Soluciones de la AEC de las unidades 1, 2, 3 y 4

Matemática Discreta

PROBLEMA 1:

En cierto grupo de 23 personas están siguiendo diversas series de televisión. 14 de ellos esta viendo Altered Carbon, 12 está viendo Black Mirror y 13 está viendo Counterpart. Hay 7 que siguen a la vez Altered Carbon y Counterpart y otros 7 Black Mirror y Counterpart. Si hay 4 que siguen a las tres series, ¿Cuántos siguen Altered Carbon y Black Mirror a la vez?

SOLUCIÓN.

Llamaremos a las series Altered Carbon, Black Mirror y Counterpart A, B y C respectivamente. Lo pedido es la intersección de los conjuntos A y B. Por el principio de inclusión exclusión se trata de calcular el cardinal de dicho conjunto pedido:
$|(A \cup B \cup C)| = |A| + |B| + |C| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 14 + 12 + 13 - \mathbf{x} - 7 - 7 + 4 = 23$

Despejando la x nos sale 6 que ven Altered Carbon y Black Mirror.

PROBLEMA 2:

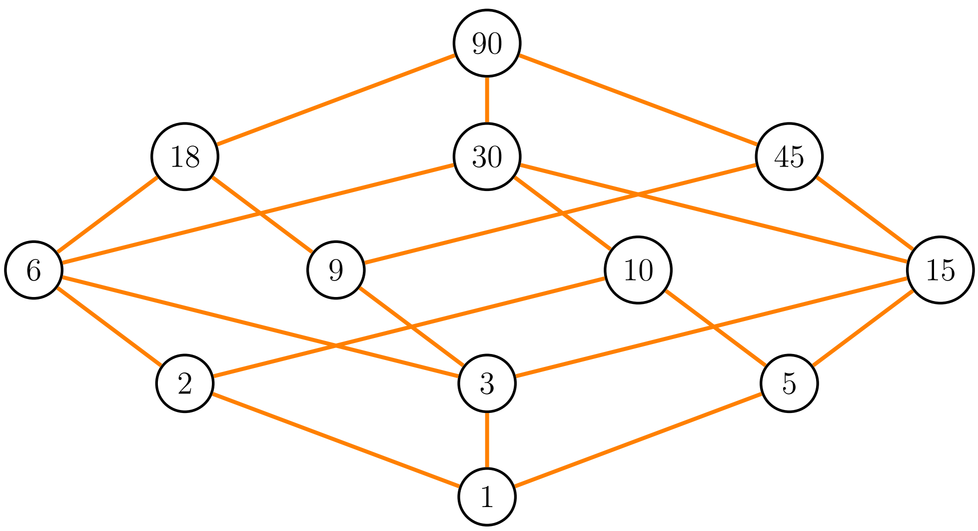
Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 90, mediante

$$a \preceq b \ \Leftrightarrow \ a \text{ divide a } b\,.$$

Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$ incluyendo el 1.

SOLUCIÓN.

Es fácil ver que $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Multiplicando dos a dos esos factores primos obtenemos 6, 9, 10 y 15. Combinándolos de tres a tres obtenemos 18, 30 y 45. Y finalmente 90 si multiplicamos los cuatro. El diagrama de Hasse, por tanto, será:



PROBLEMA 3:

Sobre el caso del ejercicio anterior hallar lo siguiente:

1. Proporcionar maximales, mínimales, máximo y mínimo si existe.
2. Proporcionar las cotas inferiores del conjunto $A = \{9, 10\}$. ¿Existe el ínfimo? Si existe, ¿cuál es?
3. Proporcionar las cotas inferiores del conjunto $B = \{6, 9, 18, 90\}$. ¿Existe el ínfimo? Si existe, ¿cuál es?
4. Proporcionar las cotas superiores del conjunto $C = \{3, 6\}$. ¿Existe el supremo? Si existe, ¿cuál es?
5. Proporcionar las cotas superiores del conjunto $D = \{3, 6, 15\}$. ¿Existe el supremo? Si existe, ¿cuál es?

SOLUCIÓN.

1. Son 90 y 1, que además son máximo y mínimo respectivamente al ser únicos.
2. Las cotas inferiores de $A = \{9, 10\}$ son $\text{minor}(A) = \{1\}$ y el ínfimo es 1.
3. Las cotas inferiores de $B = \{6, 9, 18, 90\}$ son $\text{minor}(B) = \{3, 1\}$ y el ínfimo es 3.
4. Las cotas superiores de $C = \{3, 6\}$ son $\text{mayor}(C) = \{6, 18, 30, 90\}$. El supremo es 6.
5. Las cotas superiores de $D = \{3, 6, 15\}$ son $\text{mayor}(D) = \{30, 90\}$. El supremo es 30.

PROBLEMA 4:

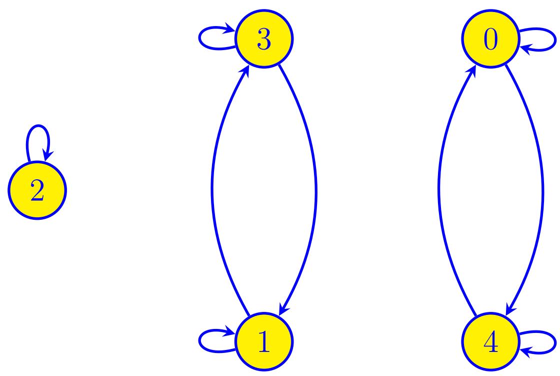
Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sobre este conjunto se define esta relación:

$$\mathcal{R} = \{(3,3), (4,0), (0,0), (0,4), (1,1), (1,3), (3,1), (2,2), (4,4)\}$$

Representa mediante diagrama de flechas esta relación de equivalencia. Proporcionar el conjunto cociente.

SOLUCIÓN.

Es fácil ver la situación si dibujamos la relación con un grafo:



En donde podemos ver claramente las clases compuestas por {2}, {1,3} y {0,4}. Eligiendo representantes para cada una de estas clases obtenemos el conjunto cociente:

$$A/\mathcal{R} = \{[0], [1], [2]\}$$

Aunque no lo parezca a simple vista, la relación es una relación de equivalencia pues es reflexiva, simetrica y transitiva. La propiedad transitiva dice que si a está relacionada con b y b lo está con c, entonces a lo está con c. La particularidad de ese ejercicio es que no existe una relacion a 3, sólo de a dos a lo más, pero sigue siendo transitiva. Por ejemplo, 1 lo está con 3 y 3 con el 1, luego 1 lo tiene que estar con el 1 al ser reflexiva, lo que sucede. Lo mismo se puede decir para los otros casos. Así que es una relación de equivalencia. Más rigurosamente, sabemos que una relación $\mathcal{R}$ es transitiva si y sólo si para toda entrada no nula $(A_{\mathcal{R}^2})_{i,j} = 1$ de la matriz de adyacencia de $\mathcal{R}^2$, la correspondiente entrada de la matriz de adyacencia de $\mathcal{R}$ es también no nula $(A_{\mathcal{R}})_{i,j} = 1$. En este caso

$$(A_{\mathcal{R}^2}) = (A_{\mathcal{R}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 5:

Se presentan 500 voluntarios para participar en un experimento médico en cierto país. Por estadística tiene que haber 75 que tengan Rh negativo, que son los únicos que no pueden participar. Asumiendo que todos conocen su factor RH ¿a cuántos tendremos que preguntar para estar seguros de poder formar un grupo preliminar de 100 conejillos de indias humanos? Esos 100 voluntarios son distribuidos al azar entre 5 equipos de investigadores. ¿Cuántos de esos 100 hay que seleccionar finalmente para garantizar que haya al menos un equipo con 12 voluntarios?

SOLUCIÓN.

A) El peor caso posible sería que se preguntara a los 75 con Rh negativo. A este habría que añadir los 100 siguientes. Así que, a lo más, propondríamos esto a 175 voluntarios.

B) Por palomar nos piden el N mínimo que dé

$$\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 12,$$

algo que se cumple ya para $N = 56$.

PROBLEMA 6:

Un control de una universidad online consta de varias preguntas elegidas al azar de una base de datos. Sobre el la unidad 5 de una asignatura el profesor ha preparado 20 preguntas de las cuales el sistema toma 2 para el control. Si hay 200 alumnos matriculados en esa asignatura, ¿a cuántos como mínimo les ha tocado las mismas dos preguntas del tema 5?

SOLUCIÓN.

Como hay 20 preguntas y se eligen 2 hay

$$N = \binom{20}{2} = 190$$

posibilidades distintas.

Según el principio del palomar, en este caso habría 190 "nidos" y 200 posibles "palomas". Así que habría

$$\left\lceil \frac{200}{190} \right\rceil = 2$$

alumnos que, como mínimo, les habría tocado dos preguntas iguales de ese tema.

PROBLEMA 7:

Resolver los siguientes problemas:

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra 'vislumbrándote'?
2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra 'esternocleidomastoideo'?
3. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra 'acalambraran' de tal modo que todas las vocales estén juntas al final?
4. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra 'acurruca' del tal modo que siempre se empiece y termine por A?
5. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra palíndroma 'anilina' del tal modo que siempre se obtengan palabras palíndromas?

SOLUCIÓN.

1. Tiene 14 letras y ninguna se repite así que:

$$N = 14!$$

2. Tiene 22 letras, así que hay que reordenar dichas letras, pero dividiendo por las que se repiten, es decir, por $4! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!\dot{2}!$ para dar cuenta de las repeticiones de E, S, O, I, D y T.

$$N = \frac{22!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 1219618845244800000$$

3. Todas las vocales son A, así que el número de maneras de colocarlas al final sólo es 1. Quedan 7 consonantes de las cuales sólo la R está repetida una vez así que:

$$N = 1 \cdot \frac{7!}{2!} = 2520$$

4. Tiene 8 letras de las cuales 2 son A que quedan reservadas para la primera y última posición. Así que hay que reordenar sólo 6 letras, pero dividiendo por $2! \cdot 2! \cdot 2!$ para dar cuenta de las letras repetidas.

$$N = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

5. La L siempre estará en el centro para que sea palíndroma. Por simetría, una vez fijada una letra de un par disponible a un lado, hay que poner la misma letra en el otro lado en su posición correspondiente. Así que

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

PROBLEMA 8:

Un traficante de drogas tiene que repartir 7 paquetes de cocaína iguales entre los 9 camellos que tiene en una ciudad. ¿De cuántas maneras lo podría hacer?

SOLUCIÓN.

No es más que un reparto de 7 objetos iguales en 9 agujeros o cajas. Además hay que considerar el caso ineludible de camellos que se quedan sin paquete, por lo que se trata de combinaciones con repetición.

$$N = \binom{9+7-1}{7} = \binom{15}{7} = 6435$$

o bien

$$N = \binom{7+9-1}{9-1} = \binom{15}{8} = 6435$$

PROBLEMA 9:

Resolver la siguiente ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 6a_n, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 7$$

SOLUCIÓN.

El polinomio característico será:

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0,\ \text{con raíces}\ \lambda = -1\ \text{y}\ \lambda = 6.$$

Así que

$$a_n = A(-1)^n + B(6)^n$$

y usando las condiciones iniciales se ve que $A = -1/7$ y que $B = 8/7$, luego

$$a_n = \frac{1}{7}[-(-1)^n + 8 \cdot 6^n]$$

PROBLEMA 10:

Resolver la siguiente ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 24a_n = -3^n; \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1$$

SOLUCIÓN.

El polinomio característico será:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0,$$

que tiene como raíces -6 y 4.

Así que la solución a la homogénea es:

$$a_n^h = A(-6)^n + B(4)^n.$$

Como la función que convierte en inhomogénea la recurrencia es una exponencial de base 3 y 3 no es ni -6 ni 4, entonces habrá que proponer una solución particular del tipo

$$a_n^p = C3^n,$$

que ensayada en la recurrencia original nos da $C = 1/9$, así que:

$$a_n^p = \frac{1}{9}3^n$$

Finalmente, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, vemos que $A = -1/9$ y $B = 0$, por lo que la solución completa es:

$$a_n = \frac{1}{9}(3^n - (-6)^n)$$