

Introducción a Cálculo Numérico II

Jorge López Vega

1 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

En esta sección repasaremos los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) para poder garantizar la existencia y unicidad de la solución.

1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^n) = 0$$

donde intervienen la variable independiente t junto a la dependiente x y sus derivadas hasta orden n .

Nosotros centraremos nuestro estudio en EDO de primer orden donde la derivada x' está despejada y con un valor inicial dado, obteniendo los llamados problemas de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

donde $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que depende de sus propiedades garantizaremos propiedades de la solución $x(t)$, $t \in [a, b]$.

Definición 1.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ es *lipschitziana* en D uniformemente en t si existe $L \geq 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

para todo $(t, x), (t, y) \in D$.

Observaciones 1.2. (1) Las soluciones de un PVI es una función $x(t)$ que verifica $x'(t) = f(t, x(t))$ y $x(a) = x_0$.

(2) En general, para nosotros $D = [a, b] \times \Omega$, con $\Omega \subset \mathbb{R}$ un abierto.

(3) Un caso particular de problema de valor inicial es cuando $x' = f(t, x) = g(t)h(x)$, es decir, la EDO es de variables separadas.

(4) Otro caso sencillo es cuando tenemos una ecuación lineal de primer orden, es decir, $x' = f(t, x) = a(t)x + b(t)$.

Proposición 1.3. Sea $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, de la forma $f(t, x) = a(t)x + b(t)$, donde $a, b : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. Entonces f es lipschitziana en $[a, b] \times \Omega$ uniformemente en t .

Demostración. Como $a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado (compacto), por el teorema de Weierstrass, alcanza el máximo y mínimo, es decir, $|a(t)| \leq L$, para cierta $L \in \mathbb{R}$. Así,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |a(t)x + b(t) - a(t)y - b(t)| = |a(t)||x - y| \leq L|x - y|$$

para todo $(t, x), (t, y) \in [a, b] \times \Omega$. □

Proposición 1.4. Sea $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ intervalo, tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x}$. Entonces:

f es lipschitziana en $[a, b] \times \Omega$ respecto x si y solo si $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L$, para todo $(t, x) \in [a, b] \times \Omega$, con $L \geq 0$.

Demostración. No entra, tranquilos :). □

Teorema 1.5 (Teorema de Peano). Sea $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

tiene solución local, es decir, existe $x : [a, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ solución de (1) para algún $\delta \geq 0$.

Teorema 1.6 (Teorema local de Cauchy-Lipschitz). Sea $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial x} : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

tiene solución local única, es decir, existe una única $x : [a, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ solución de (2) para algún $\delta \geq 0$.

Observación 1. Nótese que en realidad la solución del teorema de Peano o de Cauchy-Lipschitz es una función $x : [a, a + \delta] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}$, es decir, $x(t) \in \Omega$, donde Ω viene dado por $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pero por simplicidad hemos denotado que el conjunto de llegada es \mathbb{R} .

Teorema 1.7 (Teorema global de Cauchy-Lipschitz). Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y lipschitziana en $[a, b] \times \mathbb{R}$ uniformemente en t . Entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

tiene solución única en $t \in [a, b]$, es decir, existe una única $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ solución de (3).

En la mayoría de los casos $\frac{\partial f}{\partial x}$ no estará acotada en $[a, b] \times \Omega$, principalmente porque $\Omega = \mathbb{R}$, lo cual da problemas por no estar acotado el dominio. Por lo que tendremos que recurrir a otro resultado que nos garantizará que la solución $x(t)$ no tiene asíntotas, por lo que estará definida en todo su dominio $[a, b]$.

Teorema 1.8 (Teorema de las sub y super soluciones). Sean las funciones $f_1, f, f_2 : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tal que $f_1 \leq f \leq f_2$, para todo $(t, x) \in [a, b] \times \Omega$. Entonces la solución $x(t)$ del problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

cumple $x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t)$ para todo $t \in [a, b]$, donde $x_i(t), i = 1, 2$ son las soluciones de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x'_i = f_i(t, x_i) \\ x_i(a) = x_0 \end{cases}$$

Una consecuencia inmediata del teorema de las sub y super soluciones es que si $C_1 \leq x(t) \leq C_2$ para todo $t \in [a, b]$ y para ciertas constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, entonces $x(t)$ está definida globalmente en todo $[a, b]$.

2 Métodos de resolución numérica de EDO's.

En esta sección presentaremos varios métodos que nos permitirán aproximar una solución de un PVI dado, del cual sabremos si existe solución gracias a la sección anterior.

En lo que sigue, dado el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

con $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, denotaremos por $x(t_i)$ a la solución exacta del PVI en t_i y por x_i a la solución aproximada por un método, donde cada t_i son los elementos de una partición del intervalo $[a, b]$, que serán $t_i = a + \frac{b-a}{n}i$, donde a la cantidad $h = \frac{b-a}{n}$ se le llama *paso de la partición* y n es el número de pasos, por lo que $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. En esta situación, la aproximación de la solución queremos que cumpla $x(t_i) \approx x_i$, lo que nos lleva al concepto de convergencia de un método.

Definición 2.1. Diremos que un método es *convergente* si para cualquier solución $x(t)$ del PVI verifica

$$\max_{0 \leq i \leq n} |x(t_i) - x_i| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0^+$$

2.1 Errores de convergencia y orden de convergencia.

El primer aspecto importante a la hora de aproximar una solución es saber cuanto error se está cometiendo y la magnitud u orden de dicho error.

Definición 2.2. En la situación anterior llamaremos *error absoluto* en t_i a $E(t_i) = |x(t_i) - x_i|$ y *error relativo* en t_i a $E_R(t_i) = \frac{|x(t_i) - x_i|}{|x(t_i)|}$.

Nótese que para poder calcular tanto el error absoluto como el relativo es necesario conocer la solución $x(t)$ del PVI, lo cual no será posible en muchas ocasiones debido a la complejidad del problema. Por tanto, para solventar este problema se estudiará el orden o magnitud del error cometido gracias al desarrollo en serie de Taylor.

Definición 2.3. Diremos que $f(x)$ es una *O grande de Landau* de $g(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si existen $K, \delta > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K|g(x)| \text{ para todo } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Lo denotaremos por $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

Proposición 2.4. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K'$, entonces $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

Demostración. Hacer cuando acabe el esquema general □

Observación 2.5. Para optimizar la propiedad de ser O grande de Landau se suele pedir que el límite anterior sea $K' \neq 0$. Así, se evitan las siguientes igualdades

$$|x^3| \leq |x||x^2| \leq 1|x^2| \leq |x||x| \leq |x| \leq 1, \quad \forall x \in (-\delta, \delta) \text{ con } |\delta| \leq 1.$$

Obteniendo así que $x^3 = O(x^2)$, $x^3 = O(x)$ o que $x^3 = O(1)$. Aunque la mejor optimización es $x^3 = O(x^3)$, la cual no se puede mejorar.

Definición 2.6. Diremos que $F(h)$ converge a cero con orden p si $F(h) = O(h^p), h \rightarrow 0^+$.

Proposición 2.7. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h)}{h^p} = K'$, entonces $|F(h)| \leq Kh^p$ para todo $x \in (0, \delta)$ para algún $\delta, K > 0$.

Demostración. Ejercicio □

Definición 2.8. Diremos que un método es *convergente de orden p* si para cualquier solución $x(t)$ del PVI se verifica

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0^+$$

2.2 Método de Euler.

Sea el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

con $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y una partición de $[a, b]$ de paso $h = \frac{b-a}{n}$, obteniendo una discretización del intervalo $[a, b]$ dada por los valores $t_i = a + hi$, con $i = 0, \dots, n$.

Nótese que para $i = 0$ obtenemos $x(t_0) = x(a) = x_0$ y además $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$, es decir, conocemos la pendiente de la solución $x(t)$ en el punto $(t_0, x_0) = (a, x(a))$, cuya mejor aproximación lineal viene dada por la recta tangente

$$x - x(a) = x'(a)(t - a) \iff x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

Así, al sustituir $x = t_1$ obtendremos una buena aproximación de $x(t_1)$ a cuanto más pequeño sea el paso h , consiguiendo el valor (t_1, x_1) , donde

$$x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0).$$

Ahora, dado el punto (t_1, x_1) volvemos a considerar la recta tangente en ese punto con pendiente $f(t_1, x_1)$, obteniendo el punto (t_2, x_2) , donde

$$x_2 = x_1 + f(t_1, x_1)(t_2 - t_1).$$

y continuamos hasta pasar por todos los puntos de la partición, obteniendo el conjunto discreto de puntos $\{(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n)\}$, los cuales se han construido siguiendo la formula

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), \quad i = 0, \dots, n-1$$

ya que $t_{i+1} - t_i = h$.

2.3 Convergencia y error de truncamiento del método de Euler.

Para poder conocer el error cometido es necesario conocer la solución exacta $x(t)$ del PVI, pero debido a la dificultad del PVI inicial no se puede conocer la solución exacta. Debido a éste problema se da una cota superior del error, que depende del truncamiento que se haga en su desarrollo en serie de Taylor.

Recordando el teorema de Taylor, sabemos que fijado un $t_0 \in \mathbb{R}$ se cumple

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{1}{2!}x''(t_0)h^2 + \dots + \frac{x^{(k-1)}(t_0)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{x^{(k)}(c)}{k!}h^k$$

donde $c \in (t_0, t_0 + h)$. Si truncamos este desarrollo cuando $k = 2$ obtenemos

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{1}{2!}x''(c)h^2, \quad c \in (t_0, t_0 + h)$$

Así, se observa el gran parecido con la aproximación hecha en el método de Euler, ya que si $t_0 = t_i$ y si suponemos que $x(t_i) = x_i$, es decir, que es exacto el valor en el punto t_i , obtenemos que

$$x(t_i + h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(c_i)h^2 = x_i + f(t_i, x_i)h + \frac{1}{2!}x''(c_i)h^2, \quad c \in (t_i, t_i + h)$$

Así, vemos que en el método de Euler aparece el término de $\frac{1}{2!}x''(c_i)h^2$, que obviamos y de ahí el error cometido, llamado *error de truncamiento* en el paso i -ésimo, el cual se da en cada paso de la partición y se puede acotar como sigue

$$|x(t_i + h) - x_{i+1}| = |x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(c_i)h^2 - x_i - hf(t_i, x_i)| = \frac{1}{2!}|x''(c_i)|h^2 \leq \frac{1}{2!} \max_{t \in (t_i, t_i + h)} |x''(t)|h^2$$

Por tanto, no podemos conocer exactamente la diferencia entre la solución exacta $x(t)$ y la aproximación en $t_i + h$, pero si podemos conocer una cota de dicho error en cada paso.

Concluyendo que el error de truncamiento en el paso i -ésimo del método de Euler es de orden 2. En efecto, ya que si $K = \frac{1}{2!} \max_{t \in (t_i, t_i + h)} |x''(t)|$, entonces

$$|x(t_i + h) - x_{i+1}| \leq \frac{1}{2!} \max_{t \in (t_i, t_i + h)} |x''(t)|h^2 = Kh^2$$

Si además se acota el error de truncamiento para todo i de la partición, entonces simplemente lo denominaremos *error de truncamiento*.

Ejemplo 2.9. Veamos la ventaja de conocer que el error de truncamiento sea de orden $O(h^2)$ con el siguiente ejemplo:

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

con $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto x + t$, cuya solución viene dada por $x(t) = 2e^t - t - 1$. Sea la partición del intervalo $[0, 1]$, dada por el paso $h = 0.2$. Veamos la cota del error de truncamiento en su paso 0, que gracias al crecimiento estricto de $x''(t)$ en el intervalo $[0, 1]$, viene dado por

$$\frac{1}{2!} \max_{t \in (0, 0.2)} |x''(t)|(0.2)^2 = \frac{1}{2!} \max_{t \in (0, 0.2)} |2e^t|(0.2)^2 \leq \frac{1}{2!} 2e^{0.2}(0.2)^2 = e^{0.2}(0.2)^2 \approx 0.0489$$

Por tanto, si reducimos el paso a la mitad $0.1 = \frac{1}{2}h$, gracias al orden cuadrático del error de truncamiento, el error anterior se reducirá en la proporción dada por $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$. En efecto,

$$\frac{1}{2!} \max_{t \in (0, 0.1)} |x''(t)|(0.1)^2 = \frac{1}{2!} \max_{t \in (0, 0.1)} |2e^t|(0.1)^2 \leq \frac{1}{2!} 2e^{0.1}(0.1)^2 = e^{0.1}(0.1)^2 \approx 0.0111$$

Por tanto, todo este estudio ha sido local debido a que se analiza el error de truncamiento en el paso i -ésimo, de ahí que se denomine también *error local de truncamiento* en el paso i -ésimo. Ahora introducimos el denominado *error global de truncamiento*, el cual es simplemente la acumulación de todos los errores locales de truncamiento, obteniendo

$$\sum_{i=1}^n \frac{x''(c_i)}{2} h^2$$

el cual se puede acotar acotando cada error local de truncamiento. Así, una cota viene dada por

$$\sum_{i=1}^n \frac{x''(c_i)}{2} h^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \max_{t \in (t_i, t_{i+1})} |x''(t)| h^2$$

Proposición 2.10. *El error global de truncamiento del método de Euler es de orden 1.*

Demostración. En efecto, denotando $K(c_i) = \frac{x''(c_i)}{2}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x''(c_i)}{2} h^2 = \sum_{i=1}^n K(c_i) h^2 = h^2 \sum_{i=1}^n K(c_i).$$

Sea $K = \max_{1 \leq j \leq n} K(c_j)$, entonces

$$h^2 \sum_{i=1}^n K(c_i) \leq h^2 K n = K \frac{b-a}{h} h^2 = K' h$$

donde $K' = K(b-a)$. □

Observación 2.11. Aunque sea tentador definir $K = \sum_{i=1}^n \frac{x''(c_i)}{2}$ para argumentar que el error global de truncamiento tiene orden 2, puesto que tendríamos

$$\sum_{i=1}^n \frac{x''(c_i)}{2} h^2 = K h^2$$

no sería correcto debido a que la constante $K = \sum_{i=1}^n \frac{x''(c_i)}{2}$ depende de n y por tanto de h , pudiendo afectar al orden. Así que, para solventar este problema tenemos garantizar que la constante no depende de h y por consiguiente de n .

Teorema 2.12. *El método de Euler es convergente de orden 1.*

Demostración. Hacerla cuando acabe el esquema general □

2.4 Método de Euler mejorado.

En la sección 2.3 concluimos que el método de Euler es convergente de orden 1, lo cual es desalentador debido a la lentitud de la convergencia a la solución, ya que es lineal. Para intentar solventar este problema vamos a aproximar la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

por medio de la aproximación integral de la regla del trapecio en vez de usar la aproximación dada por la recta tangente.

Recordemos que la regla del trapecio decía que

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Ahora relacionemos el PVI con una integral como sigue

$$x'(t) = f(t, x(t)) \implies \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))dt$$

y aplicando el teorema fundamental del cálculo y la regla del trapecio obtenemos

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx (t_{i+1} - t_i) \frac{f(t_i, x(t_i)) + f(t_{i+1}, x(t_{i+1}))}{2}$$

Por tanto, podemos suponer que el valor aproximado x_{i+1} viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + h \frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})}{2}$$

Aunque rápidamente identificamos que el término x_{i+1} aparece de forma implícita, haciendo que la fórmula anterior no depende de valores anteriores conocidos. Para solucionar este problema sustituiremos el x_{i+1} que aparece dentro de la f por su aproximación dada por el método de Euler, es decir, $x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$. Concluyendo la llamada fórmula de Heun

$$x_{i+1} = x_i + h \frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_i + hf(t_i, x_i))}{2}$$

en la cual x_{i+1} depende de valores ya conocidos.

Proposición 2.13. *El método de Euler mejorado tiene orden de convergencia 2 y error local de truncamiento 3.*

2.5 Método de Taylor.

La idea principal del método de Euler era truncar su desarrollo en serie de Taylor en $k = 2$, obteniendo

$$x(t_i + h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(c)h^2, \quad c \in (t_0, t_0 + h)$$

Por tanto, al prescindir del término de orden 2 obteníamos la mejor aproximación lineal a la solución $x(t)$. Con esto en mente es lógico truncar el desarrollo en serie de Taylor en un orden superior con $k = 3$. Así, obtenemos

$$x(t_i + h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(t_i)h^2 + \frac{1}{3!}x'''(c)h^3, \quad c \in (t_0, t_0 + h)$$

De forma análoga, prescindiendo del término de orden 3 obtenemos

$$x(t_i + h) = x(t_i) + x'(t_i)h + \frac{1}{2!}x''(t_i)h^2, \quad c \in (t_0, t_0 + h)$$

Por tanto, el error de truncamiento cometido es de orden 3 y además al ser $x(t)$ solución del PVI sabemos que $x'(t_i) = f(t_i, x(t_i))$ y por la regla de la cadena

$$x''(t_i) = \frac{\partial f}{\partial t} f(t_i, x(t_i)) + \frac{\partial f}{\partial x} f(t_i, x(t_i))x'(t_i) = \frac{\partial f}{\partial t} f(t_i, x(t_i)) + \frac{\partial f}{\partial x} f(t_i, x(t_i))f(t_i, x(t_i))$$

Así, denotando

$$f_2(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} f(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x} f(t, x)f(t, x)$$

Lo que nos lleva a considerar la fórmula

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f_2(t_i, x_i)$$

Iterando el proceso y truncando en orden k , omitiendo el término de orden $k + 1$ la fórmula sería

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f_2(t_i, x_i) + \dots + \frac{1}{k!}h^k f_k(t_i, x_i)$$

Proposición 2.14. *El método de Taylor de orden k es convergente de orden k y su error de truncamiento es de orden $k + 1$.*

Nótese que el precio a pagar por tener un orden de convergencia k es el cálculo de las derivadas respecto a t aplicando consecutivamente la regla de la cadena, lo cual es computacionalmente costoso.

2.6 Método de Runge-Kutta.

Otra generalización del método de Euler y del método de Euler mejorado es, en vez de considerar un truncamiento de orden mayor, obtener una expresión de la forma

$$x_{i+1} = x_i + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

donde b_i son coeficientes que se eligen imponiendo que el orden sea lo mayor posible y los k_i son de la forma

$$k_i = f(t_i + hc_i, x_i + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$$

Así, si imponemos que su orden de convergencia sea 4 obtendríamos

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(t_i, x_i) \\ k_2 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(t_i + h, x_i + k_3) \end{aligned}$$

3 Programación lineal

3.1 Forma estandar

Vamos a ver un algoritmo el cual nos permitirá obtener la existencia o no existencia del máximo una función objetivo sujeta a una restricción. Esquemáticamente tendremos

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Cuya forma matricial se expresa como

$$\begin{aligned} \max z &= c^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Nosotros siempre vamos a trabajar con restricciones del tipo \leq tal que $b_i \geq 0$ para todo i . Para ello multiplicando por -1 a ambos miembros de una desigualdad para conseguir lo querido.

En este punto, podemos transformar nuestro problema (5) en su forma estándar

$$\begin{aligned} \max z &= c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

para ello añadiremos a cada restricción una variable nueva, llamada *variable de holgura*, la cual será no negativa y transforma el menor o igual en un igual.

Observación 3.1. Nótese que

$$\min(z) = -\max(-z)$$

Por tanto, todo problema de minimización se puede transformar en un problema de maximización y viceversa.

3.2 Algoritmo del Simplex

Veamos los pasos a seguir para llegar a la solución óptima del problema.

- Paso 1: Construir la tabla inicial con variables básicas las variables de holgura.
- Paso 2: Si $z_j - c_j < 0$, ir al paso 3. En caso contrario paramos porque hemos llegado a la solución óptima.
- Paso 3: Si existe a_j con $z_j - c_j < 0$ y sus coordenadas y_{ij} no tiene componentes negativas, entonces la solución es no acotada. En cambio, si alguna de sus coordenadas $y_{ij} > 0$, ir al paso 4.
- Paso 4: Selección de la nueva base:
Entra en la base a_k , donde k verifica que

$$z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j : z_j - c_j \leq 0\}$$

(la columna k será la *columna pivote*).

Y sale de la base el vector a_r tal que

$$\frac{b_r}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

(la fila r será la *fila pivote*). Así obtenemos el elemento *pivote* y_{rk} . Ir al paso 5.

- Paso 5: Aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan para obtener la matriz de Hermite por filas (escalonada reducida por filas) donde la matriz identidad está en la columnas de los vectores básicos. Ir al paso 2.

4 Grafos.

Un *grafo* G es a un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, llamados *vértices* y $E(G) \subset \{\{u, v\} : u, v \in V(G), v \neq u\}$, llamadas *aristas*.

Nótese, que dada una arista $e \in E(G)$, se cumple $e = \{u, v\} = \{v, u\}$, es decir, que gracias a las propiedades de los conjuntos no hay una orientación de e .

Ejemplo 4.1. Sea $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \}) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, k\} : k = 2, 3, 4\})$.

4.1 Generalidades de grafos.

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo con $V(G) = \{1, \dots, n\}$, entonces:

- Si $e = \{u, v\}$ es una arista de G , diremos que tiene a u y v por *extremos* de e .
- Diremos que e *incide* sobre $u \in V(G)$, si u es un extremo de e .
- Los vértices $u, v \in V(G)$ son *adyacentes* si $\{u, v\} \in E(G)$.
- Llamamos *grado* de $v \in V(G)$ a: $gr(v) = |\{\{v, u\} \in E(G) : u \in V(G)\}|$, es decir, es el número de aristas que inciden sobre v .
- Diremos que G es *k-regular* si $gr(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.
- La *matriz de adyacencia* de G es:

$$Ad(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E(G) \end{cases}$$

Definición 4.2. Diremos que $S = (V(S), E(S))$ es un subgrafo de $G = (V(G), E(G))$ si $V(S) \subset V(G)$ y $E(S) \subset E(G)$. Se denotará como $S \subset G$.

Teorema 4.3. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo, entonces

$$\sum_{v \in V(G)} gr(v) = 2|E(G)|$$

Proof. Basta darse cuenta que cada arista se cuenta dos veces al calcular el grado de cada vértice. \square

Ejemplo 4.4. Sea G un grafo 3-regular con 15 aristas. Veamos que el número de vértices ya está acotado con esta información.

4.2 Operaciones con grafos.

Nos vamos a centrar en dos construcciones de nuevos grafos a partir de dos grafos dados $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$.

- **Unión de grafos:**
- **Supresión de una arista** $e \in E(G)$:

4.3 Conexión.

Definición 4.5. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. Un *camino de longitud* $n - 1$ de $v_1 \in V(G)$ hasta $v_n \in V(G)$, es una sucesión de n vértices $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$, para todo $i = 1, \dots, n - 1$. Además diremos:

- Un camino es *simple* si todos los vértices de la sucesión son distintos, a excepcion de posiblemente el primero y el último.
- Un camino es *cerrado* si $v_1 = v_n$, denominado también *circuito*.
- Un *ciclo* es un camino simple y cerrado.

Observación 4.6. Nótese que la longitud de un camino es también el número de aristas que recorre.

Ejemplo 4.7. Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es *conexo* si para cada par de vértices $u, v \in V(G)$, existe un camino desde u hasta v .

Proposición 4.8. Si existe un camino desde u hasta v en $G = (V(G), E(G))$, entonces existe un camino simple.

Proof. Sea $u, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v$ dicho camino. Si el simple, hemos acabado. En caso contrario, existen $j < k$ tal que $v_j = v_k$, por tanto nuestro camino es de la forma $u, v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v$ y considerando el camino $u, v_2, v_3, \dots, v_j, v_{k+1}, \dots, v$ obviamos la parte del camino que vuelve a v_j . Si ahora el camino el simple hemos acabado, en caso contrario, habrá que proceder de forma análoga una cantidad finita de veces, obteniendo lo querido. \square

Con todo esto, ya podemos dar unos sorprendentes resultados, los cuales nos van a permitir sacar información topológica de G a través de cálculos algebraicos los cuales son computables.

Teorema 4.9. Sea G un grafo con $V(G) = \{1, \dots, n\}$ y $A = Ad(G)$ su matriz de adyacencia. Entonces, el elemento en la posición (i, j) de A^k , denotado por $a_{ij}^{(k)}$, es el número de caminos de longitud k con extremos v_i con v_j .

Proof. Procederemos por inducción sobre k .

Si $k = 0$, entonces $A^0 = Id$, cumpliéndose trivialmente lo querido. Ahora, suponiendo el resultado cierto para k , veamos si se verifica para $k + 1$. Para ello, veamos si $a_{ij}^{(k+1)}$ es el número de caminos de longitud $k + 1$ con extremos v_i y v_j . Como $A^{k+1} = A^k A$, entonces

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^n a_{ir}^{(k)} a_{rj} = \sum_{r \in V_j} a_{ir}^{(k)}$$

donde $V_j = \{s \in V(G) : a_{sj} = 1\}$, es decir, el conjunto de vértices adyacentes a j . Obtemiendo lo querido. En efecto, ya que el número de caminos de longitud $k + 1$ de v_i a v_j es la suma de los caminos de longitud k de v_i a los vértices adyacentes de v_j . \square

Gracias a este teorema podemos enunciar otros resultados igual de importantes y con aplicaciones más inmediatas.

Proposición 4.10. Sea G un grafo con $V(G) = \{1, \dots, n\}$ y $A = Ad(G)$ su matriz de adyacencia. Entonces, G es conexo si, y solo si, la matriz $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ no tiene entradas nulas.

Proof. Para la condición suficiente, sean $i, j \in V(G), i \neq j$, como $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ no tiene entradas nulas, entonces existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $a_{ij}^{(k)} > 0$. concluyendo que hay un camino de longitud k uniendo i con j . Por otro lado, si G es conexo, entonces para cada $i, j \in V(G)$ existe un camino que une i con j y además podemos suponer que es simple, por lo tanto su longitud es como mucho de $n-1$. Por tanto, existe un $0 \leq k \leq n-1$ tal que $a_{ij}^{(k)} \geq 1$. Así, la matriz $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ no tiene entradas nulas. \square

Ejemplo 4.11. Sea el grafo G cuya matriz de adyacencia viene dada por

$$A = Ad(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que no conocemos G , no sabemos ni si es conexo, ni cuantos caminos hay de cierta longitud, ni cuantas aristas y si no pensamos nada no sabemos ni cuantos vértices tiene. Pese a todo esto, podemos determinar si es conexo con simples operaciones algebraicas ya que

$$\sum_{k=0}^3 A^k = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

puesto que $|V(G)| = 4$, por la dimensión de la matriz A . Como $\sum_{k=0}^3 A^k$ no tiene entradas nulas G es conexo.

Proposición 4.12. Sea G un grafo con $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Entonces $e = \{i, j\} \in E(G)$ pertenece a un ciclo si, y solo si, el elemento $s_{ij} \neq 0$, siendo el elemento en la posición (i, j) de la matriz $S = \sum_{k=0}^{n-1} B^k$, con $B = Ad(G \setminus e)$

Proof. Teniendo en cuenta que $\{i, j\}$ pertenece a un ciclo si, y solo si existe un camino simple que conecte i con j , sin pasar por la arista $\{i, j\}$, se tiene inmediatamente lo querido. En efecto, $e = \{i, j\}$ pertenece a un ciclo si y solo si existe un camino de i hasta j en $G \setminus e$ si y solo si $s_{ij} \neq 0$. \square

4.4 Componentes conexas.

Dado un grafo G hay dos posibilidades que sea conexo o que no lo sea, cuestión que podemos responder sin problemas. Esto nos lleva a otra pregunta natural, porque en caso de que no sea conexo, ¿cuántos "trozos" tiene?

Definición 4.13. Sea G un grafo e $i \in V(G)$, llamaremos *componente conexa* de G que contiene a i al mayor subgrafo conexo que contiene a i , denotada por $G(i)$.

Observación 4.14. (1) La consición de ser el mayor subgrafo que contiene a i esta dada de forma natural por la inclusión, cumpliéndose que si $S \subset G$ contiene a i y es conexo, entonces $S \subset G(i)$.

(2) Las componentes conexas de un grafo G son los "trozos" conexos que conforman G .

(3) Si existe un camino de i hasta j , entonces $G(i) = G(j)$.

Para el cálculo de las componentes conexas procederemos según el siguiente algoritmo:

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

4.5 Grafos Eulerianos.

Vamos a tratar con un problema al que nos hemos enfrentado todos en la escuela, el cual consistía dibujar una casa sin levantar el boli del papel y sin pasar dos veces por el mismo sitio y acabando donde empiezas. Este problema se puede traducir a grafos de forma inmediata, ya que consiste en encontrar un camino cerrado simple sin repetir aristas y pasando por todas (para dibujar la casa al completo). Lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.15. Diremos que un grafo G es *euleriano* si admite un circuito que recorre todas las aristas sin repetir ninguna. Llamaremos a este circuito *circuito euleriano*.

Como es costumbre, antes de empezar a buscar caminos a la cuenta de la vieja tendremos que garantizar que es posible encontrar dicho circuito, aunque no sepamos cual es.

Teorema 4.16. Sea G un grafo conexo. Entonces, G es euleriano si, y solo si, todos sus vértices tienen grado par.

Por lo que solo queda la pregunta del millón. ¿Cuál es dicho circuito euleriano? Pues para responder a la pregunta seguiremos el denominado algoritmo de Fleury, el cual dice:

(1) Verificar que existe un circuito euleriano.

(2) Seleccionar un vértice arbitrario.

(3) Seleccionar una arista incidente sobre el vértice seleccionado que no sea puente, a menos que no haya otra alternativa.

(4) Eliminar la arista seleccionada.

(5) Si todos los vértices están desconectados, entonces ya se obtiene el circuito euleriano. En caso, contrario ir al paso 3.

Nótese que hemos enumerado los pasos del algoritmo de Fleury de forma no matemática pero hemos ganado comprensión de la idea, lo cual nos supondrá un problema a la hora de programarlo.

Ejercicio 4.17. Programa en MATLAB el algoritmo de Fleury.

4.6 Grafos ponderados.