# Ejercicios Simulación de Sistemas Dinámicos Continuos (SSDC)

**Contenido**



## Ejercicio 1: Ecuación de Van der Pol (1)

Consideremos la ecuación de Van der Pol:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

con $0 \leq t \leq 20$ y con valor inicial $x_0 = [0.25\ 1]$

Obtener la salida y explicar la gráfica obtenida.

## Ejercicio 2: Ecuación de Van der Pol (2)

Consideremos la ecuación de Van der Pol con una ligera variación:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

con $x(0) = 2; \dot{x}(0) = 0;\ y\ \mu = [5\ 0\ 0.3]$

Obtener la gráfica correspondiente y trazar una gráfica de $(x, dx)$ y explicar los resultados.

## Ejercicio 3: Paso por cero

Encontrar el/los paso/s por cero de la función:

$$f(x) = x^2 - 3\mathrm{sen}(x) + 0.1$$

¿De qué manera influye el tiempo de simulación en la precisión de los resultados obtenidos?

## Ejercicio 4: Ecuaciones del Lotka-Volterra

Las ecuaciones de Lotka-Volterra describen un modelo simplificado del comportamiento de dos especies enfrentadas (a menudo se conoce este modelo como de "presas y depredadores").

$$\dot{x} = (a - b\,y)x$$

$$\dot{y} = (d\,x - c)y$$

Estudiar la solución de estas ecuaciones empezando por los valores nominales de los parámetros:

$a = 2.7$
$b = 0.7$
$c = 1$
$d = 3$

## Ejercicio 5: Órbita de un satélite

La trayectoria simplificada de la órbita circular de un satélite alrededor de un planeta es:

$$\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

donde $r$ es la distancia entre el satélite y el centro el planeta, $\theta$ el azimut de una coordenada polar en un sistema de coordenadas en 2D en una órbita plana y $k$ la constante de gravedad del planeta. Estudiar el movimiento del satélite alrededor de la Tierra para diferentes altitudes entre 350 y 500 km. Intentar resolverlo primero analíticamente.

## Ejercicio 6: Modelo de Kermac y Mckendrick

Uno de los modelos que estudian la progresión de una epidemia es el de Kermac y McKendrick:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = -\beta\,x\,y$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \beta\,x\,y - \gamma\,y$$

$$\frac{d\,z}{d\,t} = \gamma\,y$$

donde $x$ es la población potencialmente infectable, $y$ el número de sujetos contaminados los cuales son capaces de transmitir la infección y $z$ el número de sujetos enfermos recuperados y no infectables o que han muerto.

La epidemia se extiende solo si el número de sujetos potencialmente infectables excede un determinado umbral. En otro caso, incluso en la presencia de $y_0$ infectados la epidemia no se extiende. (i.e. el número de sujetos infectados decrece).

Supongamos que $\beta = 0.1, \gamma = 0.5$y, en el tiempo $t = 0$ hay $y(0) = 10$ sujetos infectados, con una población inicial de 70 individuos. Estudiar las gráficas obtenidas y sacar conclusiones.

## Ejercicio 7: Estudio del comportamiento de una función

Estudiar el comportamiento de la función:

$$\ddot{x} + |x^2 - 1|\dot{x}^3 + x = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)$$

$$\ddot{x} = -|x^2 - 1|\dot{x}^3 - x + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)$$

con

$$x(0) = 1$$
$$\dot{x}(0) = 0.5$$

## Ejercicio 8: Ecuación integro-diferencial

Trazar la respuesta al sistema cuya ecuación integro-diferencial es:

$$\dot{v} + 20v = -100\int v\, d\tau + u$$

cuando es forzada por una entrada $u = 2\mathrm{sen}(4t)$

Nota: Transformar la ecuación en unas ecuaciones diferenciales por medio del cambio de variable:
$x_1 = \int v\, d\tau\,;\;\; x_2 = v$

## Ejercicio 9: Estabilidad y condiciones iniciales

Analizar la respuesta del sistema:

$$\dot{x} = -x + x^2$$

para diferentes condiciones iniciales. En particular, considere las siguientes condiciones iniciales:
$\mathrm{CI} = \{0.5, 1, 1.5\}$

## Ejercicio 10: Respuesta escalón unitario

Construir el siguiente esquema:

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = u$$

a) Estudiar su respuesta ante una entrada en escalón unitaria.

b) Estudiar analíticamente su estabilidad.

d) Trazar el gráfico de $\dot{x}$ contra $x$

e) ¿Cuál es el máximo de la función?

f) ¿Cuál es el valor de $t$ en el valor máximo?