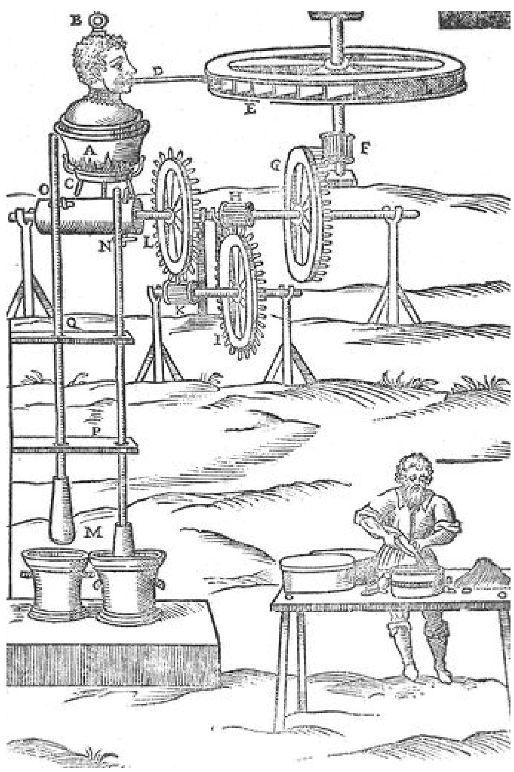
Ejercicios propuestos Unidades 1-3

Mecánica Clásica



Alexander Sebastian Kalis
17 de noviembre de 2019

Actividades

Problema 1

Enunciado del problema

La posición de una partícula que se mueve en línea recta está definida por la relación

$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$

x está expresada en pies y t en segundos.
Determinar:

a) El tiempo para el cual la velocidad será nula.

b) La posición y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo.

c) La aceleración de la partícula en ese instante.

d) La distancia recorrida por la partícula desde $t = 4s$ hasta $t = 6s$

e) Grafique el movimiento de posición, velocidad y aceleración.

Expresar los resultados en SI.

Datos

Función que define la posición en el eje x de la partícula:

$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \tag{1}$$

Función que define la velocidad de la partícula:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15 \tag{2}$$

Función que define la aceleración de la parícula:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \tag{3}$$

Tipo de movimiento: Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

Solución y explicación del problema

Disponiendo de la función de la velocidad, simplemente igualamos $v(t) = 0$ y extraemos las raíces de las ecuación para obtener el tiempo en el que la velocidad es nula:

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \rightarrow t = 5s \tag{4}$$

Para la posición, recurrimos a la función (1) que es la que nos proporciona esa información, donde el tiempo será $t = 5$.

$$x(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 40 \rightarrow x(5) = -60ft = -18{,}29m \tag{5}$$

$$x(0) = 40ft = 12{,}19m \tag{6}$$

La distancia total recorrida entre 0s y 5s será la integral del valor absoluto de la velocidad en ese tramo de tiempo:

$$\int_0^5 |3t^2 - 12t - 15| \; dt = 100ft = 30{,}48m \tag{7}$$

Para la aceleración en el instante $t = 5s$ recurrimos a la función (3) y obtenemos:

$$a(5) = 6 \cdot 5 - 12 = 18ft/s^2 = 5{,}49m/s^2 \tag{8}$$

Nuevamente para calcular la distancia total recorrida entre 4s y 6s integramos el valor absoluto de la velocidad en ese tramo:

$$\int_4^6 |3t^2 - 12t - 15| \; dt = 18ft = 5{,}49m \tag{9}$$

Por último representamos gráficamente las funciones utilizando Symbolab:

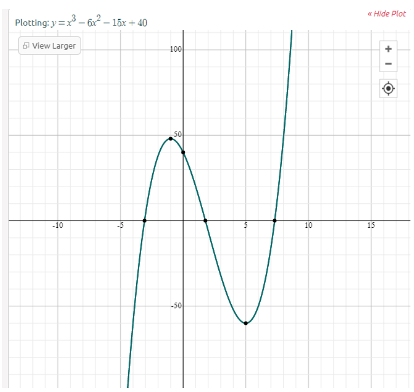


Figura 1: Posición-tiempo

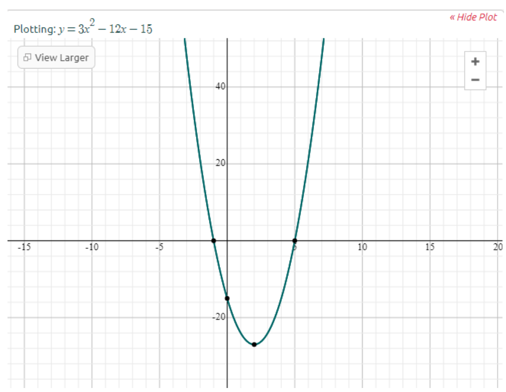


Figura 2: Velocidad-tiempo

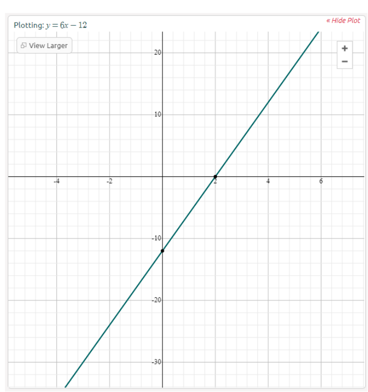


Figura 3: Aceleración-tiempo

Corregido:
Dra. Isabel Cristina Gil García

Problema 2

Enunciado del problema

Un helicóptero de rescate deja caer un paquete de suministros a alpinistas que se encuentran aislados en la cima de una colina peligrosa, situada 200 m abajo del helicóptero. Si éste vuela horizontalmente con una rapidez de 250 km/h:
a) ¿A qué distancia horizontal antes de los alpinistas debe dejarse caer el paquete de suministros?
En vez de esto, suponga que el helicóptero lanza los suministros a una distancia horizontal de 400 m antes de donde se encuentran los alpinistas.
b) ¿Qué velocidad vertical debería darse a los suministros (hacia arriba o hacia abajo) para que éstos caigan precisamente en la cima de la montaña?
c) ¿Con qué rapidez aterrizan los suministros en este último caso?

Datos

Primer apartado
Distancia en y del helicóptero al punto de impacto: $200m$
Velocidad de la partícula en el instante de lanzamiento: $v_{x0} = 250km/h = 69{,}5m/s,\ v_{y0} = 0m/s$
Gravedad (aceleración componente y): $g = a_y = -9{,}8m/s^2$
Se omiten posibles fuerzas de desaceleración en x: $a_x = 0m/s^2$
Segundo apartado
Se añade la condición de distancia en x del helicóptero al punto de impacto: $400m$

Solución y explicación del problema

Primer apartado
Empezamos calculando el tiempo que tarda la partícula en llegar a $y = -200m$, el tiempo de impacto. Tomamos como referencia la posición del helicóptero.

$$y = v_{y0}t_i + \frac{1}{2}gt_i^2 \rightarrow -200 = -\frac{1}{2}9{,}8t^2 \rightarrow t_i \approx 6{,}4s \tag{10}$$

Sabiendo el tiempo que tarda la partícula en impactar, podemos calcular la distancia que recorre durante ese tiempo en su componente x, que será la distancia con la cual debe lanzar la partícula con antelación:

$$x = v_x t_i \rightarrow x = 69{,}5 \cdot 6{,}4 \rightarrow x \approx 445m \tag{11}$$

Segundo apartado

Conociendo la posición en x y la velocidad en x de la partícula calculamos el tiempo de impacto, que será la rapidez con la que se suministran:

$$x = v_x t_i \rightarrow 400 = 69{,}5t_i \rightarrow t_i \approx 5{,}8s \tag{12}$$

El objetivo es que la partícula llegue a $y = -200m$ en $5{,}8s$. Entonces podemos calcular qué velocidad inicial en y debemos darle para que llegue en el tiempo programado.

$$y = v_{y0}t_i + \frac{1}{2}gt_i^2 \rightarrow -200 = 5{,}8v_{y0} - \frac{9{,}8}{2} \cdot 5{,}8^2 \rightarrow v_{y0} \approx -6m/s \tag{13}$$

Como es negativa, esto significa que el helicóptero deberá soltar los suministros mientras desciende a $6m/s$.

Corregido:
Dra. Isabel Cristina Gil García

Problema 3

Enunciado del problema

Un automóvil que pesa 1000 Kg desciende por una cuesta de 10º de inclinación. El conductor divisa un obstáculo y aplica los frenos produciendo una fuerza total de frenado (aplicada por la carretera sobre los neumáticos) constante y de 5000 N. Hasta que el coche se detiene recorre una distancia de 200 m.
Determinar la velocidad inicial del coche

Datos

Masa del automóvil: $m = 1000kg$
Inclinación del plano: $\alpha = 10°$
Fuerza total de frenado: $\vec{F} = -5000N$
Distancia recorrida: $s = 200m$

Solución y explicación del problema

Aunque podría resolverse mediante el teorema de fuerzas vivas, al tratarse de un ejercicio de plano inclinado se resolverá por descomposición de fuerzas:

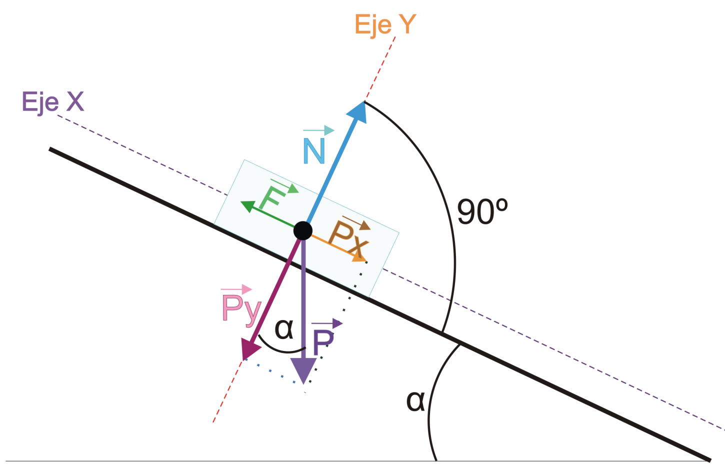


Figura 4: Descomposición de fuerzas

$$\vec{P} = mg = 1000 \cdot 9{,}8 = 9800N \tag{14}$$

$$\vec{P_x} = \vec{P} \cdot \sin(\alpha) = 9800 \cdot \sin(10°) \approx 1700N \tag{15}$$

$$\vec{P_y} = \vec{N} = \vec{P} \cdot \cos(\alpha) = 9800 \cdot \cos(10°) \approx 9650N \tag{16}$$

$$\vec{F_r} = \vec{P_x} + \vec{F} = 1700 - 5000 = -3300N \tag{17}$$

Sabiendo esto podemos calcular la aceleración del vehículo:

$$a = \frac{\vec{F_r}}{m} = -\frac{3300}{1000} = -3{,}3m/s^2 \tag{18}$$

Podemos encontrar la velocidad inicial aplicando la fórmula:

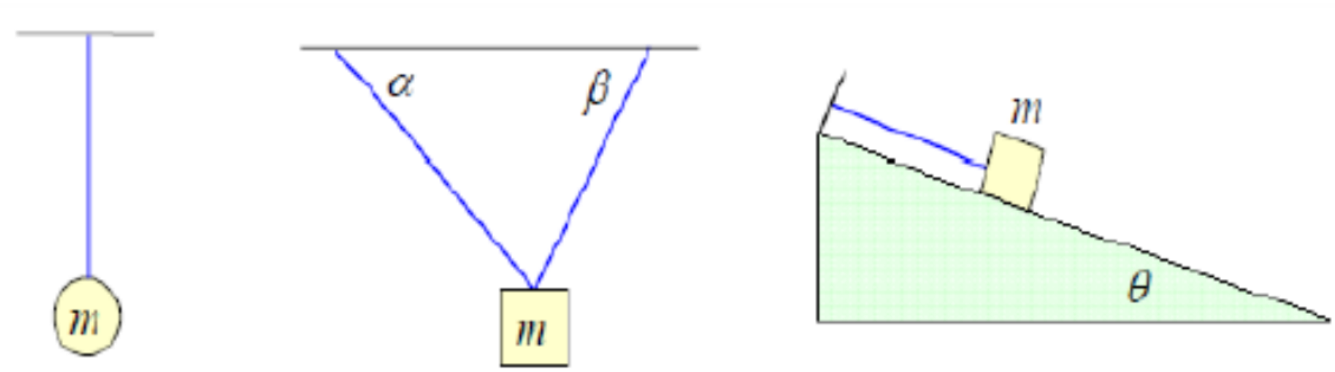
$$v^2 - v_0^2 = 2as \rightarrow 0 - v_0^2 = 2(-3{,}3)(200) \rightarrow v_0 \approx 36{,}3m/s \approx 130km/h \tag{19}$$

Corregido:
Dra. Isabel Cristina Gil García

Problema 4

Enunciado del problema

Hallar los valores de las tensiones en las cuerdas en cada uno de los casos siguientes si los sistemas se encuentran en equilibrio estático.



Datos

Se carece de datos con lo cual simplemente se procederá a aplicar la segunda Ley de Newton:

Solución y explicación del problema

Primer apartado
Al haber solo un cable y una masa afectada por la gravedad con equilibrio estático:

$$\vec{T} + \vec{P} = 0 \rightarrow \vec{T} = m \cdot g \tag{20}$$

Segundo apartado
En este caso hay 2 cuerdas y se descompone la tensión:

$$m \cdot g = \vec{T_1} + \vec{T_2} \tag{21}$$

$$T_1 \cos(\alpha) - T_2 \cos(\beta) = m \cdot g \tag{22}$$

$$T_1 = \frac{mg\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)} \tag{23}$$

$$T_2 = \frac{mg\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)} \tag{24}$$

Tercer apartado
En este caso, la fuerza generada perpendicularmente al plano inclinado se cancela con la normal por lo tanto solo se tiene en cuenta la fuerza paralela al plano inclinado:

$$T = F_x = mg\sin(\theta) \tag{25}$$

Corregido:
Dra. Isabel Cristina Gil García

Formulario

Algebra vectorial

Formas de expresar un vector en función de sus componentes de coordenadas:

$$v = x + y + z \quad v(x, y, z) \quad v = xi + yj + zk$$

Vector unitario:

$$u = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Producto vectorial:

$$v \ x \ v' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Cinemática

Eacuación vectorial horaria:

$$r = x(t)i + (t)j + z(t)k$$

Velocidad:

$$v = \frac{dr}{dt}$$

Aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

MRU:

$$x = x_0 + v_x t$$

MRUA:

$$V_x = V_{ox} + at$$

$$x = x_0 + (\frac{v_x + v_0 x}{2})t$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 - v_2^2 = 2as$$

Dinámica

Descomposición de fuerzas:

$$P = P_x \cdot sin(\alpha) + P_y \cdot cos(\alpha)$$

Segunda ley de Newton

$$F = ma$$

Lei de Hooke

$$F = kx$$

Momento de una fuerza

$$M = Fd$$

Trabajo:

$$W = Fd$$

Energía cinética:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Energia potencial:

$$E_p = mgh$$

Teorema de fuerzas vivas:

$$W = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}$$

Corregido:
Dra. Isabel Cristina Gil García