UNIDAD V INTEGRALES

- **Tema 1: Integral indefinida**
- Tema 2: Integración por tablas
- Tema 3: Métodos de integración
- Tema 4: Integrales definidas
- Tema 5: Aplicaciones de la integrales
- Tema 6: Integrales propias e impropias

FUNCIÓN PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

La función primitiva de $f_{(x)}$ es otra función $F_{(x)}$ tal que:

$$F'_{(x)} = f_{(x)}$$

EJEMPLOS

- Muestra que $F_{(x)} = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 7$ es una primitiva de $f_{(x)} = 4x^3 + x^2$
- Muestra que $G_{(x)} = x^3 - 3$ y $H_{(x)} = x^3 + 2$ son primitivas de $f_{(x)} = 3x^2$

Si $F_{(x)}$ es una función primitiva de $f_{(x)}$, cualquier otra función primitiva de $f_{(x)}$ es de la forma:

$$F_{(x)} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO

- Comprueba que cualquier función del tipo $F_{(x)} = x^3 + c$ con $c \in \mathbb{R}$ es una función primitiva de $f_{(x)} = 3x^2$

INTEGRAL INDEFINIDA

La integral de una función $f_{(x)}$ es el conjunto de todas sus primitivas, y se representa como $\int f_{(x)}\,dx$. Se lee "la integral de $f_{(x)}$ diferencial de x".

Por lo tanto, si $F_{(x)}$ es una primitiva de $f_{(x)}$, entonces:

$$\int f_{(x)}\,dx = F_{(x)} + c$$

EJEMPLOS

- Calcula las siguientes integrales:

$a)\ \int 5x^4\,dx$

$b)\ \int sen\ x\,dx$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

SUMA Y RESTA

$$\int [f_{(x)} \pm g_{(x)}]dx = \int f_{(x)}\, dx \pm \int g_{(x)}\, dx$$

PRODUCTO POR UN NÚMERO

$$\int [k \cdot f_{(x)}]dx = k \cdot \int f_{(x)}\, dx$$

INTEGRAL DE FUNCIÓN CONSTANTE

$$\int k\, dx = kx + c$$

INTEGRACIÓN POR TABLAS

Funciones simples	**Funciones compuestas**
$\int dx = x + C$	
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$	$\int u^n \cdot u' \cdot dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u \cdot u' dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int cos\,x\,dx = sen\,x + C$	$\int cos\,u \cdot u' dx = sen\,u + C$
$\int sen\,x\,dx = -cos\,x + C$	$\int sen\,u \cdot u' dx = -cos\,u + C$
$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tg\,x + C$	$\int \frac{1}{cos^2 u} \cdot u' dx = tg\,u + C$

INTEGRACIÓN POR TABLAS

$\int (1+tg^2 x)\, dx = tg\, x + C$	$\int (1+tg^2\, \mathrm{u}) \cdot \mathrm{u}'\, dx = tg\, u + C$
$\int \frac{-1}{sen^2 x} dx = cotg\, x + C$	$\int \frac{-1}{sen^2 u} \cdot u'\, dx = cotg\, u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\, tg\, x + C$	$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u'\, dx = arc\, tg\, u + C$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = arc\, cotg\, x + C$	$\int \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'\, dx = arc\, cotg\, u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\, sen\, x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'\, dx = arc\, sen\, u + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\, cos\, x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'\, dx = arc\, cos\, u + C$

EJEMPLOS

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \sqrt{x}\, dx$

b) $\int sen^2 x \cdot \cos x \; dx$

c) $\int x^2 \cdot e^{x^3}\, dx$

d) $\int 3^{-\frac{x}{4}}\, dx$

e) $\int \frac{\sqrt{3}}{cos^2 \frac{x}{2}}\, dx$

f) $\int \frac{1}{1+[\ln(x^2+1)]^2} \cdot \frac{6x}{x^2+1}\, dx$

PRÁCTICA #1

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{3}{3x+5}\, dx$

b) $\int \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx$

c) $\int e^{2x}\, dx$

d) $\int \left(1 + \tan^2(2 - x)\right) dx$

e) $\int \frac{1}{(1+e^{-2x})e^{x}}\, dx$