UNIDAD
DIDÁCTICA

6

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Conceptos básicos
   - 1.1. Nociones básicas de la topología de $\mathbb{R}^n$
   - 1.2. Funciones reales de varias variables reales
2. Límites y continuidad
   - 2.1. Límites de funciones de dos variables
     - 2.1.1. Límite de una función de dos variables en un punto
     - 2.1.2. Propiedades
     - 2.1.3. Límites iterados y direccionales
     - 2.1.4. Cálculo de límites en coordenadas polares
   - 2.2. Límites de funciones de más de dos variables
   - 2.3. Continuidad
     - 2.3.1. Continuidad de una función en un punto
     - 2.3.2. Tipos de discontinuidad
     - 2.3.3. Propiedades
     - 2.3.4. Teorema de los extremos de Weierstrass
3. Derivación
   - 3.1. Derivadas parciales
     - 3.1.1. Derivadas parciales de una función de dos variables
     - 3.1.2. Interpretación geométrica y física

3.1.3. Derivadas parciales y continuidad
3.1.4. Derivadas parciales de funciones de más de dos variables
3.1.5. Derivadas parciales de orden superior
3.1.6. Igualdad de las derivadas parciales cruzadas

3.2. Diferenciación

3.2.1. Incrementos y diferenciales
3.2.2. Diferencial de una función en un punto
3.2.3. Condición necesaria y condición suficiente de diferenciabilidad
3.2.4. La diferencial como aproximación
3.2.5. Observación

3.3. La regla de la cadena. Derivación implícita

3.3.1. Regla de la cadena
3.3.2. Derivación implícita

3.4. Derivada direccional y gradiente

3.4.1. Derivada direccional de una función de dos variables
3.4.2. Gradiente de una función de dos variables
3.4.3. Propiedades
3.4.4. Derivada direccional y gradiente de una función de tres variables

3.5. Aplicaciones geométricas

3.5.1. Recta normal y plano tangente a una superficie
3.5.2. Recta tangente a una curva dada como intersección de dos superficies

4. Extremos

4.1. Extremos relativos y absolutos

4.1.1. Extremos relativos
4.1.2. Puntos críticos
4.1.3. Condición necesaria para extremos relativos
4.1.4. Criterio para la determinación de extremos
4.1.5. Extremos absolutos

4.2. Problemas de optimización

4.3. Multiplicadores de Lagrange

4.3.1. Extremos condicionados
4.3.2. El método de los multiplicadores de Lagrange

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Entender el concepto de límite de una función de varias variables en un punto.
- Hallar límites iterados y direccionales.
- Conocer y aplicar la noción de continuidad.
- Calcular derivadas parciales, direccionales y el gradiente.
- Usar las derivadas parciales en aplicaciones geométricas y físicas.
- Utilizar la diferencial para aproximar funciones y calcular errores.
- Conocer el criterio para la existencia de extremos, y su cálculo.
- Aplicar el cálculo de extremos en problemas de optimización.
- Conocer y aplicar los multiplicadores de Lagrange en el cálculo de extremos condicionados.

1. CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. NOCIONES BÁSICAS DE LA TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$

En el espacio $\mathbb{R}^n$ se considera la **distancia euclídea**:

$$\begin{cases} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \Rightarrow \quad d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Se llama **entorno** de centro C y radio $r > 0$ al conjunto de puntos cuya distancia del centro es menor que r. En el plano y en el espacio tridimensional los entornos son, respectivamente, los círculos y las esferas centradas en C de radio r.

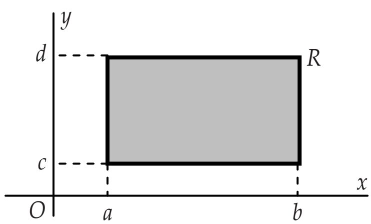
Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que un punto es **punto interior** de A si existe un entorno centrado en el punto y contenido en A, y se dice que un punto es **punto frontera** de A si en todo entorno suyo hay puntos de A y puntos que no son de A.

Un conjunto se dice **abierto** si todos sus puntos son interiores, y se dice **cerrado** cuando contiene todos sus puntos frontera.

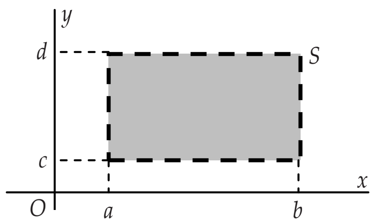
Un conjunto se dice **acotado** si está contenido en un entorno del origen de radio suficientemente grande.

Un conjunto se dice **compacto** si es cerrado y acotado.

En el plano $\mathbb{R}^2$ se llama **rectángulo** al producto cartesiano de dos intervalos. Cuando los dos intervalos son abiertos, el



$R = [a, b] \times [c, d]$



$S = (a, b) \times (c, d)$

rectángulo es abierto, y cuando los dos intervalos son cerrados, el rectángulo es cerrado. El rectángulo es acotado si los dos rectángulos son acotados y, por tanto, un rectángulo compacto es el producto de dos intervalos cerrados y acotados.

En general, en $\mathbb{R}^n$ se llama **rectángulo** al producto cartesiano de n intervalos.

1.2. FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

Una **función real de varias variables reales** es cualquier función $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

El conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se llama **dominio** y el conjunto de todos los valores que toma la función se llama **imagen** o **recorrido**.

Cuando $n = 2$, la función se suele representar por $z = f(x, y)$, y cuando $n = 3$, por $w = f(x, y, z)$.

Se llaman **funciones elementales** a aquellas que se pueden expresar mediante operaciones con funciones elementales de una variable aplicadas a alguna de las variables o a operaciones aritméticas entre ellas.

EJEMPLO 1

Hallar el dominio de:

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 2x}$

b) $g(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$

Solución

a) El dominio son todos aquellos puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde no se anula el denominador. Puesto que:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

El dominio es $D(f) = \{(x, y): (x - 1)^2 + y^2 \neq 1\}$, es decir, todo el plano menos la circunferencia centrada en (1, 0) de radio 1.

.../...

.../...

b) El dominio son todos aquellos puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donde el radicando es mayor o igual que 0:

$$9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

El dominio es $D(g) = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$, es decir, todo el espacio menos la esfera centrada en el origen de radio 3.

2. LÍMITES Y CONTINUIDAD

2.1. LÍMITES DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

2.1.1. Límite de una función de dos variables en un punto

Sea $z = f(x, y)$ definida en un entorno del punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (aunque no, necesariamente, en el punto). Se dice que f tiene **límite** l en el punto (a, b) si $f(x, y)$ tiende a l cuando (x, y) tiende a (a, b) **de todas las formas posibles**, y se indica:

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = l$$

La existencia de límite y su valor son independientes de que la función esté definida en el punto y de su valor en dicho punto.

2.1.2. Propiedades

- Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $P(x, y)$ es una función polinómica (suma de productos de números reales por potencias de x y de y) y $f(x)$ es cualquier función elemental de una variable definida en $P(a, b)$:

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} P(x, y) = P(a, b)$$

y

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(P(x, y)) = f(P(a, b))$$

- El límite de operaciones algebraicas con funciones es la operación entre sus límites:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = F \\ \lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} g(x, y) = G \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = F \pm G \\ \lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y)\, g(x, y) = FG \\ \lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y)^{g(x,\,y)} = F^G \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} kf(x, y) = kF \\ \lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{F}{G} \end{array}$$

siempre que no se presente alguna de las siguientes indeterminaciones:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

EJEMPLO 2

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,1)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(3,\,-2)} e^{-x^2-y^3}$

Solución

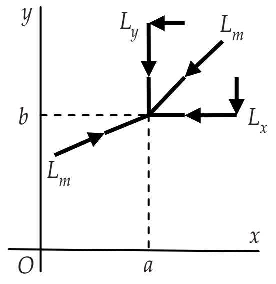
Se sustituye el punto en la función y, si no se presenta indeterminación, ese es su valor:

a) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,1)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{2}{5}$

b) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(3,\,-2)} e^{-x^2-y^3} = e^{-9-(-8)} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

2.1.3. Límites iterados y direccionales

Cuando en el cálculo de un límite, al sustituir el punto en la función, se presenta alguna indeterminación, y ante la necesidad de acercarse al punto **de todas las formas posibles**, es interesante considerar los siguientes límites:



- **Límites iterados.** Son los límites en las direcciones de los ejes de coordenadas:

$$L_x = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right) \qquad L_y = \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right)$$

- **Límites direccionales.** Son los límites en las direcciones de las rectas que pasan por el punto:

$$L_m = \lim_{x \to a} f(x, b + m(x - a)) \qquad \text{para cada } m \in \mathbb{R}$$

En particular, para $m = 0$ se obtiene el límite iterado L_x, es decir, $L_0 = L_x$.

Los límites iterados no coinciden necesariamente entre sí, ni tampoco los direccionales.

Teniendo en cuenta que los límites iterados y direccionales son límites en los que la forma de acercarse al punto es mediante rectas, y que hay otras muchas formas de tender al punto, se tiene que:

- Si existe el límite de la función en el punto, los límites iterados y direccionales existen y el valor de todos ellos coincide con el límite.
- La existencia y coincidencia de todos los límites iterados y direccionales no implica la existencia de límite.

EJEMPLO 3

Calcular los límites iterados y direccionales de la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en el origen. ¿Existe el límite de la función en el punto?

.../...

.../...

Solución

Al sustituir se presenta la indeterminación 0/0. Los límites iterados y direccionales son:

$$L_x = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad L_y = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

$$L_m = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

Puesto que estos límites no coinciden, el límite de la función en el punto no existe.

EJEMPLO 4

Calcular los límites iterados y direccionales de la función $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x^3-y^2}$ en el punto $(1, -1)$. ¿Existe el límite de la función en el punto?

Solución

Los límites iterados son:

$$L_x = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to -1}\frac{x+y}{x^3-y^2}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$L_y = \lim_{y\to -1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x+y}{x^3-y^2}\right) = \lim_{y\to -1}\frac{1+y}{1-y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{y\to -1}\frac{1}{-2y} = \frac{1}{2}$$

Para hallar los límites direccionales se consideran las rectas que pasan por el punto $(1, -1)$, cuyas ecuaciones son $y + 1 = m(x-1)$, es decir, $y = m(x-1) - 1$, y se obtiene:

$$L_m = \lim_{x\to 1} f(x, m(x-1)-1) = \lim_{x\to 1}\frac{x+m(x-1)-1}{x^3-[m(x-1)-1]^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\,(m+1)}{x^3-m^2\,(x-1)^2+2m(x-1)-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{m+1}{3x^2-2m^2\,(x-1)+2m} = \frac{m+1}{2m+3}$$

Puesto que estos límites no coinciden, el límite de la función en el punto no existe.

EJEMPLO 5

Hallar, si existe, el límite de la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ en el origen.

Solución

Al sustituir, se presenta la indeterminación 0/0. Los límites iterados y direccionales son:

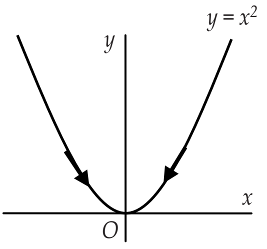
$$L_x = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = 0 \qquad L_y = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

$$L_m = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\, mx}{x^4 + m^2\, x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

Puesto que los límites iterados y direccionales coinciden, la existencia de límite es posible y su valor sería cero. Sin embargo, habría que estar seguro de que el límite siempre es cero independientemente de la forma en que se tienda al punto.

Sin embargo, si se tiende a cero en la dirección de la parábola $y = x^2$, el límite no es cero:

$$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ y = x^2}}\frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\, x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$



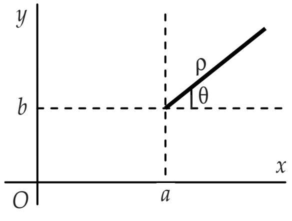
Por tanto, el límite de la función en el origen no existe.

2.1.4. Cálculo de límites en coordenadas polares

Para hallar el límite de una función $f(x, y)$ en el punto (a, b) se puede recurrir a coordenadas polares centradas en el punto:

$$\lim_{(x,\, y)\to(a,\, b)} f(x, y) = \left(\begin{array}{l} x = a + \rho\cos\theta \\ y = b + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ 0\le\theta\le 2\pi}} F(\rho, \theta)$$



Para que este último límite exista debe ser independiente de θ. Un caso particular en que el límite existe y es cero ocurre cuando $F(\rho, \theta) = g(\rho)h(\theta)$ con $h(\theta)$ acotado y $g(\rho) \to 0$.

EJEMPLO 6

Calcular, si existe, el límite en el origen de la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

Solución

Se calculan los límites iterados y direccionales:

$$L_x = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2)^{3/2}} = 0$$

$$L_y = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{(y^2)^{3/2}} = 0$$

$$L_m = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 m^2 x^2}{(x^2 + m^2 x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x^4}{|x|^3 (1 + m^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 |x|}{(1 + m^2)^{3/2}} = 0$$

Puesto que todos coinciden, el límite puede existir y su valor sería 0. En coordenadas polares:

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \left(\begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{array}\right) = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ 0\le\theta\le 2\pi}} \frac{\rho^4 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta}{(\rho^2)^{3/2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ 0\le\theta\le 2\pi}} \rho \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta = 0$$

ya que es el producto de $g(\rho) = \rho$, que tiende a cero, por $h(\theta) = \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta$ que está acotado. Por tanto, el límite de la función en el origen es 0.

2.2. LÍMITES DE FUNCIONES DE MÁS DE DOS VARIABLES

La definición de límite de una función de n variables, $n > 2$, en un punto es la misma que la de dos variables: se dice que f tiene **límite** l en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiende a l cuando $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiende a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **de todas las formas posibles**, y se indica:

$$\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to(a_1, a_2, \ldots, a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$$

La cantidad de formas posibles de acercarse a un punto aumenta considerablemente al aumentar la dimensión del espacio, por lo que el caso $n > 2$ no se considerará aquí. En cualquier caso, el límite de las funciones elementales en los puntos donde están definidas coincide con el valor de la función siempre que no se presenten indeterminaciones.

2.3. CONTINUIDAD

2.3.1. Continuidad de una función en un punto

Se dice que la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es **continua** en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si en dicho punto existen y coinciden el límite y el valor de la función, es decir, si

$$\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Una función es continua en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ cuando es continua en todos los puntos de D.

2.3.2. Tipos de discontinuidad

Si una función no es continua en un punto, se dice que presenta una **discontinuidad**, que puede ser:

- **Discontinuidad evitable.** Si existe y es finito el límite de la función en el punto.
- **Discontinuidad esencial.** Si no existe o es infinito el límite de la función en el punto.

Como en el caso de una variable, cuando una función presenta una discontinuidad evitable en un punto se puede redefinir en dicho punto (con el valor del límite) para que sea continua.

2.3.3. Propiedades

- Todas las funciones elementales son continuas en su dominio de definición.
- La suma, diferencia y producto de funciones continuas es una función continua.

- El cociente de funciones continuas es continua en aquellos puntos donde no se anula el denominador.
- Si f es continua en $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y g es continua en $f(a)$, la función $g \circ f$ es continua en $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

2.3.4. Teorema de los extremos de Weierstrass

Toda función continua $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definida sobre un conjunto cerrado y acotado $R \subset \mathbb{R}^n$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos, es decir, existen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in R$ tales que $m = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(b_1, b_2, \dots, b_n) = M$ para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$.

3. DERIVACIÓN

3.1. DERIVADAS PARCIALES

3.1.1. Derivadas parciales de una función de dos variables

Se llama **primeras derivadas parciales** de una función $f(x, y)$ respecto x e y a las funciones:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

es decir, a las derivadas usuales respecto de cada una de las variables considerando a la otra constante. Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales también se suelen representar por:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Jean d'Alembert. Nació en París en 1717, siendo el matemático francés más importante de mediados del siglo XVIII. Después de estudiar derecho y medicina se dedicó por completo a las matemáticas. A los 23 años era miembro de la Academia de Ciencias de París. Junto a Euler, en sus trabajos de mecánica, estableció gran parte de la teoría de las derivadas parciales. Su trabajo matemático se desarrolló sobre problemas aplicados: movimiento de fluidos, dinámica de vientos, mecánica celeste… De 1751 a 1772 colaboró con Denis Diderot para escribir los 28 volúmenes de la célebre Enciclopedia o Diccionario de las Ciencias, las Artes y los Oficios. Entabló amistad con Voltaire y los «filósofos» con los que preparó el camino a la Revolución Francesa. Murió en París en 1783.

EJEMPLO 7

Hallar las primeras derivadas parciales de las funciones:

$$f(x, y) = x^3 - xy + 4y^2 \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Solución

Se derivan respecto de cada variable suponiendo la otra variable constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1(x^2 + y^2) - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 8y \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{0(x^2 + y^2) - x2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

3.1.2. Interpretación geométrica y física

Las derivadas parciales de $z = f(x, y)$ son derivadas en las direcciones de los ejes y, por tanto, representan:

- **Geométricamente:** las pendientes de la superficie $z = f(x, y)$ en las direcciones de los ejes x e y.
- **Físicamente:** las velocidades de cambio de z respecto de cada una de las variables x e y.

EJEMPLO 8

La temperatura en un punto (x, y) de una placa de acero es $T(x, y) = 500 - x^2 - 2y^2$. Hallar la velocidad de cambio de la temperatura en el punto (1, 2) en la dirección de cada uno los ejes de coordenadas.

.../...

.../...

Solución

Las primeras derivadas parciales en el punto son:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -2x \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(1, 2) = -2 \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -4y \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(1, 2) = -8$$

Por tanto, en el punto (1, 2) la velocidad con que cambia la temperatura en la dirección positiva del eje x es – 2 °C/u y en la dirección positiva del eje y es – 8 °C/u, donde u son las unidades de longitud (la escala de los ejes).

3.1.3. Derivadas parciales y continuidad

La continuidad y la existencia de derivadas parciales no están relacionadas: una función continua puede no tener derivadas parciales y una función con derivadas parciales puede ser no continua.

3.1.4. Derivadas parciales de funciones de más de dos variables

Las primeras derivadas parciales de funciones de más de dos variables se definen de forma análoga: se deriva con respecto a cada variable considerando constantes las restantes. Una función con n variables tiene n derivadas parciales.

3.1.5. Derivadas parciales de orden superior

Puesto que las derivadas parciales primeras son funciones, se pueden volver a derivar parcialmente para obtener las **derivadas parciales de segundo orden**, y así sucesivamente. En el caso de dos variables, hay cuatro derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Las derivadas parciales segundas f_{xy} y f_{yx} se llaman **derivadas parciales cruzadas**.

EJEMPLO 9

Hallar las derivadas parciales segundas de las funciones del ejemplo 5.

Solución

Se obtienen mediante derivación de las derivadas parciales primeras:

$$f(x,y) = x^3 - xy + 4y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x + 8y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -1 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \dfrac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{cases}$$

3.1.6. Igualdad de las derivadas parciales cruzadas

Con frecuencia ocurre, como en el ejemplo, que las derivadas parciales cruzadas son iguales. Esto es así porque se tiene el siguiente resultado: «Si f y las derivadas parciales cruzadas, f_{xy} y f_{yx}, son continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^2$, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en D».

3.2. DIFERENCIACIÓN

3.2.1. Incrementos y diferenciales

Se llama **incremento de la función** $z = f(x, y)$ en el punto (a, b) al incremento que sufre z cuando x e y se incrementan, respectivamente, en Δx e Δy, y su valor es:

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

3.2.2. Diferencial de una función en un punto

Geométricamente, una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (a, b) si la superficie que representa tiene plano tangente en ese punto, lo que permite (como sucedía con la recta tangente en funciones de una variable) una aproximación lineal a la superficie.

Analíticamente, una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (a, b) si su incremento en el punto se puede expresar como:

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = f_x(a, b)\, \Delta x + f_y(a, b)\, \Delta y + \varepsilon_1\, \Delta x + \varepsilon_2\, \Delta y$$

$$\text{con } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \xrightarrow[\Delta x,\, \Delta y \to 0]{} 0$$

lo que equivale, sustituyendo $a + \Delta x$ por x y $b + \Delta y$ por y, a:

$$f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b) + \varepsilon_1(x - a) + \varepsilon_2(y - b)$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ cuando $(x, y) \to (a, b)$.

3.2.3. Condición necesaria y condición suficiente de diferenciabilidad

Si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua y admite derivadas parciales primeras en el punto.

El inverso no es cierto en general, pero una condición suficiente de diferenciabilidad es la siguiente:

Si una función y sus primeras derivadas parciales son continuas en un abierto, entonces la función es diferenciable en el abierto.

3.2.4. La diferencial como aproximación

Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en (a, b), se obtiene, despreciando los términos que tienden a cero, la siguiente fórmula de aproximación:

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b) \quad \text{cuando} \quad (x, y) \simeq (a, b)$$

que, usando incrementos, se transforma en la siguiente fórmula para estimación de errores:

$$\Delta z \simeq f_x(a, b)\, \Delta x + f_y(a, b)\, \Delta y \quad \text{cuando} \quad \Delta x, \Delta y \simeq 0$$

3.2.5. Observación

Cuando se trata de funciones de más de dos variables, las condiciones de diferenciabilidad y las fórmulas de aproximación y estimación de errores son las mismas añadiendo los sumandos correspondientes (uno por cada variable).

EJEMPLO 10

Dos lados adyacentes de un triángulo miden 3 ± 0,01 y 4 ± 0,01 m, y el ángulo comprendido entre ellos mide $\pi/4 \pm 0{,}02$ radianes.

¿Cuál es el máximo error que se puede cometer al hallar su área?

Solución

El área de un triángulo en función de dos lados, a y b, y el ángulo α comprendido entre ellos es $S(a, b, \alpha) = 1/2\ ab \operatorname{sen} \alpha$.

La correspondiente fórmula para la estimación de errores es:

$$\Delta S \simeq \frac{\partial S}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial S}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial S}{\partial \alpha} \Delta \alpha =$$

$$= \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{2} \Delta a + \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{2} \Delta b + \frac{ab \cos \alpha}{2} \Delta \alpha$$

Tomando valores absolutos y sustituyendo $a = 3$, $b = 4$, $\alpha = \pi/4$, $|\Delta a| = |\Delta b| = 0{,}01$ e $|\Delta \alpha| = 0{,}02$ se obtiene el máximo error que se puede cometer al hallar el área del triángulo:

$$|\Delta S| \leq \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{2} |\Delta a| + \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{2} |\Delta b| + \frac{ab \cos \alpha}{2} |\Delta \alpha| =$$

$$= \frac{4 \cdot 0{,}01}{2\sqrt{2}} + \frac{3 \cdot 0{,}01}{2\sqrt{2}} + \frac{12 \cdot 0{,}02}{2\sqrt{2}} = \frac{0{,}31}{2\sqrt{2}} \simeq 0{,}11$$

EJEMPLO 11

Si el radio y la altura de un cilindro circular recto se miden con errores menores o iguales que el 4 % y 2 %, respectivamente, ¿cuál es el error relativo que se puede cometer al hallar el volumen?

Solución

El volumen de un cilindro de radio r y altura h es $V(r, h) = \pi r^2 h$, de donde:

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = 2\pi rh\,\Delta r + \pi r^2\,\Delta h \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} \simeq \frac{2\pi rh\,\Delta r + \pi r^2\,\Delta h}{\pi r^2\,h} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{r}$$

Si los errores posibles al medir el radio y la altura son, respectivamente, del 4 % y 2 %, el error relativo que se puede cometer al medirlos es menor o igual que 0,04 y 0,02.

Por tanto:

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| \leq 2 \cdot 0{,}04 + 0{,}02 = 0{,}1$$

El error relativo que se puede cometer al hallar el volumen es menor o igual que 0,1 o que el 10 %.

3.3. LA REGLA DE LA CADENA. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

3.3.1. Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones de varias variables se obtiene como una generalización del caso de una variable. Se exponen a continuación los dos casos particulares más comunes junto con un diagrama muy útil para recordar la fórmula.

- Si $z = f(x, y)$ con $x = x(t)$ e $y = y(t)$, entonces $z(t) = f(x(t), y(t))$, es decir, z depende de la única variable t, y su derivada es:

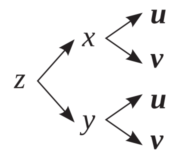
$$z'(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(t)$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r] & \mathbf{t} \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & \mathbf{t} \end{tikzcd}$$

- Si $z = f(x, y)$ con $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, entonces $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, es decir, z depende de las variables u y v, y sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$



EJEMPLO 12

Si $z = x^3 - xy + y^2$ con $x = u + 2v$ e $y = uv$, usar la regla de la cadena para hallar las derivadas parciales de z respecto de u y v.

Solución

Mediante las fórmulas obtenidas arriba:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (3x^2 - y) \cdot 1 + (-x + 2y) \cdot v = 3(u + 2v)^2 - uv + (2uv - u - 2v)\, v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (3x^2 - y) \cdot 2 + (-x + 2y) \cdot u = 6(u + 2v)^2 - 2uv + (2uv - u - 2v)\, u$$

Estas derivadas también se pueden obtener sin usar la regla de la cadena: primero se expresa z como función de u y de v, y después se deriva. Comprobar, como ejercicio, que se obtiene lo mismo.

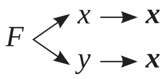
3.3.2. Derivación implícita

La regla de la cadena se puede utilizar para obtener las fórmulas de derivación implícita:

- Si $F(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x, entonces $F(x, y(x)) = 0$ y:

$$F'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'(x) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \Rightarrow$$

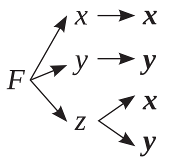
$$\Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y}$$



- Si $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función de x e y, entonces $F(x, y, z(x, y)) = 0$ y:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = F_x + F_z\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = F_y + F_z\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} \end{aligned}\right.$$



EJEMPLO 13

Derivar implícitamente a z respecto de x e y en la ecuación $3x^2 z - x^2 y^2 + 2z^3 + 3yz + 15 = 0$, y calcular sus valores en el punto de la superficie donde $x = 2$ e $y = -1$.

Solución

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{6xz - 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2x^2 y + 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

Sustituyendo $x = 2$ e $y = -1$ en la ecuación de la superficie, se obtiene $2z^3 + 9z + 11 = 0$, cuya única solución real es $z = -1$. Por tanto, el punto de la superficie donde $x = 2$ e $y = -1$ es $(2, -1, -1)$, y las derivadas parciales en dicho punto valen:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, -1, -1) = -\frac{-12 - 4}{12 + 6 - 3} = \frac{16}{15}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2, -1, -1) = -\frac{8 - 3}{12 + 6 - 3} = \frac{-5}{15} = \frac{-1}{3}$$

3.4. DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE

3.4.1. Derivada direccional de una función de dos variables

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables y $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, un vector unitario. Se llama **derivada direccional** de f en (a, b) en la dirección del $\boldsymbol{u}$ al siguiente límite:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(a, b) = D_\theta f(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\cos\theta, b + h\,\text{sen}\,\theta) - f(a, b)}{h}$$

Las derivadas parciales f_x y f_y son las derivadas direccionales en las direcciones de los ejes x e y, respectivamente. Cuando la función es diferenciable en el punto, la derivada direccional se puede expresar en función de las derivadas parciales:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(a, b) = D_\theta f(a, b) = f_x(a, b)\cos\theta + f_y(a, b)\,\text{sen}\,\theta$$

3.4.2. Gradiente de una función de dos variables

El **gradiente** de la función diferenciable f es el vector cuyas componentes son las derivadas parciales:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

Usando el gradiente, la derivada direccional se puede expresar mediante el producto escalar:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \boldsymbol{u} \qquad (\|\boldsymbol{u}\| = 1)$$

EJEMPLO 14

Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2\,\text{sen}(xy)$ en el punto $(1, \pi)$ en la dirección del vector $\boldsymbol{u} = (-3, 4)$.

.../...

.../...

Solución

El gradiente de la función, en general y en el punto, es:

$$\nabla f(x, y) = (2x \operatorname{sen}(xy) + x^2\, y \cos(xy),\ x^3 \cos(xy)) \ \Rightarrow\ \nabla f(1, \pi) = (-\pi, -1)$$

La derivada direccional de f en el punto $(1, \pi)$ en la dirección de $\boldsymbol{u} = (-3, 4)$ (que no es unitario) es:

$$D_{\boldsymbol{u}} f(1, \pi) = \nabla f(1, \pi) \cdot \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = (-\pi, -1) \cdot \frac{(-3, 4)}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3\pi - 4}{5}$$

3.4.3. Propiedades

Las siguientes propiedades son todas consecuencia inmediata de las propiedades del producto escalar.

- Si $\nabla f(a, b) = 0$, entonces $D_{\boldsymbol{u}} f(a, b) = 0$ para todo $\boldsymbol{u}$.
- La derivada direccional en (a, b) es máxima en la dirección del gradiente $\boldsymbol{u} = \nabla f(a, b)$ (dirección de máximo crecimiento de f), siendo $\|\nabla f(a, b)\|$ su valor máximo.
- La derivada direccional en (a, b) es mínima en la dirección $\boldsymbol{u} = -\nabla f(a, b)$, opuesta al gradiente (dirección de máximo decrecimiento de f), siendo $-\|\nabla f(a, b)\|$ su valor mínimo.
- La derivada direccional en (a, b) es nula en cualquier dirección perpendicular al gradiente.

3.4.4. Derivada direccional y gradiente de una función de tres variables

La **derivada direccional** de la función diferenciable $f(x, y, z)$ en el punto (a, b, c) en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es:

$$D_{\boldsymbol{u}} f(a, b, c) = f_x(a, b, c)\, u_1 + f_y(a, b, c)\, u_2 + f_z(a, b, c)\, u_3 = \nabla f(a, b, c) \cdot \boldsymbol{u} \qquad (\|\boldsymbol{u}\| = 1)$$

donde $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ es el vector **gradiente**, que tiene las mismas propiedades que en el caso de dos variables.

EJEMPLO 15

La temperatura en grados centígrados en la superficie de una placa es $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x e y se expresan en centímetros. A partir del punto (2, – 3), ¿en qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura de la placa? ¿Cuál es el ritmo de crecimiento?

Solución

Se calcula el gradiente en el punto:

$$\nabla T = (-8x, -2y) \;\Rightarrow\; \nabla T(2, -3) = (-16, 6)$$

Partiendo del punto (2, – 3), la dirección en la que aumenta más rápidamente la temperatura de la placa es $\boldsymbol{u} = \nabla T(2, -3) = (-16, 6)$. El ritmo de crecimiento es:

$$\|\nabla T(2, -3)\| = \|(-16, 6)\| = \sqrt{256 + 36} = \sqrt{292} \simeq 17{,}1\ {}^{\circ}\mathrm{C/cm}$$

3.5. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

3.5.1. Recta normal y plano tangente a una superficie

Si S es una superficie de ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$, y $P(a, b, c)$ es un punto de la misma en el que $\nabla F(a, b, c) \neq \mathbf{0}$, entonces un **vector normal** a S en P es $\nabla F(a, b, c)$ y, en consecuencia:

- La **recta normal** a la superficie S en el punto P es el que pasa por P con vector de dirección $\nabla F(a, b, c)$, cuya ecuación vectorial es:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(F_x(a, b, c), F_y(a, b, c), F_z(a, b, c))$$

- El **plano tangente** a la superficie S en el punto P es el que pasa por P con vector normal $\nabla F(a, b, c)$, cuya ecuación general es:

$$F_x(a, b, c)\,(x - a) + F_y(a, b, c)\,(y - b) + F_z(a, b, c)\,(z - c) = 0$$

Si la superficie viene dada en forma explícita $z = f(x, y)$, entonces $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ y el vector normal es $\nabla F = (f_x, f_y, -1)$.

3.5.2. Recta tangente a una curva dada como intersección de dos superficies

Si γ es la curva dada por la intersección de las superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$, su **recta tangente** en el punto $P(a, b, c)$ es paralela al producto vectorial de los vectores perpendiculares a cada una de las superficies, es decir, paralela al vector $\nabla F(a, b, c) \times \times \nabla G(a, b, c)$.

Su ecuación vectorial es:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(\nabla F(a, b, c) \times \nabla G(a, b, c))$$

EJEMPLO 16

Hallar las ecuaciones de la recta normal y del plano tangente al hiperboloide $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $P(1, -1, 4)$.

Solución

Las ecuaciones pedidas se calculan a partir del gradiente de la función implícita de la superficie, que es $F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$, en P:

$$\nabla F = (-4x, -4y, 2z) \quad \Rightarrow \quad \nabla F(1, -1, 4) = (-4, 4, 8) \parallel \quad (-1, 1, 2)$$

Recta normal: $(x, y, z) = (1, -1, 4) + \lambda(-1, 1, 2)$, o mejor $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-4}{2}$

Plano tangente: $-1(x-1) + 1(y+1) + 2(z-4) = 0$, o mejor $x - y - 2z + 6 = 0$

EJEMPLO 17

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y el plano $x + y - z = 0$ en el punto $P(2, -1, 1)$.

.../...

.../...

Solución

Se hallan los gradientes de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ y $G(x, y, z) = x + y - z$ en el punto $P(2, -1, 1)$, y su producto vectorial:

$$\begin{cases} \nabla F = (2x, 2y, 2z) \\ \nabla G = (1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla F\,(2, -1, 1) = (4, -2, 2) \\ \nabla G\,(2, -1, 1) = (1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla F\,(2, -1, 1) \times \nabla G\,(2, -1, 1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 6, 6) \parallel (0, 1, 1)$$

La ecuación de la recta tangente, en sus formas vectorial, continua y como intersección de planos, es:

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + \lambda(0, 1, 1) \qquad \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

4. EXTREMOS

Aunque para simplificar la notación este tema se desarrollará para funciones de dos variables, todos los resultados se pueden extender a más variables sin ninguna dificultad.

4.1. EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS

4.1.1. Extremos relativos

Sea $f(x, y)$ definida sobre el conjunto abierto $R \subset \mathbb{R}^2$ del que (a, b) es un punto interior. Se dice que:

- f alcanza un **mínimo relativo** en el punto (a, b) si $f(x, y) \geq f(a, b)$ en un entorno del punto.
- f alcanza un **máximo relativo** en el punto (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ en un entorno del punto.

4.1.2. Puntos críticos

Sea $f(x, y)$ definida sobre el conjunto abierto $R \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $(a, b) \in R$ es un **punto crítico** si en (a, b) se anulan las dos derivadas parciales primeras de la función o no existe alguna de ellas.

4.1.3. Condición necesaria para extremos relativos

Si la función diferenciable $f(x, y)$, definida en el conjunto abierto R, alcanza un extremo relativo en algún punto $(a, b) \in R$, también lo alcanzarán en dicho punto las curvas que se obtienen como intersección de la superficie que representa f con los planos $x = a$ e $y = b$ y, por tanto, se deben anular las derivadas parciales (que son las pendientes de dichas curvas). En consecuencia:

> «Una función definida sobre un abierto solo puede alcanzar extremos relativos en los puntos críticos, es decir, donde se anulan las derivadas parciales primeras o no existe alguna de ellas».

4.1.4. Criterio para la determinación de extremos

Sea $f(x, y)$ una función con derivadas parciales segundas en un conjunto abierto que contiene al punto crítico (a, b) en el que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Para determinar si en dicho punto hay un extremo relativo, se considera la **matriz hessiana**:

$$H_f\,(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

- Si $\det(H_f\,(a, b)) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en (a, b).
- Si $\det(H_f\,(a, b)) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en (a, b).
- Si $\det(H_f\,(a, b)) < 0$, entonces f tiene un **punto de silla** en (a, b).
- Si $\det(H_f\,(a, b)) = 0$, entonces este criterio no lleva a **ninguna conclusión**.

Los **puntos de silla** son puntos donde la función no alcanza ni máximo relativo ni mínimo relativo: la superficie $z = f(x, y)$ está por encima y por debajo del plano tangente en cualquier entorno del punto.

EJEMPLO 18

Determinar los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2 - 1$.

Solución

La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Se hallan las primeras y segundas derivadas parciales, y la matriz hessiana:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - 4y \\ f_y(x, y) = -4x + 4y \end{cases} \quad \begin{cases} f_{xx}(x, y) = 6x & f_{xy}(x, y) = -4 \\ f_{yx}(x, y) = -4 & f_{yy}(x, y) = 4 \end{cases} \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Se calculan los puntos críticos:

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 4y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 4/3 \end{cases}$$

Hay dos puntos críticos, $P_1\,(0, 0)$ y $P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, donde se calcula el determinante de la matriz hessiana:

$$\det(H_f(0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -16 \qquad \det\left(H_f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right) = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

Aplicando el criterio para la determinación de extremos:

- $\det(H_f(0, 0)) = -16 < 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de silla en $P_1\,(0, 0)$.
- $\det\left(H_f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right) = 16 > 0$ y $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 8 > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

4.1.5. Extremos absolutos

Sea $f(x, y)$ definida sobre el conjunto $R \subset \mathbb{R}^2$ y $(a, b) \in R$. Se dice que:

- f alcanza un **mínimo absoluto** en el punto (a, b) si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in R$.

- f alcanza un **máximo absoluto** en el punto (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in R$.

Para conocer la existencia de extremos absolutos se utiliza el teorema de los extremos de Weierstrass (véase epígrafe 2.3.4), que afirma que «toda función continua definida sobre un conjunto compacto (cerrado y acotado) alcanza sus extremos absolutos».

Para la determinación de los extremos absolutos de una función, con derivadas parciales primera y segunda en un recinto compacto, hay que tener en cuenta que los puede alcanzar en los extremos relativos o en la frontera del recinto.

EJEMPLO 19

Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $R = [0, \pi] \times [0, 1]$.

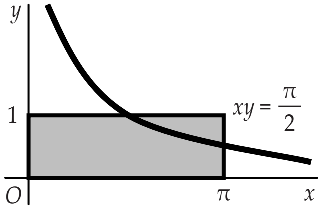
Solución

Puesto que la función f es continua y R es compacto, el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de extremos absolutos. Para hallarlos se comienza calculando los extremos relativos y, para ello, se hallan las primeras y segundas derivadas parciales.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = y\cos(xy) \\ f_y(x, y) = x\cos(xy) \end{cases} \quad \begin{cases} f_{xx}(x, y) = -y^2 \operatorname{sen}(xy) \\ f_{yx}(x, y) = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy) \end{cases} \quad \begin{matrix} f_{xy}(x, y) = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy) \\ f_{yy}(x, y) = -x^2 \operatorname{sen}(xy) \end{matrix}$$

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y\cos(xy) = 0 \\ x\cos(xy) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(xy) = 0 \\ x = y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Son puntos críticos el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y todos los puntos de la hipérbola $xy = \pi/2$ que están dentro del conjunto R, ya que las otras hipérbolas no lo cortan (véase figura).



Se calcula el determinante de la matriz hessiana en todos los puntos críticos y se clasifican:

$$\det(H_f(0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un punto de silla en } O(0, 0)$$

$$xy = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \det(H_f(x, y)) = \begin{vmatrix} -y^2 & -xy \\ -xy & -x^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ este criterio no decide sobre estos puntos}$$

.../...

.../...

Sin embargo, se puede observar directamente de la función $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ que sobre los puntos donde $xy = \pi/2$ vale 1, siendo este el máximo valor que puede tomar. Por tanto, el máximo absoluto es 1 y lo alcanza sobre todos los puntos de la hipérbola $xy = \pi/2$ que están dentro de R. Además, en todo R se cumple que $0 \le xy \le \pi$, y el seno de un ángulo comprendido entre esos valores está comprendido entre 0 y 1, luego el mínimo absoluto de $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ es 0, y lo toma en todos aquellos puntos donde $xy = 0$ o $xy = \pi$, es decir, en todos los puntos de los lados de R que están sobre los ejes de coordenadas y en el punto $(\pi, 1)$.

4.2. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Como en el caso de funciones de una variable, una aplicación muy importante del cálculo de derivadas de funciones de varias variables es la resolución de problemas de optimización, es decir, problemas relativos a hallar el extremo absoluto (máximo o mínimo) de una función en un cierto dominio.

EJEMPLO 20

Un fabricante de artículos electrónicos determina que los beneficios obtenidos con la fabricación de x unidades de un reproductor de CD e y unidades de un grabador de CD son $B(x, y) = 8x + 10y - 0{,}001(x^2 + xy + y^2) - 10.000$ €.

¿Cuántas unidades debe fabricar de cada producto para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es?

Solución

Se trata de encontrar el máximo absoluto de la función $B(x, y)$ con $x, y \ge 0$, es decir, en el recinto $R = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Puesto que el recinto no está acotado, el teorema de Weierstrass no garantiza la existencia del máximo absoluto. Se comienza hallando las primeras y segundas derivadas parciales y los puntos críticos:

$$\begin{cases} B_x(x, y) = 8 - 0{,}001(2x + y) \\ B_y(x, y) = 10 - 0{,}001(x + 2y) \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{xx}(x, y) = -0{,}002 & B_{xy}(x, y) = -0{,}001 \\ B_{yx}(x, y) = -0{,}001 & B_{yy}(x, y) = -0{,}002 \end{cases}$$

$$\Big\{ B_x(x, y) = B_y(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + y = 8.000 \\ x + 2y = 10.000 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2.000 \\ y = 4.000 \end{cases}$$

.../...

.../...

El único punto crítico es $P(2.000, 4.000)$. Se clasifica dicho punto:

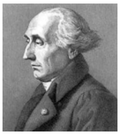
$$\left\{\begin{array}{l} \det(H_B(2.000, 4.000)) = \begin{vmatrix} -0{,}002 & -0{,}001 \\ -0{,}001 & -0{,}002 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10^{-6} > 0 \\ B_{xx}(2000, 4000) = -0{,}002 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{Máximo relativo}$$

Este máximo relativo es absoluto y, por tanto, los beneficios máximos se obtienen con la fabricación de 2.000 reproductores y 4.000 grabadores.

4.3. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

4.3.1. Extremos condicionados

Muchos problemas de optimización requieren de la obtención de algún extremo (máximo o mínimo) absoluto de cierta función f, llamada **función objetivo**, que está definida sobre variables que deben verificar ciertas condiciones, dadas por medio de ecuaciones, llamadas **restricciones** o **ligaduras**. Estos extremos se llaman **extremos condicionados**, y se resuelven usando el conocido **método de los multiplicadores de Lagrange**.



Joseph Louis de Lagrange. Nació en 1736 en Turín (Italia), hijo de militar, y desarrolló su trabajo en matemáticas, física y astronomía. En 1766 abandonó Italia para ir a Berlín a trabajar para el rey Federico II el Grande. Allí permaneció hasta la muerte del rey, en 1786, momento en que emigró a París aceptando una oferta de Luis XVI (rechazando ofertas similares de España y Nápoles). Entre sus múltiples trabajos, demostró el teorema de valor medio, introdujo los multiplicadores de Lagrange, desarrolló el cálculo de variaciones y la mecánica lagrangiana e hizo importantes contribuciones en astronomía. Murió en París en 1813.

4.3.2. El método de los multiplicadores de Lagrange

A continuación se expone el método de los multiplicadores de Lagrange en los casos más usuales. En todos ellos, f y g_i son funciones con primeras derivadas parciales continuas.

- **Dos variables y una ligadura.** Para hallar el extremo absoluto de $f(x, y)$ sometido a la restricción $g(x, y) = 0$, se procede así:

– Se considera la función $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ y se resuelve el sistema,

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \mathbf{0}, \text{ que es equivalente a: } \begin{cases} f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

– Se evalúa f en cada solución del sistema. El mayor y menor valor obtenidos dan el máximo y el mínimo de f, respectivamente, condicionados a la ligadura.

- **Tres variables y una o dos ligaduras.** Para hallar el extremo absoluto de $f(x, y, z)$ sometido a las restricciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, se procede así:

– Se considera la función $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$ y se resuelve el sistema:

$$\nabla F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

– Se evalúa f en cada solución del sistema. El mayor y menor valor obtenidos dan el máximo y el mínimo de f, respectivamente, condicionados a las ligaduras.

EJEMPLO 21

Hallar el valor máximo que alcanza la función $f(x, y) = xy$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución

Se considera la función $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, y se resuelve el sistema:

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} = \dfrac{-x}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

.../...

.../...

Se han obtenido cuatro soluciones:

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_3\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_4\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

Se evalúa la función f en cada uno de los cuatro puntos:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el mayor valor que alcanza la función f es 1/2 en los puntos

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } P_4\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

y el menor valor que obtiene es – 1/2 en los puntos

$$P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } P_3\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

EJEMPLO 22

Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Hallar las temperaturas extremas sobre la curva intersección de la esfera con el plano $x + y + z = 3$.

.../...

.../...

Solución

Se trata de hallar el máximo y mínimo absolutos de la función T con las restricciones $x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0$ y $x + y + z - 3 = 0$. Se considera la función:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = (20 + 2x + 2y + z^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 11) + \mu(x + y + z - 3)$$

$$\nabla F(x, y, z, \lambda, \mu) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x + \mu = 0 \\ 2 + 2\lambda y + \mu = 0 \\ 2z + 2\lambda z + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Se eliminan λ y μ entre las tres primeras ecuaciones:

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 1 & -2 \\ 2y & 1 & -2 \\ 2z & 1 & -2z \end{pmatrix} = -4xz - 4z - 4y + 4z + 4x + 4yz = 4(x-y) - 4z(x-y) = 4(1-z)(x-y) = 0$$

Y el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} (1-z)(x-y) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene que $z = 1$ o $x = y$, y en cada caso:

$$z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2-x)^2 = 10 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,\ y = 3 \\ x = 3,\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(-1, 3, 1) \\ P_2(3, -1, 1) \end{cases}$$

$$x = y \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 11 \\ 2x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (3-2x)^2 = 11 \\ z = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3},\ z = \dfrac{3-4\sqrt{3}}{3} \\ x = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3},\ z = \dfrac{3+4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_3\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right) \text{ y } P_4\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right)$$

.../...

.../...

Se evalúa la temperatura en cada una de las cuatro soluciones:

$$\begin{cases} T(-1,3,1) = T(3,-1,1) = 25 \\ T\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3-4\sqrt{3}}{3}\right) = T\left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+4\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{91}{3} \simeq 30{,}3 \end{cases}$$

Es decir, la máxima temperatura de 91/3 grados se obtiene en los puntos P_3 y P_4, y la mínima de 25 grados en los puntos P_1 y P_2.

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Límite de una función en un punto.
- Límites iterados y direccionales.
- Continuidad.
- Derivadas parciales y direccionales.
- Gradiente.
- Criterio para la caracterización de extremos relativos.
- Multiplicadores de Lagrange.

ACTIVIDADES DE AUTOCOMPROBACIÓN

A partir del contenido de la presente Unidad didáctica, se propone la realización de las siguientes actividades de autocomprobación por parte del alumno, como ejercicio general de repaso y asimilación de la información básica proporcionada por el texto.

Enunciado 1

Hallar el dominio de las funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

b) $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$

Enunciado 2

Calcular los límites iterados y direccionales de la función $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ en el origen.

Enunciado 3

Calcular, si existen, los siguientes límites de funciones:

a) $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $\lim_{(x, y)\to(2, -1)} \dfrac{\operatorname{sen}(x + y - 1)}{y + 1}$

Enunciado 4

Hallar las derivadas parciales primeras de $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ y $g(x, y) = x \arctan \dfrac{x}{y}$.

Enunciado 5

Una empresa fabrica dos tipos de estufas, siendo $C(x, y) = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1.050$ el coste en euros de fabricar x estufas del tipo X e y estufas del tipo Y.

a) Hallar los costes marginales (derivadas parciales) cuando $x = 80$ e $y = 20$.

b) Si se requiere una producción adicional, ¿qué modelo de estufa incrementa el costo con una tasa más alta?

Enunciado 6

Hallar las derivadas parciales segundas de las funciones del ejercicio 4.

Enunciado 7

El error cometido al medir cada una de las aristas de una caja rectangular es $\pm$ 0,1 mm. Hallar el error absoluto y relativo que se puede cometer al hallar el volumen de una caja de aristas que miden 50, 20 y 15 cm.

Enunciado 8

Si $w = xyz$ con $x = u + v$, $y = u - v$ y $z = uv^2$, usar la regla de la cadena para hallar las derivadas parciales de w respecto de u y v.

Enunciado 9

Derivar implícitamente a y respecto de x en la ecuación $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$ y ordenada negativa.

Enunciado 10

Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ en el punto $P(-3/4, 0)$ en la dirección que va de P a $Q(0,1)$.

Enunciado 11

Hallar el vector gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$, así como las direcciones de máximo crecimiento y decrecimiento de f, en el punto $(2, -1, 1)$. ¿Existe alguna dirección en la que la derivada direccional es nula?

Enunciado 12

Hallar las ecuaciones de la recta normal y del plano tangente al paraboloide $z = 1 - x^2 - 2y^2$ en el punto $P(1, -1, -2)$.

Enunciado 13

Hallar los extremos relativos de:

a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y$

b) $f(x, y) = x^2 y^2$

Enunciado 14

Hallar los extremos relativos y absolutos de $f(x, y) = xy$ en $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

Enunciado 15

Se quiere construir un canal cuya sección sea un trapecio isósceles de base x y lado inclinado y con $x + 2y = 1$ m. ¿Cuál debe ser el ángulo exterior de los lados inclinados y cuánto deben medir los lados para que tenga sección máxima?

Enunciado 16

Hallar el valor mínimo que alcanza la función $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 5z^2$ sobre el plano $3x + y - 2z = 2$.

Enunciado 17

Calcular los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 10$.

Solución 1

a) $\left\{ (x, y) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$

b) $\{(x, y) : x + y < 4\}$

Solución 2

$$L_x = 1 \qquad L_y = 0 \qquad L_m = \frac{1}{1 + m^2}$$

Solución 3

a) 0

b) No existe.

Solución 4

$$f_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad f_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad g_x = \arctan \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2 + y^2}, \qquad g_y = \frac{-x^2}{x^2 + y^2}$$

Solución 5

a) $C_x = 183$, $C_y = 237$

b) Modelo Y.

Solución 6

$$f_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$g_{xx} = \frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad g_{xy} = g_{yx} = \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad g_{yy} = \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Solución 7

Error absoluto: 20,5 cm^3; Error relativo: 0,0014.

Solución 8

$$w_u = (3u^2 - v^2)\, v^2, \qquad w_v = 2uv(u^2 - 2v^2)$$

Solución 9

$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}, \qquad x + 8y + 25 = 0$$

Solución 10

$$\frac{-27}{10}$$

Solución 11

$\nabla f = (2x, 2y, -4)$; $\nabla f\,(2, -1, 1) = (4, -2, -4)$; máximo crecimiento en la dirección de (2, – 1, – 2), y máximo decrecimiento en la dirección de (– 2, 1, 2); la derivada direccional es nula en cualquier dirección perpendicular a (2, – 1, – 2), por ejemplo, en la dirección (1, 0, 1).

Solución 12

$$\text{Recta normal: } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+2}{1}$$

$$\text{Plano tangente: } 2x - 4y + z = 4$$

Solución 13

a) Mínimo relativo en (– 2, 3).

b) Mínimos relativos en $(a, 0)$ y $(0, b)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución 14

No tiene extremos relativos.

El máximo absoluto es $\frac{a^2}{2}$, que lo alcanza en $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$.

El mínimo absoluto es $\frac{-a^2}{2}$, que lo alcanza en $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

Solución 15

$$x = y = 1/3, \qquad \alpha = 60^\circ$$

Solución 16

El valor mínimo es 5/6 en el punto $\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{-1}{6}\right)$.

Solución 17

Máximo absoluto 24 en los puntos $(-1, \pm 3)$, y mínimo absoluto 2 en el punto $(1, 0)$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, A. et ál. (1996). *Cálculo II*. Madrid: Clagsa.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo II*. Madrid: McGraw-Hill.

Mata, A. y Reyes, M. *Apuntes de cálculo*. Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/mreyes/calculo.