UNIDAD DIDÁCTICA

7 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES. ANÁLISIS VECTORIAL

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

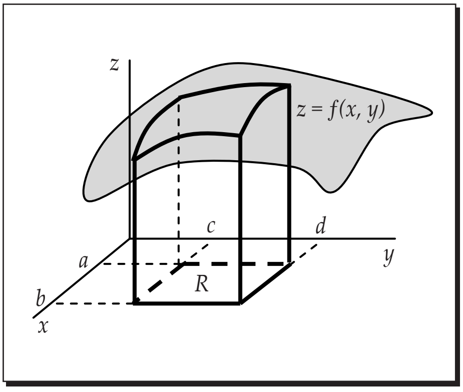
- Calcular integrales dobles sobre rectángulos y recintos proyectables.
- Aplicar el cambio a coordenadas polares en integrales dobles.
- Usar integrales dobles para calcular áreas, volúmenes, masas y centros de gravedad.
- Calcular integrales triples sobre rectángulos y recintos seccionables y proyectables.
- Aplicar el cambio a coordenadas esféricas en integrales triples.
- Hallar integrales dobles y triples impropias.
- Calcular integrales de línea y aplicarlas a la determinación de la masa y centro de gravedad de una cuerda.
- Hallar integrales de línea de campos vectoriales.
- Determinar la existencia de función potencial y su implicación en la independencia del camino.
- Usar el teorema de Green-Riemann para hallar integrales de línea mediante integrales dobles.
- Conocer el concepto de gradiente.
- Aplicar el concepto de gradiente a funciones reales de varias variables reales.
- Conocer el concepto de derivada direccional.
- Aplicar el concepto de derivada direccional a funciones reales de varias variables reales.
- Conocer los conceptos de divergencia y rotacional.
- Conocer los diferentes operadores.
- Saber las definiciones de integral de trayectoria y de línea e identificar sus diferencias.
- Aplicar los tres teoremas fundamentales del cálculo vectorial: teorema de Green, teorema de Stokes y teorema de Gauss.

1. INTEGRALES DOBLES

1.1. INTEGRAL DOBLE DE RIEMANN SOBRE RECTÁNGULOS

1.1.1. Definición

Al igual que la integral de Riemann de funciones de una variable tenía como objetivo calcular áreas planas, la integral doble de Riemann de una función positiva $f(x, y)$ definida sobre un rectángulo compacto (cerrado y acotado) $R = [a, b] \times \times [c, d]$ tiene como objetivo calcular el volumen del recinto limitado sobre el rectángulo entre el plano $z = 0$ y la superficie $z = f(x, y)$, es decir, el volumen del recinto tridimensional:



$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in R \quad \text{y} \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Para ello, se consideran particiones del rectángulo, que son producto cartesiano de particiones de los intervalos que lo determinan, y sumas inferior y superior de Riemann que aproximan el volumen mediante sumas de volúmenes de paralelepípedos contenidos y que contienen al recinto Ω.

Cuando existe el límite común de las sumas inferior y superior de Riemann, se dice que la función f es **integrable Riemann** sobre R, y a su valor común se le llama **integral doble de Riemann**, que se representa por:

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

Para más detalles sobre la definición formal, consultar la bibliografía recomendada.

1.1.2. Funciones integrables

Son funciones integrables Riemann sobre el rectángulo compacto $R = [a, b] \times \times [c, d]$ todas las funciones continuas, o que tienen un número finito de discontinuidades, o incluso aquellas que tienen un número infinito de discontinuidades pero contenidas sobre una curva de longitud finita contenida en R.

Para el cálculo práctico de integrales dobles sobre rectángulos se utiliza el siguiente teorema que reduce el cálculo a integrar primero respecto de una variable y luego respecto de la otra.

1.1.3. Teorema de Fubini

Si $f(x, y)$ es una función continua sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces:

Guido Fubini. Nació en Venecia en 1879, hijo de profesor de matemáticas.

En 1896 comenzó sus estudios de matemáticas en la Escuela Superior Normal de Pisa y se doctoró en 1900.

Fue profesor en las Universidades de Catania, Génova y Turín, donde permaneció durante varias décadas.

Sus investigaciones matemáticas giraron alrededor de las ecuaciones diferenciales, el análisis funcional y complejo y la geometría.

En 1907 probó el teorema que lleva su nombre, cuyo resultado ya se aplicaba sin demostración.

En 1939, a la edad de 60 años, se sintió amenazado por Mussolini por su condición de judío y aceptó una invitación para enseñar en la Universidad de Princeton, donde se trasladó con su familia.

Murió en Nueva York en 1943.

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

El teorema de Fubini se puede aplicar aunque la función no sea continua, pero sí integrable, y tal que existen las integrales respecto de cada variable.

Por otro lado, el teorema de Fubini deja abierta la elección del orden de integración, que se hará en función de las integrales que aparecen.

EJEMPLO 1

Hallar la integral doble de $f(x, y) = x \text{ sen } y - ye^x$ sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, \pi]$.

.../...

.../...

Solución

Integrando primero respecto de la variable x:

$$\iint_R (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dx\, dy = \int_0^\pi \left(\int_{-1}^1 (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sen} y - ye^x \right]_{x=-1}^1 dy =$$

$$= \int_0^\pi \left[\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} y - ye \right) - \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} y - ye^{-1} \right) \right] dy = \int_0^\pi (e^{-1} - e)\, y dy =$$

$$= (e^{-1} - e) \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^\pi = \frac{1}{2} \pi^2 (e^{-1} - e)$$

Comprobar, como ejercicio, que con el otro orden de integración se obtiene el mismo resultado.

1.2. INTEGRALES DOBLES SOBRE OTROS RECINTOS ACOTADOS

1.2.1. Definición

La integral de una función acotada $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre un recinto acotado $S \subset \mathbb{R}^2$ se define por medio de la integral de la función extendida como cero sobre un rectángulo R que contiene al recinto:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y)\, dx\, dy \quad \text{donde} \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ si } (x, y) \in S \\ 0, \text{ si } (x, y) \in R - S \end{cases}$$

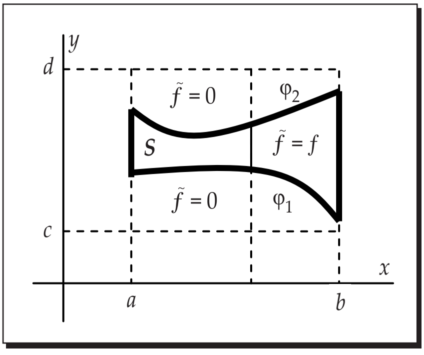
1.2.2. Integral doble sobre recintos proyectables

Un recinto $S \subset \mathbb{R}^2$ se dice ***x* proyectable** si es de la forma:

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b$$

y

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$



Para calcular la integral de f sobre S se considera un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenga a S y se define la función $\tilde{f}$ que extiende a f como cero fuera de S. Entonces, usando el teorema de Fubini, la integral sobre el recinto x-proyectable S queda como:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Un recinto $S \subset \mathbb{R}^2$ se dice ***y*-proyectable** si es de la forma:

$$S = \{(x, y) : c \le y \le d \quad \text{y} \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

y, análogamente, se puede ver que la integral sobre estos recintos se calcula como:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

EJEMPLO 2

Hallar la integral de la función $f(x, y) = x^2 y$ sobre el recinto acotado S del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solución

Las funciones $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en $x = 0$ y $x = 1$, entre cuyos valores $x^2 \le \sqrt{x}$. Por tanto, el recinto es x-proyectable: $S = \{(x, y) : 0 \le x \le 1 \text{ y } x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

$$\iint_S x^2 y\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^6)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7} \right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) = \frac{3}{56}$$

1.3. CAMBIO DE VARIABLE A COORDENADAS POLARES

Existen conjuntos planos cuya descripción en coordenadas polares es más sencilla, lo que simplifica el cálculo de integrales sobre ellos. En general, se puede probar (véase bibliografía recomendada) que:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

A esta última integral se le puede aplicar el teorema de Fubini según la definición polar de $S \subset \mathbb{R}^2$:

- Si $S = \{(\theta, \rho) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \text{ y } \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta)\}$:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)\, \rho\, d\rho \right) d\theta$$

- Si $S = \{(\theta, \rho) : \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \text{ y } \theta_1(\rho) \leq \theta \leq \theta_2(\rho)\}$:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)\, d\theta \right) \rho d\rho$$

EJEMPLO 3

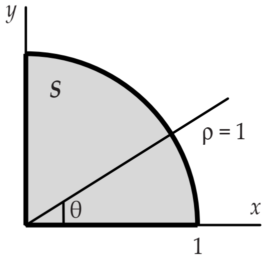
Hallar la integral de la función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sobre $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$.

Solución

La descripción en coordenadas polares del conjunto S es:

$$S = \{(\theta, \rho) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ y } 0 \leq \rho \leq 1\}$$

y la función es $f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \sqrt{1 - \rho^2}$.



Aplicando el cambio de variables y el teorema de Fubini:

$$\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\, \rho\, d\rho \right) d\theta = \frac{-1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (-2\rho)\, (1 - \rho^2)^{1/2}\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \frac{-1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{\rho=0}^1 d\theta = \frac{-1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(0 - \frac{2}{3} \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

1.4. APLICACIONES

1.4.1. Volúmenes

Se dice que el recinto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es ***xy*-proyectable** si es el trozo de un cilindro perpendicular al plano *xy* y comprendido entre dos superficies:

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \text{ y } f(x, y) \le z \le g(x, y)\}$$

donde *S* es la proyección del recinto sobre el plano *xy*. En este caso, el volumen es:

$$V(\Omega) = \iint_S (g(x, y) - f(x, y))\, dx\, dy$$

De forma análoga se obtiene el volumen de recintos ***xz*-proyectables** o ***yz*-proyectables**.

EJEMPLO 4

Hallar el volumen del recinto limitado por el cilindro $x^2 + (z-1)^2 = 1$, el plano $y = 0$ y el paraboloide $x^2 + z^2 = 4y$.

Solución

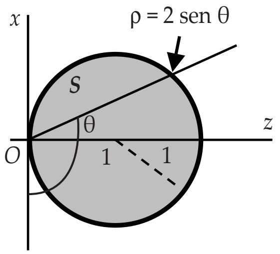
Se trata de un recinto *xz*-proyectable:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : (x, z) \in S \subset \mathbb{R}^2 \text{ y } 0 \le y \le \frac{x^2 + z^2}{4} \right\}$$

donde:

$$S = \{(x, y) : x^2 + (z-1)^2 \le 1\}$$

$$V(\Omega) = \iint_S \left(\frac{x^2 + z^2}{4} - 0 \right) dx\, dz = \iint_S \frac{x^2 + z^2}{4}\, dx\, dz$$



.../...

.../...

Se hará un cambio a coordenadas polares que, en el plano xz, es $x = \rho \cos \theta$ y $z = \rho \operatorname{sen} \theta$. La curva que limita la proyección en coordenadas polares es:

$$x^2 + (z-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + z^2 = 2z \xRightarrow[\substack{x = \rho \cos \theta \\ z = \rho \operatorname{sen} \theta}]{} \rho^2 = 2\rho \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

La forma polar de la proyección es $S = \left\{ (\theta, \rho) : \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ y } 0 \leq \rho \leq 2 \operatorname{sen} \theta \right\}$ y la integral:

$$V(\Omega) = \iint_S \frac{x^2 + z^2}{4}\, dx\, dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\rho^2}{4} \rho\, d\rho \right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\rho^3}{4}\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{16} \right]_{\rho=0}^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \theta\, d\theta$$

Se calcula la integral indefinida mediante dos cambios al ángulo doble (véase Unidad didáctica 3):

$$\int \operatorname{sen}^4 \theta\, d\theta = \int (\operatorname{sen}^2 \theta)^2\, d\theta = \int \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{3}{8} \theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4\theta + c$$

Y entonces, el volumen es:

$$V(\Omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \theta\, d\theta = \left[\frac{3}{8} \theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3}{8} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] - 0 + 0 = \frac{3\pi}{8}$$

1.4.2. Áreas planas

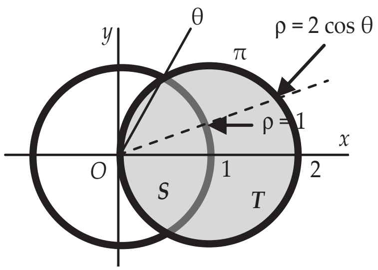
Puesto que el volumen de un cilindro de altura 1 coincide con el área de la base, la integral doble se puede usar para calcular áreas de recintos $S \subset \mathbb{R}^2$ como:

$$A(S) = V(\{(x, y, z) : (x, y) \in S \text{ y } 0 \leq z \leq 1\}) = \iint_S (1 - 0)\, dx\, dy = \iint_S dx\, dy$$

EJEMPLO 5

Calcular el área del recinto interior a las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

Solución



Se pide el área del recinto S de la figura. Pasando a polares las ecuaciones de las dos circunferencias, se obtiene:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ \rho^2 = 2\,\rho \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \rho = 2\cos\theta \end{cases}$$

Las circunferencias se cortan en:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \rho = 2\cos\theta \end{cases} \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Pasando a coordenadas polares, y usando la simetría, el área del recinto T es:

$$A(T) = \iint_T dx\,dy = 2\int_0^{\pi/3}\left(\int_1^{2\cos\theta} \rho\,d\rho\right)d\theta = 2\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=1}^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/3}(4\cos^2\theta - 1)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/3}\left(4\,\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 1\right)d\theta = \int_0^{\pi/3}(1 + 2\cos 2\theta)\,d\theta = [\theta + \operatorname{sen} 2\theta)]_{\theta=0}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y entonces, el área del recinto S es el área de la circunferencia unidad menos el área de T:

$$A(S) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.4.3. Masas y centros de gravedad

Si $S \subset \mathbb{R}^2$ es una superficie plana con densidad puntual $d(x, y) \geq 0$, en cada punto $(x, y) \in S$, entonces la masa de S viene dada por

$$m(S) = \iint_S d(x, y)\,dx\,dy$$

y el centro de gravedad de S es el punto (x_g, y_g), donde:

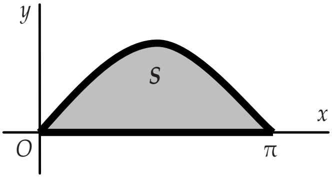
$$x_g = \frac{1}{m(S)} \iint_S xd(x, y)\, dx\, dy$$

$$y_g = \frac{1}{m(S)} \iint_S yd(x, y)\, dx\, dy$$

EJEMPLO 6

Hallar el área de la región plana limitada por un arco de sinusoide de densidad constante d_0.

Solución



La región plana limitada por el arco de sinusoide es:

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi \ \text{ y } \ 0 \leq y \leq \text{sen}\, x\}$$

Su masa es:

$$m(S) = \iint_S d_0 dx\, dy = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\text{sen}\, x} d_0 dy \right) dx = d_0 \int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx = d_0[-\cos x]_{x=0}^{\pi} = 2d_0$$

El centro de gravedad es el punto (x_g, y_g) con:

$$x_g = \frac{1}{2d_0} \iint_S x d_0 dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\text{sen}\, x} x\, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x\, \text{sen}\, x\, dx =$$

$$= \left(\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen}\, x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left([-x \cos x]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\pi + [\text{sen}\, x]_{x=0}^{\pi}) = \frac{\pi}{2}$$

$$y_g = \frac{1}{2d_0} \iint_S y d_0 dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\text{sen}\, x} y\, dy \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} \left[x - \frac{\text{sen}\, 2x}{2} \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

1.4.4. Áreas de superficies proyectables

El área de la **superficie *xy*-proyectable** $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in S \text{ y } z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$ es:

$$A(D) = \iint_S \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dx\, dy$$

Análogamente para superficies *xz*-proyectables e *yz*-proyectables.

EJEMPLO 7

Hallar el área de la superficie determinada por $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Puesto que $f_x(x, y) = x^{1/2}$ y $f_y(x, y) = y^{1/2}$, el área de la superficie es:

$$A(D) = \iint_R \sqrt{1 + x + y}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sqrt{1 + x + y}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{(1 + x + y)^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^1 dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 ((2 + x)^{3/2} - (1 + x)^{3/2})\, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{(2 + x)^{5/2}}{5/2} - \frac{(1 + x)^{5/2}}{5/2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{15}(1 + 9\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$$

2. INTEGRALES TRIPLES

2.1. INTEGRAL TRIPLE DE RIEMANN SOBRE RECTÁNGULOS

2.1.1. Definición

Al igual que la integral doble, la integral triple de Riemann de una función acotada $f : R \to \mathbb{R}^3$, con $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$, se define mediante el límite de sumas inferiores y superiores de Riemann sobre particiones de R, que son producto de particiones de los intervalos que lo determinan. La función f es **integrable Riemann** sobre R

cuando los límites de las sumas inferiores y superiores coinciden, y a su valor común se le llama **integral triple de Riemann**, que se representa por:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Para más detalles sobre la definición formal, consultar la bibliografía recomendada.

2.1.2. Funciones integrables

Son funciones integrables Riemann sobre el rectángulo compacto $R = [a, b] \times$ $\times [c, d] \times [e, f]$ todas las funciones continuas, o que tienen un número finito de discontinuidades, o incluso aquellas que tienen un número infinito de discontinuidades pero contenidas sobre ciertas superficies de área finita contenidas en R.

2.1.3. Teorema de Fubini

Si $f(x, y, z)$ es una función continua sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, entonces:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \left(\int_e^f f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z)\, dz \right) dy \right] dx$$

De nuevo, el teorema de Fubini se puede aplicar aunque la función no sea continua, pero sí integrable, y tal que existen las integrales respecto de cada variable.

Por otro lado, el teorema de Fubini deja abierta la elección del orden de integración, que se hará en función de las integrales que aparecen.

EJEMPLO 8

Hallar la integral de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre el rectángulo $R = [-1, 2] \times [0, 1] \times [0, 2]$.

.../...

.../...

Solución

$$\iiint_R xyz\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{2}\left[\int_0^1\left(\int_0^2 xyz\,dz\right)dy\right]dx = \int_{-1}^{2}\left[\int_0^1\left[\frac{xyz^2}{2}\right]_{z=0}^{2} dy\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(\int_0^1 2xy\,dy\right)dx = \int_{-1}^{2}[xy^2]_{y=0}^{1}\,dx = \int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{2} = \frac{3}{2}$$

2.2. INTEGRALES TRIPLES SOBRE OTROS RECINTOS ACOTADOS

Procediendo como en el caso de las integrales dobles, se obtienen fórmulas para el cálculo de integrales triples sobre otros conjuntos acotados que se exponen a continuación. En cada caso, las variables independientes x, y, z se pueden intercambiar dependiendo del problema considerado.

2.2.1. Recintos proyectables

La integral triple sobre un recinto ***xy*-proyectable**:

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \text{ y } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

se calcula mediante la fórmula:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right)dx\,dy$$

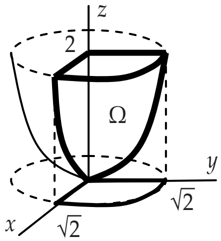
EJEMPLO 9

Hallar la integral de la función $f(x, y, z) = x$ sobre el recinto Ω limitado en $x, y \geq 0$ por el plano $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

.../...

.../...

Solución



El recinto Ω es xy-proyectable y se puede expresar como:

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \text{ y } x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$$

donde $S = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Usando la fórmula de la integral para recintos proyectables
y usando coordenadas polares en la integral doble sobre S, se obtiene:

$$\iiint_\Omega x\, dx\, dy\, dz = \iint_S \left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\, dz \right) dx\, dy = \iint_S x(2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho \cos\theta (2 - \rho^2)\, \rho\, d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^4) \cos\theta\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\left(\frac{2\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right) \cos\theta \right]_{\rho=0}^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{15} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{15} [\operatorname{sen}\theta]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

2.2.2. Recintos seccionables

Un recinto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se dice **x-seccionable** si es de la forma $\Omega = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, (y, z) \in S_x\}$, donde cada S_x, $a \leq x \leq b$, es un recinto acotado de $\mathbb{R}^2$ (en el plano yz). En este caso:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\iint_{S_x} f(x, y, z)\, dy\, dz \right) dx$$

EJEMPLO 10

Hallar la integral de la función $f(x, y, z) = 1/(1 + x + y + z)^3$ sobre el tetraedro Ω limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

.../...

.../...

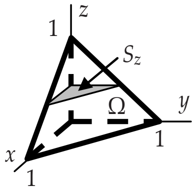
Solución

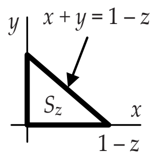
El tetraedro es un recinto seccionable en cualquier dirección, por ejemplo, z-seccionable:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \le z \le 1,\ (x, y) \in S_z\}$$

donde:

$$S_z = \{(x, y) : 0 \le x \le 1 - z,\ 0 \le y \le 1 - z - x\}$$





Entonces:

$$\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 \left(\iint_{S_z} \frac{dx\,dy}{(1+x+y+z)^3}\right) dz = \int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z-x} \frac{dy}{(1+x+y+z)^3}\right) dx\right] dz =$$

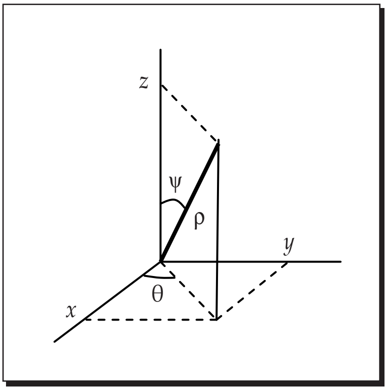
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_{y=0}^{1-z-x} dx\right] dz = \frac{-1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+z)^2}\right) dx\right] dz =$$

$$= \frac{-1}{2}\int_0^1 \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{1+x+z}\right]_{x=0}^{1-z} dz = \frac{-1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-z}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+z}\right) dz =$$

$$= \frac{-1}{2}\left[-\frac{(1-z)^2}{4} + \frac{z}{2} - \ln|1+z|\right]_{z=0}^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$$

2.3. CAMBIO DE VARIABLE A COORDENADAS ESFÉRICAS

Como se observa en la figura, en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ cada punto se puede determinar de forma única con la terna (θ, ψ, ρ), donde $0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le \psi \le \pi$ y $\rho \ge 0$, llamadas **coordenadas esféricas**. La relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas viene dada por:



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\psi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \\ z = \rho \cos\psi \end{cases}$$

La descripción en coordenadas esféricas de la esfera Ω de radio r centrada en el origen es $\Omega = \{(\theta, \psi, \rho) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \psi \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq r\}$.

La integral triple en coordenadas esféricas es (véase bibliografía):

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_\Omega f(\rho \cos\theta \operatorname{sen}\psi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi, \rho \cos\psi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\psi\, d\theta\, d\psi\, d\rho$$

EJEMPLO 11

Hallar la integral de la función $f(x, y, z) = z$ sobre la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ situada en el primer octante.

Solución

En coordenadas esféricas, la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ situada en el primer octante es el recinto

$$\Omega = \left\{ (\theta, \psi, \rho) : 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 1 \right\}$$

y la integral es:

$$\iiint_\Omega z\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega \rho \cos\psi\, \rho^2 \operatorname{sen}\psi\, d\theta\, d\psi\, d\rho = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho^3 \operatorname{sen}\psi \cos\psi\, dp \right) d\psi \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \operatorname{sen}\psi \cos\psi \right]_{\rho=0}^{1} d\psi \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\psi \cos\psi}{4}\, d\psi \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{8} \right]_{\psi=0}^{\pi/2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8}\, d\theta = \left[\frac{\theta}{8} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

3. INTEGRALES MÚLTIPLES IMPROPIAS

Las integrales múltiples (dobles o triples) de Riemann requieren que la función esté acotada y que el recinto sea compacto (cerrado y acotado). Cuando no se cumple alguno de estos requisitos, se dice que la **integral múltiple** es **impropia**.

Para hallar la integral impropia de una función f sobre un recinto S se considera una sucesión de recintos $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ compactos y contenidos en S tales que $\lim_k S_k = S$ y que la función esté acotada en todos ellos. Se define entonces la integral impropia como límite de las integrales *propias* sobre estos recintos que, en el caso de integrales dobles, se expresaría como:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \lim_k \iint_{S_k} f(x, y)\, dx\, dy$$

Se puede probar que este límite existe y no depende de la sucesión de recintos elegida siempre que la función tenga signo constante.

EJEMPLO 12

Hallar la integral de $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^2$ sobre el recinto $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y el recinto $T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Solución

El recinto S es compacto, pero la función no está acotada, ya que su límite en el origen es infinito. Sin embargo, la función sí está acotada sobre $S_a = \{(x, y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $S_a \xrightarrow[a\to 0]{} S$. Entonces:

$$\iint_S \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{a\to 0} \iint_{S_a} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{a\to 0} \int_0^{2\pi} \left(\int_a^1 \frac{1}{\rho^4}\, \rho\, d\rho \right) d\theta = \lim_{a\to 0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{-1}{2\rho^2} \right]_{\rho=a}^{1} d\theta =$$

$$= \lim_{a\to 0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{2a^2} \right) d\theta = \lim_{a\to 0} 2\pi \left(\frac{-1}{2} + \frac{-1}{2a^2} \right) = +\infty$$

Aunque la función sí está acotada sobre T, el recinto T no es compacto por no estar acotado, pero la sucesión de conjuntos compactos $T_k = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq k^2\} \xrightarrow[k\to\infty]{} T$. Entonces:

$$\iint_T \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{k\to\infty} \iint_{T_k} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_1^k \frac{1}{\rho^4}\, \rho\, d\rho \right) d\theta = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{-1}{2\rho^2} \right]_{\rho=1}^{k} d\theta =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{2k^2} - \frac{-1}{2} \right) d\theta = \lim_{k\to\infty} 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2} \right) = \pi$$

4. INTEGRALES DE LÍNEA

4.1. INTEGRAL DE LÍNEA DE FUNCIONES REALES

4.1.1. Definición de camino

Se llama **camino** a cualquier curva simple suave a trozos, es decir, a cualquier curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ que admita una parametrización $\alpha : [a, b] \to \gamma \subset \mathbb{R}^n$ continua, sin puntos dobles, y derivable salvo a lo más en un número finito de puntos. Cuando la curva es cerrada, el camino se llama cerrado.

4.1.2. Definición de integral de línea de funciones reales

Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ un camino parametrizado por $\alpha : [a, b] \to \gamma \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \gamma \to \mathbb{R}$ una función real acotada. Se define la **integral de línea o curvilínea** (**de primer tipo**) de f sobre γ como:

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\alpha(t))|\alpha'(t)| \, dt$$

4.1.3. Observaciones

- La integral curvilínea no depende de la parametrización elegida ni del sentido en que se recorre la curva.
- Si $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ es el grafo de la función continua $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, puesto que $\alpha(t) = (t, \varphi(t))$ es una parametrización de γ, entonces:

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(t, \varphi(t)) \sqrt{1 + (\varphi'(t))^2} \, dt$$

- La integral curvilínea de la función $f \equiv 1$ es la longitud de la curva: $\int_\gamma ds =$ $=$ longitud(γ).

EJEMPLO 13

Hallar la integral curvilínea de $f(x, y) = xy$ sobre la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ comprendida en el primer cuadrante.

.../...

.../...

Solución

La parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ comprendida en el primer cuadrante se parametriza por $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Puesto que $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ y, por tanto, $|\alpha'(t)| = 1$, la integral es:

$$\int_\gamma xy\, ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen} t\, dt = \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

4.2. APLICACIONES

Si $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es un camino que representa a una cuerda y $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la densidad puntual en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \gamma$, la masa m y el centro de gravedad $G = (x_1^g, x_2^g, \ldots, x_n^g)$ de la cuerda se calculan mediante las integrales curvilíneas:

$$m = \int_\gamma d(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, ds$$

$$x_i^g = \int_\gamma x_i\, d(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, ds$$

EJEMPLO 14

Calcular la masa de una espiral de un muelle con forma de hélice de ecuación $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, si la densidad puntual viene dada por $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución

Puesto que $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$:

$$m = \int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{2\pi} = \left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right)\sqrt{2}$$

5. INTEGRALES DE LÍNEA

5.1. INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS VECTORIALES

5.1.1. Definición

Se llama **campo vectorial** en $\mathbb{R}^n$ a cualquier función $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se representa por $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ o $F = f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Si $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es un camino parametrizado por $\alpha : [a, b] \to \gamma \subset \mathbb{R}^n$, y $F : \gamma \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial acotado, se define la **integral de línea o curvilínea** (**de segundo tipo**) de F sobre γ como:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt,$$

siempre que esta integral exista. **Nota:** el punto de producto en la integral indica producto escalar.

5.1.2. Notación

- Cuando el camino γ es cerrado, la integral se suele representar por $\oint_\gamma F\, ds$.
- Si $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, entonces,

$$\int_\gamma F\, ds = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha(t))\, x_i'(t) \right) dt = \int_a^b (f_1 x_1' + f_2 x_2' + \ldots + f_n x_n')\, dt$$

de donde se deriva la siguiente frecuente notación para la integral de línea:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_\gamma f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n)$$

En los casos $n = 2$ y $n = 3$, la notación se transforma en:

$$\int_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \qquad \int_\gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

5.1.3. Propiedades

- Si $F, G : \gamma \to \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\int_\gamma (\lambda F + \mu G)\, ds = \lambda \int_\gamma F\, ds + \mu \int_\gamma G\, ds$$

- Si $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ son dos caminos que solo se cortan en un punto, que es el extremo de γ_1 y el origen de γ_2, entonces:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F\, ds = \int_{\gamma_1} F\, ds + \int_{\gamma_2} F\, ds$$

- La integral de línea no depende de la parametrización elegida, pero sí depende del sentido en que se recorre el camino:

$$\int_{-\gamma} F\, ds = -\int_\gamma F\, ds$$

5.1.4. Interpretación física

Si el campo vectorial $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ define un campo de fuerzas (electromagnético, gravitacional, etc.) en cada punto de Ω, y $\gamma \subset \Omega$ es un camino que une el punto A con el punto B, entonces la integral

$$\int_\gamma F\, ds$$

es el trabajo necesario para llevar una partícula de masa unidad de A a B a lo largo de γ.

EJEMPLO 15

Hallar la integral curvilínea de $F(x, y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$ a lo largo de la recta γ_1 parametrizada por $\alpha_1(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, y a lo largo de la curva γ_2 parametrizada por $\alpha_2(t) = (t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$. ¿Qué conclusión se puede sacar de los resultados obtenidos?

.../...

.../...

Solución

Se calcula la integral sobre cada uno de los dos caminos:

$$\int_{\gamma_1} \sqrt{y}\,dx + (x^3+y)\,dy = \int_0^1 (\sqrt{t}\cdot 1 + (t^3+t)\cdot 1)\,dt = \int_0^1 (t^3+t+\sqrt{t})\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{t=0}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12}$$

$$\int_{\gamma_2} \sqrt{y}\,dx + (x^3+y)\,dy = \int_0^1 (\sqrt{t^3}\cdot 2t + (t^6+t^3)\cdot 3t^2)\,dt = \int_0^1 (3t^8+3t^5+2t^{5/2})\,dt =$$

$$= \left[\frac{3t^9}{9} + \frac{3t^6}{6} + \frac{2t^{7/2}}{7/2}\right]_{t=0}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{7} = \frac{59}{42}$$

Los dos caminos son distintos, pero ambos tienen el mismo origen (0, 0) y el mismo final (1, 1). Puesto que las integrales dan distinto resultado, se deduce que la integral puede depender del camino.

5.2. INDEPENDENCIA DEL CAMINO

5.2.1. Definición

Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es **conexo** si cada par de puntos de Ω se puede unir por una curva contenida en el conjunto. Un conjunto abierto y conexo se llama **dominio**.

Dada una función $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, se dice que la integral curvilínea de F es **independiente del camino** en Ω si para cualquier par de puntos $A, B \in \Omega$, la integral sobre cualquier camino $\gamma \subset \Omega$ que va de A a B da siempre el mismo resultado, y, en este caso, se indica:

$$\int_\gamma F\,ds = \int_A^B F\,ds$$

Como se ha visto, la integral de la función del ejemplo 15 no es independiente del camino. Sin embargo, se puede demostrar que la integral del gradiente de una función sí lo es, como asegura el siguiente teorema.

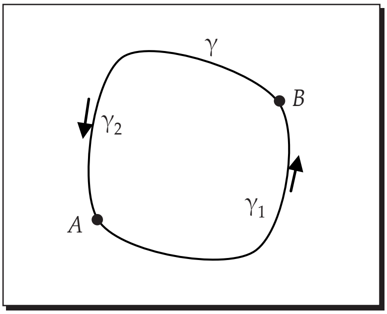
5.2.2. Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de línea

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con gradiente $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuo. Entonces, para cualquier par de puntos $A, B \in \Omega$ y cualquier camino $\gamma \subset \Omega$ que va de A a B, se cumple que:

$$\int_\gamma \nabla f \, ds = f(B) - f(A)$$

es decir, la integral de ∇f es independiente del camino en Ω.

5.2.3. Consecuencias



- La integral curvilínea de un gradiente continuo es cero sobre cualquier camino cerrado contenido en el dominio.

  Para verlo, dado el camino cerrado $\gamma \subset \Omega$, basta elegir dos puntos A, $B \in \gamma$ que descomponen el camino en dos caminos, γ_1 y γ_2, que intercambian sus orígenes y extremos (el origen de uno es el extremo del otro y viceversa). Entonces, aplicando el teorema del epígrafe 5.2.2:

$$\oint_\gamma \nabla f \, ds = \int_A^B \nabla f \, ds + \int_B^A \nabla f \, ds = (f(B) - f(A)) + (f(A) - f(B)) = 0$$

- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua, y existe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable con $\nabla f = F$, entonces, sobre cualquier camino $\gamma \subset \Omega$ que vaya de A a B:

$$\int_\gamma F \, ds = f(B) - f(A)$$

  y sobre cualquier camino cerrado $\gamma \subset \Omega$:

$$\oint_\gamma F \, ds = 0$$

EJEMPLO 16

Estudiar si las integrales curvilíneas de la función $F(x, y) = (y + 1, x)$ son o no independientes del camino. Si la contestación es afirmativa, calcular la integral sobre cualquier camino que va del punto $A(-3, 1)$ al punto $B(2, -1)$.

Solución

La función F es continua en $\mathbb{R}^2$ y el gradiente de la función diferenciable $f(x, y) = xy + x$ es $\nabla f = (y + 1, x) = F$, luego la integral no depende del camino en $\mathbb{R}^2$ y la integral sobre cualquier camino cerrado es cero. La integral sobre cualquier camino $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ que va de $A(-3, 1)$ a $B(2, -1)$ es:

$$\int_\gamma (y + 1)\, dx + x\, dy = f(2, -1) - f(-3, 1) = 0 - (-6) = 6$$

5.2.4. Función potencial

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, se llama función potencial de F en Ω a cualquier función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.

5.2.5. Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial cuya integral de línea es independiente del camino en Ω. Entonces, siendo $A \in \Omega$ un punto arbitrario, la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(X) = \int_A^X F\, ds$$

sobre cualquier camino $\gamma \subset \Omega$ que va del punto A al punto X está bien definida y es una función potencial de F en Ω.

Agrupando los dos teoremas fundamentales, se obtiene el siguiente teorema de caracterización:

Sumario

5.2.6. Teorema de caracterización

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Son equivalentes:

- Existe función potencial de F en Ω.
- La integral de línea de F es independiente del camino en Ω.
- La integral de línea de F es cero sobre cualquier camino cerrado contenido en Ω.

EJEMPLO 17

El campo vectorial $F(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right)$ es continuo en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Calcula la integral de línea sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente y extrae consecuencias del resultado obtenido.

Solución

Una parametrización de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente es:

$$\alpha \equiv \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha' \equiv \begin{cases} x'(t) = -\operatorname{sen} t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$

La integral de línea es:

$$\oint_{x^2+y^2=1} \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} (-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} (\cos t) \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Puesto que la integral de F sobre la circunferencia unidad, que es un camino cerrado contenido en Ω, es distinta de 0, se tiene, utilizando el teorema de caracterización del epígrafe 5.2.6, que la función F no admite función potencial en Ω.

5.2.7. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de función potencial

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F = (f_1, f_2, \dots f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable con continuidad. Entonces:

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ admite función potencial en } \Omega \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ en } \Omega \text{ para todo } i \neq j$$

La coincidencia de las derivadas parciales cruzadas es una condición necesaria, pero no es suficiente.

5.2.8. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de función potencial en el plano

En el caso particular $n = 2$, la condición necesaria para la existencia de función potencial es:

$$F = (P, Q) \text{ admite función potencial en } \Omega \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } \Omega$$

Para buscar una condición suficiente para la existencia de función potencial, hay que considerar un tipo particular de dominio, llamado **simplemente conexo**, y que verifica que el interior de cualquier curva cerrada está contenido en Ω. Intuitivamente, un dominio es simplemente conexo si no tiene agujeros, es decir, no contiene puntos en su interior que no pertenecen al conjunto.

Para dominios simplemente conexos, la condición necesaria para la existencia de función potencial es también suficiente:

$$F = (P, Q) \text{ admite función potencial en } \Omega \text{ (simplemente conexo)} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } \Omega$$

EJEMPLO 18

Comprobar que el campo vectorial del ejemplo 17 verifica las condiciones necesarias para la existencia de función potencial. ¿En qué regiones del plano admite función potencial? Encontrar alguna de ellas, si existe.

.../...

.../...

Solución

En el ejemplo 17 se ha visto que la función $F(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ no admite función potencial en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Sin embargo, verifica las condiciones necesarias para su existencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-1(x^2+y^2)+y2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1(x^2+y^2)-x2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array} \right. \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } \Omega$$

Puesto que las derivadas parciales cruzadas coinciden, la no existencia de función potencial se debe a que el dominio Ω no es simplemente conexo.

La existencia de función potencial para la función F está asegurada en cualquier dominio simplemente conexo contenido Ω. En este caso particular se puede buscar la función potencial mediante integración. Se busca una función f que verifique que $\nabla f = F = (P, Q)$, es decir, que verifique:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

De la primera condición, integrando respecto de la variable x (suponiendo y constante), se obtiene:

$$f(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{y^2}\int \frac{-y}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\,dx = -\int \frac{\dfrac{1}{y}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\,dx = -\arctan\frac{x}{y} + c(y)$$

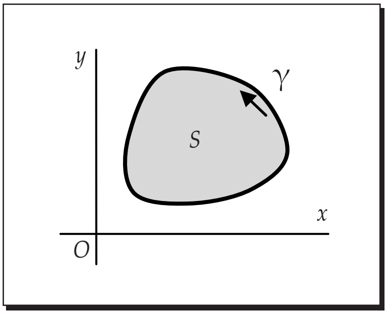
ya que, al suponer en esta integral que y es constante, la constante de integración puede ser una función de y. Ahora se deriva para imponer la segunda condición:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{-x}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} + c'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + c'(y) = Q = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c(y) = c$$

Tomando, por ejemplo, $c = 0$, se obtiene la función potencial $f(x, y) = -\arctan x/y$, que no está definida cuando $y = 0$, es decir, se ha encontrado una función potencial de F en uno de los siguientes dominios simplemente conexos: $\Omega_1 = \{(x, y) : y > 0\}$ u $\Omega_2 = \{(x, y) : y < 0\}$.

5.3. EL TEOREMA DE GREEN-RIEMANN

El teorema de Green-Riemann relaciona las integrales dobles con las integrales de línea:



Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio simplemente conexo y $F = (P, Q) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial derivable con continuidad. Entonces, si $\gamma \subset \Omega$ es un camino cerrado con orientación positiva (contraria a las agujas del reloj) y $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ es la unión de γ con su interior, se tiene que:

$$\oint_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

EJEMPLO 19

Siendo γ la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente, hallar la integral curvilínea:

$$\oint_\gamma (x - y^3)\, dx + (x^3 + \operatorname{sen} y)\, dy$$

Solución

Para el cálculo de la integral se utiliza el teorema de Green-Riemann.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x, y) = x - y^3 \\ Q(x, y) = x^3 + \operatorname{sen} y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)$$

Y entonces:

$$\oint_\gamma (x - y^3)\, dx + (x^3 + \operatorname{sen} y)\, dy = \iint_S 3(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

.../...

.../...

donde S es el círculo unidad: $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Para hallar la integral doble se hace un cambio a coordenadas polares:

$$\oint_\gamma (x - y^3)\, dx + (x^3 + \operatorname{sen} y)\, dy = \iint_S 3(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 3\rho^2 \rho\, d\rho \right) d\theta =$$

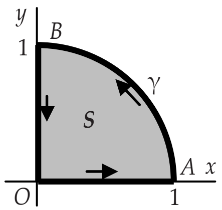
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\, d\theta = \frac{3}{4}\, 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

EJEMPLO 20

Siendo γ el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente, comprendido en el primer cuadrante, utilizar el teorema de Green-Riemann para calcular la integral curvilínea:

$$\int_\gamma (1 + y)\, e^{x-y}\, dx + (x - ye^{x-y})\, dy$$

Solución



El camino γ no es cerrado, pero se puede cerrar añadiendo el segmento $\overline{OA}$ que va de $O(0, 0)$ a $A(1, 0)$ y el segmento $\overline{BO}$ que va de $B(0, 1)$ a $O(0, 0)$. Aplicando el teorema de Green-Riemann al camino cerrado $\Gamma = \overline{OA} \cup \gamma \cup \overline{BO}$, orientado positivamente, se obtiene:

$$\begin{cases} P(x, y) = (1 + y)\, e^{x-y} \\ Q(x, y) = x - ye^{x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -ye^{x-y} \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 - ye^{x-y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$\oint_\Gamma (1 + y)\, e^{x-y}\, dx + (x^5 - ye^{x-y})\, dy = \iint_S 1\, dx\, dy = \text{área}(S) = \frac{\pi}{4}$$

Descomponiendo la integral curvilínea sobre el camino cerrado en suma de integrales sobre los caminos que lo forman, y llamando F al campo vectorial, se obtiene:

$$\oint_\Gamma F\, ds = \int_{\overline{OA}} F\, ds + \int_\gamma F\, ds + \int_{\overline{BO}} F\, ds = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma F\, ds = \frac{\pi}{4} - \int_{\overline{OA}} F\, ds - \int_{\overline{BO}} F\, ds$$

.../...

.../...

Parametrizando, se calculan las integrales sobre los caminos $\overline{OA}$ y $\overline{BO}$:

$$\int_{\overline{OA}} F\,ds = \int_{\overline{OA}} (1+y)\,e^{x-y}\,dx + (x - ye^{x-y})\,dy =$$

$$= \begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ 0 \le t \le t \end{pmatrix} = \int_0^1 [(1-0)\,e^t \cdot 1 + (t-0)\cdot 0]\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = [e^t]_{t=0}^1 = e - 1$$

$$\int_{\overline{BO}} F\,ds = -\int_{\overline{OB}} F\,ds = -\int_{\overline{OB}} (1+y)\,e^{x-y}\,dx + (x - ye^{x-y})\,dy = \begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) = t \\ 0 \le t \le t \end{pmatrix} =$$

$$= -\int_0^1 [(1+t)\,e^{-t}\cdot 0 + (0 - te^{-t})\cdot 1]\,dt = \int_0^1 te^{-t}\,dt = \begin{pmatrix} u = t \;\Rightarrow\; du = dt \\ dv = e^{-t}\,dt \;\Rightarrow v = -\,e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= [-\,te^{-t}]_{t=0}^1 + \int_0^1 e^{-t}\,dt = -\,e^{-1} + [-\,e^{-t}]_{t=0}^1 = -\,e^{-1} + (-\,e^{-1} + 1) = 1 - 2e^{-1}$$

Y entonces, la integral buscada es:

$$\int_\gamma (1+y)\,e^{x-y}\,dx + (x - ye^{x-y})\,dy = \frac{\pi}{4} - (e-1) - (1 - 2e^{-1}) = \frac{\pi}{4} - e + 2e^{-1}$$

6. ANÁLISIS VECTORIAL

6.1. INTRODUCCIÓN

En esta parte se van a desarrollar los conceptos relacionados con el análisis vectorial, llamados operadores, los cuales tienen una aplicación en el campo de la física importante.

Con el **gradiente** se obtiene la pendiente del plano tangente a una superficie de nivel. El significado geométrico es importante y muestra la dirección en la cual la función crece más rápido y la dirección que es ortogonal a las superficies de nivel de dicha función.

La **derivada direccional** calcula la tasa de cambio de una función en la dirección del vector.

El **rotacional** se relaciona en el significado físico total del rotacional de un cuerpo rígido y depende del teorema de Stokes.

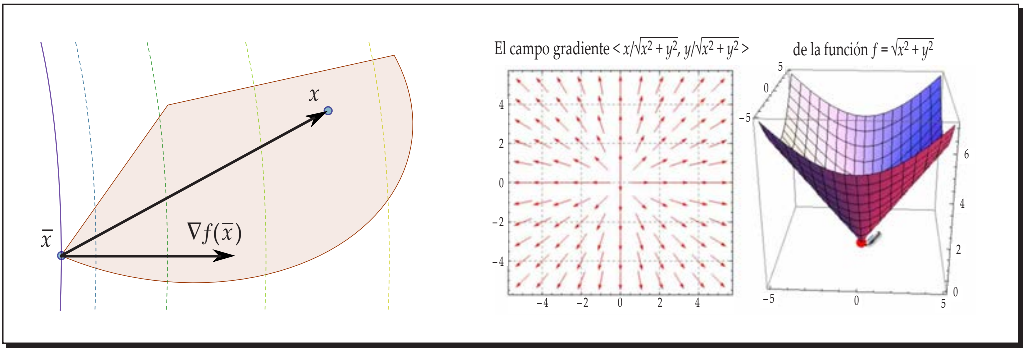
La **divergencia** se relaciona con el teorema de Gauss y relaciona el significado físico del flujo a través de una superficie. Por ejemplo, si F es un campo de velocidad de un gas, entonces la divergencia de F representa la tasa de expansión por unidad de volumen. En conclusión, representa el flujo de un campo vectorial.

La **integral de trayectoria** permite, por ejemplo, calcular mediante una integral si una función representa la temperatura; dicha integral determina el promedio de la temperatura a lo largo de un alambre.

La **integral de línea** permite, por ejemplo, calcular en física el trabajo de una fuerza de una partícula sobre una trayectoria.

6.2. GRADIENTE

Antes de comenzar con la definición estricta y matemática de gradiente, vamos a ver unas imágenes que lo representan:



6.2.1. Definición

Dada la función real de variable real $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define el gradiente de f como:

$$\text{grad}(f) \text{ o } \nabla(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

EJEMPLO 21

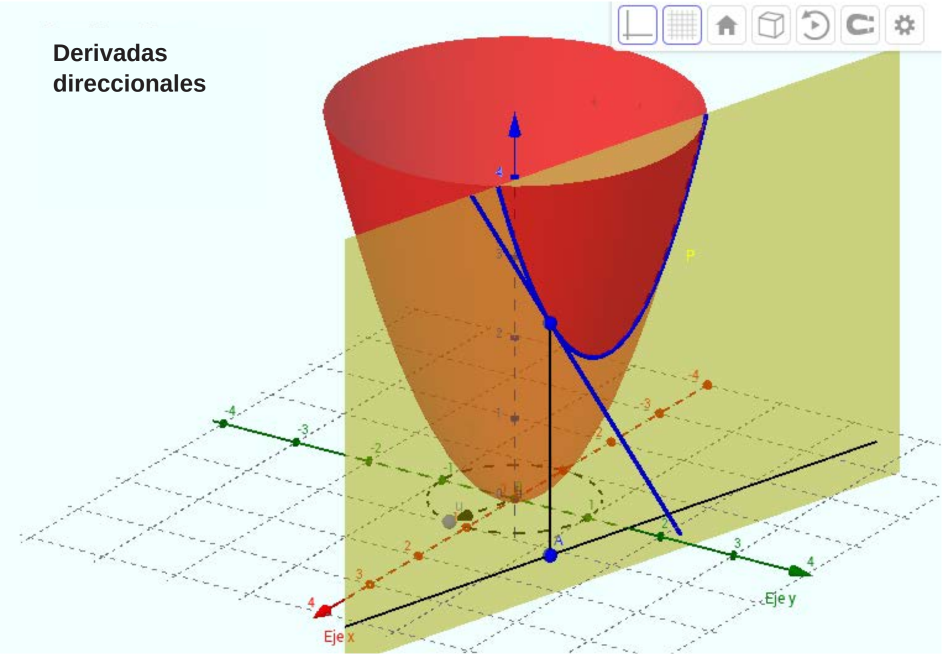
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ye^{-x^2}$.

Entonces:

$$\text{grad}(f) \text{ o } \nabla(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = [-2xye^{-x^2}, e^{-x^2}, 0]$$

6.3. DERIVADA DIRECCIONAL

Igual que hicimos con el gradiente, vamos a ver una imagen que representa la derivada direccional:



6.3.1. Definición

Dada la función real de variable real $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se define la derivada direccional de f en x en la dirección de v como:

$$Df(x)\, v = \operatorname{grad} f\,(x) \cdot v = \nabla f\,(x) \cdot v = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] v_1 + \left[\frac{\partial f(x)}{\partial y} \right] v_2 + \left[\frac{\partial f(x)}{\partial z} \right] v_3$$

EJEMPLO 22

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ye^{-x^2}$ en el vector $v \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ y el punto P (1, 0, 0).

Entonces:

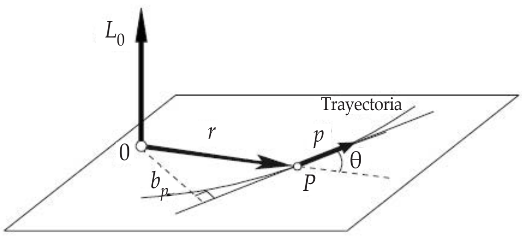
$$\operatorname{grad}(f) \cdot v = [-2xye^{-x^2}, e^{-x^2}, 0] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

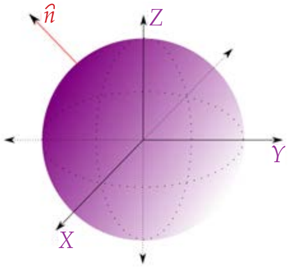
que en el punto P (1, 0, 0) es:

$$(0, e^{-1}, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{e^1 \cdot \sqrt{3}}$$

6.4. DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

Vamos a ver dos imágenes que representan el rotacional y la divergencia:





6.4.1. Definición de rotacional

El **operador rotacional** se asocia a un campo vectorial o a una función vectorial. Por ejemplo:

$$F = F_1\, i + F_2\, j + F_3\, k = (F_1, F_2, F_3)$$

El rotacional es el producto vectorial del operador «nabla» con el campo o función vectorial:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z} \right) i + \left(\frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x} \right) j + \left(\frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y} \right) k = \text{rot}\, F$$

EJEMPLO 23

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to R^3$, $F(x, y, z) = (x^2 + y)\, i + (xz)\, j + (3x^2 + yz)\, k$. Entonces:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ (x^2 + y) & (xz) & (3x^2 + yz) \end{vmatrix} = zi + zk - k - xi - 6xj = (z - x)\, i - 6xj + (z - 1)\, k$$

6.4.2. Definición de divergencia

La operación básica de la divergencia se define también en un campo vectorial o a una función vectorial. Por ejemplo:

$$F = F_1\, i + F_2\, j + F_3\, k = (F_1, F_2, F_3)$$

La divergencia de F es el producto escalar del operador «nabla» con el campo o función vectorial:

$$\text{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\delta F_1}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta z}$$

EJEMPLO 24

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to R^3$, $F(x, y, z) = x^2\, yi + zj + xyzk$. Entonces:

$$\text{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\delta F_1}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta z} = \frac{\delta(x^2\, y)}{\delta x} + \frac{\delta(z)}{\delta y} + \frac{\delta(xyz)}{\delta z} = 2xy + 0 + xy = 3xy$$

6.4.3. Teorema 1

El rotacional de cualquier gradiente es el vector cero, es decir:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

6.4.4. Teorema 2

Para cualquier campo vectorial F, la divergencia de cualquier rotacional es cero, es decir:

$$\text{divrot } F = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

6.4.5. Diferencia entre divergencia y gradiente

El resultado de realizar el gradiente a una función es un **vector** porque la definición misma del gradiente se define en una función vectorial que va a una función escalar, es decir:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

El resultado de realizar la divergencia a una función es un **valor escalar** porque la definición misma de la divergencia se define en una función vectorial que va a una función vectorial, es decir:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

6.5. TABLA DE IDENTIDADES COMUNES EN EL ANÁLISIS VECTORIAL

$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$	$\text{Rot}\,(F \times G) = F \text{ div } G - G \text{ div } F + (G \cdot \nabla)\, F + (F \cdot \nabla)\, G$
$\nabla(cf) = c\,\nabla f$, para c cte	$\text{Rot rot } F = \text{grad div } F - \nabla^2 F$
$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$	$\text{Rot } \nabla f = 0$
$\nabla(f/g) = (g\,\nabla f - f\,\nabla g)/g^2;\ g(x) \neq 0$	$\nabla(F \cdot F) = 2(F \cdot \nabla)\, F + 2F \times \text{rot } F$
$\text{Div }(F+G) = \text{Div } F + \text{Div } G$	$\nabla^2 (fg) = f\,\nabla^2 g + g\,\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
$\text{Rot }(F+G) = \text{Rot } F + \text{Rot } G$	$\text{Div }(\nabla f \times \nabla g) = 0$
$\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)\, G + (G \cdot \nabla)\, F + F \times \text{rot } G + G \times \text{rot } F$	$\nabla \cdot (f\,\nabla g - g\,\nabla f) = f\,\nabla^2 g - g\,\nabla^2 f$
$\text{Div }(fF) = f \text{ div } F + F \cdot \nabla f$	$H \cdot (F \times G) = G \cdot (H \times F) = F \cdot (G \times H)$
$\text{Div }(F \times G) = G \text{ rot } F - F \text{ rot } G$	$H \cdot ((F \times \nabla) \times G) = ((H \cdot \nabla)\, G)\, F - (H \cdot F)\,(\nabla \cdot G)$
$\text{Div rot } F = 0$	$F \times (G \times H) = (F \cdot H)\, G - H\,(F \cdot G)$
$\text{Rot }(fF) = f \text{ rot } F + \nabla f \times F$	

6.6. INTEGRAL DE TRAYECTORIA

6.6.1. Definición

La **integral de trayectoria** es una integral de una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z)$, a lo largo de una trayectoria σ, se define $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y:

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\sigma f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\sigma(t))\|\, \sigma'(t)\|\, dt$$

EJEMPLO 25

Evaluar la siguiente integral de trayectoria:

$$\int_\sigma f(z, y, z)\, ds$$

$$f(x, y, z) = e^z \qquad \sigma : t \rightarrow (1, 2, t^2) \qquad t \in [0, 1]$$

Primero calculamos la derivada de la curva en t, es decir, $\sigma'(t)$, $\sigma'(t) = (0, 0, 2t)$.

A continuación, realizamos la norma de la derivada de la curva en t:

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (2t)^2} = \sqrt{(2t)^2} = 2t$$

Sustituimos la curva en la función:

$$f(\sigma(t)) = e^{t^2}$$

Ahora aplicamos la definición:

$$\int_a^b f(\sigma(t))\| \sigma'(t)\|\, dt = \int_0^1 e^{t^2} \cdot 2t\, dt = e^1 - 1$$

6.7. INTEGRAL DE LÍNEA

6.7.1. Definición

La **integral de línea** es una integral de una función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z)$, a lo largo de una trayectoria σ, se define $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y:

$$\int_\sigma F\, ds = \int_\sigma F(x, y, z)\, ds = \int_a^b F(\sigma(t))\, \sigma'(t)\, dt$$

EJEMPLO 26

Realizar la integral de línea de F a lo largo de σ con los siguientes datos:

$$\int_{\sigma} F(z, y, z)\, ds$$

$$F(x, y, z) = e^x\, i + e^y\, j + e^z\, k \qquad \sigma : t \rightarrow (1, 2, t^2) \qquad t \in [0, 1]$$

Primero calculamos la derivada de la curva en t, es decir, $\sigma'(t)$, $\sigma'(t) = (0, 0, 2t)$.

Sustituimos la curva en la función $F(\sigma(t)) = (e^1, e^2, e^{t^2})$.

Ahora aplicamos la definición:

$$\int_a^b F(\sigma(t))\, \sigma'(t)\, dt = \int_0^1 (e^1, e^2, e^{t^2}) \cdot (0, 0, 2t)\, dt = e^1 - 1$$

6.8. TEOREMAS DEL ANÁLISIS VECTORIAL

6.8.1. Teorema de Green

El **teorema de Green** relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada en el plano $\mathbb{R}^2$, con una integral doble sobre la región cerrada.

Sean:

$$P : C \rightarrow \mathbb{R} \qquad Q : C \rightarrow \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_C \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) dxdy$$

EJEMPLO 27

Calcular $\int_\sigma ydx - xdy$ en el cuadrado σ: [– 1, 1] × [– 1, 1].

$$\int_\sigma Pdx + Qdy = \int\int_\sigma \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) dxdy$$

Llamando $P(x, y) = y$; $Q(x, y) = -x$; resulta:

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (-2)\, dxdy = -8$$

6.8.2. Teorema de Stokes

El **teorema de Stokes** relaciona una integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple en el plano $\mathbb{R}^3$, con una integral sobre una superficie S.

Sean S la superficie cerrada y F un campo vectorial; entonces, se tiene:

$$\int_S \text{rot}\, F \cdot dS = \int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_{\delta S} F \cdot ds$$

EJEMPLO 28

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to R^3$, $F(x, y, z) = (x^2 + y)\, i + (z)\, j + (3x^2 + yz)\, k$ a lo largo del círculo limitado por $D \equiv x^2 + y^2 = 1;\ z = 0$.

Entonces, aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_S \text{rot}\, F \cdot dS = \int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_{\delta S} F \cdot ds$$

.../...

.../...

El vector normal a la superficie dada es $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y el rotacional de F es:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ (x^2 + y) & (xz) & (3x^2 + yz) \end{vmatrix} = zi + zk - k - xi - 6xj = (z - x)\, i - 6xj + k$$

Entonces:

$$\int_D (z - x, -6x, 1)\,(0, 0, 1)\, dxdy = \int_D 1dxdy$$

Realizando cambio a polares de $x = r \cos \theta$; $y = r \operatorname{sen} \theta$; $z = 0$; $0 \le r \le 1$; $0 \le \theta \le 2\pi$; $|J| = r$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 rdrd\,\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \right) d\,\theta = \pi$$

6.8.3. Teorema de Gauss

El **teorema de Gauss** confirma que el flujo de un campo vectorial hacia fuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie.

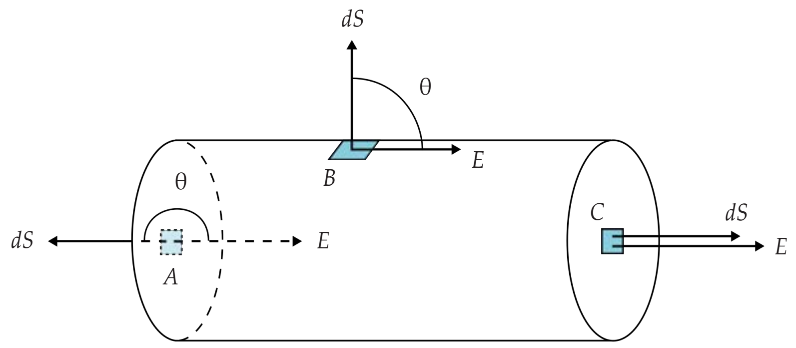
Sean C la superficie cerrada y F un campo vectorial definido en C; entonces, se tiene:

$$\int_C (\nabla \cdot F)\, dV = \int_C F \cdot dS$$

o

$$\int_C (\operatorname{div} F)\, dV = \int_C (F \cdot n)\, dS$$

Vamos a ver una imagen:



EJEMPLO 29

Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = xyi + yzj + zxk$ y el cubo definido de arista uno, en el primer octante y con un vértice en el origen. Entonces:

$$\int_V (\nabla \cdot F)\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x + y + z)\, dxdydz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

sabiendo que el divergente de F es:

$$\text{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\delta F_1}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta z} = \frac{\delta(xy)}{\delta x} + \frac{\delta(yz)}{\delta y} + \frac{\delta(xz)}{\delta z} = y + z + x$$

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Integrales dobles sobre rectángulos y recintos proyectables.
- Cambio de variable a coordenadas polares.
- Teorema de Fubini.
- Integral de línea de una función escalar.
- Integral de línea de un campo vectorial.
- Independencia del camino.
- Teorema de Green-Riemann.
- Gradiente.
- Derivada direccional.
- Divergencia.
- Rotacional.
- Integral de trayectoria.
- Integral de línea.
- Teorema de Green.
- Teorema de Stokes.
- Teorema de Gauss.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Hallar la integral doble de la función $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ sobre el rectángulo $R = [-1, 2] \times [1, 3]$.

Enunciado 2

Hallar la integral de $f(x, y) = x + y$ sobre el recinto $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$.

Enunciado 3

Hallar la integral de la función $f(x, y) = xy$ sobre $S = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$.

Enunciado 4

Hallar la integral de la función $f(x, y) = x + y$ sobre el recinto acotado limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

Enunciado 5

Hallar el área del recinto acotado del primer cuadrante limitado por las gráficas de las curvas cuya expresión en coordenadas polares es $\rho = 2$ y $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

Enunciado 6

Hallar la masa y el centro de gravedad de la región $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ si la densidad puntual viene dada por $d(x, y) = 3x$.

Enunciado 7

Hallar el área de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ que hay dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Enunciado 8

Hallar la integral de la función $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x + y + z}}$ sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Enunciado 9

Hallar la integral triple de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ sobre el recinto Ω limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

Enunciado 10

Hallar la integral de la función $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Enunciado 11

Hallar la integral curvilínea $I = \int_\gamma (10xz^3 + 1)\, dx - 6y^2\, dy + 15x^2 z^2\, dz$, donde γ es el trozo de la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t/\pi)$ comprendida entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.

Enunciado 12

Hallar la integral curvilínea del campo vectorial $F = (y^3, x^3 + 3xy^2)$ sobre el camino cerrado γ que va del punto (0, 0) al punto (1, 1) sobre la gráfica de $y = x^3$, y vuelve, de (1, 1) a (0, 0), por la gráfica de la recta $y = x$.

Enunciado 13

Siendo γ el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente, comprendido en el primer y segundo cuadrantes, calcular la integral curvilínea:

$$\int_\gamma (x + 1)\, e^{x+y}\, dx + x(1 + e^{x+y})\, dy$$

Enunciado 14

Calcular el siguiente gradiente:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xyz$$

Enunciado 15

Calcular la siguiente derivada direccional:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xyz$$

$$\text{en el vector } v\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ y el punto } P\,(1, 0, 0)$$

Enunciado 16

Calcular el rotacional de la siguiente función:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow R^3,\ F(x, y, z) = (x^2)\ i + (z)\ j + (yz)\ k$$

Enunciado 17

Calcular la divergencia de la siguiente función:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow R^3,\ F(x, y, z) = x^2\ i + zj + yzk$$

Enunciado 18

Evaluar la siguiente integral de trayectoria:

$$\int_{\sigma} f(z, y, z)\ ds$$

$$f(x, y, z) = yz \qquad \sigma : t \rightarrow (t, 3t, 2t) \qquad t \in [0, 1]$$

Enunciado 19

Realizar la integral de línea de F a lo largo de σ con los siguientes datos:

$$\int_{\sigma} F(z, y, z)\ ds$$

$$F(x, y, z) = xzi + xyj + yzk \qquad \sigma : t \rightarrow (t, 3t, 2t) \qquad t \in [0, 1]$$

Enunciado 20

Calcular $\int_{\sigma} (y^2 + x^3)\, dx + x^4\, dy$ en el cuadrado $\sigma : [0, 1] \times [0, 1]$.

Enunciado 21

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to R^3$, $F(x, y, z) = (x^2)\, i + (z)\, j + (yz)\, k$ a lo largo del círculo limitado por $D \equiv x^2 + y^2 = 2;\ z = 0$.

Solución 1

$$26$$

Solución 2

$$\frac{2}{3}$$

Solución 3

$$\frac{15}{8}$$

Solución 4

$$4\pi$$

Solución 5

$$\frac{\pi + 8}{2}$$

Solución 6

Masa: $\frac{3}{5}$ Centro de gravedad: $\left(\frac{25}{42}, \frac{25}{48}\right)$

Solución 7

$$A = 16$$

Solución 8

$$\frac{8}{15}(31 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2})$$

Solución 9

$$\frac{16\pi}{3}$$

Solución 10

$$\frac{\pi^2}{4}$$

Solución 11

$$I = 40$$

Solución 12

$$\frac{1}{4}$$

Solución 13

$$\frac{\pi}{2} - e - 3e^{-1}$$

Solución 14

$$\text{grad}(f) \text{ o } \nabla(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = [yz, xz, xy]$$

Solución 15

$$\text{grad}(f) \cdot v = [yz, xz, xy] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ que en el punto } P\ (1, 0, 0) \text{ es:}$$

$$(0, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0$$

Solución 16

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ (x^2) & (z) & (yz) \end{vmatrix} = zi - i = (z-1)\, i$$

Solución 17

$$\text{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\delta F_1}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta z} = \frac{\delta(x^2)}{\delta x} + \frac{\delta(z)}{\delta y} + \frac{\delta(yz)}{\delta z} = 2x + 0 + y = 2x + y$$

Solución 18

Primero calculamos la derivada de la curva en t, es decir, $\sigma'(t)$, $\sigma'(t) = (1, 3, 2)$.

A continuación, realizamos la norma de la derivada de la curva en t:

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$$

Sustituimos la curva en la función $f(\sigma(t)) = 6t^2$.

Ahora aplicamos la definición,

$$\int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^1 6t^2 \cdot \sqrt{14}\, dt = 2\sqrt{14}$$

Solución 19

Primero calculamos la derivada de la curva en t, es decir, $\sigma'(t)$, $\sigma'(t) = (1, 3, 2)$.

Sustituimos la curva en la función, $F(\sigma(t)) = (2t^2, 3t^2, 6t^2)$.

Ahora aplicamos la definición,

$$\int_a^b F(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt = \int_0^1 (2t^2, 3t^2, 6t^2)\cdot(1, 3, 2)\,dt = \frac{23}{3}$$

Solución 20

$$\int_\sigma Pdx + Qdy = \iint_\sigma \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\right) dxdy$$

Llamando $P(x, y) = y^2 + x^3$; $Q(x, y) = x^4$ resulta

$$I = \int_0^1\int_0^1 (4x^3 - 2y)\,dxdy = 0$$

Solución 21

Entonces, aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_S (\nabla \times F)\cdot dS = \int_{\delta S} F \cdot ds$$

El vector normal a la superficie dada es $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y el rotacional de F es:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ (x^2) & (z) & (yz) \end{vmatrix} = zi - i = (z-1)\,i$$

Entonces:

$$\int_D (z-1, 0, 0)\,(0, 0, 1)\,dxdy = \int_D 0\,dxdy = 0$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, A. et ál. (1996). *Cálculo II*. Madrid: Clagsa.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo II*. Madrid: McGraw-Hill.

Mata, A. y Reyes, M. *Apuntes de cálculo*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/analisis.

Tromba, A. J. y Marsden, J. E. (2004). *Cálculo vectorial*. Madrid: Pearson, Addison-Wesley.