Introducción a Cálculo Numérico II

Jorge López Vega

1 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

En esta sección repasaremos los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) para poder garantizar la existencia y unicidad de la solución.

1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'', ..., x^{n)}) = 0$$

donde intervienen la variable independiente t junto a la dependiente x y sus derivadas hasta orden n.

Nosotros centraremos nuestro estudio en EDO de primer orden donde la derivada x' está despejada y con un valor inicial dado, obteniendo los llamados problemas de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

donde $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que depende de sus propiedades garantizaremos propiedades de la solución $x(t)$, $t \in [a, b]$.

Definición 1.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ es *lipschitziana* en D uniformemente en t si existe $L \geq 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

para todo $(t, x), (t, y) \in D$.

Observaciones 1.2. (1) Las soluciones de un PVI es una función $x(t)$ que veritica $x'(t) = f(t, x(t))$ y $x(a) = x_0$.

(2) En general, para nosotros $D = [a, b] \times \Omega$, con $\Omega \subset \mathbb{R}$ un abierto.

(3) Un caso particular de problema de valor inicial es cuando $x' = f(t, x) = g(t)h(x)$, es decir, la EDO es de variables separadas.

(4) Otro caso sencillo es cuando tenemos una ecuación lineal de primer orden, es decir, $x' = f(t, x) = a(t)x + b(t)$.

Proposición 1.3. *Sea $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ continua, de la forma $f(t, x) = a(t)x + b(t)$, donde $a, b : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Entonces f es lipschitziana en $[a, b] \times \Omega$ uniformemente en t.*

Demostración. Como $a : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado (compacto), por el teorema de Weierstrass, alcanza el máximo y mínimo, es decir, $|a(t)| \leq L$, para cierta $L \in \mathbb{R}$. Así,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |a(t)x + b(t) - a(t)y - b(t)| = |a(t)||x - y| \leq L|x - y|$$

para todo $(t, x), (t, y) \in [a, b] \times \Omega$. □

Proposición 1.4. *Sea $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ intervalo, tal que exite $\frac{\partial f}{\partial x}$. Entonces:*
f es lipschitziana en $[a, b] \times \Omega$ respecto x si y solo si $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq L$, para todo $(t, x) \in [a, b] \times \Omega$, con $L \geq 0$.

Demostración. No entra, tranquilos :). □

Teorema 1.5 (Teorema de Peano)**.** *Sea $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ continua, entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

tiene solución local, es decir, existe $x : [a, a + \delta) \to \mathbb{R}$ solución de (1) para algún $\delta \geq 0$.

Teorema 1.6 (Teorema local de Cauchy-Lipschitz)**.** *Sea $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial x} : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Entonces el problema*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

tiene solución local única, es decir, existe una única $x : [a, a+\delta) \to \mathbb{R}$ solución de (2) para algún $\delta \geq 0$.

Observación 1. Nótese que en realidad la solución del teorema de Peano o de Cauchy-Lipschitz es una función $x : [a, a+\delta] \to \Omega \subset \mathbb{R}$, es decir, $x(t) \in \Omega$, donde Ω viene dado por $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$, pero por simplicidad hemos denotado que el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$.

Teorema 1.7 (Teorema global de Cauchy-Lipschitz)**.** *Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y lipschitziana en $[a,b] \times \mathbb{R}$ uniformemente en t. Entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

tiene solución única en $t \in [a,b]$, es decir, existe una única $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ solución de (3).

En la mayoría de los casos $\frac{\partial f}{\partial x}$ no estará acotada en $[a,b] \times \Omega$, principalmente porque $\Omega = \mathbb{R}$, lo cual da problemas por no estar acotado el dominio. Por lo que tendremos que recurrir a otro resultado que nos garantizará que la solución $x(t)$ no tiene asíntotas, por lo que estará definida en todo su dominio $[a,b]$.

Teorema 1.8 (Teorema de las sub y super soluciones)**.** *Sean las funciones $f_1, f, f_2 : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ continuas tal que $f_1 \leq f \leq f_2$, para todo $(t,x) \in [a,b] \times \Omega$. Entonces la solución $x(t)$ del problema*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

cumple $x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t)$ para todo $t \in [a,b]$, donde $x_i(t), i = 1,2$ son las soluciones de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x_i' = f_i(t,x_i) \\ x_i(a) = x_0 \end{cases}$$

Una consecuencia inmediata del teorema de las sub y super soluciones es que si $C_1 \leq x(t) \leq C_2$ para todo $t \in [a,b]$ y para ciertas constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, entonces $x(t)$ está definida globalmente en todo $[a,b]$.

2 Métodos de resolución numérica de EDO´s.

En esta sección presentaremos varios métodos que nos permitirán aproximar una solución de un PVI dado, del cual sabremos si existe solución gracias a la sección anterior.

En lo que sigue, dado el PVI
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$
con $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable, denotaremos por $x(t_i)$ a la solución exacta del PVI en t_i y por x_i a la solución aproximada por un método, donde cada t_i son los elementos de una partición del intervalo $[a,b]$, que serán $t_i = a + \frac{b-a}{n} i$, donde a la cantidad $h = \frac{b-a}{n}$ se le llama *paso de la partición* y n es el número de pasos, por lo que $i \in \{0, 1, ..., n\}$. En esta situación, la aproximación de la solución queremos que cumpla $x(t_i) \approx x_i$, lo que nos lleva al concepto de convergencia de un método.

Definición 2.1. Diremos que un método es *convergente* si para cualquier solución $x(t)$ del PVI verifica
$$\max_{0\leq i\leq n} |x(t_i) - x_i| \to 0, \;\; h \to 0^+$$

2.1 Errores de convergencia y orden de convergencia.

El primer aspecto importante a la hora de aproximar una solución es saber cuanto error se está cometiendo y la magnitud u orden de dicho error.

Definición 2.2. En la situación anterior llamaremos *error absoluto* en t_i a $E(t_i) = |x(t_i) - x_i|$ y *error relativo* en t_i a $E_R(t_i) = \frac{|x(t_i)-x_i|}{|x(t_i)|}$.

Nótese que para poder calcular tanto el error absoluto como el relativo es necesario conocer la solución $x(t)$ del PVI, lo cual no será posible en muchas ocasiones debido a la complejidad del problema. Por tanto, para solventar este problema se estudiará el orden o magnitud del error cometido gracias al desarrollo en serie de Taylor.

Definición 2.3. Diremos que $f(x)$ es una *O grande de Landau* de $g(x)$ cuando $x \to x_0$ si existen $K, \delta > 0$ tal que
$$|f(x)| \leq K|g(x)| \text{ para todo } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$
Lo denotaremos por $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Proposición 2.4. *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K'$, entonces $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.*

Demostración. Hacer cuando acabe el esquema general □

Observación 2.5. Para optimizar la propiedad de ser O grande de Landau se suele pedir que el límite anterior sea $K' \neq 0$. Así, se evitan las siguientes igualdades
$$|x^3| \leq |x||x^2| \leq 1|x^2| \leq |x||x| \leq |x| \leq 1, \;\; \forall x \in (-\delta, \delta) \;\text{ con } |\delta| \leq 1.$$
Obteniendo así que $x^3 = O(x^2)$, $x^3 = O(x)$ o que $x^3 = O(1)$. Aunque la mejor optimización es $x^3 = O(x^3)$, la cual no se puede mejorar.

Definición 2.6. Diremos que $F(h)$ *converge a cero con orden p* si $F(h) = O(h^p)$, $h \to 0^+$.

Proposición 2.7. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{F(h)}{h^p} = K'$, entonces $|F(h)| \leq Kh^p$ para todo $x \in (0, \delta)$ para algún $\delta, K > 0$.*

Demostración. Ejercicio □

Definición 2.8. Diremos que un método es *convergente de orden p* si para cualquier solución $x(t)$ del PVI se verifica
$$\max_{0\leq n\leq N} |x(t_n) - x_n| = O(h^p), \;\; h \to 0^+$$

2.2 Método de Euler.

Sea el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

con $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ y una partición de $[a,b]$ de paso $h = \frac{b-a}{n}$, obteniendo una discretización del intervalo $[a,b]$ dada por los valores $t_i = a + hi$, con $i = 0,...,n$.
Nótese que para $i = 0$ obtenemos $x(t_0) = x(a) = x_0$ y además $x'(t_0) = f(t_0,x_0)$, es decir, conocemos la pendiente de la solución $x(t)$ en el punto $(t_0,x_0) = (a,x(a))$, cuya mejor aproximación lineal viene dada por la recta tangente

$$x - x(a) = x'(a)(t-a) \Longleftrightarrow x = x_0 + f(t_0,x_0)(t-t_0).$$

Así, al sustituir $x = t_1$ obtendremos una buena aproximación de $x(t_1)$ a cuanto más pequeño sea el paso h, consiguiendo el valor (t_1,x_1), donde

$$x_1 = x_0 + f(t_0,x_0)(t_1 - t_0).$$

Ahora, dado el punto (t_1,x_1) volvemos a considerar la recta tangente en ese punto con pendiente $f(t_1,x_1)$, obteniendo el punto (t_2,x_2), donde

$$x_2 = x_1 + f(t_1,x_1)(t_2 - t_1).$$

y continuamos hasta pasar por todos los puntos de la partición, obteniendo el conjunto discreto de puntos $\{(t_0,x_0),(t_1,x_1),(t_2,x_2),...,(t_n,x_n)\}$, los cuales se han construido siguiendo la formula

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i,x_i), \quad i = 0,...,n-1$$

ya que $t_{i+1} - t_i = h$.

2.3 Convergencia y error de truncamiento del método de Euler.

Para poder conocer el error cometido es necesario conocer la solución exacta $x(t)$ del PVI, pero debido a la dificultad del PVI inicial no se puede conocer la solución exacta. Debido a éste problema se da una cota superior del error,que depende del truncamiento que se haga en su desarrollo en serie de Taylor.
Recordando el teorema de Taylor, sabemos que fijado un $t_0 \in \mathbb{R}$ se cumple

$$x(t_0+h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{1}{2!}x''(t_0)h^2 + ... + \frac{x^{k-1)}(t_0)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{x^{k)}(c)}{k!}h^k$$

donde $c \in (t_0, t_0+h)$. Si truncamos este desarrollo cuando $k = 2$ obtenemos

$$x(t_0+h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{1}{2!}x''(c)h^2, \quad c \in (t_0,t_0+h)$$

Así, se observa el gran parecido con la aproximación hecha en el método de Euler, ya que si $t_0 = t_i$ y si suponemos que $x(t_i) = x_i$, es decir, que es exacto el valor en el punto t_i, obtenemos que

$$x(t_i+h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(c_i)h^2 = x_i + f(t_i,x_i)h + \frac{1}{2!}x''(c_i)h^2, \quad c \in (t_i,t_i+h)$$

Así, vemos que en el método de Euler aparece el término de $\frac{1}{2!}x''(c_i)h^2$, que obviamos y de ahí el error cometido, llamado *error de truncamiento* en el paso i-ésimo, el cual se da en cada paso de la partición y se puede acotar como sigue

$$|x(t_i+h) - x_{i+1}| = |x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(c_i)h^2 - x_i - hf(t_i,x_i)| = \frac{1}{2!}|x''(c_i)|h^2 \leq \frac{1}{2!}\max_{t\in(t_i,t_i+h)}|x''(t)|h^2$$

Por tanto, no podemos conocer exactamente la diferencia entre la solución exacta $x(t)$ y la aproximación en $t_i + h$, pero si podemos conocer una cota de dicho error en cada paso.

Concluyendo que el error de truncamiento en el paso i-ésimo del método de Euler es de orden 2. En efecto, ya que si $K = \frac{1}{2!}\max_{t\in(t_i,t_i+h)}|x''(t)|$, entonces

$$|x(t_i+h) - x_{i+1}| \leq \frac{1}{2!}\max_{t\in(t_i,t_i+h)}|x''(t)|h^2 = Kh^2$$

Si además se acota el error de truncamiento para todo i de la partición, entonces simplemente lo denominaremos *error de truncamiento.*

Ejemplo 2.9. Veamos la ventaja de conocer que el error de truncamiento sea de orden $O(h^2)$ con el siguiente ejemplo:
Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

con $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto x + t$, cuya solución viene dada por $x(t) = 2e^t - t - 1$. Sea la partición del intervalo $[0,1]$, dada por el paso $h = 0.2$. Veamos la cota del error de truncamiento en su paso 1, que gracias al crecimiento estricto de $x''(t)$ en el intervalo $[0,1]$, viene dado por

$$\frac{1}{2!} \max_{t \in (0,0.2)} |x''(t)|(0.2)^2 = \frac{1}{2!} \max_{t \in (0,0.2)} |2e^t|(0.2)^2 \leq \frac{1}{2!} 2e^{0.2}(0.2)^2 = e^{0.2}(0.2)^2 \approx 0.0489$$

Por tanto, si reducimos el paso a la mitad $0.1 = \frac{1}{2}h$, gracias al orden cuadrático del error de truncamiento, el error anterior se reducirá en la proporción dada por $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$. En efecto,

$$\frac{1}{2!} \max_{t \in (0,0.1)} |x''(t)|(0.1)^2 = \frac{1}{2!} \max_{t \in (0,0.1)} |2e^t|(0.1)^2 \leq \frac{1}{2!} 2e^{0.1}(0.1)^2 = e^{0.1}(0.1)^2 \approx 0.0111$$

Por tanto, todo este estudio ha sido local debido a que se analiza el error de truncamiento en el paso i-ésimo, de ahí que se denomine también *error local de truncamnniento* en el paso i-ésimo. Ahora introducimos el denominado *error global de truncamiento*, el cual es simplemente la acumulación de todos los errores locales de truncamiento, obteniendo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x''(c_i)}{2} h^2$$

el cual se puede acotar acotando cada error local de truncamnniento. Así, una cota viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x''(c_i)}{2} h^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \max_{t \in (t_i, t_{i+1})} |x''(t)| h^2$$

Proposición 2.10. *El error global de truncamiento del método de Euler es de orden 1.*

Demostración. En efecto, denotando $K(c_i) = \frac{x''(c_i)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x''(c_i)}{2} h^2 = \sum_{i=1}^{n} K(c_i) h^2 = h^2 \sum_{i=1}^{n} K(c_i).$$

Sea $K = \max_{1 \leq j \leq n} K(c_j)$, entonces

$$h^2 \sum_{i=1}^{n} K(c_i) \leq h^2 K n = K \frac{b-a}{h} h^2 = K' h$$

donde $K' = K(b-a)$. □

Observación 2.11. Aunque sea tentador definir $K = \sum_{i=1}^{n} \frac{x''(c_i)}{2}$ para argumentar que el error global de truncamiento tiene orden 2, puesto que tendriamos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x''(c_i)}{2} h^2 = K h^2$$

no sería correcto debido a que la constante $K = \sum_{i=1}^{n} \frac{x''(c_i)}{2}$ depende de n y por tanto de h, pudiendo afectar al orden. Así que, para solventar este problema tenemos garantizar que la constante no depende de h y por consiguiente de n.

Teorema 2.12. *El método de Euler es convergente de orden 1.*

Demostración. Hacerla cuando acabe el esquema general □

2.4 Método de Euler mejorado.

En la seción 2.3 concluimos que el método de Euler es convergente de orden 1, lo cual es desalentador debido a la lentitud de la convergencia a la solución, ya que es lineal. Para intentar solventar este problema vamos a aproximar la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

por medio de la aproximación integral de la regla del trapecia en vez de usar la aproximación dada por la recta tangente.

Recordemos que la regla del trapecio decía que

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Ahora relacionemos el PVI con una integral como sigue

$$x'(t) = f(t,x(t)) \Longrightarrow \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,x(t))dt$$

y aplicando el teorema fundamental del cálculo y la regla del trapecio obtenemos

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx (t_{i+1} - t_i)\frac{f(t_i,x(t_i)) + f(t_{i+1},x(t_{i+1}))}{2}$$

Por tanto, podemos suponer que el valor aproximado x_{i+1} viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + h\frac{f(t_i,x_i) + f(t_{i+1},x_{i+1})}{2}$$

Aunque rápidamente identificamos que el término x_{i+1} aparece de forma implicita, haciendo que la fórmula anterior no depende de valores anteriores conocidos. Para solucionar este problema sustituiremos el x_{i+1} que aparece dentro de la f por su aproximación dada por el método de Euler, es decir, $x_{i+1} = x_i + hf(t_i,x_i)$. Concluyendo la llamada fórmula de Heun

$$x_{i+1} = x_i + h\frac{f(t_i,x_i) + f(t_{i+1},x_i + hf(t_i,x_i))}{2}$$

en la cual x_{i+1} depende de valores ya conocidos.

Proposición 2.13. *El método de Euler mejorado tiene orden de convergencia* 2 *y error local de truncamiento* 3*.*

2.5 Método de Taylor.

La idea prinicipal del método de Euler era truncar su desarrolo en serie de Taylor en $k=2$, obteniendo

$$x(t_i+h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(c)h^2, \quad c \in (t_0, t_0+h)$$

Por tanto, al prescindir del término de orden 2 obteniamos la mejor aproximación lineal a la solución $x(t)$. Con esto en mente es lógico truncar el desarrollo en serie de Taylor en un orden superior con $k=3$. Así, obtenemos

$$x(t_i+h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(t_i)h^2 + +\frac{1}{3!}x'''(c)h^3, \quad c \in (t_0, t_0+h)$$

De forma análoga, prescindiendo del término de orden 3 obtenemos

$$x(t_i+h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(t_i)h^2, \quad c \in (t_0, t_0+h)$$

Por tanto, el error de truncamiento cometido es de orden 3 y además al ser $x(t)$ solución del PVI sabemos que $x'(t_i) = f(t_i,x(t_i))$ y por la regla de la cadena

$$x''(t_i) = \frac{\partial f}{\partial t}f(t_i,x(t_i)) + \frac{\partial f}{\partial x}f(t_i,x(t_i))x'(t_i) = \frac{\partial f}{\partial t}f(t_i,x(t_i)) + \frac{\partial f}{\partial x}f(t_i,x(t_i))f(t_i,x(t_i))$$

Así, denotando

$$f_2(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}f(t,x) + \frac{\partial f}{\partial x}f(t,x)f(t,x)$$

Lo que nos lleva a considerar la fórmula

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f_2(t_i, x_i)$$

Iterando el proceso y truncando en orden k, omitiendo el término de orden $k+1$ la fórmula sería

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f_2(t_i, x_i) + ... + \frac{1}{k!}h^k f_k(t_i, x_i)$$

Proposición 2.14. *El método de Taylor de orden k es convergente de orden k y su error de truncamiento es de orden $k+1$.*

Nótese que el precio a pagar por tener un orden de convergencia k es el cálculo de las derivadas respecto a t aplicando consecutivamente la regla de la cadena, lo cual es computacionalmente costoso.

2.6 Método de Runge-Kutta.

Otra generalización del método de Euler y del método de Euler mejorado es, en vez de considerar un truncamineto de orden mayor, obtener una expresión una expresión de la forma

$$x_{i+1} = x_i + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

donde b_i son coeficientes que se eligen imponiendo que el orden sea lo mayor posible y los k_i son de la forma

$$k_i = f(t_i + hc_i, x_i + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j)$$

Así, si imponemos que su orden de convergencia sea 4 obtendríamos

$$\begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(t_i, x_i) \\ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(t_i + h, x_i + k_3) \end{array}$$

3 Programación lineal

3.1 Forma estandar

Vamos a ver un algoritmo el cual nos permitirá obtenener la existencia o no existencia del máximo una función objetivo sujeta a una restricciones. Esquemáticamente tendremos

$$\begin{array}{l} \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

Cuya forma matricial se expresa como

$$\begin{array}{l} \max z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

Nosotros siempre vamos a trabajar con restricciones del tipo $\leq$ tal que $b_i \geq 0$ para todo i. Para ello multiplicando por -1 a ambos miembros de una desigualdad para conseguir lo querido.

En este punto, podemos transformar nuestro problema (5) en su forma estándar

$$\begin{array}{l} \max z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \tag{6}$$

para ello añadiremos a cada restricción una variable nueva, llamada *vatiable de holgura*, la cual será no negativa y transforma el menor o igual en un igual.

Observación 3.1. Nótese que

$$\min(z) = -\max(-z)$$

Por tanto, todo problema de minimización se puede transformar en un problema de maximización y viceversa.