreno es la función *h*, entonces, la fuerza que siente una canica en cada uno de los puntos es (a falta de alguna constante multiplicativa que he ignorado a propósito):

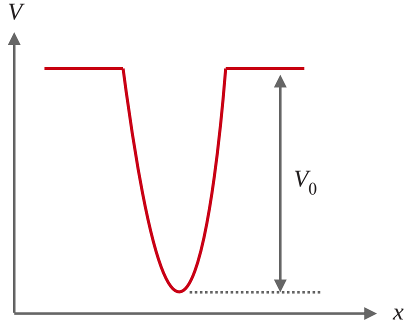
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} h$$

Esto es lo mismo que decir que para la fuerza de la gravedad, al menos en la superficie terrestre, la altura es una función potencial. Haciendo uso de este símil, podemos decir lo siguiente:

El **potencial electrostático** representa, para el campo eléctrico, una función que mide la altura (en sentido gravitatorio) que tiene el campo en cada uno de los puntos del espacio. Esta altura es, dicho con propiedad, la energía que una partícula cargada tendría en cada punto. Si dejásemos a esta partícula cargada moverse libremente, arrastrada por la fuerza del campo, esta se dirigiría hacia la dirección donde el potencial se hace más pequeño, perdiendo energía potencial de la forma más rápida posible, al igual que una canica corre colina abajo por el camino más inclinado.

4.2.1. Un pozo de potencial

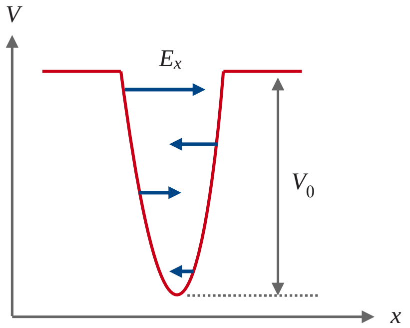
Este símil es tan bueno que, por ejemplo, si conseguimos crear una distribución de carga que genere un potencial dependiente de la coordenada *x* como el de la figura:



podremos decir que hemos creado un pozo de potencial y, también, podremos decir que este pozo tiene un altura de V_0 voltios. Si en este pozo cayese, por casualidad, una partícula cargada q y quisiésemos sacarla del pozo de potencial, necesitaríamos darle una energía de, al menos, este valor:

$$E_c = q\,V_0\,[J]$$

Podemos, también gráficamente, calcular el campo eléctrico en cada punto del pozo de potencial simplemente calculando el gradiente. Como no tenemos más que la coordenada x, solo podemos calcular la componente x del campo, pero es más que representativa. Solo tenemos que derivar y cambiar de signo. He dibujado la componente x en alguno de los puntos:



De hecho, si lo pensamos bien, en el punto central del pozo, donde tenemos un mínimo local del potencial, la derivada se hace 0 y, por tanto, justo en ese punto, el campo electrostático se hace 0, y una partícula cargada, situada en ese punto, no sentiría ninguna fuerza; permanecería en un equilibrio estable.

4.3. LUGARES EQUIPOTENCIALES

Llegados a este punto ya sabemos que un campo electrostático tiene asociada una función escalar que llamamos «función potencial». También sabemos que esta función potencial tiene un significado físico: representa la energía potencial que una partícula cargada de 1 C tendría en cada punto dentro del campo.

Y también hemos visto que, según varía el potencial, así es el campo: en los sitios donde el potencial varía muy rápido, tiene mucha pendiente, el campo es muy intenso; y en los sitios donde el potencial varía poco, el campo es poco intenso.

4.3.1. Definición de una «superficie equipotencial»

Dentro de un campo existen unos lugares, unos conjuntos de puntos contiguos, donde el potencial no varía y, por tanto, permanece constante: son los lugares equipotenciales. Un lugar equipotencial es un lugar que cumple lo siguiente:

$$V(x, y, z) = cte$$

En general, una expresión matemática del tipo:

$$f(x, y, z) = C$$

representa una superficie. Normalmente hablaremos de «superficies equipotenciales», aunque, como veremos al final de la unidad, también existen los «volúmenes equipotenciales».

> Por definición, como acabamos de ver, una **superficie equipotencial** de un campo es una superficie del espacio donde el potencial permanece constante y, por tanto, cumple lo siguiente: $V(x, y, z) = cte$.

4.3.2. El campo y las superficies equipotenciales

¿Qué significa que el potencial permanezca constante en una superficie equipotencial? Significa que si cogemos una carga puntual y la movemos a lo largo de esa superficie, su energía permanece constante, es decir, si tenemos la superficie equipotencial S, el trabajo de mover una carga q a lo largo de dos puntos cualesquiera A y B dentro de la superficie es:

$$U_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(B) - V(A) = 0$$

La única forma de que cualquier movimiento dentro de esta superficie nos dé siempre una variación de energía igual a 0 significa que el campo eléctrico ha de ser perpendicular al movimiento dentro de la superficie, o, lo que es lo mismo, en una superficie equipotencial S se cumple que:

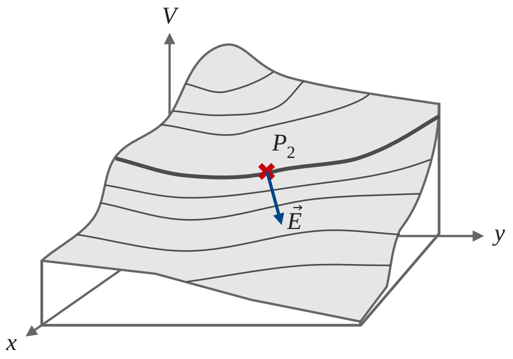
$$\vec{E} \perp S$$

4.3.3. Potencial y líneas de nivel

Podemos llegar a esta conclusión de otra manera. Empecemos por la relación entre el gradiente y el campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

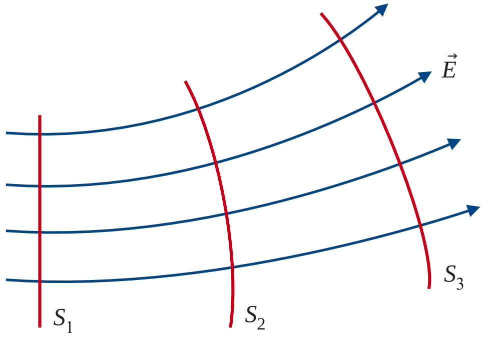
Como cuando vimos el ejemplo de la canica o de la abejita, esta expresión nos viene a decir que, en un punto determinado, el campo apunta hacia el lugar donde el potencial varía más rápidamente, que es el gradiente. Ahora bien, si nos movemos de forma perpendicular al campo, estaremos moviéndonos justo en una dirección donde el potencial no varía nada. Voy a dibujar aquí de nuevo el ejemplo de la canica:



He dibujado ahora uno solo de los puntos, por mantener la atención. Ya sabemos que la altura del terreno es equivalente al potencial electrostático. Así lo he señalado en el eje vertical en este caso. Vamos a fijarnos en el punto donde está dibujado el vector campo eléctrico. En este punto sabemos que una carga positiva puesta ahí se movería naturalmente hacia donde apunta el campo. En este dibujo también hay resaltada una línea de nivel más gruesa que el resto. Esta línea de nivel representa la superficie equipotencial en el punto 2. Si nos movemos perpendicularmente al campo en la zona del punto 2, estaremos moviéndonos a lo largo de la línea equipotencial y podremos llegar a la misma conclusión:

- Las superficies equipotenciales son los lugares de espacio donde el potencial permanece constante.
- El campo electrostático, y, por tanto, las líneas de campo, son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

El siguiente dibujo resume esta conclusión. En él tenemos dibujado un conjunto de líneas de campo y tres ejemplos de superficies equipotenciales. Las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales:



4.3.4. Trabajo y lugares equipotenciales

Recordemos el concepto: un **lugar** (por ejemplo, una superficie) **equipotencial** es un conjunto de puntos contiguos cuyo potencial permanece constante.

También sabemos que la energía que nos cuesta mover una partícula cargada q entre dos puntos del espacio donde hay un campo electrostático viene dada, en términos de potencial, por:

$$W_{AB} = q(V(B) - V(A))$$

Esto significa una cosa: si los puntos A y B están en la superficie equipotencial, el trabajo que nos costará mover la partícula entre ambos puntos es 0, ya que el potencial en ambos puntos es el mismo; por tanto:

$$V(A) = V(B) \quad \rightarrow \quad W_{AB} = q(V(A) - V(B)) = q(0) = 0 \; [J]$$

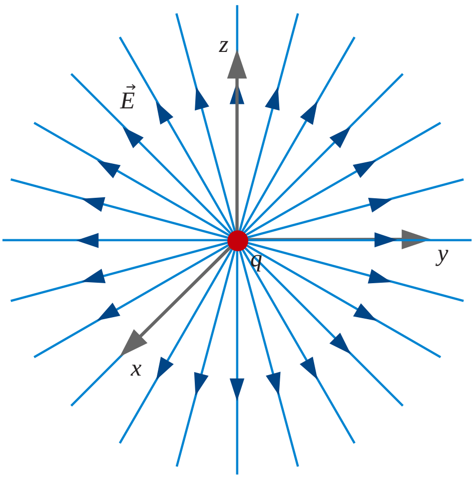
Esto es así con independencia del camino que elijamos para mover la partícula, incluso si nos salimos de la superficie equipotencial y luego volvemos, pues el trabajo en un campo conservativo es independiente del camino seguido.

5. POTENCIAL ASOCIADO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

Al igual que hicimos en la primera unidad, podemos calcular el potencial asociado a una distribución de cargas. En realidad, lo que estamos calculando es el potencial asociado al campo que genera la distribución de carga, pero, por sencillez, muchas veces diremos que es el potencial generado por las cargas.

5.1. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO GENERADO POR UNA CARGA PUNTUAL

Comencemos con una carga puntual de valor q en el centro de coordenadas del espacio, como en la siguiente figura. En la figura, además de la carga, tenemos dibujadas algunas líneas de campo:



El potencial y el campo que genera la carga están relacionados por la expresión:

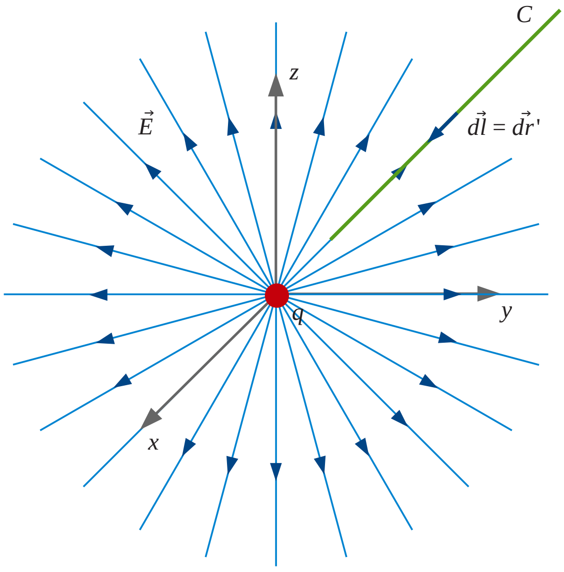
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\vec{V}$$

Para poder calcular la función potencial V tendremos que resolver esa ecuación, que ya hemos dicho que no es, en general, muy fácil. En este caso particular, sin embargo, vamos a poder hacerlo, ya que el campo tiene una simetría radial, es decir, solo depende de la coordenada *r* en esféricas. Por lo tanto, si resolvemos esta integral, podremos calcular el potencial:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para simplificar el problema, vamos a elegir un camino muy particular: iremos desde el infinito hasta el origen siguiendo un camino radial, paralelo a una de las líneas de campo. Recuerda que podemos elegir cualquier camino, ya que el resultado no depende de él. Hemos puesto los límites de la integral, pero podríamos haberlos omitido y elegir una constante aditiva al resultado apropiada a nuestro caso.

En esta figura tienes dibujado el camino elegido y el valor del diferencial de línea:



Como el camino elegido es radial y viene desde el infinito siguiendo las líneas de campo, es paralelo al vector campo en todos los puntos. La integral, por tanto, se simplifica muchísimo, ya que el producto escalar del campo y del diferencial de línea es solo el producto de sus módulos:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} |\vec{E}| \cdot dr'$$

He escrito el diferencial con una prima, indicando que vamos a integrar en r'. Esto es una formalidad matemática, ya que el extremo superior de integración es r, y es necesario hacerlo así para no confundirlos. En la unidad 1 ya vimos cuál es el campo eléctrico generado por una carga puntual en el origen y, por tanto, puedo escribir:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} |\vec{E}|\, dr' = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{q}{r'^2}\, dr' = \frac{-q}{4\pi\,\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2}\, dr' =$$

$$= \frac{-q}{4\pi\,\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r'} \right) \Bigg|_{\infty}^{r} = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0\, r}\ [V]$$

Es decir, el potencial electrostático que crea un campo generado por una carga puntual q en el origen de coordenadas, en un punto de coordenada r, es:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0\, r}\ [V]$$

Si la carga no está situada en el origen de coordenadas, podemos calcular la expresión del potencial simplemente por simetría con la expresión anterior. Así, el potencial generado por una carga puntual q en cualquier posición del espacio medido a una distancia d de la misma es:

$$V = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0\, d}\ [V]$$

Importante

- Ya sabemos que el potencial electrostático nos dice la energía potencial que tendría una carga de prueba de 1 C al situarla en un punto del espacio. Y también sabemos, y es importante recordarlo, que la energía potencial electrostática en un punto es el trabajo que nos cuesta traer una carga desde el infinito hasta este punto.
- Si la carga que genera el potencial es positiva, el potencial en un punto r es positivo, es decir, me cuesta trabajo traer la carga de prueba de 1 C hasta el punto r. Si lo piensas, es lógico, ya que las cargas de signo positivo se repelen y tengo que ir empujando contra la fuerza de repulsión para traer la carga desde el infinito. Si la carga que genera el potencial es negativa, ¡atención!, el potencial en un punto r es negativo, es decir, el campo me atrae, me da energía por traer la carga de prueba de 1 C desde el infinito. Si lo piensas, es también lógico, ya que las cargas de signo opuesto se atraen y tengo que ir frenando a la carga para que no se acelere cuando la traigo desde el infinito.

5.2. POTENCIAL GENERADO POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS DISCRETAS

Siguiendo el razonamiento que hicimos para el campo en la primera unidad, podemos calcular el potencial que generan una distribución de *N* cargas discretas. Si llamamos:

$$V_i(\vec{r})$$

al potencial que genera la carga i-ésima en el punto donde queremos medirlo, podemos calcular el potencial que generan todas las cargas simplemente sumando:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{N} V_i(\vec{r})$$

¿Por qué podemos hacer esta suma y que el resultado sea correcto? El campo electrostático tiene una propiedad fundamental: cumple el principio de superposición; es decir, el campo generado por dos (o más) cargas en un punto es simplemente la suma del campo de cada una de ellas.

Puesto que el campo y el potencial están relacionados por una operación lineal (el gradiente no son más que derivadas y, por lo tanto, son lineales), el potencial también tiene que cumplir el principio de superposición, como ya sabíamos.

5.3. POTENCIAL CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA CONTINUA

Para calcular el potencial generado por una distribución de carga continua utilizaremos la misma técnica que usamos para calcular el campo. La estrategia que empleamos fue:

- Calculamos el campo que generaba una carga puntual.
- Como un diferencial de carga es equivalente a una carga puntual, podemos calcular el diferencial de campo generado por el diferencial de carga.
- Sumamos todos los diferenciales de campo de todos los diferenciales de carga que haya en la distribución y tenemos el campo total: integramos.

Ahora repetiremos este procedimiento, pero aplicado al potencial. El diferencial de campo generado por un diferencial de carga es:

$$d\vec{E} = \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{4\pi\,\epsilon_0\,|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,dq$$

Entonces, podremos calcular el diferencial de potencial dV generado por este diferencial de campo de la misma forma que calculamos el potencial generado por una carga puntual, ya que tiene la misma expresión matemática. Así:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\,\epsilon_0\,|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{dq}{4\pi\,\epsilon_0\,d'}$$

Donde d' es la distancia del diferencial de carga dq al punto donde se calcula el potencial eléctrico. Ahora ya solo nos queda sumar para todos los diferenciales de carga de la distribución, que puede ser:

- Una distribución volumétrica:

$$V = \int_{v'} \frac{\rho_v\,dv}{4\pi\,\epsilon_0\,d'}$$

- Una distribución superficial:

$$V = \int_{s'} \frac{\rho_s\,ds'}{4\pi\,\epsilon_0\,d'} = \int_{s'} \frac{\sigma\,ds'}{4\pi\,\epsilon_0\,d'}$$

- Una distribución lineal:

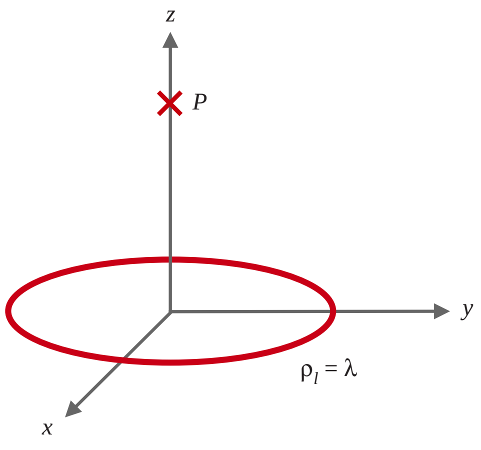
$$V = \int_{l'} \frac{\rho_l\,dl'}{4\pi\,\epsilon_0\,d'} = \int_{l'} \frac{\lambda\,dl'}{4\pi\,\epsilon_0\,d'}$$

Es importante que hagamos aquí una reflexión: es posible que, por el parecido en las expresiones, lleguemos a pensar que calcular el potencial de una distribución es tan complejo (o tan sencillo) como calcular el campo electrostático. En realidad, no es así, por dos motivos fundamentales:

- La integral del campo es vectorial y, por tanto, encierra en su interior tres integrales, una por cada eje o dimensión espacial. Por el contrario, la integral del potencial es una integral escalar, por lo que no tiene nada encerrado y oculto.
- En el caso de la integral del potencial, la distancia está elevada a la primera potencia, mientras que en el campo está elevada a la segunda potencia. No siempre, pero muchas veces esto simplifica los cálculos.

5.3.1. Ejemplo: potencial creado por un anillo cargado a lo largo de su eje

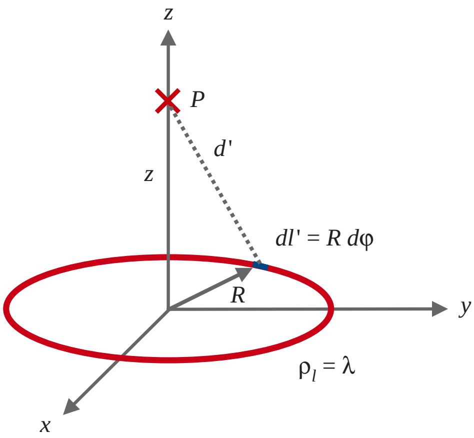
Vamos a imaginarnos un anillo de radio *R* cargado uniformemente y situado en el origen de coordenadas sobre el plano *xy*, como en esta figura:



He marcado con una cruz un punto genérico en su eje en el que queremos calcular el campo. Como únicamente haremos los cálculos a lo largo del eje *z*, el potencial solo será una función de *z*. Para calcularlo, planteamos la integral del potencial:

$$V(z) = \int_{l'} \frac{\lambda \, dl'}{4\pi \epsilon_0 \, d'}$$

En la siguiente figura tenemos dibujada la distancia d' del diferencial al punto y un diferencial de línea (dl') sobre el anillo:



La distancia d' es:

$$d' = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Y ya podemos escribir la integral del potencial, sustituyendo el diferencial e integrando a lo largo de toda la circunferencia:

$$V(z) = \int_0^{2\pi} \frac{R\,\lambda}{4\pi\,\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}\, d\varphi$$

Como en el integrando nada depende de la variable de integración, el resultado es sencillo:

$$V(z) = \frac{2\pi\,R\,\lambda}{4\pi\,\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{R\,\lambda}{2\,\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}\ [V]$$

Si queremos expresar el potencial en función de la carga total del anillo, que, puesto que tiene una carga uniforme, sabemos que es:

$$Q = 2\pi\,R\,\lambda$$

el potencial nos va a quedar así:

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\,\sqrt{R^2 + z^2}}\ [V]$$

6. OTRA FORMA DE CALCULAR EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

El potencial electrostático nos permite hacer muchas cosas, como, por ejemplo, calcular la diferencia de energía potencial entre dos puntos o el trabajo que me costará mover una partícula cargada. Pero, aun así, el potencial tiene una aplicación mucho más interesante: nos permite calcular el campo electrostático.

6.1. EL CAMPO CALCULADO DESDE EL POTENCIAL

Ya hemos dicho que muchas veces resolver la integral de campo es bastante más complicado que resolver la integral del potencial. Al fin y al cabo la primera es una integral vectorial, y la segunda, una integral escalar. Así, si por algún medio, ingenioso o no, hemos calculado la función potencial *V*, entonces podemos calcular el campo electrostático simplemente haciendo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

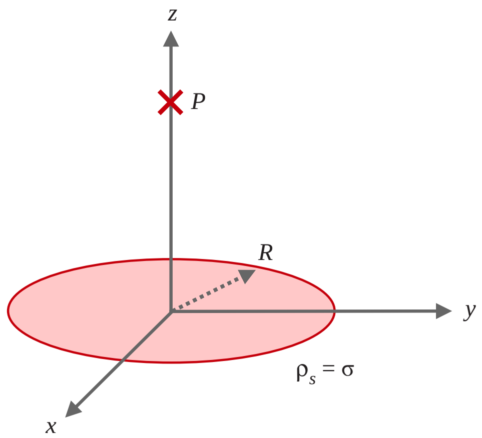
Esta es una operación de derivación que siempre es mucho más fácil de hacer que una integral. La estrategia para resolver los problemas vía el potencial es:

- Planteamos la integral del potencial generado por la distribución de cargas.
- Resolvemos la integral.
- Calculamos el gradiente y ya tenemos el campo electrostático.

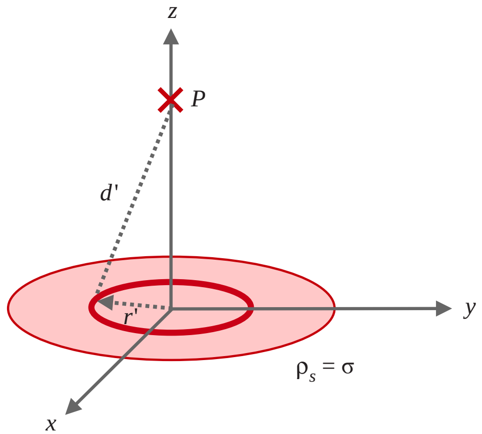
6.1.1. Campo generado por un disco cargado

Usaremos esta estrategia para calcular el campo generado por un disco de radio *R* cargado uniformemente a lo largo de su eje de simetría.

En la figura tenemos:



Lo que haremos a continuación será elegir un anillo del disco que tenga un radio *r*' y un ancho *dr*'. Fíjate en la figura y verás que todo el anillo está a la misma distancia del punto donde calculamos el potencial:



El diferencial de carga que hay en el anillo será la densidad de carga superficial multiplicada por el diferencial de superficie que tiene el anillo de radio *r*' y espesor *dr*':

$$dq = \sigma\, ds' = 2\pi\, \sigma\, r'\, dr'$$

Asimismo, la distancia desde todos los puntos del anillo hasta el punto P la podemos calcular simplemente echando mano del teorema de Pitágoras:

$$d' = \sqrt{r'^2 + z^2}$$

Y podemos plantear la integral del potencial:

$$V = \int_0^R \frac{2\pi\,\sigma\, r'}{4\pi\,\epsilon_0 \sqrt{r'^2 + z^2}}\, dr'$$

Resolvemos la integral simplemente sacando todo lo que no depende de r' y tenemos una integral inmediata:

$$V = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}\, dr' = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} \sqrt{r'^2 + z^2}\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z\right)$$

Ahora ya podemos calcular el campo electrostático simplemente calculando el gradiente:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Como el potencial solo depende de la coordenada z, el gradiente queda muy sencillo:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{k} = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\hat{k}\ [V/m]$$

En resumen: **hay problemas en los que calcular el potencial para luego obtener el campo derivando es mucho más sencillo que resolver la integral del campo**. Te sugiero que intentes repetir este problema usando la integral del campo.

6.2. UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

No lo demostraremos aquí, pero es importante saberlo: dado un problema electrostático en el que sepamos la distribución de carga o conozcamos el valor del potencial en la frontera, entonces, este problema tiene una solución única. Que exista una solución única significa que solo hay un campo electrostático que cumple con las condiciones del problema.

Aunque la anterior es una forma matemáticamente poco ortodoxa de enunciarlo, su principal implicación es totalmente cierta:

> Si nos apañamos de alguna manera para encontrar una solución a un problema electrostático, y este cumple con las condiciones del problema, entonces es la solución al problema, puesto que no puede haber más.

La demostración de la unicidad de la solución viene dada por la unicidad de los problemas de contorno que plantean las ecuaciones de Poisson y de Laplace que veremos a continuación.

7. ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE: EL PROBLEMA ELECTROSTÁTICO

Como ya hemos visto, en muchos casos nos vamos a encontrar que resolver el problema del campo es más sencillo por la vía de resolver el problema del potencial para después aplicar el gradiente y calcular el campo.

Antes de presentar formalmente las ecuaciones de Poisson y de Laplace, haremos un par de operaciones. Uno de los postulados fundamentales del campo decía lo siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Además, el otro postulado nos llevaba a la ecuación que relaciona el potencial y el campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Si sustituimos la segunda ecuación en la primera, tenemos esta expresión:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

A la operación matemática que es calcular la divergencia de un gradiente se le llama, muy convenientemente, «laplaciana» y se escribe, haciendo uso del operador laplaciano, así:

$$\nabla^2 V \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V)$$

De esta manera, podemos escribir:

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{o} \qquad \nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

7.1. EL OPERADOR LAPLACIANO EN CARTESIANAS

Antes de continuar, vamos a escribir cuál es el operador laplaciano en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

El mismo operador se complica bastante cuando las coordenadas son esféricas o cilíndricas, pero no lo necesitaremos en este manual.

7.2. ECUACIÓN DE POISSON

La ecuación de Poisson es simplemente la ecuación que acabamos de escribir:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

Esta ecuación encierra en su interior una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden. La ecuación de Poisson simplemente nos dice cuál es la relación física que hay entre la densidad de carga volumétrica y el potencial.

Si podemos resolver la ecuación, podremos derivar el campo electrostático sin problemas.

7.3. ECUACIÓN DE LAPLACE

En muchos casos, sobre todo en algunas zonas del espacio, nos encontraremos que no hay carga volumétrica, es decir:

$$\rho = 0$$

En estas zonas del espacio la ecuación de Poisson se simplifica y nos queda:

$$\nabla^2 V = 0$$

Esta ecuación nos permite calcular el potencial de un campo en una zona libre de cargas. Aunque parece sencilla, desafortunadamente, en la mayor parte de las situaciones o geometrías de los problemas, no lo es.

En cartesianas podemos desarrollar esta expresión y dejarla en forma de derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

En algunos problemas que tienen mucha simetría, esta ecuación se simplificará, y podremos resolverlos de una forma razonablemente sencilla.

7.4. EL PROBLEMA ELECTROSTÁTICO

Ahora que conocemos la relación del campo con el potencial y que hemos expresado las ecuaciones de Poisson y Laplace, ya estamos en disposición de enunciar el problema electrostático.

El problema electrostático es un problema de contorno o de valor en la frontera, en el que, dadas:

- una distribución de carga definida por una densidad volumétrica, que puede ser nula o no y
- el valor del potencial en la frontera del problema,

.../...

.../...

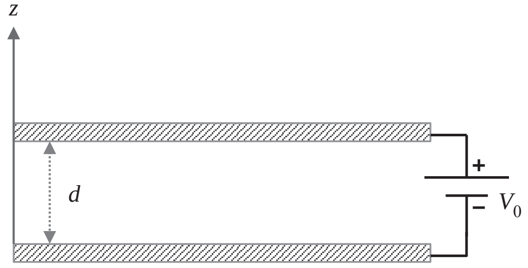
hay que resolver:

- la ecuación de Laplace, si la densidad volumétrica es nula,
- o la ecuación de Poisson, si la densidad volumétrica no es nula,

para calcular la función potencial V y, si es necesario, el campo eléctrico, mediante la relación $\vec{E} = -\nabla \vec{V}$.

7.5. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO ENTRE DOS PLACAS CONDUCTORAS

Aplicaremos este método de resolución para calcular el campo entre dos placas conductoras muy grandes separadas una distancia d y con el vacío hecho entre ellas. El área de las placas es muy grande, comparada con la distancia que las separa. Algo como lo que hay en la siguiente figura:



Aunque aún no hemos estudiado cómo se comporta el potencial dentro de los materiales conductores, asumiremos que todos los puntos de una plancha están al mismo potencial. Si nos fijamos en la derecha, hemos colocado una batería o fuente de alimentación. Con esto forzamos a la plancha de arriba a estar a una diferencia de potencial V_0 con respecto a la plancha de abajo.

7.5.1. Resolución de la ecuación de Laplace

Puesto que la dimensión d, la separación entre ellas, es mucho más pequeña que el tamaño de las mismas, podemos suponer que, de haber algún campo y, por tanto, un potencial, solo puede depender del eje z (el eje vertical).

Dado que no hay carga volumétrica, en estas condiciones tenemos que resolver la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Si V no depende de x ni de y, entonces las derivadas con respecto a esas variables son 0 y, por tanto, la ecuación se simplifica a:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Solo tenemos que integrar dos veces:

$$\frac{dV}{dz} = C_1 \qquad \text{y luego} \qquad V = C_1 z + C_2$$

7.5.2. Condiciones en la frontera

Es decir, el potencial es una función lineal de z y tiene dos constantes de integración que desconocemos. Sí que sabemos el valor en la frontera, ya que el problema nos había puesto las placas a una diferencia de potencial; por tanto:

$$V(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad V(d) = V_0$$

Si sustituimos en la expresión del potencial ambos valores, podemos calcular el valor de las constantes:

$$0 = C_1\, 0 + C_2 \;\rightarrow\; C_2 = 0$$

$$V_0 = C_1\, d \;\rightarrow\; C_1 = \frac{V_0}{d}$$

Por tanto, el potencial tiene la siguiente expresión:

$$V(z) = \frac{V_0}{d}\, z \; [V]$$

7.5.3. Cálculo del campo eléctrico

Y el campo en el interior de ambas placas se puede calcular fácilmente, simplemente derivando:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{-V_0}{d}\hat{k} \; [V/m]$$

Podríamos argumentar que para resolver este problema «no hacían falta estas alforjas». En realidad, es cierto. Podríamos habernos imaginado que el campo solo depende del eje z y habernos imaginado que es constante en su interior, puesto que $d \ll S$ y, por tanto, podemos considerar las placas infinitas. Y es que sabemos que el campo generado por una densidad de carga superficial infinita es constante y perpendicular a la placa. De ahí, podríamos haber calculado el potencial y despejado las constantes que nos faltasen. Efectivamente, era posible hacerlo, pero he elegido hacerlo resolviendo la ecuación de Laplace para ver un ejemplo de aplicación suficientemente sencillo, pero ilustrativo.

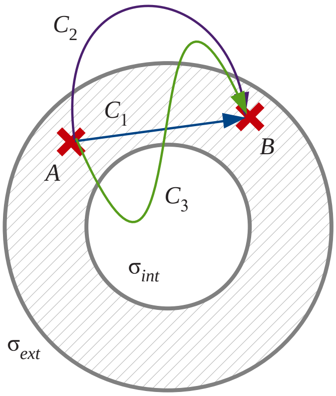
8. CONDUCTORES Y EL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

En la unidad 1 estudiamos los conductores en equilibrio electrostático y sacamos dos conclusiones que van a ser clave para entender cómo funciona el potencial alrededor y en el interior de un conductor:

- El campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo.
- Si un conductor está cargado, toda la carga se mueve rápidamente y se deposita en las superficies externas del metal, haciendo que la carga neta en su interior sea 0.

8.1. DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS EN EL CONDUCTOR

Estas dos conclusiones nos permiten calcular de forma muy rápida la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en el interior de un conductor. A continuación, hagamos un experimento mental. En la figura de la derecha tenemos dos puntos A y B situados en el interior de un conductor, que, quizás, esté cargado, ya que tiene dos densidades superficiales de carga (σ_{int} y σ_{ext}):



Vamos a calcular la diferencia de potencial entre A y B. En primer lugar, tomemos un camino especialmente interesante: C_1.

$$V_{BA} = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Como sabemos que el campo eléctrico en condiciones estáticas en el interior de un conductor es nulo, esta integral es tan sencilla como que vale 0; por tanto:

$$V_{AB} = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \rightarrow \quad V(A) = V(B)$$

8.2. EL CONDUCTOR ES UN VOLUMEN EQUIPOTENCIAL

Básicamente esto quiere decir que el potencial en estos dos puntos dentro del conductor es el mismo y, en general, lo será en todos los puntos del metal.

> Esto implica que un metal es un volumen equipotencial, es decir, todos los puntos del interior del metal y de su superficie están al mismo potencial electrostático. Además, de propina, las superficies externas del metal son superficies equipotenciales.

Fíjate que antes dibujamos otros dos caminos que salen fuera del metal. Por supuesto, en estos tramos fuera del conductor, el campo puede no ser 0, pero, aun así, la integral a lo largo de todo el camino sí que lo será. Y es que sabemos que el resultado de esta integral no depende del camino. Como antes hemos encontrado, al menos, un camino cuyo valor sabemos que es 0, la integral a lo largo de todos ellos será 0.

Y es que en un conductor en equilibrio electrostático se cumple que:

$$V(x, y, z) = cte$$

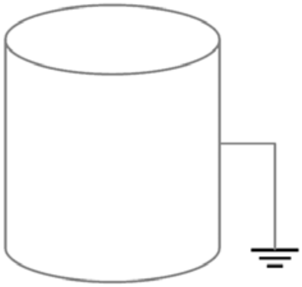
8.3. PONER A TIERRA UN CONDUCTOR

Este resultado es muy interesante, ya que nos permite sacar una conclusión, siempre en condiciones estáticas:

> Si sabemos con certeza que un punto del metal está a un potencial determinado, lo estará todo el metal completo.

Fíjate en la figura de la derecha. Seguramente ya conozcas el concepto de «poner a tierra», pero aquí queda más claro:

> Cuando un metal se **pone a tierra**, es decir, se hace que mediante un conductor esté puesto a tierra, lo que quiere decir es que su potencial electrostático es de 0 *V*.



Para mantener el potencial a 0, intercambiará con la tierra tanta carga como sea necesario.

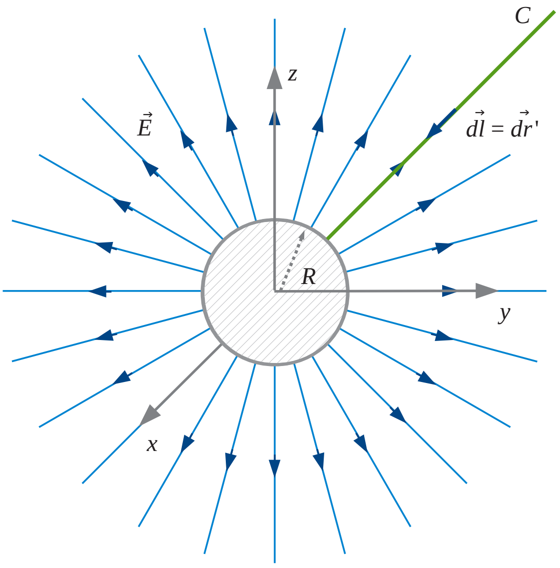
Por otra parte, ¿qué es la tierra?

> En electricidad, la **tierra** es un sumidero de carga.

Es una idealización del comportamiento de la Tierra (nuestro planeta). Da igual cuánta carga descarguemos hacia la tierra o tomemos de ella, la tierra siempre estará a potencial 0 *V*. En realidad, es una aproximación, ya que si pudiéramos llevar suficiente carga a la tierra, esta dejaría de estar a potencial 0.

8.4. POTENCIAL DE UNA ESFERA CONDUCTORA CARGADA

Antes de acabar estudiaremos un caso particular: una esfera conductora cargada. En este caso, como es habitual, situaremos una esfera maciza y conductora, de radio *R*, en el origen de coordenadas, y en la que hay una carga neta Q. En la siguiente figura me he tomado la libertad de dibujar el campo que genera:



Toda la carga de la esfera se va a depositar, homogéneamente, como una carga superficial en su superficie externa.

Podemos resolver el problema del campo aplicando la ley de Gauss o simplemente por simetría con una carga puntual en el origen. Sea como sea, sabemos que el campo generado por la esfera en su exterior es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\,r^2}\,\hat{r} \quad r > R$$

En el interior, por supuesto, el campo es 0.

Si usamos la misma técnica que utilizamos con una carga puntual para calcular el potencial, solo tenemos que elegir un camino radial, como el camino C del dibujo, e integrar desde el infinito hasta el radio R de la esfera:

$$V = -\int_{\infty}^{R} |\vec{E}| \cdot dr'$$

Sustituyendo el campo:

$$V = -\int_{\infty}^{R} |\vec{E}|\, dr' = -\int_{\infty}^{R} \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r'^2}\, dr' = \frac{-Q}{4\pi\,\epsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r'^2}\, dr' =$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{-1}{r'}\right)\Bigg|_{\infty}^{R} = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\, R}\ [V]$$

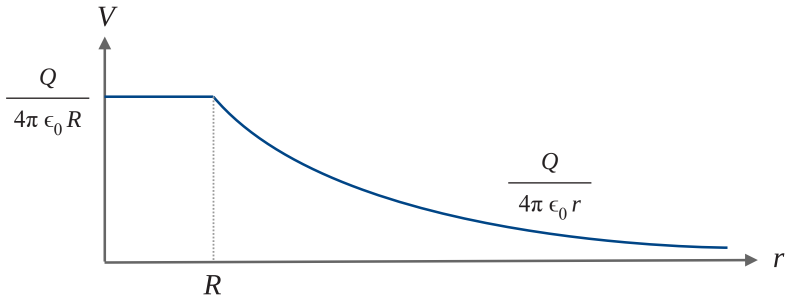
Es decir, el potencial al que está la esfera cargada, al que están todos sus puntos, es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\, R}\ [V]$$

Por supuesto, en el exterior de la esfera el campo es igual que el que generaba una carga puntual y, por tanto, el potencial es el mismo:

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\, d}\ [V]$$

Podemos dibujar el potencial como una función de la distancia r desde el centro de la esfera:

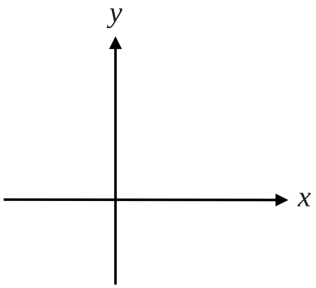


9. ENERGÍA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

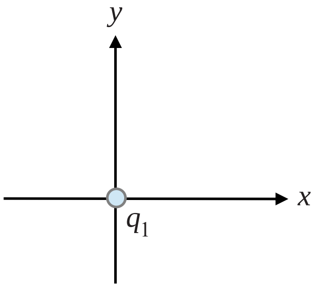
Este apartado puede resultar un poco confuso, porque ¿no hemos calculado ya el potencial de una distribución de carga anteriormente? Sí. Hemos calculado el potencial que esta distribución genera debido al campo que crea a su alrededor y en su interior. Pero vamos a reflexionar sobre la siguiente pregunta: ¿construir una distribución de carga es gratis o cuesta un trabajo? Si, por el motivo que sea, nos cuesta un trabajo, entonces significa que la propia distribución de carga, debido a su forma y cantidad de carga, tiene almacenada una energía. En realidad almacena exactamente la que hemos invertido en montar esa distribución. Ni más ni menos. Y es que el campo electrostático es conservativo.

9.1. ENERGÍA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE TRES CARGAS PUNTUALES

Vamos a ver si montar una distribución de carga cuesta una energía o no. Para ello, construiremos una distribución formada por tres cargas puntuales y empezaremos con el espacio vacío. Paso 0:



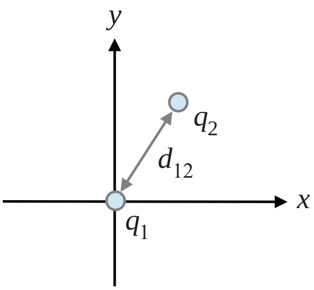
En el espacio vacío no hay campo eléctrico y, por tanto, no hay potencial; no hay trabajo que realizar. Traer la primera carga desde el infinito es, en esencia, gratis, no cuesta trabajo. Y llegamos al paso 1:



Ahora ya tenemos una carga q_1 que inunda el espacio de un campo y genera un potencial electrostático V a su alrededor. Así:

$$V_{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\, \epsilon_0\, r}$$

En el siguiente paso vamos a traer la segunda carga desde el infinito hasta su posición, como en la siguiente figura. Pero claro, ahora ya está la primera carga generando campo y, por tanto, la segunda carga experimentará una fuerza, y hay un trabajo que tendremos que realizar para mover la carga desde el infinito hasta su sitio. Este trabajo es la energía que tenemos que aplicar para llegar al paso 2 según la figura siguiente:



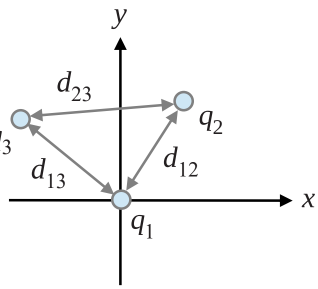
Y de esta forma podemos calcular la energía que ya almacena la distribución en este paso:

$$U_{dist} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\, \epsilon_0\, d_{12}}$$

Paso 3. Cuando añadamos una tercera carga, en el espacio ya habrá dos cargas, su campo y, por tanto, el potencial eléctrico asociado. Traernos la tercera carga, por tanto, nos cuesta un trabajo. Este trabajo se debe a los campos de las dos primeras cargas, y podemos calcular la energía de traer la tercera carga como:

$$U_{q_3} = q_3\,(V_1 + V_2) = \frac{q_1 q_3}{4\pi\, \epsilon_0\, d_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\, \epsilon_0\, d_{23}}$$

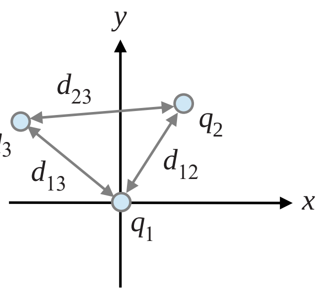
La energía total de la distribución de tres cargas será:



$$U_d = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 d_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi \epsilon_0 d_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi \epsilon_0 d_{23}}$$

9.2. LAS DISTRIBUCIONES ALMACENAN ENERGÍA

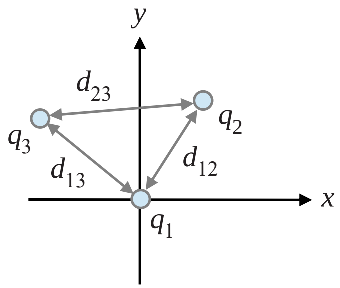
Acabamos de ver, con un ejemplo, que montar una distribución de cargas no es gratis, cuesta energía. Además, acabamos de ver también que esta energía se almacena en la propia distribución en forma de energía potencial electrostática. Volvamos por un momento al ejemplo del apartado anterior:



Imaginemos por un instante que las tres cargas del dibujo son cargas positivas. Está claro que para que esta distribución esté estática, quieta, sin moverse, hay que sujetar las cargas. Podemos imaginar que las hemos atornillado al papel o quizás que las estamos sujetando con las manos de alguna manera. Pero lo que está claro es que, como las desatornillemos o las soltemos, las tres cargas se repelerán y se alejarán rápidamente entre ellas. ¿De dónde viene la energía que necesitan las cargas para salir corriendo, separándose entre sí? De la energía que almacena la distribución; energía que le hemos dado mientras la construíamos.

9.3. ENERGÍA POSITIVA Y ENERGÍA NEGATIVA

El tema es que las cargas pueden ser positivas y pueden ser negativas. Esto significa que, volviendo al ejemplo anterior:



$$U_d = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 d_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi \epsilon_0 d_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi \epsilon_0 d_{23}}$$

podemos elegir valores para las cargas de tal forma que la energía sea mayor que 0, menor que 0 e incluso 0. La pregunta interesante aquí es la siguiente: ¿qué significa que la distribución tenga una energía negativa?

Imaginemos que el valor de la energía nos ha salido negativo. Sin duda, lo que quiere decir es que esta distribución tiene alguna carga negativa y alguna positiva y, por lo tanto, mientras construíamos la distribución, en lugar de hacer fuerza para traer las cargas, hemos tenido que hacer fuerza para frenarlas. En esencia, lo que significa es que lo que nos costaría trabajo no es construir la distribución, como en el caso anterior, sino destruirla. Si queremos deshacer una distribución de carga con energía negativa, nos va a costar aplicar toda esa energía de forma positiva para llevarnos las cargas hasta el infinito.

9.4. ENERGÍA DE UNA DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE CARGAS

Podemos generalizar el cálculo que hemos hecho y aplicarlo a una distribución de *N* cargas:

$$U_d = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{d_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} q_i V_i$$

En esta expresión, el valor V_i es el potencial que generan todas las cargas menos la carga i-ésima en el punto donde colocamos la carga i-ésima. El factor 1/2 aparece porque el sumatorio suma dos veces la energía de cada carga. Prueba a desarrollarlo para tres cargas y los verás.

9.5. ENERGÍA DE UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Si en lugar de una distribución de cargas puntuales, tenemos una distribución continua de carga, por supuesto que también tendremos que aplicar una energía para construirla. Como seguramente hayas intuido, para calcularla podemos generalizar el sumatorio del apartado anterior y convertirlo en una integral:

$$U_d = \frac{1}{2}\int V\,dq$$

En la integral V es el potencial generado por la distribución en el punto donde está el dq. Traduciendo a los diferentes tipos de distribuciones que conocemos:

- Distribución volumétrica:

$$U_d = \frac{1}{2}\int_v \rho\, V\,dv$$

- Distribución superficial:

$$U_d = \frac{1}{2}\int_s \rho_s\, V\,ds = \frac{1}{2}\int_s \sigma\, V\,ds$$

- Distribución lineal:

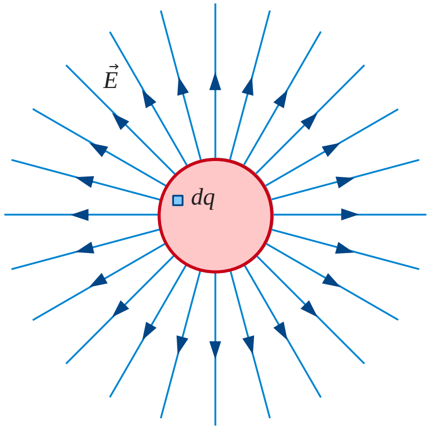
$$U_d = \frac{1}{2}\int_l \rho_l\, V\,dl = \frac{1}{2}\int_l \lambda\, V\,dl$$

9.5.1. ¿Qué quiere decir esta expresión?

$$U_d = \frac{1}{2}\int V\,dq$$

Aquí tenemos dos opciones: o simplemente pensar que esa es la energía que nos cuesta construir la distribución, o meternos un poco a analizar lo que significan los términos de la ecuación.

En la siguiente figura hemos dibujado una distribución de carga en forma de esfera, algunas de las líneas de campo que genera y un diferencial de carga.



La pregunta que nos estamos haciendo en todo este apartado es la siguiente: ¿cuánto trabajo me cuesta construir esta distribución de carga? Ya hemos discutido antes que esta pregunta es equivalente a esta otra: ¿cuánta energía almacena esta distribución de carga? Es equivalente, ya que el campo es conservativo: si hacemos un trabajo contra el campo, ese trabajo se almacena en forma de energía potencial electrostática.

Ahora bien, ¿qué nos está diciendo la integral que nos permite calcular la energía?:

$$U_d = \frac{1}{2} \int V \, dq$$

Lo que nos dice es lo siguiente:

- La distribución de carga genera un campo electrostático, y ese campo tiene asociado un potencial V.
- Cada diferencial de carga (dq) como el de la figura está sometido a un potencial distinto, pues, en general, no hay el mismo potencial en una posición de la distribución que en otra.

- Para calcular la energía almacenada tómese el valor del potencial que hay en cada punto dentro de la distribución y multiplíquese por el diferencial de carga para calcular el diferencial de energía de esa carga.
- Súmense (integrando) todas las energías diferenciales.
- El resultado divídase entre dos.

Quizás lo más confuso de todo sea el valor de 1/2 que hay, pero, si no lo ponemos, en realidad estamos sumando la energía dos veces, como cuando estábamos trabajando con cargas discretas.

Lo importante de esta ecuación es que nos dice que para calcular la energía de una distribución de cargas se puede hacer teniendo en cuenta solamente los puntos en los que hay carga. El resto de los puntos del espacio no cuentan para esta integral.

9.5.2. Energía de una esfera conductora cargada

Vamos a calcular la energía que cuesta cargar una esfera conductora de radio R con una carga total Q. En primer lugar, sabemos que toda la carga se concentra en la superficie del conductor y que, además, todo el conductor está al mismo potencial.

Puesto que el campo generado fuera del conductor ($r > R$) es:

$$\vec{E}_e = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

El potencial electrostático será:

$$V_e = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

Para calcular la energía, tenemos que usar esta integral:

$$U_d = \frac{1}{2} \int_s \sigma V \, ds$$

Puesto que la carga total se distribuye uniformemente por toda la superficie de la esfera, podemos calcular la densidad superficial de carga fácilmente:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \; [C/m^2]$$

Además, la esfera, al ser conductora, es un volumen equipotencial, y el valor del potencial en toda la esfera será:

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \; [V]$$

Tanto la densidad de carga como el potencial, en este caso, son constantes en toda la superficie de la esfera y, por tanto, la integral de la energía queda muy fácil, pues todo sale del integrando:

$$U_d = \frac{1}{2} \int_s \sigma V \, ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \int_s ds$$

Esa integral ahí sola es simplemente la superficie de la esfera, que sustituyendo:

$$U_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \int_s ds = \frac{1}{8\pi R^2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R} 4\pi R^2 = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R} \; [J]$$

10. LA ENERGÍA ALMACENADA EN EL CAMPO

10.1. DEMOSTRACIÓN PREVIA

Volvamos por un momento a la ecuación que nos permite calcular la energía de una distribución volumétrica de carga. Jugando un poco con esta expresión, vamos a llegar a una conclusión bastante interesante y realmente muy importante:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho V \, dv$$

Según uno de los dos postulados fundamentales del campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si despejamos la densidad de carga y la sustituimos en la integral, nos queda esta expresión matemática:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, V\, dv$$

Antes de continuar, recordaremos una propiedad de la divergencia. Si tenemos una función escalar V multiplicando un campo vectorial $\vec{E}$ y calculamos la divergencia, el resultado es igual a la suma de V por la divergencia del campo $\vec{E}$, y el campo $\vec{E}$, multiplicado escalarmente por el gradiente de V, o lo que es lo mismo:

$$\vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}) = V\,\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}\, V$$

De aquí podemos despejar el integrando de nuestra integral anterior:

$$V\,\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla}\, V$$

Si sustituimos la relación entre el gradiente del potencial y el campo:

$$V\,\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}) + \vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}) + |\vec{E}|^2$$

Vamos a dar un paso más, volviendo a la integral:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, V\, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v (\vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}) + |\vec{E}|^2)\, dv$$

Si separamos en dos integrales:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E})\, dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2\, dv$$

A la primera de las integrales le podemos aplicar el teorema de la divergencia o teorema de Gauss, que dice que la integral de volumen de la divergencia es igual al flujo del campo:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E})\, dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2\, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_s (V\vec{E}) \cdot \vec{ds} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2\, dv$$

Resumiendo:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_s (V\vec{E}) \cdot \vec{ds} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2\, dv$$

Esta expresión nos dice que la energía de una distribución de carga es igual a la suma de dos integrales, una de volumen y otra de superficie (aplicada a ese volumen). La integral original era esta:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho\, V\, dv$$

Si extendemos los límites de integración de esta integral hasta el infinito, es decir, a todo el espacio, el resultado es el mismo, pues, fuera de la distribución, la función densidad de carga vale 0 y, por lo tanto, no contribuye a la integral. Si pudimos extender la integral original hasta el infinito, a todo el espacio, también podemos hacerlo con esta:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_s (V\vec{E}) \cdot \vec{ds} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2\, dv$$

Y esta es la clave: el campo eléctrico en el infinito ha de tomar un valor nulo, básicamente porque lo exige el teorema de Helmholtz. De esta forma, si nos llevamos la frontera del volumen hasta el infinito, la primera de las dos integrales se hace 0, pues el campo en la frontera, en el infinito, se hace nulo, y nos quedará:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2\, dv$$

Donde el volumen *v* es todo el espacio hasta el infinito.

Resumen

Hemos partido de una ecuación que nos permitía calcular cuánto trabajo nos constaba construir una distribución de carga, que es lo mismo que decir cuánta energía almacena esa distribución:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho \, V \, dv$$

Como dijimos en el apartado 9, esta integral solo se extendía a aquellos lugares donde la densidad era no nula, es decir, donde teníamos carga. Todo muy lógico e intuitivo.

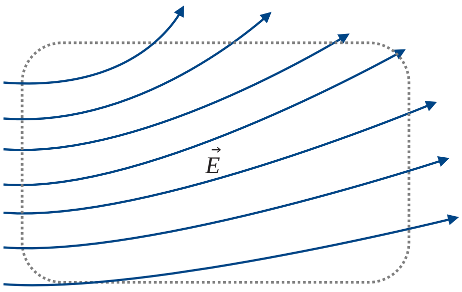
Pero acabamos de demostrar que también podemos calcular la energía que almacena una distribución, integrando en todo el espacio, así:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2 \, dv$$

Es decir, podemos calcular la integral del módulo del campo al cuadrado en todo el espacio, dentro y fuera de la distribución, y obtendremos el mismo valor de la energía.

10.2. IMPLICACIÓN 1: EL CAMPO TIENE ENERGÍA

Esta es la más importante de todas las implicaciones físicas de esta demostración: el campo electrostático, por el hecho de haberlo creado, almacena una energía. Dicho de otro modo: crear un campo eléctrico nos cuesta energía. Lo podríamos haber intuido, pero esta es la prueba.



Imagínate una zona del espacio donde no tenemos cargas. En el dibujo hay una frontera ficticia que delimita una zona del espacio. Dentro de esta zona del espacio hay un campo electrostático que está representado por sus líneas de campo. En realidad, no sabemos cómo es el campo fuera, ni cómo es la distribución de cargas que lo crea, pero no importa. Podemos calcular cuánta energía hay almacenada en este volumen delimitado por la línea de puntos simplemente integrando:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2 \, dv$$

10.3. IMPLICACIÓN 2: EL CAMPO MIDE UNA DENSIDAD DE ENERGÍA

Aunque nos repitamos un poco, creo que merece la pena. Vamos a analizar la expresión:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2 \, dv = \int_v \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \, dv$$

Si la integral de volumen tiene unidades de energía, entonces es que el integrando nos dice cuánta energía por metro cúbico hay en el volumen donde integramos. Por lo tanto, la función:

$$\frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}$$

tiene unidades de julios por metro cúbico [J/m^3] y, como decíamos, representa la densidad de energía electrostática.

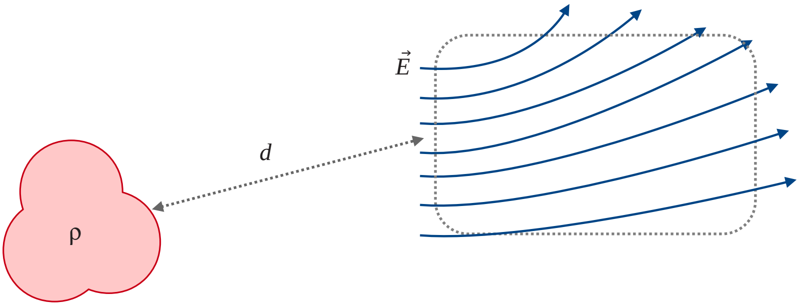
10.4. IMPLICACIÓN 3: EL CAMPO COMO ENTIDAD PROPIA

En estas dos unidades hemos hablado del campo como algo que parecía existir, pero que si volvíamos la vista atrás, al menos en mi opinión, siempre podíamos recordar que era un artificio matemático. Una especie de rodeo a la ley de Coulomb: en lugar de estudiar las fuerzas entre dos cargas, estudiamos una función matemática vectorial que llamamos «campo», que luego es la que ejerce la fuerza sobre una carga de prueba.

Acabamos de demostrar que el campo no es un mero artificio matemático. El campo almacena energía y, por ello, el campo ha de existir, pues la energía es una magnitud física medible.

Vamos a hacer un experimento mental. En este experimento romperemos por un momento la condición electrostática. Ya que aún no tenemos las herramientas matemáticas para poder hacer las cuentas, tendremos que limitar el experimento a una intuición guiada para poder llevarlo a cabo.

Imagínate que tenemos una distribución de carga en un punto lejano que nos crea un campo. Este campo llega a una zona donde nosotros vamos a medirlo, como en la siguiente figura:



Sabemos que dentro de nuestra zona punteada de interés hay una cantidad de campo y, por lo tanto, una cantidad de energía almacenada.

Imaginemos ahora que, de repente, la distribución de carga desaparece por algún medio que no importa mucho. ¿Qué va a pasar con nuestro campo?

Podríamos pensar que el campo desaparecerá inmediatamente, es decir, al instante. Pero eso no es posible. Si eso ocurriera, estaríamos haciendo viajar «algo» a una velocidad infinita.

También podríamos pensar que el campo se va desvaneciendo poco a poco o que incluso empieza a agitarse y, como una especie de ola en la superficie de un estanque, se va alejando y desaparece.

Esta última intuición es lo más parecido a la realidad: el campo existe, almacena energía y, por lo tanto, no puede aparecer y desparecer instantáneamente, sino que se agita y se propaga transmitiendo con él la energía.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

Enunciado 1

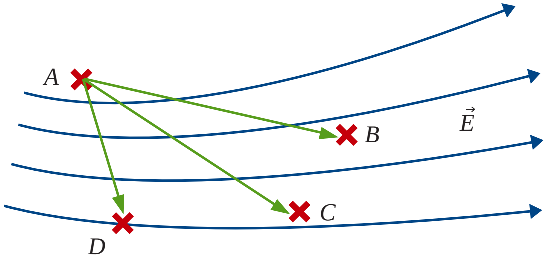
En una zona del espacio alrededor del origen de coordenadas tenemos un campo electrostático descrito por la siguiente función vectorial:

$$\vec{E} = 3\,x\,\hat{i}\ [V/m]$$

¿Cuál es el trabajo que tenemos que invertir para describir una circunferencia de radio unidad centrada en el origen moviendo una partícula cargada de 1 *C*?

Enunciado 2

Fíjate en esta figura que representa una zona del espacio donde hay un campo electrostático:



Hemos medido el trabajo que hay que invertir para mover una partícula de 1 *C* desde el punto *A* hasta los otros tres puntos.

$$W_{AB} = 3\ [J] \qquad W_{AC} = 6\ [J] \qquad W_{AD} = 4\ [J]$$

¿Cuánto trabajo cuesta mover esta partícula entre los puntos *B* y *D*? ¿Y entre los puntos *C* y *B*?

Enunciado 3

¿Es el siguiente campo un campo electrostático?:

$$\vec{E} = 3\, xyz\, \hat{\imath} - 2\, x\, \hat{\jmath} + 2\, z\, \hat{k}$$

Enunciado 4

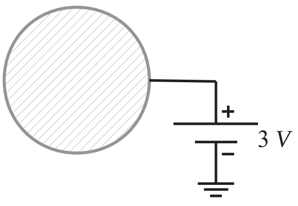
¿Es posible que dos funciones escalares diferentes entre sí representen al mismo campo electrostático? ¿Cómo de diferentes pueden ser?

Enunciado 5

Una esfera conductora cargada con una carga neta de 3 uC (microculombios) en un momento determinado se pone a tierra mediante un cable conductor. ¿Cuánta de la carga que almacena va a intercambiarse con la tierra y por qué?

Enunciado 6

Una esfera de 2 m de radio, conductora y neutra en un momento determinado, se conecta a una batería de 3 V según este esquema:



¿Cuánta carga neta se acumulará en la esfera?

Enunciado 7

Hemos medido el campo en el interior de una región de forma esférica, de 2 m de radio y centrada en el origen. El valor del campo es:

$$\vec{E} = 3\, \hat{\imath}\ [V/m]$$

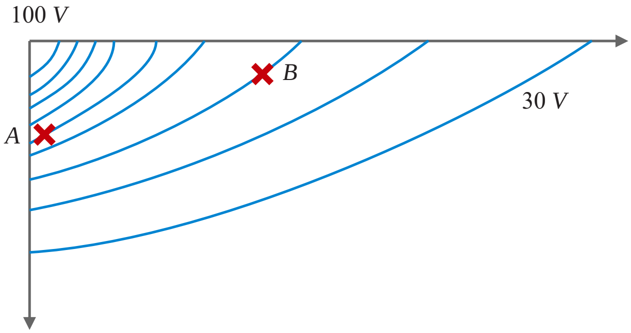
¿Cuánta energía ha costado crear el campo medido en esa región del espacio?

Enunciado 8

¿Cuánta energía cuesta construir un dipolo eléctrico de 2 C y de 1 m?

Enunciado 9

La siguiente figura muestra unas líneas de nivel que representan líneas equipotenciales en un esquema de dos dimensiones. Cada línea representa un salto de 10 V.



¿En qué punto, A o B, es más intenso el campo eléctrico?

Enunciado 10

En la figura anterior, los puntos A y B están separados 10 m. ¿Cuál es el valor medio del campo eléctrico en la dirección que apunta de A hacia B?

Solución 1

$W = 0\ [J]$.

Solución 2

$W_{BD} = 1\ [J]$.

$W_{CB} = -3\ [J]$.

Solución 3

No es un campo electroestático, ya que no es un campo conservativo.

Solución 4

Sí. Es posible siempre y cuando solo se diferencien en una constante aditiva.

Solución 5

Intercambiará toda su carga, 3 *uC*, puesto que el potencial de la tierra es 0 *V*, y una esfera conductora cargada solo está a 0 *V* si no tiene carga neta.

Solución 6

$$V = \frac{Q}{4\pi\, \epsilon_0\, R} \quad \rightarrow \quad Q = 24\pi\, \epsilon_0\ [C].$$

Solución 7

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v |\vec{E}|^2\, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{4}{3}\, \pi\, 2^3 = 48\, \pi\, \epsilon_0\ [J].$$

Solución 8

$$U_d = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 d} = \frac{-1}{\pi \epsilon_0} [J].$$

Solución 9

En el punto *A*, las líneas de nivel equipotencial están más juntas entre sí.

Solución 10

El nivel medio del campo en la dirección de *A* a *B* es de 2 [*V*/*m*], ya que ambos puntos tienen una diferencia de potencial de 20 *V* y una distancia que los separa de 10 *m*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básica

Cheng, D. K. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. 2.ª ed. México DF: Alhambra Mexicana, SA, 2014. 492 pp.

Magro Andrade, R.; Abad Toribio, L.; Serrano Pérez, M.; Velasco Fernández; A. I.; Sánchez Sánchez, S. y Tejedor de las Muelas, J. *Fundamentos de electricidad y magnetismo*. Madrid: García Maroto, 2009. 318 pp.

Avanzada

Feynman, R. P.; Leighton, R. B. y Sands, M. *The Feynman lectures on Physics*. Vol. II: *Mainly electromagnetism and matter*. Perseus Distribution. The New Millennium Edition, 2011. 592 pp.