

**APLICACIONES DEL TEOREMA DE ESTABILIDAD DE
LIAPUNOV PARA SISTEMAS DE ECUACIONES EN
DIFERENCIAS.**

WBEIMAR OSWALDO VERA MARTÍNEZ

DIRECTOR:

DECCY YANETH TREJOS ANGEL

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2015

APLICACIONES DEL TEOREMA DE ESTABILIDAD DE LIAPUNOV PARA SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS.



WBEIMAR OSWALDO VERA MARTÍNEZ

Trabajo de grado para optar al título de Matemático.

DIRECTOR:

DECCY YANETH TREJOS ANGEL

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2015

*Dedicado a
Mi directora Deccy Trejos, por su apoyo y consejos,
mi familia y Adriana Acosta por su amor y apoyo incondicional.*

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a todas aquellas personas que me acompañaron en este gran camino del conocimiento, quienes siempre tuvieron una frase de apoyo y una sonrisa. En especial deseo agradecer a mi tutora Deccy Trejos, por su gran apoyo y cordialidad, a todos mis profesores que dan lo mejor, para labrar un mejor futuro.

A mi padre, quien amo con todo el corazón, le agradezco su sacrificio, lucha y amor, me enseñó que en la vida por más difícil que nos parezca en algunos momentos nunca hay que renunciar, siempre hay que luchar y dar lo mejor que uno tiene. A Nana, la persona que más amo del mundo. Le quiero agradecer de todo corazón por su apoyo incondicional, por su paciencia en los momentos difíciles, su gran ánimo, y sobre todo por su comprensión y amor. Por último, a mis compañeros, amigos y demás familiares por todos los momentos compartidos.

Resumen

En este trabajo de grado se presentan algunas aplicaciones del teorema de estabilidad de Liapunov para sistemas de ecuaciones en diferencias autónomas no lineales, descrito en el libro An Introduction to Difference Equations del Ph.D Saber N. Elaydi [2]. El cual hace un estudio de estabilidad sin conocer sus soluciones explícitas alrededor de los puntos fijos.

Palabras clave

Análisis de Estabilidad, Puntos fijos, ecuaciones en diferencia, función de Liapunov.

Índice general

1. Preliminares Matemáticos	12
1.1. Ecuaciones en Diferencias	12
1.2. Teora de Estabilidad	25
1.3. Análisis del espacio de fase	27
2. Estabilidad de ecuación en diferencia autónoma no lineal	37
2.1. Método directo de Liapunov	37
2.2. Teorema de estabilidad de Liapunov	39

Índice de figuras

1.1. Valores de $A(n)$	14
1.2. puntos de equilibrio para $x(n+1) = x(n)^3$	14
1.3. puntos de equilibrio para $x(n+1) = x^2 - x + 1$	15
1.4. Puntos de equilibrio [2]	15
1.5. Punto de equilibrio atractor [2]	16
1.6. Punto de equilibrio asintóticamente estable [2]	16
1.7. equilibrio asintóticamente estable	18
1.8. equilibrio estable	18
1.9. equilibrio inestable	19
1.10. Si $a > 0$, todas las soluciones con $x_0 > 0$ convergen a $x_2^* = 1$	20
1.11. Si $a < 0$, todas las soluciones con $x_0 < 1$ convergen a $x_1^* = 0$	20
1.12. $1 < \mu < 3$ ($0 < ha < 2$)	21
1.13. $0 < \mu < 1$ ($-1 < ha < 0$)	22
1.14. $\mu > 3$ ($ha > 2$),	22
1.15. $\alpha = 1 + ha$, $\beta = \alpha - 1 = ha$	23
1.16. Equilibrio estable en el espacio de fase [2]	26
1.17. Equilibrio uniforme asintóticamente estable [2]	26
1.18. Atractor pero no equilibrio estable [2]	27
1.19. $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$, nudo silla estable [2]	29
1.20. $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$, nudo inestable [2]	30
1.21. $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 > 1$, Silla (inestable). [2]	30
1.22. $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$, Nudo Asintóticamente estable. [2]	30
1.23. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < \lambda_1$, nudo degenerado. [2]	31
1.24. $\lambda_1 = \lambda_2 < 1$, Asintóticamente estable [2]	31

1.25. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, caso degenerado (inestable). Todos los puntos del eje y_1 son puntos de equilibrio. [2]	31
1.26. $ \lambda_1 < 1$, foco asintóticamente estable [2]	32
1.27. $ \lambda_1 > 1$, foco inestable. [2]	33
1.28. $ \lambda_1 = 1$, Centro (estable). [2]	33
1.29. Silla canónica [2]	34
1.30. Silla real [2]	35
1.31. Foco inestable canónico [2]	36
1.32. Foco inestable real [2]	36
2.1. Una función de Liapunov cuadrática [2]	38
2.2. Curvas de nivel [2]	39
2.3. Un equilibrio globalmente asintóticamente estable [2]	41

Introducción

En este trabajo de grado se desarrollará bajo la modalidad de monografía, se presentará una reconstrucción del teorema de estabilidad de Liapunov para ecuaciones en diferencia autónoma no lineal, del libro An Introduction to Difference Equations del Ph.D Saber N. Elaydi.

Inicialmente se estudiará; la forma y la clasificación de ecuaciones en diferencia, las cuales son muy usadas para el análisis de situaciones discretas, cómo es la solución de una ecuación en diferencia, cómo calcular sus puntos de equilibrio, establecer el comportamiento de las soluciones en los puntos de equilibrio, para este propósito usaremos algunas nociones de la teoría de estabilidad.

Para la segunda parte del trabajo se estudiará la estabilidad para ecuaciones en diferencia autónomas no lineales, usando el método directo de Liapunov, el cual se basa en encontrar una función de Liapunov adecuada para el sistema, si además la función es definida positiva con respecto al punto de equilibrio entonces se puede garantizar la estabilidad del sistema en el punto de equilibrio.

OBJETIVOS

Objetivo General

Reconstruir y analizar el primer teoremas del capítulo 4) Stability theory, sección 4.5) Liapunov stability Theory del libro An Introduction to Difference Equations.

Objetivos Específicos

1. Recopilación y comprender la teoría necesaria para la estabilidad de ecuaciones en diferencias.
2. Analizar la estabilidad de ecuaciones en diferencia autónomos no lineales con el método directo de Liapunov.
3. Aplicar el método directo de Liapunov en algunos problemas de ecuaciones en diferencia.

Antecedentes

La teoría básica de ecuaciones en diferencias lineales se desarrolló en el siglo *XVIII* por Moivre, Euler, Lagrange, Laplace, y otros. Las ecuaciones en diferencia fueron usadas por Moivre para resolver la ecuación de Fibonacci, también fueron usadas por Laplace, como parte de su trabajo en la teoría de probabilidad, representaciones integrales de soluciones y su comportamiento asintótico (método de Laplace).

La idea de utilizar ecuaciones en diferencias para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales se originó en 1769 con el método poligonal de Euler, para los que la prueba de la convergencia fue dada por Cauchy alrededor de 1840. A final del siglo XIX, cuando Lipschitz, Runge y Kutta desarrollaron procedimientos mejorados. Una importante necesidad de aproximaciones numéricas durante la Primera Guerra Mundial estimuló enormemente la investigación en esta área, y el número de publicaciones aumento con el desarrollo de la computadora digital. Cuando se plantea una ecuación en diferencia es importante estudiar el comportamiento de las soluciones a través del tiempo por esto es necesario hacer un análisis de estabilidad.

La teoría de la estabilidad para ecuaciones en diferencia se utiliza para establecer la convergencia de las soluciones obtenidas como resultado de algún método iterativo. Aunque la mayoría de estos resultados son de naturaleza local, usando el método adecuado se puede extender a resultados globales.

Los conceptos de estabilidad e inestabilidad esta presentes en la vida cotidiana. No es sino hasta 1892 cuando Liapunov formuló de manera precisa el concepto de estabilidad con su trabajo de tesis problema general de la estabilidad del movimiento. En la cual analizó el problema de la estabilidad del movimiento de los sistemas con un número finito de grados de libertad. Su tesis fue defendida exitosamente el 30 de septiembre de 1892 en la Universidad Estatal de Moscú. En junio de 1893, a los 30 años, recibió el grado de Profesor en la Universidad Nacional de Járkov; donde laboró hasta 1902. Este método, conocido como método directo de Liapunov, permite investigar la naturaleza cualitativa de soluciones sin determinar realmente las propias soluciones. Por lo tanto, se considera que es una de las principales herramientas de la teoría de la estabilidad. El método gira en torno a la búsqueda de ciertas funciones con valores reales, los cuales llevan el nombre de Liapunov. El principal inconveniente en el método directo radica en la determinación de la función de Liapunov apropiada para una ecuación dada.

Capítulo 1

Preliminares Matemáticos

Las ecuaciones en diferencias son usadas frecuentemente en la descripción de eventos físicos, biológicos, estadísticos, entre otros, ya que permiten modelar la evolución del fenómeno a través del tiempo discreto, sin embargo es necesario ver el comportamiento de las soluciones del sistema, buscar sus puntos de equilibrio, para así establecer la estabilidad del mismo. Basados en el libro cite^{el}aydi2005introduction, este capítulo presenta los temas principales para comprender la teoría que permitirá posteriormente desarrollar los capítulos 2 y 3. Se dan las definiciones y teoremas previos sobre las ecuaciones en diferencias lineales y no lineales, además se desarrollara la teoría de estabilidad para ecuaciones en diferencias autónomas no lineales.

1.1. Ecuaciones en Diferencias

Las ecuaciones en diferencia suelen describir la evolución de ciertos fenómenos en el transcurso del tiempo, supóngase que, una población determinada tiene generaciones discretas, el tamaño $(n+1)$ generación $x(n+1)$ es una función de la generación n -enésima generación $x(n)$. Esta relación se expresa en la ecuación en diferencia

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (1.1)$$

que también recibe el nombre de ecuación autónoma o de tiempo invariante.

Si la sucesión comienza en un punto x_0 genera la siguiente sucesión

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

por conveniencia se puede denotar

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots f^n(x_0) = f(\dots f(f(x_0)) \dots).$$

Dónde $f(x_0)$ es la primera iteración de x_0 en f , y más generalmente $f^n(x_0)$ es la n -ésima iteración de x_0 en f . Si se toma el conjunto de todas las iteraciones (positivas) $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ cuando $f^0(x_0) = x_0$ por definición, este conjunto proporciona un ejemplo de un sistema dinámico discreto (ver [2]).

Sea $x(n) = f^n(x_0)$ reemplazando en (1.1)

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x(n)).$$

y observe que satisface $x(0) = f^0(x_0) = x_0$.

La ecuación en diferencia (1.1) puede ser de la forma:

i) Homogénea:

$$x(n+1) = a(n)x(n); \quad x(n_0) = x_0; \quad n \geq n_0 \geq 0. \quad (1.2)$$

ii) No-Homogénea:

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n); \quad x(n_0) = x_0; \quad n \geq n_0 \geq 0. \quad (1.3)$$

donde $a(n)$ y $g(n)$ son funciones de valor real con $a(n) \neq 0$, definidas para $n \geq n_0 \geq 0$.

Las sucesiones

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0$$

y

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 + \left[\sum_{j=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=j+1}^{n-1} a(i) \right] g(j) \right]$$

son soluciones de las ecuaciones (1.2) y (1.3) respectivamente y estas se pueden obtener por simple iteración.

Ejemplo 1 Supongamos que la suma constante T se deposita al final de cada período fijo en un banco que paga intereses a la tasa r por período. Sea $A(n)$ el monto acumulado en el banco después de n periodos.

La ecuación en diferencia es

$$A(n+1) = (1+r)A(n) + T.$$

Esta es una ecuación en diferencia no homogénea,

la solución sería

$$A(n) = (1 - r)^n A_0 + T \left[\frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} \right],$$

si se toma $T = 200$, $A_0 = 0$ y $r = 0,008$, se tiene entonces

$$A(n) = 25000 [(1,008)^n - 1],$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A(n)	0	200	401,6	604,813	809,651	1016,129	1224,26	1434,0516	1645,524	1858,688	2073,558

Figura 1.1: Valores de $A(n)$

Definición 1.1.1 Punto de equilibrio

Un punto x^* en el dominio de la función f es un punto de equilibrio de (1.1), si es un punto fijo de f es decir $f(x^*) = x^*$

Esto es, x^* es una solución constante de (1.1), si $x(0) = x^*$ es un punto inicial, entonces $x(1) = f(x^*) = x^*$ y $x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*$ y así sucesivamente.

Gráficamente, un punto de equilibrio es la x-coordenada del punto donde la gráfica de f interseca la recta $y = x$

Ejemplo 2 Sea $x(n + 1) = x(n)^3$, donde $f(x) = x^3$, para encontrar los puntos de equilibrio tenemos que resolver la siguiente ecuación

$$x^3 = x$$

se tiene $x(x + 1)(x - 1) = 0$ luego hay tres puntos de equilibrio $-1, 0, 1$

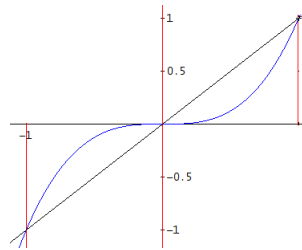


Figura 1.2: puntos de equilibrio para $x(n + 1) = x(n)^3$

Ejemplo 3 Hallar los puntos de equilibrio para $x(n + 1) = x(n)^2 - x(n) + 1$ resolvemos

$$x^2 - x + 1 = x$$

entonces $(x - 1)^2 = 0$

luego solo tiene un único punto de equilibrio que es 1

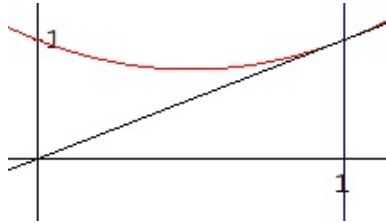
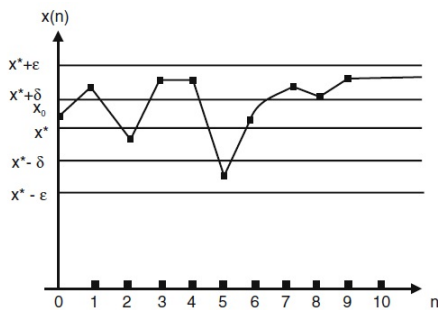


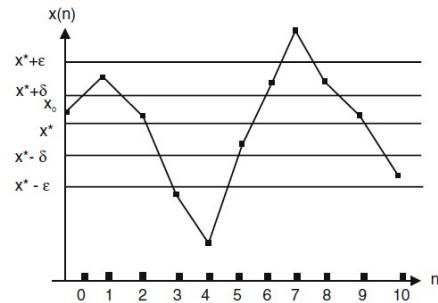
Figura 1.3: puntos de equilibrio para $x(n+1) = x^2 - x + 1$

Definición 1.1.2 Estabilidad Unidimensional

- el punto de equilibrio x^* de una ecuación en diferencia es estable si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|f^n(x_0) - x^*| < \epsilon$ para todo $n > 0$. Si x^* no es estable, entonces es llamado inestable.



(a) Estable



(b) Inestable

Figura 1.4: Puntos de equilibrio [2]

- el punto x^* se dice atractor si existe $\eta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \eta$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$.
Si $\eta = \infty$, x^* es llamado un atractor global o globalmente atractor.

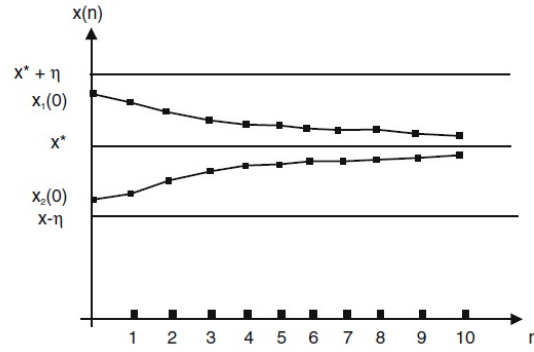


Figura 1.5: Punto de equilibrio atractor [2]

- El punto x^* es un punto de equilibrio asintóticamente estable si es estable y atractor.

Si $\eta = \infty$, x^* se dice globalmente asintóticamente estable.

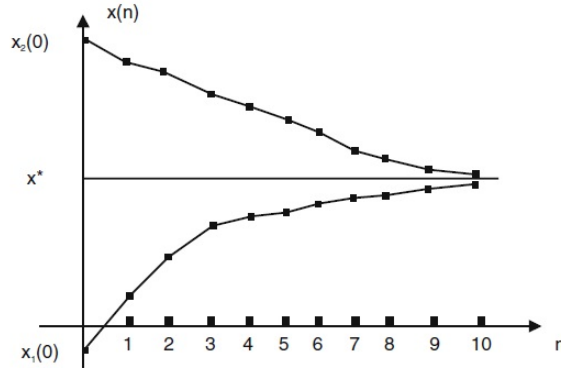


Figura 1.6: Punto de equilibrio asintóticamente estable [2]

Ejemplo 4 (Fenómeno de la telaraña)

Se quiere estudiar la fijación de los precios de un producto determinado. Sea $S(n)$, el número de unidades suministradas en un periodo n . $D(n)$ el número de unidades demandadas en un periodo n , y $p(n)$ el precio por unidades en el periodo n . Por facilidad, se supone $D(n)$ dependiente lineal de $p(n)$ y se denota

$$D(n) = -m_d p(n) + b_d, \quad m_d > 0, \quad b_d > 0.$$

Esta ecuación se refiere a la curva precio-demanda. La constante m_d representa la sensibilidad de los consumidores a los precios. También se supone la curva precio-oferta que se refiere a la oferta en cualquier periodo.

$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s, \quad m_s > 0, \quad b_s > 0.$$

La constante m_s es la sensibilidad de los proveedores al precio. La pendiente de la curva demanda es negativa, ya que un aumento de una unidad en el precio produce una disminución de m_d unidades en la demanda. Correspondientemente, un incremento de m_s unidad en el precio provoca un aumento en las unidades de suministro, creando una pendiente positiva de la curva. Un tercer supuesto que hacemos aquí es que el precio de mercado es cuando la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales, que es decir, en la que $D(n+1) = S(n+1)$.

Por lo tanto

$$-m_d p(n) + b_d = m_s p(n) + b_s,$$

o

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f(p(n)), \quad (1.4)$$

dónde

$$A = -\frac{m_s}{m_d}, \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$$

Ésta es una ecuación en diferencias lineal de primer orden, no homogénea. Para hallar el punto de equilibrio p^* , igualamos la ecuación en diferencia a p , es decir, $Ap + B = p$, tal que $p^* = \frac{B}{A-1}$. Se mira la solución $p(n)$, entonces como (1.4) no es homogénea. B es constante y $A \neq 1$, luego

$$p(n) = A^n p_0 + B \left[\frac{A^n - 1}{A - 1} \right]$$

$$p(n) = \left(p_0 - \frac{B}{1 - A} \right) A^n + \frac{B}{1 - A} \quad (1.5)$$

Debido a que A es la relación de las pendientes de las curvas de oferta y demanda, esta relación determina el comportamiento de la secuencia precio. Hay tres casos a considerar:

- $(-1 < A < 0)$; En este caso los valores alternan encima y por debajo, pero convergen al punto de equilibrio p_* . En la jerga de la economía, el precio p_* se considera "estable"; en matemáticas, se refiere a ella como "asintóticamente estable".

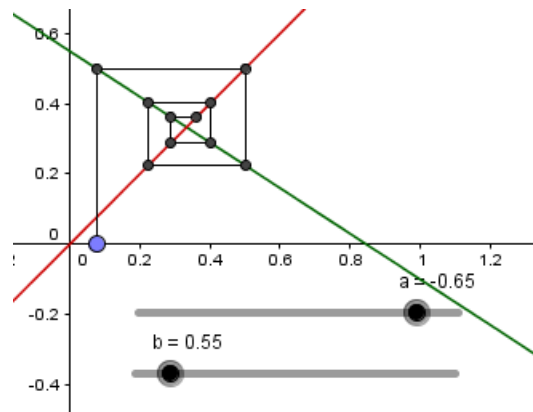


Figura 1.7: equilibrio asintóticamente estable

- ($A = -1$); los valores oscilan entre dos únicos valores. Si $p(0) = p_0$, entonces $p(1) = -p_0 + B$ y $P(2) = p_0$. De ahí que el punto de equilibrio p^* es estable

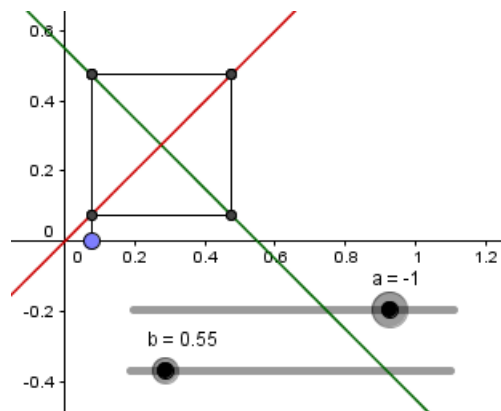


Figura 1.8: equilibrio estable

- ($A < -1$); Los valores oscilan infinitamente sobre el punto de equilibrio p^* , pero progresivamente se mueven más lejos de él. Por lo tanto, el punto de equilibrio se considera inestable.

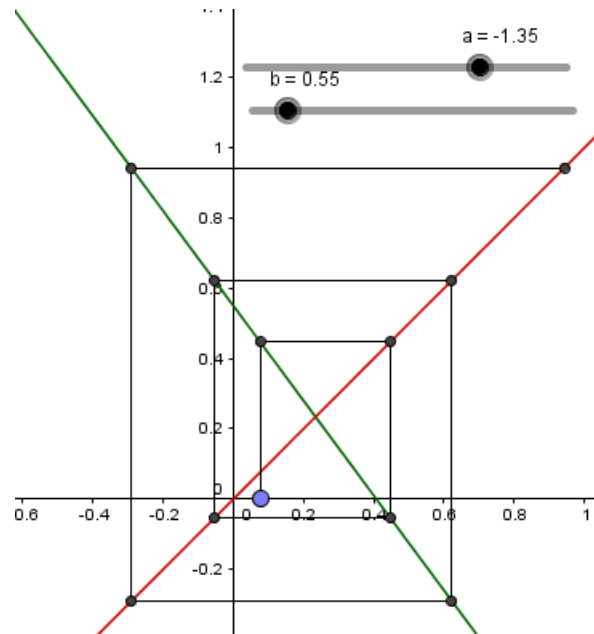


Figura 1.9: equilibrio inestable

Para poder convertir una ecuación diferencial de primer orden a una ecuación en diferencia, tenemos que utilizar un esquema numérico para aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Un esquema numérico conduce a la construcción de una ecuación en diferencia asociada que es más susceptible a la computación. Se utiliza sólo dos esquemas, el Método de Euler y un esquema no estándar (ver[2]).

Ejemplo 5 *Se considera la ecuación logística diferencial*

$$x'(t) = ax(t)(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1.6)$$

Para hallar los puntos de equilibrio se toman $x'(t) = 0$, entonces $ax(1 - x) = 0$ y se obtiene dos puntos de equilibrio, $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1$. La solución exacta de (1.6), se puede obtener por separación de variables, así la solución es

$$x(t) = \frac{be^{at}}{1 + be^{at}}, \quad b = e^c.$$

Ahora, supóngase $x(0) = x_0 = \frac{b}{1-b}$, luego $b = \frac{x_0}{1-x_0}$. Sustituyendo en $x'(t)$,

$$x(t) = \frac{x_0 e^{at}}{1 + x_0(e^{at} - 1)}. \quad b = e^c.$$

Se mirará cómo es el comportamiento de $x'(t)$

- si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_0 e^{at}}{1 + x_0(e^{at} - 1)} = 1$, es decir, esta solución converge al punto de equilibrio $x_2^* = 1$.

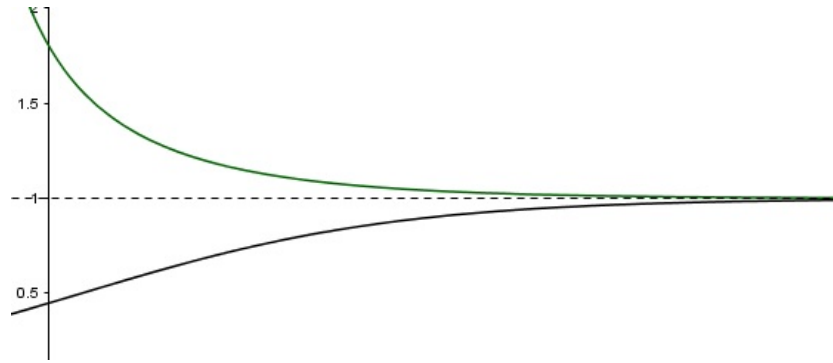


Figura 1.10: Si $a > 0$, todas las soluciones con $x_0 > 0$ convergen a $x_2^* = 1$

- si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_0 e^{at}}{1 + x_0(e^{at} - 1)} = 0$, es decir, esta solución converge al punto de equilibrio $x_1^* = 0$.

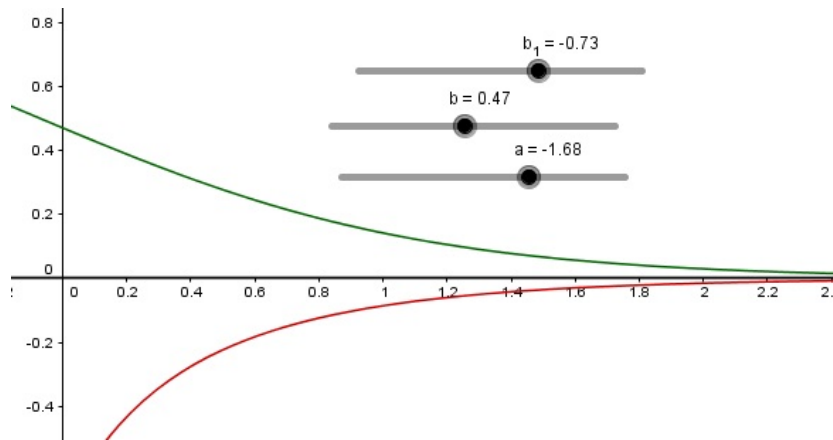


Figura 1.11: Si $a < 0$, todas las soluciones con $x_0 < 1$ convergen a $x_1^* = 0$

Ahora, aplicando el Método de Euler en la ecuación logística diferencial, La ecuación correspondiente aproximada en diferencia está dada por

$$x(n+1) = x(n) + hax(n)(1-x(n)), \quad x(0) = x_0. \quad (1.7)$$

Los puntos de equilibrio se hallan con $x(n+1) = x$, entonces $x + hax(1-x) = x$, por lo tanto $hax(1-x) = 0$, Lo cual indica que tiene dos puntos de equilibrio $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$ tal como el caso de la ecuación diferencial.

Haciendo un cambio de variable se tiene una ecuación en diferencia más sencilla de trabajar.

sea $y(n) = \frac{ha}{1+ha}x(n)$ y sustituyendo en (1.7) y haciendo cálculos sencillas se obtiene

$$y(n+1) = (1+ha)y(n)(1-y(n)).$$

o

$$y(n+1) = \mu y(n)(1-y(n)). \quad y(0) = \frac{ha}{1+ha} \quad y \quad \mu = 1+ha.$$

Los puntos de equilibrio correspondientes a $\mu y(1-y) - y = 0$ son

$$y_1^* = 0 \quad y \quad y_2^* = \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{ha}{1+ha} \quad \text{los cuales corresponden a } x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1$$

Utilizando el diagrama de se mirara que pasa cuando

- $1 < \mu < 3$ ($0 < ha < 2$), todas las soluciones con condición inicial y_0 en el intervalo $(0, 1)$ convergen al punto de equilibrio $y_2^* = \frac{ha}{1+ha}$

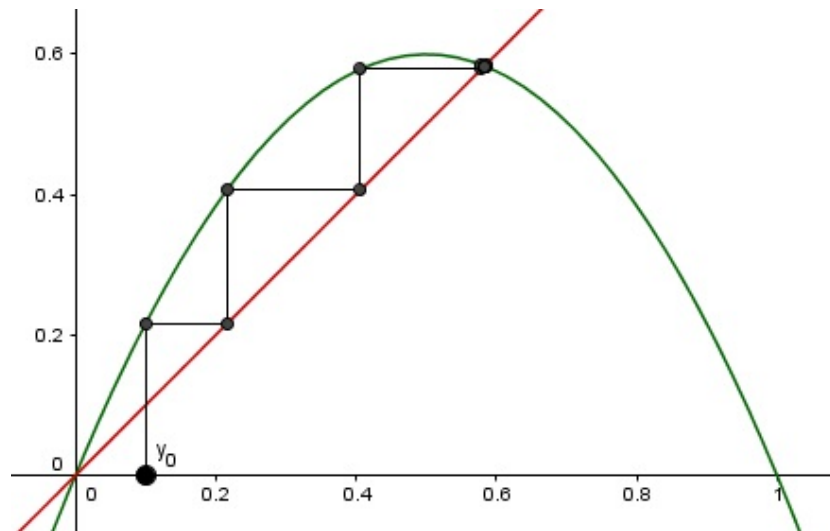


Figura 1.12: $1 < \mu < 3$ ($0 < ha < 2$)

- $0 < \mu < 1$ ($-1 < ha < 0$), todas las soluciones con condición inicial y_0 en el intervalo $(0, 1)$ convergen al punto de equilibrio $y_1^* = 0$

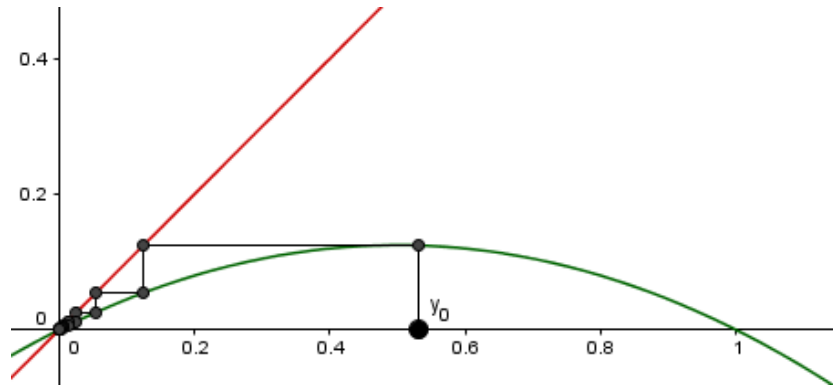


Figura 1.13: $0 < \mu < 1$ ($-1 < ha < 0$)

- $\mu > 3$ ($ha > 2$), casi todas las soluciones en las que los puntos iniciales están en el intervalo $(0, 1)$ no convergen a cualquiera de los puntos de equilibrio y_1^* o y_2^* .

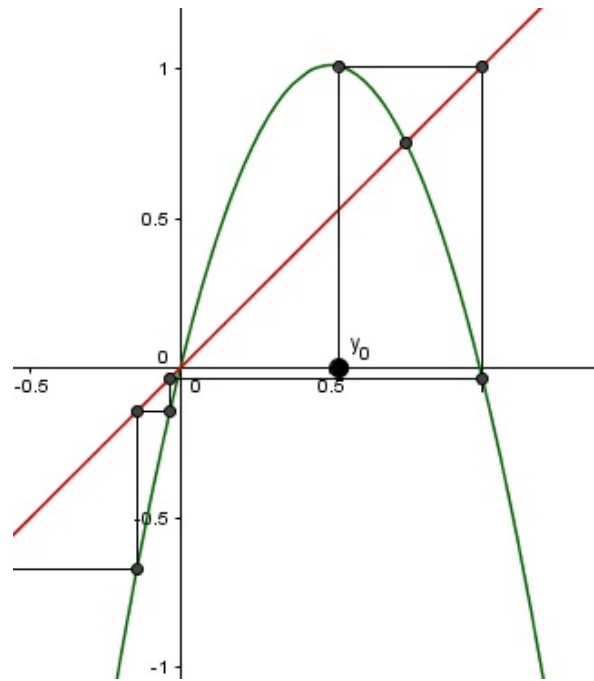


Figura 1.14: $\mu > 3$ ($ha > 2$),

La aproximación a la ecuación logística diferencial por el esquema no estándar, consiste en reemplazar $x^2(n)$ en el método de Euler (1.7) por $x(n)x(n+1)$, tal que

$$x(n+1) = x(n) + hax(n) - hax^2(n) = x(n) + hax(n) - hax(n)x(n+1).$$

Simplificando se obtiene la ecuación diferencial

$$x(n+1) = \frac{(1+ha)x(n)}{1+ha x(n)}.$$

o

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n)}{1+\beta x(n)}, \quad \alpha = 1+ha, \quad \beta = \alpha - 1.$$

Los puntos de equilibrio correspondiente a $\frac{\alpha x}{1+\beta x} - x = 0$, es decir, $\frac{x(\alpha-1)(1-x)}{1+\beta x} = 0$ son $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$

El diagrama de telaraña se concluye que $\alpha > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 1$, Puesto que $h > 0$, $\alpha > 1$ si y sólo si $a > 0$. Por lo tanto, todas las soluciones convergen hasta el punto $x_2^* = 1$ equilibrio si $a > 0$ como en el caso de la ecuación diferencial, independientemente del tamaño de h .

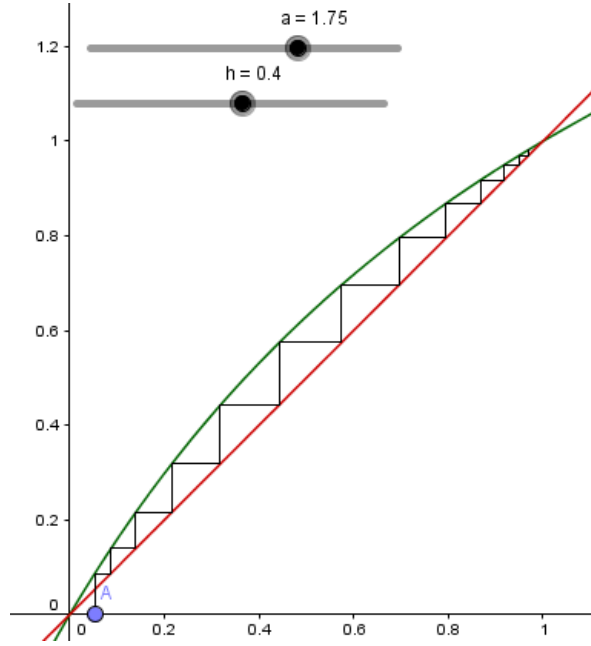


Figura 1.15: $\alpha = 1 + ha$, $\beta = \alpha - 1 = ha$

Definición 1.1.3 Operador diferencial

Es el operador diferencial para espacios discretos, se define como

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1.8)$$

Definición 1.1.4 Una ecuación en diferencia de orden k es una relación de la forma

$$F(x(n+k), x(n+k-1), x(n+k-2), \dots, x(n), n) = 0, \quad x(n_0) = x_{n_0}, \quad (1.9)$$

donde F es una función continua para todo $x(n) \in \mathbb{R}$ y $n = 0, 1, 2, \dots$

Definición 1.1.5 Una ecuación en diferencias lineal de orden k esta dada por:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = g(n), \quad (1.10)$$

donde $p_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$ y $g(n)$ son funciones a valor real definidas para $n > n_0$ y $p_k(n) \neq 0$, $\forall n > n_0$.

- i) Si $g(n) = 0$, entonces la ecuación en diferencia es Homogénea.
- ii) Si $g(n) \neq 0$, entonces la ecuación en diferencia es No-Homogénea.

La ecuación (1.10) puede ser escrita de la forma:

$$x(n+k) = -p_1(n)x(n+k-1) - p_2(n)x(n+k-2) - \dots - p_k(n)x(n) + g(n), \quad (1.11)$$

Dejando $n = 0$ en (1.11), obtenemos $x(k)$ en términos de $x(k-1)$, $x(k-2)$, \dots , $x(0)$. Explícitamente se tiene:

$$x(k) = -p_1(0)x(k-1) - p_2(0)x(k-2) - \dots - p_k(0)x(0) + g(0), \quad (1.12)$$

Una vez obtenido $x(k)$, podemos calcular el término $x(k+1)$. Tomando $n = 1$ en (1.11), se obtiene:

$$x(k+1) = -p_1(1)x(k) - p_2(1)x(k-1) - \dots - p_k(1)x(1) + g(1) \quad (1.13)$$

Realizando el proceso iterativamente, es posible evaluar todos los $x(n)$ para $n \geq k$.

La solución de la ecuación en diferencia lineal de orden k (1.10) con coeficientes constantes, esta dada por:

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i \lambda^n, \quad (1.14)$$

Si las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de la ecuación característica o auxiliar $\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \dots + p_k = 0$ son distintas (ver sección 2.3 de [2]).

Definición 1.1.6 Una sucesión $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ o simplemente $\{x(n)\}$ se dice que es solución de (1.10) si satisface dicha ecuación.

Ejemplo 6 Sea la ecuación en diferencia

$$x(n+3) - 7x(n+1) + 6x(n) = 0,$$

- *Mostrar que la sucesión 1 , $(-3)^n$ y 2^n son solución de (6)*
 $x(n) = 1$, es solución, ya que $1(1)^{n+3} + 7(1)^{n+1} + 6(1)^n = 1 + 7 + 6 = 0$, además $x(n) = (-3)^n$, es $(-3)^{n+3} + 7(-3)^{n+1} + 6(-3)^n = (-3)^n [-27 + 21 + 6] = 0$ y finalmente $x(n) = (2)^n$, es solución, ya que $(2)^{n+3} + 7(2)^{n+1} + 6(2)^n = (2)^n [8 - 14 + 6] = 0$
- *Encontrar el Casoratian [2] de las soluciones anteriores*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & (2)^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & (2)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & (2)^{n+2} \end{pmatrix}$$

Así

$$W(n) = 20(2)^n(-3)^n. \quad (1.15)$$

A la formula (1.15), se le llama formula de Abel.

Ahora se definirá la estabilidad para ecuaciones en diferencia en varias dimensiones.

1.2. Teora de Estabilidad

Sea la ecuación en diferencia vectorial

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad x(n_0) = x_0, \quad (1.16)$$

donde $x(n) \in \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. suponga que $f(n, x)$ es continua en x ,

Un punto x^* en \mathbb{R}^k es llamado un punto de equilibrio de (1.16), si $f(n, x^*) = x^*$ para todo $n \geq n_0$.

Definición 1.2.1 *El punto de equilibrio de x^* se dice que es:*

1. *Estable (S) si dado $\varepsilon > 0$ y $n_0 \geq 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ tal que $\|x_0 - x^*\| < \delta$ implica $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, Uniformemente Estable (US) si δ puede ser elegido independiente de n_0 , Inestable (I) si no es estable.*

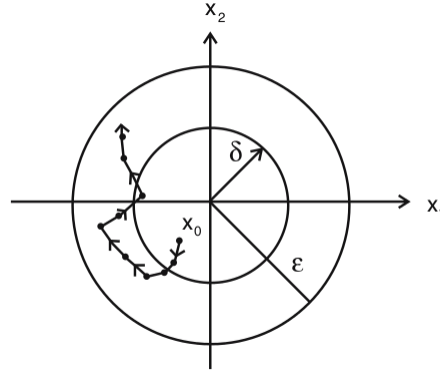


Figura 1.16: Equilibrio estable en el espacio de fase [2]

2. *Atractor (A)* si existe $\mu > \mu(n_0)$ tal que $\|x_0 - x^*\| < \mu$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = x^*$.
3. *Uniformemente atractor (UA)* si la elección de μ es independiente de n_0 , es decir, si existe $\mu > 0$ tal que para todo ε y n_0 existe $N = N(\varepsilon)$ independiente de n_0 tal que $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0 + N$ siempre que $\|x_0 - x^*\| < \mu$.
4. *Asintóticamente estable (AS)* si es estable y atractor,
5. *Uniforme asintóticamente Estable (UAS)* si es uniformemente estable y uniformemente atractor.

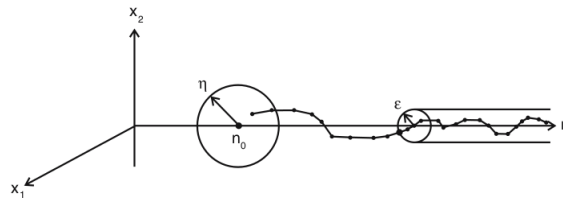


Figura 1.17: Equilibrio uniforme asintóticamente estable [2]

6. *Exponencialmente Estable (ES)* si existe $\delta > 0$, $M > 0$, y $\eta \in (0, 1)$ tal que $\|x(n, n_0, x_0)\| \leq M \|x_0 - x^*\| \eta^{n-n_0}$, siempre que $\|x_0 - x^*\| < \delta$.
7. Una solución $x(n, n_0, x_0)$ está acotada si para alguna constante positiva M , $\|x(n, n_0, x_0)\| \leq M$ para todo $n \geq n_0$, donde M puede depender de cada solución.

Ejemplo 7 Consideremos la ecuación en diferencia (en coordenadas polares)

$$r(n+1) = \sqrt{r(n)}, r > 0,$$

$$\theta(n+1) = \sqrt{2\pi\theta(n)}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

se puede ver que el punto de equilibrio es $(1,0)$ es atractor pero no estable. ya que

$$r(n) = r_0^{2^{-n}}, r_0 = r(0),$$

$$\theta(n) = (2\pi)^{(1-2^{-n})} \cdot (\theta_0)^{2^{-n}}, \theta_0 = \theta(0)$$

como, $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 2\pi$. Si $r_0 \neq 0$, $\theta_0 = 0$, entonces

$$(r(n), \theta(n)) = (r_0^{2^{-n}}, 0),$$

que converge al punto de equilibrio $(1,0)$. Sin embargo, si $\theta = \delta\pi$, con $0 < \delta < 1$, entonces la órbita de (r_0, θ_0) va en espiral alrededor del círculo antihorario que converge al punto de equilibrio $(1,0)$, por lo tanto, el punto de equilibrio $(1,0)$ es atractor pero no es estable.

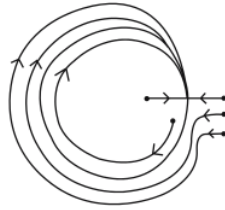


Figura 1.18: Atractor pero no equilibrio estable [2]

1.3. Análisis del espacio de fase

Sea el sistema autónomo de segundo orden

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n), \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n), \end{aligned}$$

ó

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{1.17}$$

cuando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dado x^* un punto de equilibrio del sistema (1.17). Si $Ax^* = x^*$ o $(A - I)$ es no singular, entonces $x^* = 0$ es el único punto de equilibrio del sistema (1.17). Por otra parte, si $(A - I)$ es singular, entonces existe una familia de puntos de equilibrio, como ilustra la figura (1.19). En este ultimo caso supóngase $y(n) = x(n) - x^*$ en (1.17) (cambio de coordenada), para obtener el sistema $y(n+1) = Ay(n)$, que es idéntico al sistema (1.17). Por lo tanto, las propiedades de estabilidad de cualquier punto de equilibrio $x^* \neq 0$ son los mismos que los puntos de equilibrio $x^* = 0$. De aquí en adelante, se asume que $x^* = 0$ es el único punto de equilibrio del sistema (1.17).

Sea $J = P^{-1}AP$ la forma de Jordan de A . Entonces J puede tener una de las siguientes formas canónicas:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \\ \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \\ \lambda_1, \lambda_2 & \lambda & \lambda = \alpha \pm i\beta \\ \text{valores propios} & \text{valor propio} & \text{valor propio} \\ \text{distintos reales} & \text{repetido real} & \text{complejo conjugado} \end{array} \quad (1.18)$$

Ahora si se toma

$$y(n) = P^{-1}x(n),$$

o

$$x(n) = Py(n), \quad (1.19)$$

entonces el sistema (1.17) se convierte en

$$y(n+1) = Jy(n). \quad (1.20)$$

Si $x(0) = x_0$ es una condición inicial para el sistema (1.17), entonces

$$y(0) = y_0 = P^{-1}x_0,$$

será la correspondiente condición inicial para el sistema (1.20).

Se puede esbozar el espacio de fase del sistema (1.20) en tres casos.

Sea el valor inicial

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix},$$

en el plano $y_1 y_2$, se traza el movimiento de los puntos $y(1), y(2), y(3), \dots$

Esencialmente, se dibujan las órbitas $\{y(n, 0, y_0) | n \geq 0\}$. Una flecha en la órbita indica la dirección del movimiento a medida que aumenta el tiempo.

- Caso (a): El sistema se toma la forma de

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \lambda_1 y_1(n), \\ y_2(n+1) &= \lambda_2 y_2(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_{10} \\ \lambda_2^n y_{20} \end{pmatrix},$$

y así

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} y_{20} \\ y_{10} \end{pmatrix}.$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_2(n) / y_1(n) = 0$, y si $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|y_2(n)|}{|y_1(n)|} = \infty.$$

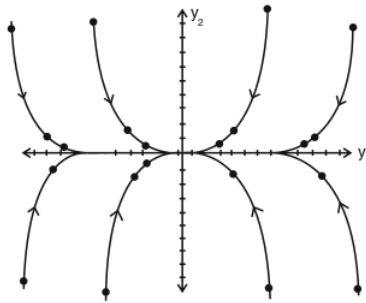


Figura 1.19: $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$, nudo silla estable [2]

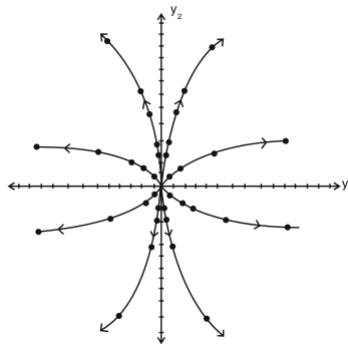


Figura 1.20: $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$, nudo inestable [2]

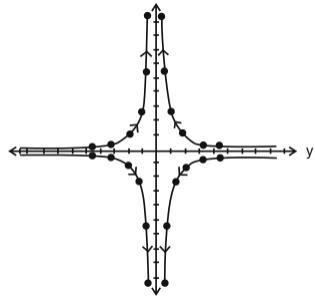


Figura 1.21: $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 > 1$, Silla (inestable). [2]

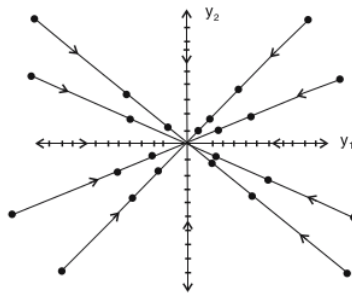


Figura 1.22: $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$, Nudo Asintóticamente estable. [2]

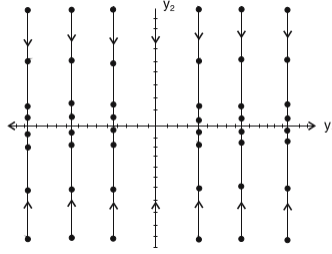


Figura 1.23: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < \lambda_1$, nudo degenerado. [2]

■ Caso (b): Dado

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix},$$

o

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20}, \\ y_2(n) &= \lambda^n y_{20}. \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$$

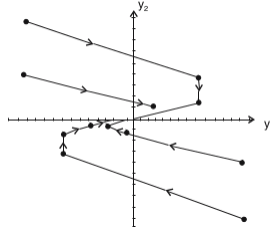


Figura 1.24: $\lambda_1 = \lambda_2 < 1$, Asintóticamente estable [2]

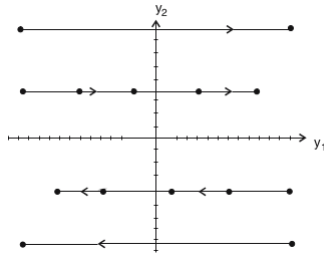


Figura 1.25: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, caso degenerado (inestable). Todos los puntos del eje y_1 son puntos de equilibrio. [2]

- Caso (c): La matriz A tiene dos valores propios complejos conjugados, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$.

Los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es dado por $\xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, y la solución puede obtenerse por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\alpha + i\beta)^n &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} |\lambda_1|^n (\cos n\omega + i \sin n\omega) \\ &= |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \cos n\omega \\ -\sin n\omega \end{pmatrix} + i |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \sin n\omega \\ \cos n\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\omega = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$.

Una solución general puede ser dada por

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} c_1 \cos n\omega + c_2 \sin n\omega \\ -c_1 \sin n\omega + c_2 \cos n\omega \end{pmatrix}.$$

Dado el valor inicial $y_1(0) = y_{10}$ y $y_2(0) = y_{20}$, se puede obtener $c_1 = y_{10}$ y $c_2 = y_{20}$. La solución es denotada por

$$\begin{aligned} y_1(n) &= |\lambda_1|^n (y_{10} \cos n\omega + y_{20} \sin n\omega), \\ y_2(n) &= |\lambda_1|^n (-y_{10} \sin n\omega + y_{20} \cos n\omega). \end{aligned}$$

Si se deja $\cos \gamma = y_{10}/r_0$ y $\sin \gamma = y_{20}/r_0$, donde $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}$, se tiene $y_1(n) = |\lambda_1|^n r_0 \cos(n\omega - \gamma)$ y $y_2(n) = -|\lambda_1|^n r_0 \sin(n\omega - \gamma)$. Usando coordenadas polares se puede escribir la solución como

$$r(n) = r_0 |\lambda_1|^n, \theta(n) = -(n\omega - \gamma).$$

Si $|\lambda_1| < 1$ se tiene un foco asintóticamente estable, como se ilustra en la figura (1.26). Si $|\lambda_1| > 1$, se encuentra un foco inestable, como en (1.27). Cuando $|\lambda_1| = 1$, se obtiene un centro donde las órbitas son círculos con radio $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}$, se muestra en (1.28).

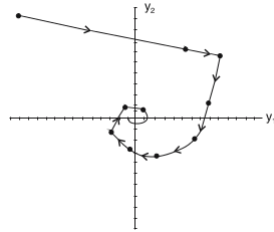


Figura 1.26: $|\lambda_1| < 1$, foco asintóticamente estable [2]

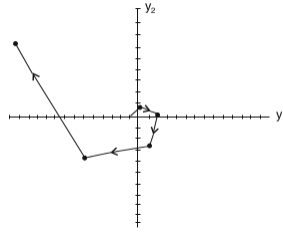


Figura 1.27: $|\lambda_1| > 1$, foco inestable. [2]

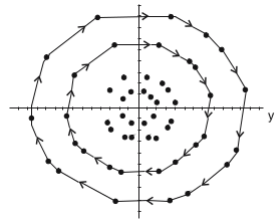


Figura 1.28: $|\lambda_1| = 1$, Centro (estable). [2]

Ejemplo 8 Sea

$$x(n+1) = Ax(n), \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,25 & 1 \end{pmatrix}.$$

los valores propios de A son $\lambda_1 = 1,5$ y $\lambda_2 = 0,5$; y los vectores propios son $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Así

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \text{cuando } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La figura (1.29) muestra el diagrama de fase para $y(n+1) = Jy(n)$.

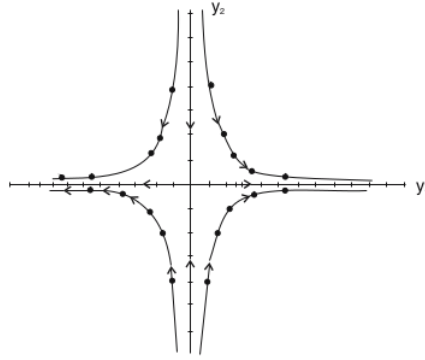


Figura 1.29: Silla canónica [2]

Para encontrar el diagrama de fase del problema, se considera $x(n) = Py(n)$, se define la relación entre los sistema $y_1 - y_2$ y $x_1 - x_2$ (cambio de coordenadas), por notación $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el sistema $y_1 - y_2$ corresponde a el punto $P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en el sistema $x_1 - x_2$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en el sistema $y_1 - y_2$ corresponde a el punto $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en el sistema $x_1 - x_2$. El eje y_1 es gira por $\theta_1 = \tan^{-1}(0,5)$ a el eje x_1 y el eje y_2 es gira por $\theta_1 = \tan^{-1}(-0,5)$ a el eje x_2 .

Además, el punto inicial

$$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para el sistema canónico correspondiente a el punto inicial

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El espacio de fase del sistema se muestra en la figura (1.30). Básicamente el eje x_1 es $c\xi_1 = \begin{pmatrix} 2c \\ c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$, y el eje x_2 es $c\xi_2 = \begin{pmatrix} 2c \\ -c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$

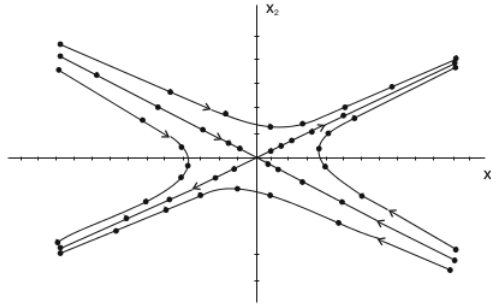


Figura 1.30: Silla real [2]

Ejemplo 9 Diagrama de fase para el sistema $x(n+1) = Ax(n)$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

los valores propios de A son $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Para λ_1 el vector propio es

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

entonces

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

que está en la forma canónica (1.18). La solución de $y(n+1) = Jy(n)$ es

$$r(n) = r_0 |\lambda_1|^n = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2} (2)^n$$

y

$$\theta(n) = \alpha - n\omega,$$

en donde

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{y_{20}}{y_{10}} \right), \quad \omega = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

La figura (1.31) representa la órbita de $(\frac{-1}{16}, 0)$. la solución es dada por

$$r(n) = \frac{1}{16} (2)^n = 2^{n-4}, \quad \theta(n) = \pi - \frac{n\pi}{3}.$$

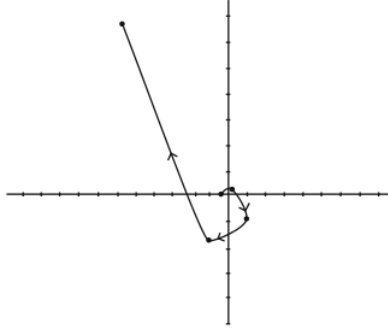


Figura 1.31: Foco inestable canónico [2]

La órbita en el sistema original tiene un punto inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y es representada en la figura (1.32). Se observa que no hay eje de rotación

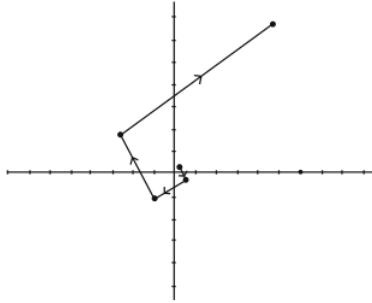


Figura 1.32: Foco inestable real [2]

Capítulo 2

Estabilidad de ecuación en diferencia autónoma no lineal

En el capítulo anterior se estudió los conceptos básicos de estabilidad para sistemas de ecuaciones en diferencias autónomas lineales, se vio que a través de los valores y vectores propios se puede analizar la estabilidad de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio, cuando una ecuación en diferencia no es lineal, no se puede aplicar la teoría anterior, sin embargo exista un método a través del cual se puede establecer una función que cumpla con unas condiciones específicas llamada función de Liapunov, a través de la cual se puede hacer el estudio de estabilidad y extender su resultado al sistema inicial

2.1. Método directo de Liapunov

Sea la ecuación en diferencia

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (2.1)$$

donde $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$, es continua. Suponga que x^* es un punto de equilibrio de (2.1), es decir, $f(x^*) = x^*$. Sea $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, se define como una función a valor real. La derivada de V respecto a (2.1) se define como

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$$

y

$$\Delta V(x(n)) = V(f(x(n))) - V(x(n)) = V(x(n+1)) - V(x(n)).$$

Si $\Delta V(x) \leq 0$, no es creciente a lo largo de la solución de (2.1).

Definición 2.1.1 *Función de Liapunov*

Sea la función V se dice una función de Liapunov en un subconjunto H de \mathbb{R}^k si

1. V es continua en H , y
2. $\Delta V(x) \leq 0$, siempre que x y $f(x)$ pertenece a H .

Sea $B(x, \gamma)$ la bola abierta en \mathbb{R}^k de radio γ y centro en x , si la bola esta centrada en 0, de radio γ se nota $B(\gamma)$.

Definición 2.1.2 *Función definida positiva*

se dice que la función V es definida positiva en x^* si

1. $V(x^*) = 0$, y
2. $V(x) > 0$ para todo $x \in B(x^*, \gamma)$, $x \neq x^*$, para algún $\gamma > 0$.

Se presenta un tratamiento geométrico informal del primer teorema de estabilidad de Liapunov. Sin pérdida de generalidad, se asume un sistema planar con $x^* = 0$ como el punto de equilibrio. Suponga que (2.1) tiene una función V de Liapunov definida positiva en $B(\eta)$. La figura (2.1) ilustra la gráfica de V en un sistema de coordenadas de tres dimensiones, mientras que la figura (2.2) se obtienen las curvas de nivel $V(x_1, x_2) = c$ de V en el plano. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $B(\varepsilon)$ tiene curvas de nivel en V , dada por $V(x) = \tilde{c}_2$. La curva de nivel $V(x) = \tilde{c}_2$ contiene la bola $B(\delta)$ para algún δ con $0 < \delta \leq \varepsilon$. Si una solución $x(n, 0, x_0)$ inicia en $x_0 \in B(\delta)$, entonces $V(x_0) \leq \tilde{c}_2$. Como $\Delta V \leq 0$, V es una función no es creciente monótona a lo largo de la solución de (2.1). Por lo tanto, $V(x(n)) \leq V(x_0) \leq \tilde{c}_2$ para todo $n \geq 0$. Así, la solución $x(n, 0, x_0)$ queda siempre en la bola $B(\varepsilon)$. Por consiguiente, el cero de la solución es estable. El argumento anterior contiene la esencia de la prueba del primer teorema de estabilidad de Liapunov.

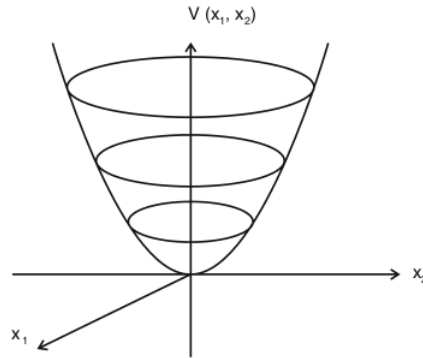


Figura 2.1: Una función de Liapunov cuadrática [2]

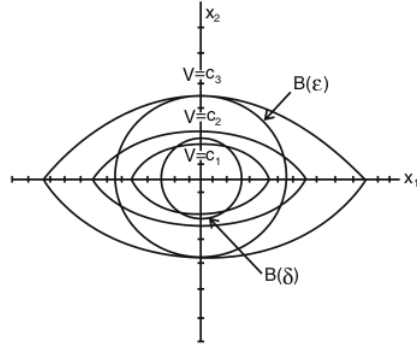


Figura 2.2: Curvas de nivel [2]

2.2. Teorema de estabilidad de Liapunov

[2] El teorema de estabilidad de Liapunov, nos permite clasificar los puntos de equilibrio para un sistema de ecuaciones en diferencia [3]

Teorema 2.2.1 *Si V es una función de Liapunov para (2.1) en una vecindad H en el punto de equilibrio x^* , y V es definido positivo en x^* , entonces x^* es estable. Si, adicionalmente, $\Delta V(x) < 0$ para todo x , $f(x) \in H$ y $x \neq x^*$, entonces x^* es asintóticamente estable. Además, si $G = H = \mathbb{R}^k$*

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } \|x\| \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

entonces x^ es global asintóticamente estable.*

Para la demostración del teorema de estabilidad de Liapunov, se dividirá en tres partes

1. Demostrar que x^* es estable,
2. Ver que además es asintóticamente estable
3. Probar que es global asintóticamente estable

Demostración

1. Sea la bola abierta $B(x^*, \alpha_1) \subset G \cap H$ con centro en x^* y radio $\alpha_1 > 0$. Dado f una función continua para (2.1), hay $\alpha_2 > 0$ tal si $x \in B(x^*, \alpha_2)$, entonces $f(x) \in B(x^*, \alpha_1)$.

Sea $0 < \varepsilon \leq \alpha_2$ dado. Se define $\psi(\varepsilon) = \min \{V(x) \mid \varepsilon < \|x - x^*\| < \alpha_1\}$. Por

teorema de valor intermedio [1], existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $V(x) < \psi(\varepsilon)$ cuando $\|x - x^*\| < \delta$.

Si se considera la primera Iteración $x_0 \in B(x^*, \delta)$, entonces la solución de (2.1) es $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$ para todo $n \geq 0$.

si no se cumple lo anterior, existe $x_0 \in B(x^*, \delta)$ y un número entero m tal que $x(r) \in B(x^*, \varepsilon)$ para $1 \leq r \leq m$ y $x(m+1) \notin B(x^*, \varepsilon)$.

Dado que $x(m) \in B(x^*, \varepsilon) \subset B(x^*, \alpha_2)$ resulta que $x(m+1) \in B(x^*, \alpha_1)$. consecuentemente, $V(x(m+1)) \geq \psi(\varepsilon)$. sin embargo $V(x(m+1)) \leq \dots \leq V(x_0) < \psi(\varepsilon)$ lo cual es una contradicción. en base a el anterior se deduce que x^* es estable.

2. Suponga que $x_0 \in B(x^*, \delta)$. entonces $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$ se cumple para todo $n \geq 0$. Sea la sucesión $\{x(n)\}$ no converge en x^* , entonces se tiene una subsucesión $\{x(n_i)\}$ que converge a $y \in R^k$. Sea $E \subset B(x^*, \alpha_1)$ una vecindad abierta de y con $x^* \notin E$. Sea la función $h(x) = \frac{V(f(x))}{V(x)}$ definida en E , se puede considerar a h como bien definida y continúa, y $h(x) < 1$ para todo $x \in E$. Ahora, si se toma $\eta \in (h(y), 1)$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $x \in B(y, \alpha)$ implica que $h(x) \leq \eta$. así, para n_i suficientemente grande,

$$V(f(x(n_i))) \leq \eta V(x(n_i - 1)) \leq \eta^2 V(x(n_i - 2)) \leq \dots \leq \eta^{n_i} V(x_0)$$

por lo tanto,

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = 0$$

dado que $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = V(y)$, esta declaración implica que $V(y) = 0$ y por lo tanto, $y = x^*$, lo que significa que converge al punto de equilibrio.

3. Es suficiente con mostrar que todas las soluciones son acotadas y luego repite el argumento anterior.

Suponga que existe una solución $x(n)$ no es acotada, y entonces alguna subsucesión $\{x(n_i)\} \rightarrow \infty$ cuando $n_i \rightarrow \infty$, por la condición (2.2), esta suposición implica que $V(x(n_i)) \rightarrow \infty$ cuando $n_i \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción, dado que $V(x_0) > V(x(n_i))$ para todo i .

Ejemplo 10 Considere la siguiente ecuación en diferencia de segundo orden:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1 + \beta x^2(n)}, \quad \beta > 0.$$

Esta ecuación es a menudo llamada una ecuación de retardo. Hay tres puntos de equilibrios,

$$x^* = 0, \quad x^* = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta}}, \quad x^* = -\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta}}$$

si $\alpha > 1$. Se cambia la ecuación del sistema dado

$$y_1(n) = x(n+1) \text{ y } y_2(n) = x(n).$$

se obtiene el sistema

$$y_1(n+1) = y_2(n),$$

$$y_2(n+1) = \frac{\alpha y_1(n-1)}{1 + \beta y_2^2(n)}.$$

Se estudiara la estabilidad de el punto de equilibrio $(0,0)$. La primera opción de una función de Liapunov será $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$. Esta es continua y definida positiva en \mathbb{R}^2 :

$$\Delta V(y_1(n), y_2(n)) = y_1^2(n+1) + y_2^2(n+1) - y_1^2(n) - y_2^2(n).$$

Así,

$$\Delta V(y_1(n), y_2(n)) = \left(\frac{\alpha^2}{[1 + \beta y_2^2(n)]^2} - 1 \right) y_1^2(n) \leq (\alpha^2 - 1) y_1^2(n). \quad (2.3)$$

Si $\alpha^2 \leq 1$, entonces $\Delta V \leq 0$, en este caso $x^* = 0$ sería el único punto de equilibrio, y por el Teorema de estabilidad de Liapunov, en el origen es estable.

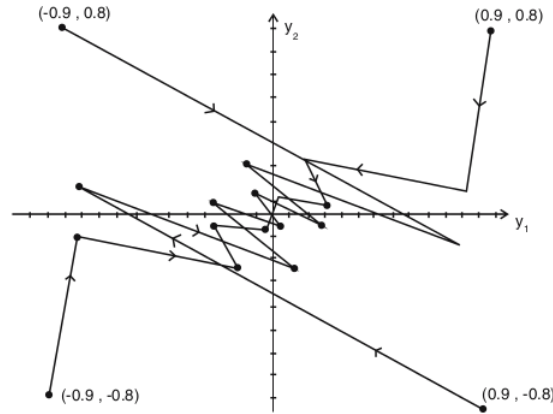


Figura 2.3: Un equilibrio globalmente asintóticamente estable [2]

Ejemplo 11 Considere el sistema planar

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= \frac{x_2(n)}{1+x_1^2(n)} \\x_2(n+1) &= \frac{x_1(n)}{1+x_2^2(n)}\end{aligned}$$

El único punto de equilibrio es $(0,0)$, para analizar la estabilidad cerca de este punto consideremos la función

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (2.4)$$

1. La función V es continua y positiva en \mathbb{R}^2

2. Veamos si $\Delta V(x_1(n), x_2(n)) \leq 0$

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1(n), x_2(n)) &= x_1^2(n+1) + x_2^2(n+1) - x_1^2(n) - x_2^2(n) \\&= \left(\frac{x_2(n)}{1+x_1^2(n)}\right)^2 + \left(\frac{x_1(n)}{1+x_2^2(n)}\right)^2 - x_1^2(n) - x_2^2(n) \\&= \frac{x_2^2(n)}{(1+x_1^2(n))^2} + \frac{x_1^2(n)}{(1+x_2^2(n))^2} - x_1^2(n) - x_2^2(n) \\&= \frac{x_2^2(n)(1+x_2^2(n))^2(-2x_1^2-x_1^4) + x_1^2(n)(1+x_1^2(n))^2(-2x_2^2-x_2^4)}{(1+x_2^2(n))^2(1+x_1^2(n))^2}\end{aligned}$$

como $(-2x_1^2-x_1^4)$ y $(-2x_2^2-x_2^4)$ son los únicos terminos negativos de la expresión anterior, entonces $\Delta V(x_1(n), x_2(n)) \leq 0$ Por lo tanto V es una función de Liapunov.

3. Es definida positiva por cumple

- $V(x^*) = V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$
- $V(x) > 0$ Para todos los puntos de \mathbb{R}^2 diferentes del origen

Por las condiciones anteriores y usando el teorema 2.2.1, entonces el punto $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable. Adicional a esto $\Delta V(x_1(n), x_2(n)) \leq 0$ para todos los puntos de \mathbb{R}^2 diferentes del $(0,0)$. Por lo tanto es asintóticamente estable.

Como

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

Podemos concluir que $(0,0)$ es global asintóticamente estable.

Ejemplo 12 se considera el siguiente sistema

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= 4x_2(n) - 2x_2(n)x_1^2(n) \\x_2(n+1) &= \frac{1}{2}x_1(n) - x_1(n)x_2^2(n)\end{aligned}$$

Se analizar la estabilidad en el punto de equilibrio $(0,0)$, para este punto consideremos la función

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_2^2 \quad (2.5)$$

1. La función V es continua y positiva en \mathbb{R}^2
2. Se probara si $\Delta V(x_1(n), x_2(n)) \leq 0$ entonces,

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1(n), x_2(n)) &= x_1^2(n+1) + 16x_2^2(n+1) - x_1^2(n) - 16x_2^2(n) \\&= (4x_2(n) - 2x_2(n)x_1^2(n))^2 + 16\left(\frac{1}{2}x_1(n) - x_1(n)x_2^2(n)\right)^2 \\&\quad - x_1^2(n) - 16x_2^2(n) \\&= 3x_1^2(n) + 16x_1^2(n)x_2^4(n) + 4x_1^4(n)x_2^2(n) > 0\end{aligned}$$

La función de Liapunov no satisface las condiciones de estabilidad, por tanto, el punto $(0,0)$ es inestable.

Conclusiones

- Las ecuaciones en diferencia en contraste a las ecuaciones diferenciales puede tener eventuales puntos de equilibrio, es decir, la solución no puede ser un punto de equilibrio, pero puede llegar a uno tras un número finito de iteraciones.
- Una ecuación diferencial se puede discretizar haciendo aproximaciones numéricas, utilizando distintos métodos numéricos cómo es el método de Euler y el esquema no estándar. Los puntos de equilibrio para la ecuación diferencia y su ecuación en diferencia correspondiente tienen que ser los mismos.
- Una de las principales dificultades con el teorema de estabilidad de Liapunov es la elección de la función candidata a ser la función de Liapunov, ya que con ésta se halla la estabilidad.
- El teorema falla en hallar la estabilidad asintótica cuando el $\Delta V = 0$, para ello necesita un análisis más preciso y para ello se utiliza el principio de invariancia de LaSalle.

Bibliografía

- [1] Tom Apostol. Análisis matemático, editorial reverté, pag 135, 1972.
- [2] Saber Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [3] Genny Navarrete. *Introducción a las ecuaciones en diferencias*. 2003.