ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3.
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Теоретический материал к данной теме содержится [1, глава 5].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) аналитическое решение **тестового** примера и результат вычислительного эксперимента по тесту; 4) решение поставленной задачи; 5) анализ полученных результатов; 6) графический материал (если необходимо);
7) тексты программ.

Варианты заданий к задачам 3.1-3.10 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 3.А.*

Задача 3.1. Дана система уравнений $Ax=b$ порядка n. Исследовать зависимость погрешности решения x от погрешностей правой части системы b.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать матрицу системы A и вектор правой части b. Составить программу, реализующую метод Гаусса (схема частичного выбора) для произвольной системы $Ax=b$. Используя составленную программу, найти решение заданной системы $Ax=b$. Используя встроенную функцию **lsolve**(A, b) пакета MATHCAD, найти решение x системы $Ax=b$
с помощью метода Гаусса.
2. С помощью встроенной функции **condi**(A) пакета MATHCAD вычислить число обусловленности матрицы A.
3. Принимая решение x, полученное в п. 1, за точное, вычислить вектор $d=(d_1,\dots,d_n)^T$,

$d_i=\dfrac{\|x-x^i\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, i=1, ..., n, относительных погрешностей решений x^i систем $Ax^i=b^i$, i=1, ..., n, где

компоненты векторов b^i вычисляются по формулам: $b_k^i=\begin{cases} b_k+\Delta, & k=i, \\ b_k, & k\neq i, \end{cases}$ k=1, ..., n

(Δ – произвольная величина погрешности).

4. На основе вычисленного вектора d построить гистограмму. По гистограмме определить компоненту b_m вектора b, которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения.

5. Оценить теоретически погрешность решения x^m по формуле:
$\delta(x^m)\le cond(A)\cdot\delta(b^m)$. Сравнить значение $\delta(x^m)$ со значением практической погрешности d_m. Объяснить полученные результаты.

УКАЗАНИЕ. Функция **condi**(A) возвращает число обусловленности матрицы A, основанное на ∞-норме. Для вычисления $\|\cdot\|_\infty$ вектора удобно воспользоваться встроенной функцией **max**(v) пакета MATHCAD, возвращающей максимальную компоненту вектора v.

#3.1.20

Компоненты вектора b во всех вариантах задаются формулой $b_i=N$, $\forall i=1\dots n$, коэффициенты $c=c_{ij}=0.1\cdot N\cdot i\cdot j$, $\forall i,j=1\dots n$, N - номер варианта.

N	n	a_{ij}
3.1.20	6	$\cos\left(\dfrac{c}{25}\right)$

ДАНО:

```
n = 6;
NVariant = 20;
b = Table[NVariant, {i, 1, n}];
c[i_, j_] := 0.1 * NVariant * i * j;
```

$$a[i\_, j\_] := \mathrm{Cos}\left[\frac{c[i, j]}{25}\right];$$

```
A = Table[a[i, j], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
Print["A = ", A // MatrixForm]
Print["b = ", b // MatrixForm]
```

$$A = \begin{pmatrix} 0.996802 & 0.987227 & 0.971338 & 0.949235 & 0.921061 & 0.886995 \\ 0.987227 & 0.949235 & 0.886995 & 0.802096 & 0.696707 & 0.57352 \\ 0.971338 & 0.886995 & 0.751806 & 0.57352 & 0.362358 & 0.130424 \\ 0.949235 & 0.802096 & 0.57352 & 0.286715 & -0.0291995 & -0.34215 \\ 0.921061 & 0.696707 & 0.362358 & -0.0291995 & -0.416147 & -0.737394 \\ 0.886995 & 0.57352 & 0.130424 & -0.34215 & -0.737394 & -0.965979 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

МЕТОДЫ:

```
Gauss[matrix_, right_] := Module[
  {(* Local variables *)
   A = matrix,
   b = right,
   n = Length[matrix],
   i = 0,
   j = 0,
   μ = 0
  },

  If[Length[A] ≠ Length[b] || SquareMatrixQ[A] == False,
   Return["Error: Invalid input."]];

  (* Forward *)
  For[i = 1, i < n, i++,
   For[j = i + 1, j <= n, j++,
     μ = A[[j, i]] / A[[i, i]];
     A[[j]] -= A[[i]] * μ;
     b[[j]] -= b[[i]] * μ;
    ];
  ];

  (* Backward *)
  For[i = n, i > 1, i--,
   For[j = i - 1, j ≥ 1, j--,
     μ = A[[j, i]] / A[[i, i]];
     A[[j]] -= A[[i]] * μ;
     b[[j]] -= b[[i]] * μ;
    ];
  ];

  Return [Table[b[[i]] / A[[i, i]], {i, 1, n}]]
 ]
```

РЕШЕНИЕ:

Наша система:

```
(A.x // MatrixForm) == (b // MatrixForm)
```

$$\begin{pmatrix} 0.996802\,x1 + 0.987227\,x2 + 0.971338\,x3 + 0.949235\,x4 + 0.921061\,x5 + 0.886995\,x6 \\ 0.987227\,x1 + 0.949235\,x2 + 0.886995\,x3 + 0.802096\,x4 + 0.696707\,x5 + 0.57352\,x6 \\ 0.971338\,x1 + 0.886995\,x2 + 0.751806\,x3 + 0.57352\,x4 + 0.362358\,x5 + 0.130424\,x6 \\ 0.949235\,x1 + 0.802096\,x2 + 0.57352\,x3 + 0.286715\,x4 - 0.0291995\,x5 - 0.34215\,x6 \\ 0.921061\,x1 + 0.696707\,x2 + 0.362358\,x3 - 0.0291995\,x4 - 0.416147\,x5 - 0.737394\,x6 \\ 0.886995\,x1 + 0.57352\,x2 + 0.130424\,x3 - 0.34215\,x4 - 0.737394\,x5 - 0.965979\,x6 \end{pmatrix} ==$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

1) Найдём решение методом Гаусса:

```
sol = Gauss[A, b];
Print["x = ", sol // MatrixForm]
```

$$x = \begin{pmatrix} 34.4377 \\ -21.8112 \\ 9.91103 \\ -3.06713 \\ 0.58044 \\ -0.0508029 \end{pmatrix}$$

2) Найдем число обусловленности матрицы:

```
condA = Norm[A, Infinity] * Norm[Inverse[A], Infinity]
```

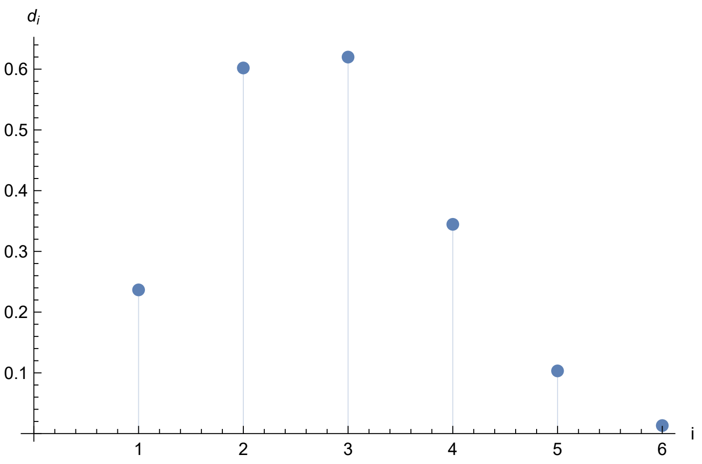
3.77631×10^8

3) Найдйм вектор d:

```
DeltaVector[matrix_, right_, delta_, solution_] := Module[
  {
   n = Length[matrix],
   A = matrix,
   b = right,
   d = Table[0, {i, 1, n}],
   bi, xi, i, k
  },
  For[i = 1, i <= n, i++,
   bi = Table[ If[ i == k, b[[k]] + delta, b[[k]] ], {k, 1, n} ];
   xi = Gauss[A, bi];
   d[[i]] = Norm[solution - xi, Infinity] / Norm[solution, Infinity];
  ];
  Return[d];
 ]
```

```
Δ = 10^-6;
d = DeltaVector[A, b, Δ, sol]
ListPlot[d, Filling → Axis, AxesLabel → {"i", "d_i"}]
```

```
{0.236607, 0.602004, 0.619931, 0.344538, 0.103228, 0.0132238}
```



```
Print["Наибольшее отклонение: ", Max[d], ", достигается при b^m, m = 3."]
```

```
Наибольшее отклонение: 0.619931, достигается при b^m, m = 3.
```

4) Оценим теоритически погрешность решения x^3:

```
δ[x_] := condA * (* ERROR *)
```