Actividad de Evaluación Continua 1

Álgebra Lineal

C:/Users/XYZ/Dropbox/DocumentGraphics/Calcul

Autor: Alexander Sebastian Kalis
Profesor: Dr. Juan José Moreno García
Curso: 1o, Ingeniería de Organización Industrial
UDIMA

Índice

1. Actividades

1.1. Problema 1

Calcular la distancia desde el punto $Q = (1, -1, -1)$ a la recta intersección de los planos:

$$x - 2y + z = 3$$
$$2x - 3y - z = 6$$

RESOLUCIÓN:
Disponemos de 2 planos cuyas ecuaciones son:

$$\pi_1 : x - 2y + z = 3$$
$$\pi_2 : 2x - 3y - z = 6$$

Y sus rectas normales:

$$\vec{n_1} =< 1, -2, 1 >$$
$$\vec{n_2} =< 2, -3, -1 >$$

Con lo cual son planos no paralelos. Para definir la línea que forman al cruzarse necesitaremos un punto y su vector director el cual obtenemos calculando el ***producto vectorial*** *de ambos:*

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$$

Para encontrar el punto resolvemos el sistema tomando $y = 0$*:*

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 3 \\ 2x - z = 6 \end{cases} \rightarrow P(x, y, z) = (3, 0, 0)$$

Con lo que podemos definir la ecuación de la recta y calculamos la distancia del punto $Q(1, -1, -1)$*:*

$$r : \frac{x - 3}{5} = \frac{y}{3} = z$$
$$\vec{u} = \vec{PQ} =< -2, -1, -1 >$$
$$Distancia(r, Q) = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|< 2, -3, 1 >\|}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

1.2. Problema 2

Resolver el siguiente sistema por gauss y sustitución hacia atrás:

$$\begin{cases} 2x+5y+2z=4 \\ x-y+3z=0 \\ -x+7y-7z=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz aumentada}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & \mathbf{4} \\ 1 & -1 & 3 & \mathbf{0} \\ -1 & 7 & -7 & \mathbf{4} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & 2 & \mathbf{4} \\ -1 & 7 & -7 & \mathbf{4} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \mathbf{0} \\ 0 & 7 & -4 & \mathbf{4} \\ 0 & 6 & -4 & \mathbf{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & -4 & 7 & \mathbf{4} \\ 0 & -4 & 6 & \mathbf{4} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & -4 & 7 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Queda el sistema reducido:

$$\begin{cases} x+3z-y=0 \\ -4z+7y=4 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

1.3. Problema 3

Resolver el siguiente sistema por Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & +6y & -2z & & =2 \\ 3x & +9y & -3z & +3w & =1 \\ -x & -3y & +z & -3w & =1 \\ -2x & -6y & +2z & -6w & =2 \end{array}$$

Obtener forma escalonada reducida por fila de la matriz ampliada del sistema. Comprobar si el sistema es compatible. Comproba si es determinado o indeterminado. En el caso de que sea lo segundo expresar la solución en función de un parámetro t que se corresponda a la variable libre.

RESOLUCIÓN:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -2 & 0 & \mathbf{2} \\ 3 & 9 & -3 & 3 & \mathbf{1} \\ -1 & -3 & 1 & -3 & \mathbf{1} \\ -2 & -6 & 2 & -6 & \mathbf{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\;]{\substack{R_4+R_1 \\ R1/2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & \mathbf{1} \\ 3 & 9 & -3 & 3 & \mathbf{1} \\ -1 & -3 & 1 & -3 & \mathbf{1} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_3+R_1 \\ R_2+3R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \mathbf{-2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \mathbf{2} \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathbf{\frac{2}{3}} \end{array}\right]$$

Podemos comprobar que el sistema es compatible indeterminado ya que tenemos infinitas soluciones para las variables libres $z=s$ e $y=t$.

Representamos de forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = s - 3t + 1 \\ y = t \\ z = s \\ w = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.4. Problema 4

Sea el sistema de ecuaciones cuya matriz aumpliada es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & \mathbf{2} \\ 2 & -1 & a & \mathbf{5} \\ 1 & 10 & -6 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

Discutir en función del parámetro a.

RESOLUCIÓN:

Se determina qué valores de a hacen que el sistema sea incompatible con el determinante de la matriz:

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 10 & -6 \end{bmatrix}\right) = a^2 + 2a - 15 = (a-3)(a+5)$$

Sabemos entonces que el sistema es compatible determinado para valores de a diferentes a 3 y -5.
Se evalúa el sistema para $a = 3$*:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \mathbf{2} \\ 2 & -1 & 3 & \mathbf{5} \\ 1 & 10 & -6 & \mathbf{1} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \mathbf{2} \\ 0 & -7 & 5 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Podemos observar que el sistema queda compatible e indeterminado ya que existen más incógnitas que ecuaciones linealmente independientes.

Se realiza el mismo procedimiento para $a = -5$*:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & \mathbf{2} \\ 2 & -1 & -5 & \mathbf{5} \\ 1 & 10 & -6 & \mathbf{1} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & \mathbf{2} \\ 0 & 9 & -3 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{\frac{8}{3}} \end{array}\right]$$

Lo que resulta en un sistema incompatible, ya que obtenemos el resultado $0 = -\frac{8}{3}$.

1.5. Problema 5

Realiza la descomposición LU de la matriz A

Se reduce de forma escalonada para obtener los coeficientes de LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo que es equivalente a multiplicarlo por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si la matriz A corresponde a la matriz de un sistema, calcular la solución de dicho sistema si el vector del lado derecho es:

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema $Ax = b \rightarrow LUx = b$

$$Ly = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Y finalmente:

$$Ux = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ 31 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124 \\ 75 \\ 31 \end{bmatrix}$$

1.6. Problema 6

Realiza la descomposición LU de la matriz A y comprueba el resultado:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Se reduce de forma escalonada para obtener los coeficientes de LU

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_1+F_2 \\ -1R_1+R_3 \\ 3R_1+R_4}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & -4 \\ 0 & 12 & 4 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{3R_2+R_3 \\ -4R_2+R_4}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

Entonces los coeficientes de LU y su comprobación son:

$$A = L \cdot U \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

1.7. Problema 7

Obtener por el método de Gauss-Jordan la inversa de la matriz A, si es posible.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Si A es la matriz de un sistema de ecuaciones con el vector del lado derecho

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la solución del sistema usando dicha inversa?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3]{\substack{\frac{1}{2}R_1 \\ 2R_1+R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{2R_3+R_2 \\ 2R_3+R_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{19}{2} & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{-7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Entonces la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -11 & -7 & 2 \\ -16 & -10 & 4 \\ -10 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Y $Ax = b$ es:

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -11 & -7 & 2 \\ -16 & -10 & 4 \\ -10 & -6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ -14 \end{bmatrix}$$

1.8. Problema 8

Encontrar en $\mathbb{R}^2$ la matriz canónica de la aplicación que en el orden indicado efectúa las siguientes operaciones: giro de 60º en el sentido contrario a las agujas del reloj, dilatación positiva de factor 2 horizontal, dilatación positiva vertical de factor $\sqrt{3}$ y reflexión especular respecto al eje Y . Nota: no usar notación decimal

Para efectuar la rotación de 60º utilizaremos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} \cos(60) & -\sin(60) \\ \sin(60) & \cos(60) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para la dilatación positiva horizontal de factor 2 y vertical de factor $\sqrt{3}$:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Para efectuar la reflexión especular respecto al eje Y:

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos representar estas 3 transformaciones conjuntamente mediante su producto en el siguiente orden:

$$A = EDR = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

1.9. Problema 9

Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_4]{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(a-1)R_2+R_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-2)a & -a \\ 0 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-2)a & -a \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{-2+a}R_3+R_4} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{(a-2)a} & -a \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\frac{(-3+a)a}{-2+a}} \end{vmatrix}$$

Una vez reducida, podemos calcular el determinante de la matriz con el producto de sus elementos diagonales

$$det \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \right) = -\frac{-2((-2+a)a)((-3+a)a)}{-2+a} = a^3 - 3a^2$$

C:/Users/XYZ/Dropbox/DocumentGraphics/LOGOUDIMA.jpg

Corregido:
Dr. Juan José Moreno García

1.10. Problema 10

Sea la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuéntrese la matrix 2 x 2 a la que llamaremos B cuyas columnas sean distintas de cero y que cumpla que $AB = 0$. Nota: en realidad se trata de una familia de soluciones.

$$Tomamos\ A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\ y\ B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - 6c & 2b - 6d \\ -3a + 9c & -3b + 9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema $AB = 0$ de forma matricial por eleminación Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \mathbf{0} \\ -3 & 0 & 9 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & -3 & 0 & 9 & \mathbf{0} \end{array}\right] \xrightarrow[3R_2+2R_4]{3R_1+2R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Lo que nos devuelve un sistema compatible indeterminado con variables libres c y d
Tomamos c=t y d=s para parametrizar el sistema, entonces:

$$\begin{cases} a = 3t \\ b = 3s \\ c = t \\ d = s \end{cases} \quad \text{con lo cual la familia de soluciones del sistema tiene la forma: } B = \begin{bmatrix} 3t & 3s \\ t & s \end{bmatrix}$$