Procesos discretos

All but war is simulation

U.S. Army Simulation Training Center

Modelos discretos

Modelado matemático de procesos discretos

Ecuaciones en diferencias

El término «ecuaciones en diferencias» se utiliza normalmente para expresar algún tipo de expresión en recurrencia. Vemos esto con un ejemplo: Supongamos que tenemos la expresión:

$u_n = c\, n - 3$, dónde c es una constante arbitraria. Entonces,

$$u_{n+1} = c\,(n+1) - 3$$

La ecuación en diferencias la obtenemos eliminando c de u_n y de u_{n+1}, lo que nos deja

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{n}\,(n+1) - 3$$
$$\Longrightarrow n\; u_{n+1} = (n+1)\,u_n + 3$$

en la que hemos expresado el «término siguiente» en función del «término anterior». Esta es la forma común de expresar una ecuación en diferencias.

Ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes Consideremos la siguiente ecuación:

$$c_0 u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} = f\,(n)\ (1)$$

La ecuación en diferencias es homogénea si $f\,(n) = 0$, en caso contrario es no homogénea. El orden de la ecuación en diferencias es la diferencia entre el mayor y el menor de los argumentos que aparecen en la ecuación en diferencias con intervalo unitario. Así, el orden de la ecuación (1) es 2.

Por tanto, la ecuación (1) es una ecuación en diferencias con coeficientes constantes si los coeficientes de las sucesivas diferencias son constantes y los sucesivos órdenes de las diferencias son de primer grado. Así,

$$c_0 u_n + c_1 (u_{n-1})^2 + c_2 u_{n-2} = f\,(n)$$

es una ecuación en diferencias no lineal.

Solución de ecuaciones homogéneas Consideremos la ecuación en diferencias con coeficientes constantes siguiente:

$$u_n - k\,(u_{n-1}) = 0 \ (2)$$

donde $n = 1, 2, 3, \cdots$, entonces

$$\begin{array}{l} u_1 = k\ u_0 \\ u_2 = k\ u_1 = k^2\ u_0 \\ u_3 = k\ u_2 = k^3\ u_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = k^n u_0 = c\ k^n \end{array}$$

donde c es una constante arbitraria, es una solución general de la ecuación (2).

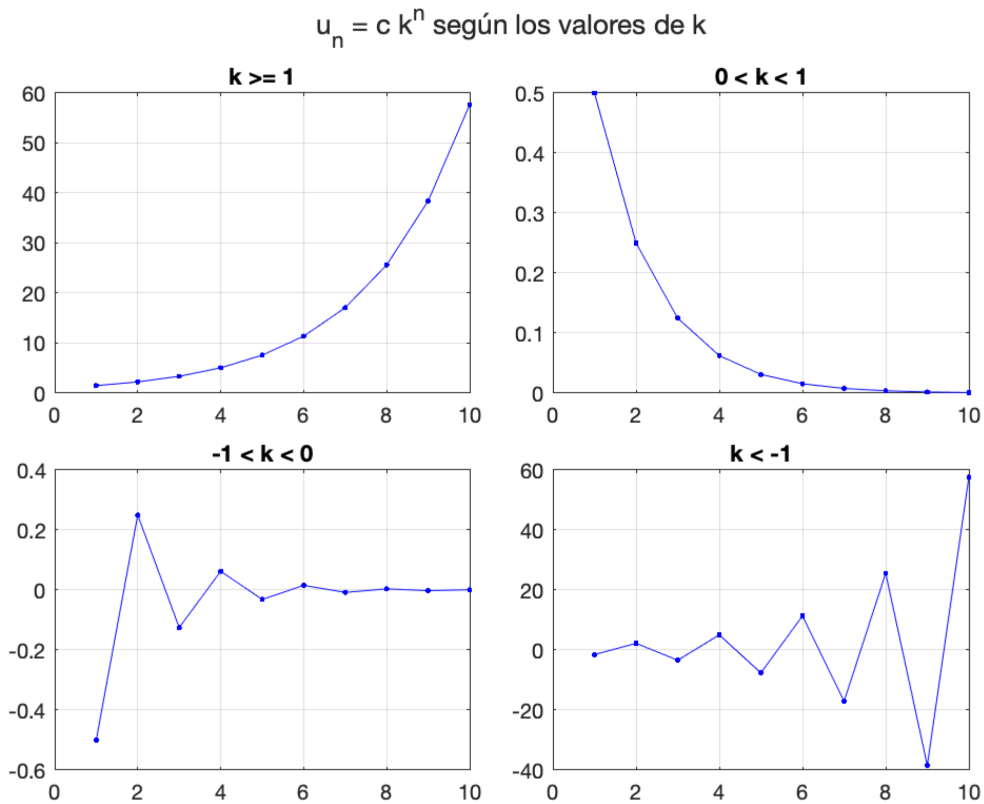
Las soluciones de una ecuación en diferencias homogénea con coeficientes constantes está compuesta por combinaciones lineales de expresiones básicas de la forma $u_n = c\ k^n$. El valor cualitativo de la solución dependerá de los valores reales de k en los siguientes cuatro rangos posibles:

$$k \geq 1, \quad k \leq -1, \quad 0 < k < 1, \quad -1 < k < 0$$

Para $k \geq 1$, la solución $u_n = c\ k^n$ se vuelve ilimitada al aumentar n; para $0 < k < 1$, k^n tiende a cero al aumentar n, por lo que u_n decrece; para $-1 < k < 0$, k^n oscila entre valores positivos y negativos, con magnitud decreciente hasta cero y para $k < (-1)$, k^n oscila entre valores positivos y negativos con magnitud creciente. En la figura siguiente vemos estos comportamientos:

```
n = 1:10; c = 1;
t = tiledlayout(2,2,'TileSpacing','Compact');
title(t,'u_{n} = c k^{n} según los valores de k')
nexttile
    k = 1.5;
    Un = c*k.^n;
```

```
    plot(n, Un,'.-b')
    grid on
    title('k >= 1')
nexttile
    k = 0.5;
    Un = c*k.^n;
    plot(n, Un,'.-b')
    grid on
    title('0 < k < 1')
nexttile
    k = -0.5;
    Un = c*k.^n;
    plot(n, Un,'.-b')
    grid on
    title('-1 < k < 0')
nexttile
    k = -1.5;
    Un = c*k.^n;
    plot(n, Un,'.-b')
    grid on
    title('k < -1')
```



Modelos discretos

En los modelos discretos, las variables de estado sólo cambian en un número contable de puntos en el tiempo. Estos puntos en el tiempo son aquellos en los que se produce el evento/cambio de estado. Así, en los modelos de tiempo discreto, hay una función de transición de estado que calcula el estado en el siguiente instante de tiempo dado el estado actual y la entrada. Los cambios son realmente discretos en muchas situaciones que ocurren en intervalos de tiempo bien definidos. Además, en muchos casos, los datos suelen ser discretos y no continuos. Por lo tanto, debido a las limitaciones de los datos disponibles, podemos vernos obligados a trabajar con el modelo discreto, aunque el modelo subyacente sea continuo.

Consideremos la secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, y la diferencia $a_{n+1} - a_n = \text{constante} = k$, entonces

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} =\ldots = a_2 - a_1 = k \Rightarrow \\ a_n &= a_{n-1} + k \\ &= a_{n-2} + 2k \\ &= a_{n-3} + 3k \\ &= \ldots \\ &= a_1 + (n-1)\,k \end{aligned}$$

Por tanto, a_n es una función lineal de n y es denominado *modelo lineal.*

Sin embargo, si la razón $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es constante, entonces

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} =\ldots = \frac{a_2}{a_1} = \beta,$$
$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_n &= \beta\; a_{n-1} \\ &= \beta^2 a_{n-2} \\ &= \beta^3 a_{n-3} \\ &= \ldots \\ &= \beta^{n-1} a_1 \end{aligned}$$

Así, a_n es una función exponencial de n, y lo denominamos *modelo exponencial.*

Modelos lineales 1.- Crecimiento de poblaciones

Supongamos que la población del Lince ibérico crece a razón de un 13 % anual. En el año 2002 se reintrodujeron 94 ejemplares en la península ibérica para intentar evitar su extinción. Hagamos que p_0 sea la población inicial de Linces y x_n la población después de n años:

$$p_{n+1} = p_n + 0.\,13 p_n = 1.\,13 p_n$$

Si en 2002 había 94 ejemplares,

$$p_1 = 1.\,13\; p_0 = 1.\,13 \times 94 \simeq 106$$

$$\begin{aligned} p_2 &= 1.\,13\; p_1 = 1.\,13 \times 106.\,22 \simeq 120 \\ p_3 &= 1.\,13\; p_2 = 1.\,13 \times 120.\,03 \simeq 135 \\ p_4 &= 1.\,13\; p_3 = 1.\,13 \times 135.\,63 \simeq 153 \end{aligned}$$

También podríamos calcular p_4 en términos de p_0 simplemente yendo hacia atrás en los cálculos anteriores:

$$\begin{aligned} p_4 &= 1.13\, p_3 \\ &= (1.13)\,(1.13)\, p_2 = (1.13)^2 p_2 \\ &= (1.13)^2\,(1.13)\, p_1 = (1.13)^3 p_1 \\ &= (1.13)^3 (1.13)\, p_0 = (1.13)^4 p_0 \end{aligned}$$

En general, la solución a la ecuación en diferencias de la forma $x_{n+1} = k\ x^n$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, es $x_{n+1} = k^n\ x_0$

2.- Ley de enfriamiento de Newton

Supongamos que una taza de café, inicialmente a una temperatura de 65ºC se coloca en una habitación que se mantiene a una temperatura constante de 20ºC. Después de 1 minuto, el café se ha enfriado a 60ºC. Si necesitamos encontrar la temperatura del café después de 15 minutos, utilizaremos la ley de Newton del enfriamiento, que establece que la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura ambiente (es decir, la temperatura de su entorno). Matemáticamente, esto significa,

$$t_{n+1} - t_n = k\ (S - t_n)$$

donde t_n es la temperatura del café después de n minutos, S es la temperatura de la habitación y k es la constante de proporcionalidad.

En primer lugar, utilizamos la información dada sobre el cambio en la temperatura del café durante el primer minuto para determinar el valor de la constante de proporcionalidad k:

$$\begin{aligned} & t_1 - t_0 = k\ (S - t_0) \Rightarrow \\ & 60 - 65 = k\ (20 - 65) \\ & \Rightarrow k = \tfrac{1}{8} \\ & \Rightarrow t_{n+1} - t_n = \tfrac{1}{8}\ (20 - t_n) \\ & \Rightarrow t_{n+1} = \tfrac{7}{8} t_n + \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación debemos tener presente que la solución que buscamos trata de poner t_n en función de n.Para facilitar los cálculos, formularemos la ecuación anterior de otra forma:

$$
\begin{aligned}
u_n &= a\ u_{n-1} + b \\
&= a\,(a\ u_{n-2} + b) + b = a^2\ u_{n-2} + b\,(a+1) \\
&= a^2\,(a\ u_{n-3} + b) + b\,(a+1) = a^3 u_{n-3} + b\,(a^2 + a + 1) \\
&= \ldots \\
&= a^n u_0 + b\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1) \\
&= a^n u_0 + n\ b\ \ (\text{si } a = 1) \\
&= a^n u_0 + b\left(\tfrac{1-a^n}{1-a}\right)\ \ (\text{si } a < 1) \\
&= a^n u_0 + b\left(\tfrac{a^n-1}{a-1}\right)\ \ (\text{si } a > 1)
\end{aligned}
$$

Volviendo a nuestro problema, y teniendo en cuenta que $a < 1$, tenemos

$$
t_n = \left(\frac{7}{8}\right)^n 65 + \frac{5}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^n}{1-\frac{7}{8}}\right) = 45\left(\frac{7}{8}\right)^n + 20
$$

Al cabo de 15 minutos la temperatura del café será de aproximadamente de 26ºC. Podemos observar que a medida que el tiempo aumenta, (n), la temperatura del café tiende a la temperatura de la habitación.

3.- El problema de la cuenta en el banco

Supongamos que se abre una cuenta de ahorro que paga un interés r del $4\,\%$ compuesto anual con un depósito inicial de 10.000 € y se hace un depósito de 5.000,00 € al final de cada año. En el caso de una cuenta de ahorro que se compone anualmente, los intereses se suman al capital al final de cada año. Si a_n es el importe al final del año n $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, entonces

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_0 + r\ a_0 = (1+r)\ a_0 \\
&a_2 = a_1 + r\ a_1 = (1+r)\ a_1 \\
&\ldots \\
&a_{n+1} = a_n + r\ a_n = (1+r)\ a_n
\end{aligned}
$$

Si el depósito se hace al finalizar cada año, las ecuaciones quedarán de la siguiente forma:

$$
a_{n+1} = 1.04 a_n + 5000
$$

En los tres primeros años:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1.04 a_0 + 5000 = 1.04 \times 10000 + 5000 = 15400 \\
&a_2 = 1.04 \times 15400 + 5000 = 21016 \\
&a_3 = 1.04 \times 21016 + 5000 = 26856.64
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora un escenario diferente, en el que no se hacen depósitos pero se retiran 2.000 € al final de cada año. Queremos averiguar cuánto dinero hay que depositar, para que nunca nos quedemos sin efectivo. El modelo para este escenario es

$$a_{n+1} = 1.04a_n - 2000$$

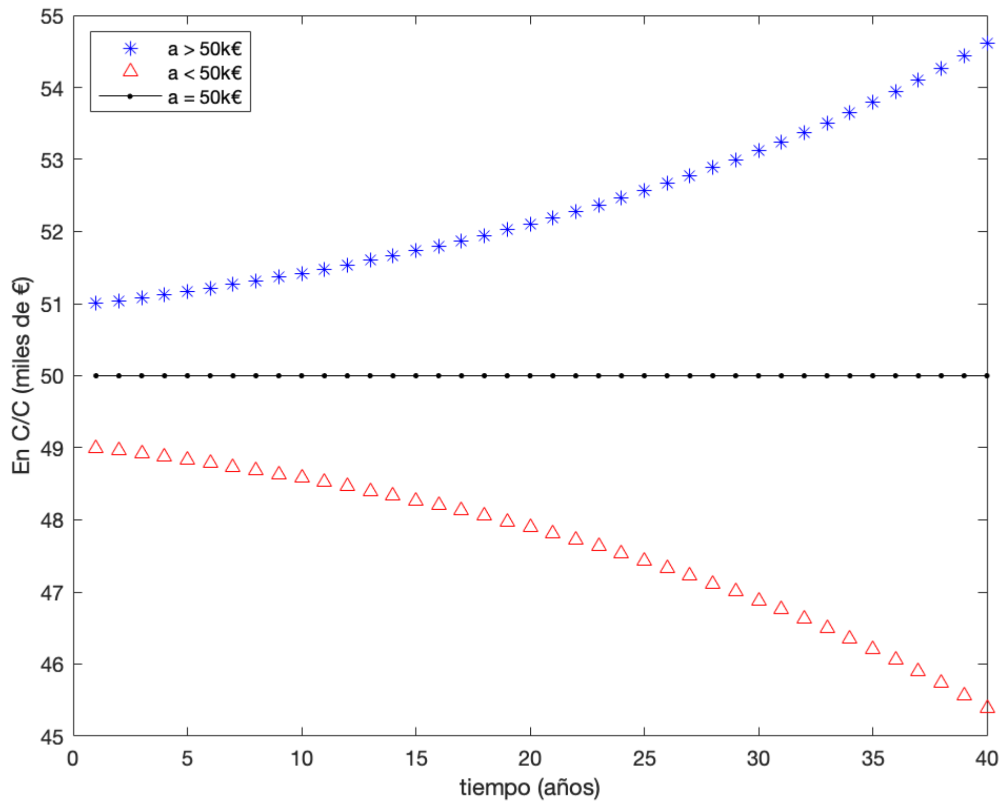
donde suponemos que el dinero se retira después de sumar los intereses de los años anteriores y no se penaliza por retirar dinero cada año. Existirá un punto de equilibrio que llamaremos a_n^* tal que la cantidad de un año sea igual a la cantidad disponible el año anterior, es decir, donde la cantidad que hay en la cuenta no varía. El valor de equilibrio para esto viene dado por

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n = a_n^* \\ &= 1.04a_n^* - 2000 = a_n^* \\ \Rightarrow a_n^* &= \tfrac{2000}{1.04} = 50000 \end{aligned}$$

Así, si el depósito inicial (a_0) en la cuenta es de 50.000€ y retiramos 2.000€ cada año, la cuenta tendrá siempre la misma cantidad al final de cada año.

Una pregunta obvia es qué ocurre si $a_0 < 50000$ o $a_0 > 50000$. En figura se muestra que si a_0 es menor que 50.000, la cantidad en la cuenta disminuye hasta cero y la cantidad crece sin límite si a_0 es mayor que 50.000. Así, el sistema se aproxima a cero o aumenta sin límite si $a_0 \neq 50000$ y, por tanto, este valor de equilibrio es inestable.

```
t = 1:40;
a = zeros(1,40); b = zeros(1,40); c = zeros(1,40);
a(1) = 51; b(1) = 49; c(1) = 50;

for i = 1:40
    a(i+1) = 1.04*a(i) - 2;
    b(i+1) = 1.04*b(i) - 2;
    c(i+1) = 1.04*c(i) - 2;
end

plot(t,a(1:40), '*b', t, b(1:40), '^r', t, c(1:40), '.-k')
xlabel('tiempo (años)'), ylabel('En C/C (miles de €)')
lgd = legend('a > 50k€', 'a < 50k€', 'a = 50k€');
lgd.Location = 'northwest';
```



4.- El problema de suministro de fármacos

Supongamos que un paciente recibe un antibiótico para tratar una infección. La cantidad de este en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a un ritmo del 50 % por hora. Para mantener el antibiótico en un determinado nivel, se administra una inyección al final de cada hora que aumenta la cantidad de fármaco en el torrente sanguíneo en 0.2 unidades. El modelo dinámico que describe este escenario viene dado por

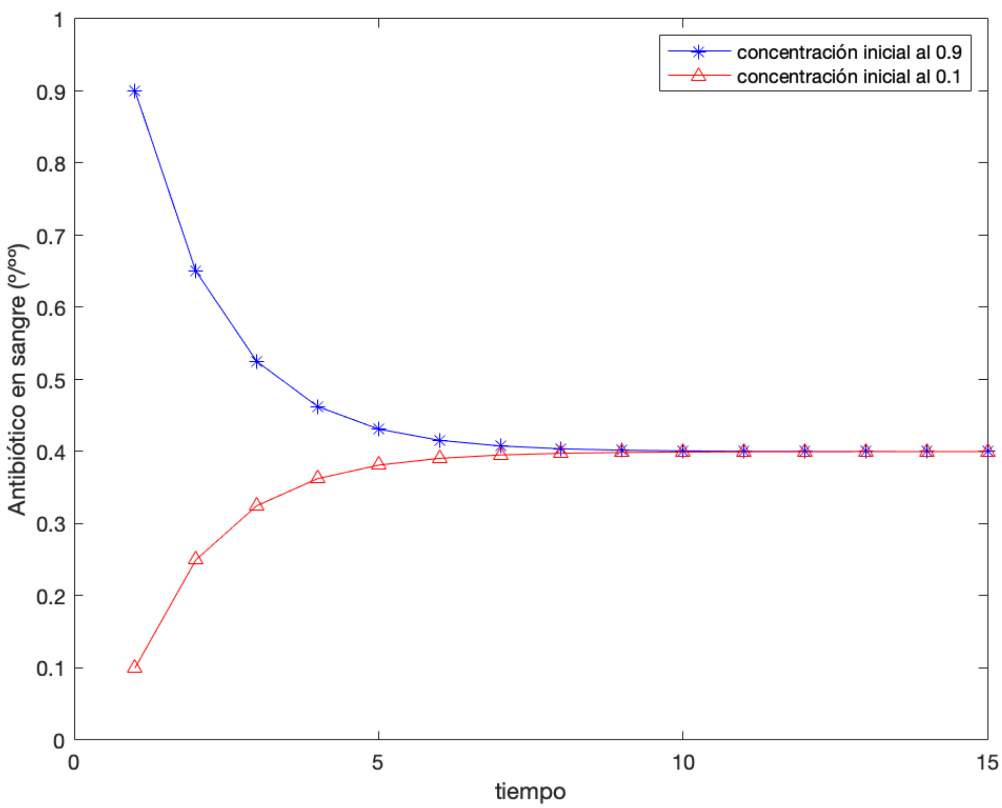
$$a_{n+1} = 0.5a_n + 0.2$$

donde a_n es la cantidad de antibiótico en sangre al final de cada hora. La solución de equilibrio de este modelo está dada por:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n = a_n^* \\ &= 0.5a_n^* + 0.2 = {a_n}^* \\ \Rightarrow a_n^* &= 0.4 \end{aligned}$$

El comportamiento a largo plazo del sistema dependerá del valor inicial a_0. La figura muestra que, sea cual sea el valor de a_0, el sistema siempre se aproxima al valor de 0.4, lo que implica que 0.4 es un equilibrio estable (véase la figura).

```
t = 1:15;
a = zeros(1,15); b = zeros(1,15);
a(1) = 0.9; b(1) = 0.1;
for i = 1:15
    a(i+1) = 0.5*a(i) + 0.2;
    b(i+1) = 0.5*b(i) + 0.2;
end
plot(t,a(1:15), '-*b', t, b(1:15), '-^r')
axis([0 15 0 1])
xlabel('tiempo'); ylabel('Antibiótico en sangre (º/ºº)')
legend('concentración inicial al 0.9','concentración inicial al 0.1' )
```



5.- Modelo económico de Harrod

El modelo de Harrod, desarrollado en los años 30, ofrece una visión de la dinámica del crecimiento económico. El modelo pretende determinar una tasa de crecimiento de equilibrio para la economía. Sea P_n el Producto Interior Bruto (PIB) sobre la renta nacional, que es uno de los principales indicadores para determinar la economía de un país, y $A(n)$ e $I(n)$ el ahorro y la inversión de la población. El modelo de Harrod suponía que en un país el ahorro de las personas depende del PIB o de la renta nacional, es decir, que el ahorro es una proporción constante de la renta corriente, lo que implica

$$A_n = a\ P_n\ \ (a > 0)$$

Harrod supuso además que la inversión realizada por la población depende de la diferencia entre el PIB del año en curso y el del año anterior, es decir

$$I_n = b\,(P_n - P_{n-1})\,,\ \text{con}\ b > a$$

Por último, el modelo de Harrod suponía que todo el ahorro realizado por las personas se invierte, es decir,

$$A_n = I_n$$

De las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{array}{l} b\,(P_n - P_{n-1}) = a\ P_n \\ \Rightarrow P_n = \frac{b\ P_{n-1}}{b-a} \end{array}$$

cuya solución es:

$$P_n = P_0 \left(\frac{b}{b-a} \right)^n$$

Así, el modelo de Harrod concluye que el PIB o la renta nacional aumenta geométricamente con el tiempo.

6.- Modelo de la carrera armamentísca

Consideremos que dos países están inmersos en una carrera armamentística. Suponemos que los dos países tienen una fuerza económica similar y el mismo nivel de desconfianza entre ellos. Sea M_n la cantidad total de dinero gastada por los dos países en armas. Consideremos que $g\ \ (> 0)$ mide la restricción del crecimiento debido a la fortaleza (o debilidad) económica de los países y $d\ \ (> 0)$, el nivel de desconfianza entre los dos países. Los dos países también gastan una cantidad constante (digamos, k) de dinero para comprar armas, independientemente de la participación en una carrera armamentística. Entonces, el modelo dinámico discreto para la cantidad total de dinero T_n gastada en armas por cada país después de n años viene dado por

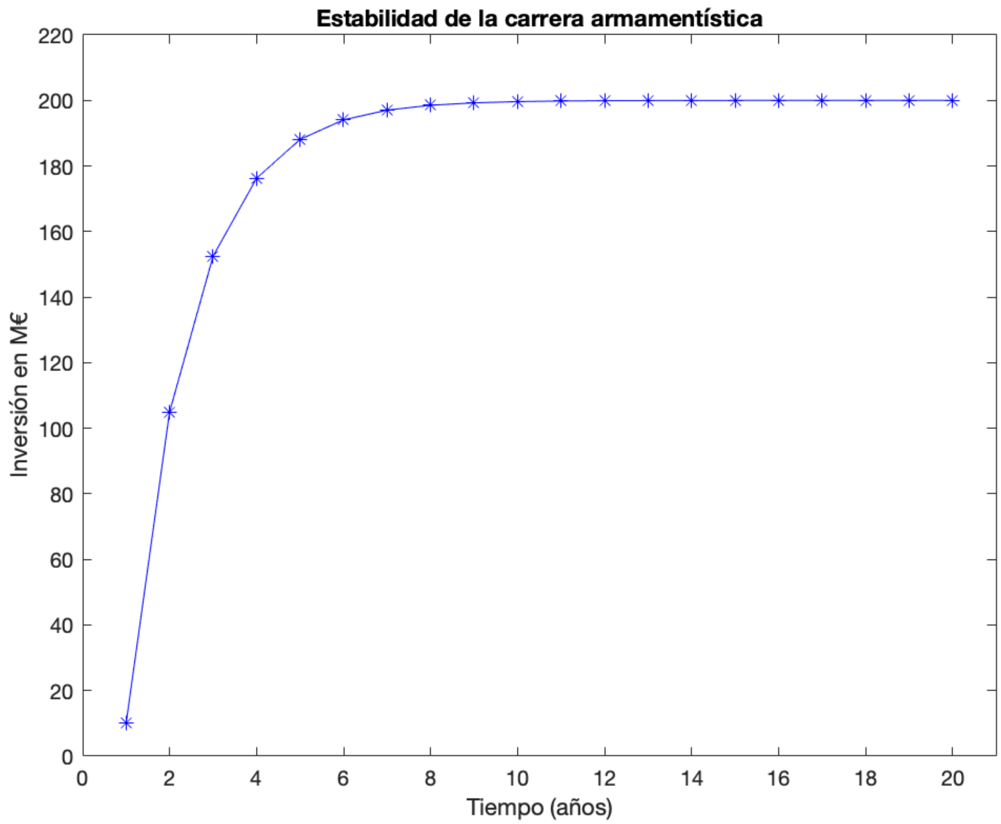
$$\begin{aligned}
&T_n = (1-g)\,T_{n-1} + d\,T_{n-1} + k \\
&\Rightarrow T_n = (1-g+d)\,T_{n-1} + k \\
&T_n = (1-g+d)^n\,T_0 + k\left(\tfrac{1-(1-g+d)^n}{1-(1-g+d)}\right) \\
&T_n = (1-g+d)^n\,T_0 + k\left(\tfrac{1-(1-g+d)^n}{g-d}\right)
\end{aligned}$$

Si estudiamos la solución de equilibrio,

$$\begin{aligned}
&T_n = T_{n-1} = T_n^* \\
&\Rightarrow (1-g+d)\,T_{n-1} + k = T_{n-1} \\
&\Rightarrow T_n^* = \tfrac{k}{g-d} \text{ con } (g > d)
\end{aligned}$$

Por tanto, a medida que aumenta el tiempo, la cantidad total de dinero gastada en armas alcanza un estado estable y ambos países tienen una carrera armamentística estable (véase la figura).

```
t = 1:20;
g = 0.6;
d = 0.1;
k = 100;

T = zeros(1,20);
T(1) = 10;
for i = 1:20
    T(i+1) = (1 - g + d)*T(i) + k;
end

plot(t,T(1:20), '-*b')
axis([0 21 0 220])
ylabel('Inversión en M€'), xlabel('Tiempo (años)')
title('Estabilidad de la carrera armamentística')
```



7. Modelo lineal de presas y depredadores

Consideremos la peninsula ibérica en la que hay linces (depredadores) y conejo (presas). Los linces matan a sus presas, es decir, a los conejos, para alimentarse. Sean L_n y C_n las poblaciones respectivas de linces y conejos al finalizar el año n. Intentemos formular el modelo para examinar el comportamiento a largo plazo de las dos especies bajo unos pocos supuestos. Suponemos que,

(i) Los conejos son la única fuente de alimento para los linces y los linces son los únicos depredadores de los conejos.

(ii) La población de conejos crecerá si no hay linces y, sin la población de conejos, los linces se extinguirán.

(iii) El ritmo de crecimiento de la población de linces aumenta con la presencia de la población de conejos y el ritmo de crecimiento de la población de conejos disminuye con la presencia de la población de linces.

Con estas suposiciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta L_n &= L_{n+1} - L_n = -\alpha L_n + \beta C_n \\ \Delta C_n &= C_{n+1} - C_n = \gamma C_n - \delta L_n \end{aligned}$$

donde ΔL_n *y* ΔC_nson las tasas de variación de las poblaciones de linces y conejos respectivamente y α, β, γ *y* δson constantes positivas, tal que $\alpha > 0$ y $\gamma < 1$.Podemos reescribir las ecuaciones anteriores para ponerlas de forma más apropiada para su estudio:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= (1-\alpha) L_n + \beta C_n \equiv f_1 (L_n, C_n) \\ C_{n+1} &= -\delta L_n + (1+\gamma) C_n \equiv f_2 (L_n, C_n) \end{aligned}$$

Nota teórica

La ecuaciones anteriores tienen la forma general:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a\, u_n + b\, v_n \\ v_{n+1} &= c\, u_n + d\, v_n \end{aligned}$$

que podemos expresar en forma de matriz

$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \Rightarrow w_{n+1} = A\, w_n$ donde $w_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Claramente, el punto de equilibrio de un sistema homogéneo es $(0, 0)$.

Teorema*: Sean* λ_1 *y* λ_2 *los autovalores reales de la matriz de coeficientes* A*de un sistema homogéneo. Entonces, el punto de equilibrio* $(0, 0)$*es:*

i) Estable, si ambos $|\lambda_1| < 1$ *y* $|\lambda_2| < 1$

ii) Inestable si ambos $|\lambda_1| > 1$ *y* $|\lambda_2| > 1$

iii) Punto de ensilladura si $|\lambda_1| < 1$ *y* $|\lambda_2| > 1$ *o* $|\lambda_1| > 1$ *y* $|\lambda_2| < 1$

Aquí, α es la tasa a la que los linces mueren si no hay conejos disponibles para alimentarse y β es la tasa a la que la población de linces crece cuando el alimento (conejos) está disponible. Del mismo modo, la población de conejos crece a una tasa γ cuando no hay linces y disminuye a una tasa δ en presencia de una población de linces.

El punto $(0, 0)$es el único punto de equilibrio en estas ecuaciones. Para hacer un estudio de estabilidad, calculamos la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio:

$$J_f (L_n, C_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial L_n} & \frac{\partial f_1}{\partial C_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial L_n} & \frac{\partial f_2}{\partial C_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ -\delta & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matriz anterior son:

$$\left(2-\alpha+\gamma-\sqrt{(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\beta}\right) \text{y} \left(2-\alpha+\gamma+\sqrt{(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\beta}\right)$$

Para el estudio de la estabilidad, ambos autovalores deben ser menores que 1 en valor absoluto, esto es

$$\left|\left(2-\alpha+\gamma-\sqrt{(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\beta}\right)\right| < 1 \text{ y } \left|\left(2-\alpha+\gamma+\sqrt{(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\beta}\right)\right| < 1$$

Supongamos que $\alpha = 0,5, \beta = 0,4, \gamma = 0,1$ y $\delta = 0,17$y por tanto los autovalores de la matriz Jacobiana son $0,948\ y\ 0,652$, cuyo módulo es inferior a 1. Por lo tanto, el sistema es estable como se muestra en la Figura A. Ahora, cambiamos δ (tasa de mortalidad de los conejos en presencia de linces) a 0,05 y observamos el cambio en la dinámica. Los valores propios son ahora 1,06 y 0,535. Claramente, uno de los valores propios es 1,06, cuyo módulo es mayor que 1 y, por tanto, el sistema es inestable (véase la figura B).

Ahora fijamos la población inicial de conejos en 200 y queremos ver cómo cambia la dinámica al variar la población de linces. Con $L_0 < 500$, ambas poblaciones crecen de forma ilimitada (Figura C), pero para un L_0 suficientemente grande (por ejemplo, 2300), ambas especies alcanzan la solución de equilibrio (Figura D). Se puede comprobar una dinámica similar con una población fija de linces (digamos, 600) y variando la población inicial de conejos.

```
syms a b g d  f1(Ln, Cn) f2(Ln, Cn)

% Cálculo del jacobiano y sus autovalores
J = jacobian([(1 - a)*Ln + b*Cn, -d*Ln + (1 + g)*Cn], [Ln, Cn])
```

J =

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ -d & 1+g \end{pmatrix}$$

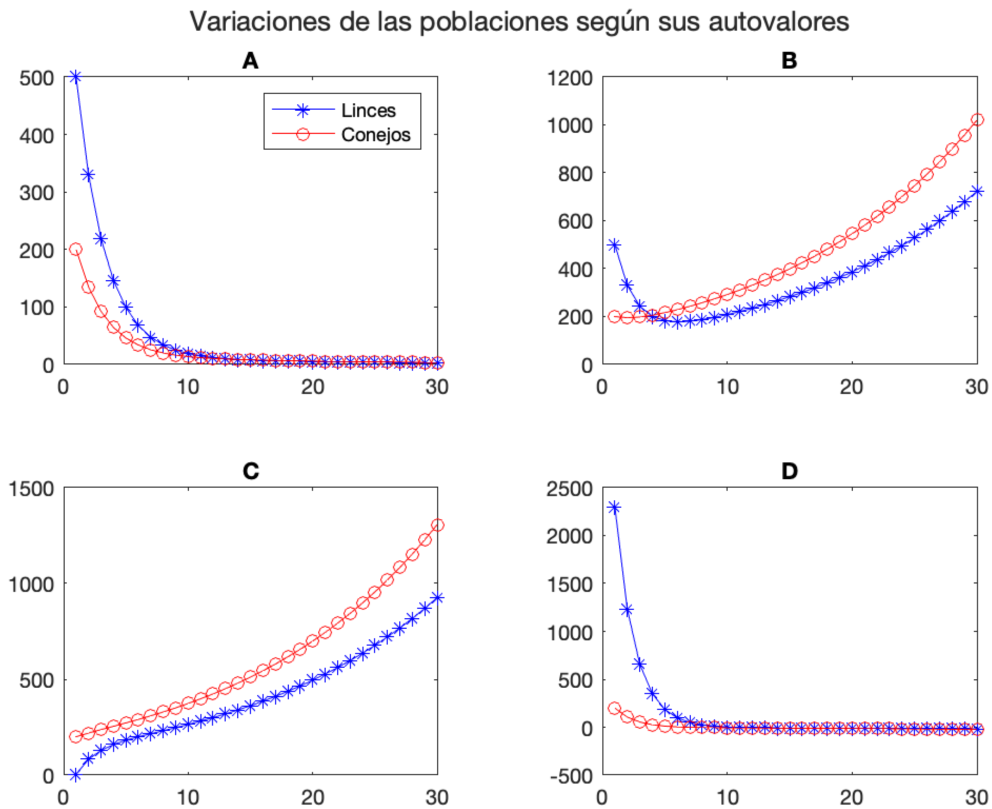
```
[~, D] = eig(J)
```

D =

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{2}-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{g^2-4\,b\,d+2\,a\,g+a^2}}{2}+1 & 0 \\ 0 & \frac{g}{2}-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{g^2-4\,b\,d+2\,a\,g+a^2}}{2}+1 \end{pmatrix}$$

```
% Trazado de figuras
t = 1:30;
a = 0.5; b = 0.4; g = 0.1; d = 0.17;

titulo = tiledlayout(2,2);

L = zeros(1,30); C = zeros(1,30);
```

```
L(1) = 500; C(1) = 200;
[Ln, Cn] = calculaLnCn(L(1), C(1), a, b, d, g);

nexttile
plot(t,Ln(1:30), '-*b', t, Cn(1:30), '-or')
title('A')
legend('Linces', 'Conejos')

d = 0.05;
L = zeros(1,30); C = zeros(1,30);
L(1) = 500; C(1) = 200;
[Ln, Cn] = calculaLnCn(L(1), C(1), a, b, d, g);

nexttile
plot(t,Ln(1:30), '-*b', t, Cn(1:30), '-or')
title('B')

L = zeros(1,30); C = zeros(1,30);
L(1) = 5; C(1) = 200; d = 0.05;
[Ln, Cn] = calculaLnCn(L(1), C(1), a, b, d, g);

nexttile
plot(t,Ln(1:30), '-*b', t, Cn(1:30), '-or')
title('C')

L = zeros(1,30); C = zeros(1,30);
L(1) = 2300; C(1) = 200; d = 0.05;
[Ln, Cn] = calculaLnCn(L(1), C(1), a, b, d, g);

nexttile
plot(t,Ln(1:30), '-*b', t, Cn(1:30), '-or')
title('D')
title(titulo,'Variaciones de las poblaciones según sus autovalores')
```



Modelos no lineales La dependencia de la densidad no se tiene en cuenta en los modelos lineales, que suponen que se aplican las mismas características de crecimiento a la población independientemente de su tamaño. En el mundo natural, rara vez se observan crecimientos lineales (salvo en el caso de las bacterias y los virus). Los modelos no lineales o los modelos dependientes de la densidad tienen bastante éxito en este sentido. Los modelos no lineales captan con más fidelidad o realismo la dependencia de la densidad y sus efectos variables, lo que se refleja en el comportamiento cualitativo de las soluciones de los modelos. A continuación se presentan tres modelos muy conocidos y útiles.

1. Ecuación logística discreta

Consideramos ahora el crecimiento de una población x_n de una especie después de n generaciones, que depende de la densidad. Establecemos que la población crece linealmente a una tasa r y que su crecimiento se inhiba debido a la superpoblación. Esto da lugar a una ecuación discreta no lineal como:

$$x_{n+1} = a\, x_n - b\, x_n^2 \text{ con } r > 0, b > 0$$

o bien la ecuación

$$x_{n+1} = r\, x_n \left(1 - \frac{x_n}{k}\right) \text{con } r, k > 0$$

Ambas ecuaciones se denominan Ecuaciones Logísticas Discretas y son quizás las ecuaciones más usadas cuando queremos tener en cuenta la densidad debido a su simplicidad.

2. Ecuación de Richer

Es otro ejemplo de modelo dependiente de la densidad de una población $x_n$después de n generaciones:

$$x_{n+1} = \alpha\ x_n\ e^{-\beta x_n} \text{con } \alpha > 0\ y\ \beta > 0$$

donde α representa la máxima tasa de crecimiento del organismo y β representa la inhibición del crecimiento a causa de la superpoblación.

3.- Modelo de aprendizaje

Cuando aprendemos un nuevo tema, se puede aplicar el siguiente principio: si la cantidad actual aprendida es L_n, entonces L_{n+1} es igual a L_n menos la fracción r de L_n olvidada, más la nueva cantidad aprendida, que suponemos es inversamente proporcional a la cantidad ya aprendida, es decir, L_n. Bajo estos supuestos, el modelo viene dado por

$$L_{n+1} = L_n - r\ L_n + \tfrac{k}{L_n} \text{ con } 0 \leq r < 1, k > 0$$

Asumimos que la persona que aprende un nuevo tema no olvida la totalidad del tema aprendido anteriormente. La solución de estabilidad de este modelo viene dada por

$$\begin{array}{l} L_{n+1} = L_n = L_n^* \\ \Rightarrow L_n^* = \sqrt{\tfrac{k}{r}} \end{array}$$

Supongamos que

$$f\left(L_n\right) =$$
$$L_n - r\ L_n + \frac{k}{L_n}$$

Una perturbación alrededor del punto de equilibrio, es decir, una variación alrededor de dicho punto, vendría dada por la derivada:

$$L'_{n+1} = L'_n - r\ L_n{}' - \tfrac{k}{L_n^2} L'_n = L'_n \left(1 - r - \tfrac{k}{L_n^2}\right) = L'_n\left(1 - 2r\right),$$

teniendo en cuenta que $L_n = L_n^*$, es decir, partíamos de un estado de equilibrio que ha sido perturbado en la siguiente iteración del tiempo. Entonces, el sistema es estable si $|1 - 2r| < 1$,es decir $0 < r < \frac{1}{2}$, y es inestable si $|1 - 2r| > 1$,es decir, $r > \frac{1}{2}$

```
function [Ln, Cn] = calculaLnCn(L, C, a, b, d, g)
    for i = 1:30
         L(i+1) = (1 - a)*L(i) + b*C(i);
         C(i+1) = -d*L(i) + (1 + g)*C(i);
    end
    Ln = L;
    Cn = C;
end
```