Ejercicio 1.(2,5 ptos)

Descomponer $F(s) = \dfrac{2s-8}{s^2-5s+6}$ en fracciones parciales y calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$$F(s) = 2 \cdot \frac{s-4}{s^2-5s+6} \rightarrow \frac{s-4}{s^2-5s+6}$$

Factorizamos el denominador:

$$s = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Las raíces son:

$$\rightarrow s_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$\rightarrow s_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La descomposición en fracciones simples se define según la expresión:

$$\frac{s-4}{(s-3)(s-2)} = \frac{A_1}{s-3} + \frac{A_2}{s-2}$$

Calculamos los coeficientes A_i:

$$\rightarrow A_1 = \lim_{s \to 3} \frac{\cancel{(s-3)}(s-4)}{\cancel{(s-3)}(s-2)} = \lim_{s \to 3} \frac{s-4}{s-2} = \frac{3-4}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1$$
$$\rightarrow A_2 = \lim_{s \to 2} \frac{\cancel{(s-2)}(s-4)}{(s-3)\cancel{(s-2)}} = \lim_{s \to 2} \frac{s-4}{s-3} = \frac{2-4}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Obtenemos la expresión de $F(s)$ como suma de fracciones:

$$F(s) = 2 \cdot \left(\frac{-1}{s-3} + \frac{2}{s-2} \right) = \frac{-2}{s-3} + \frac{4}{s-2}$$

Aplicamos la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, que por linealidad se puede expresar como:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-2) \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

A partir de Table of Laplace Transforms 7 llegamos al resultado buscado:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-2) \cdot e^{3t} + 4 \cdot e^{2t}$$

Ejercio 2.(2,5 ptos)

Descomponer $F(s) = \dfrac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)}$ en fracciones parciales y calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
Las raíces del denominador son:

$$\begin{aligned} &\rightarrow s_1 = 0 \quad \text{(doble)} \\ &\rightarrow s_2 = 2 \quad \text{(simple)} \end{aligned}$$

La descomposición en fracciones simples se define según la expresión:

$$\frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{s-2}$$

Calculamos los coeficientes A_i utilizando la expresión general para raíces reales múltiples:

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \lim_{s \to p} \left[\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \left((s-p)^m \frac{N(s)}{D(s)} \right) \right]$$

1. p es la raíz del denominador relacionada con los coeficientes A_i
2. k es el índice del coeficiente que estamos calculando (A_k)
3. m es la multiplicidad de la raíz

Para A_2 se simplifica la expresión al ser m=2 y k=2 ($m - k = 0$)

$$A_2 = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s^2}(8s^2 - 7s + 6)}{\cancel{s^2}(s-2)} = \lim_{s \to 0} \frac{8s^2 - 7s + 6}{s-2} = \frac{8 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6}{0 - 2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$A_2 = -3$

Calculamos A_1 utilizando la expresión general con m=2 y k=1 ($m - k = 1$)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{1!} \lim_{s \to 0} \left[\frac{d}{ds} \left((s-0)^2 \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} \right) \right] = \lim_{s \to 0} \left[\frac{d}{ds} \left(\cancel{s^2} \frac{8s^2 - 7s + 6}{\cancel{s^2}(s-2)} \right) \right] = \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{(16s - 7)(s-2) - (8s^2 - 7s + 6) \cdot 1}{(s-2)^2} = \\ &= \frac{(16 \cdot 0 - 7)(0-2) - (8 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6)}{(0-2)^2} = \frac{14 - 6}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

$A_1 = 2$

Calculamos B_1 de manera análoga a A_2

$$B_1 = \lim_{s \to 2} \frac{\cancel{(s-2)}(8s^2 - 7s + 6)}{s^2\cancel{(s-2)}} = \lim_{s \to 2} \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2} = \frac{8 \cdot 2^{\cancel{2}} - 7 \cdot \cancel{2} + \cancel{6}^{3}}{2^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{16-7+3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Podemos expresar $F(s)$ como suma de fracciones:

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-3}{s^2} + \frac{6}{s-2}$$

Aplicamos la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, que por linealidad se puede expresar como:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + (-3) \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + 6 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

A partir de Table of Laplace Transforms 1, 2 y 7 llegamos al resultado buscado:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot t + 6e^{2t} = 2 - 3t + 6e^{2t}$$

Ejercicio 3. (3,5 ptos)

Obtenga las transformadas inversas $g(t)$ de las siguientes funciones $G(s)$

$$G(s) = \frac{4}{s+6} = 4 \cdot \frac{1}{s-(-6)}$$
$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 4 \cdot e^{-6t}$$

$$G(s) = \frac{2}{s^4} = 2 \cdot \frac{1}{s^4}$$
$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2 \cdot \frac{t^{4-1}}{(4-1)!} = 2 \cdot \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{3}$$

$$G(s) = \frac{2s}{s^2+3} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2\cos(\sqrt{3}t)$$

$$G(s) = \frac{3}{s^2+16} = 3 \cdot \frac{1}{s^2+4^2}$$
$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{3}{4}\sin(4t)$$

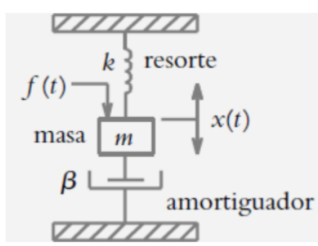
$$G(s) = \frac{2s+4}{s^3} + \frac{3s-14}{s^2+9} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\cdot\left(\frac{\cancel{s}}{\cancel{s}\cdot s^2}+2\cdot\frac{1}{s^3}\right)+3\cdot\frac{s}{s^2+3^2}-14\cdot\frac{1}{s^2+3^2}\\
\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= 2\left(t+\cancel{2}\cdot\frac{t^2}{\cancel{2!}}\right)+3\cos(3t)-\frac{14}{3}\sin(3t)=\\
&= 2t+2t^2+3\cos(3t)-\frac{14}{3}\sin(3t)
\end{aligned}
$$

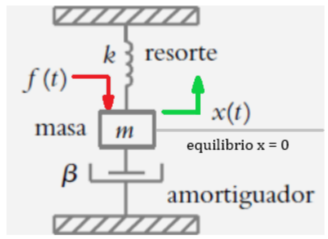
$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{8}{2s-3}+\frac{6s-10}{16s^2+9}=\\
&= 8\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\cancel{2}s}{\cancel{2}}-\frac{3}{2}}+6\cdot\frac{\frac{s}{16}}{\frac{\cancel{16}s^2}{\cancel{16}}+\frac{9}{16}}-10\cdot\frac{\frac{1}{16}}{\frac{\cancel{16}s^2}{\cancel{16}}+\frac{9}{16}}=\\
&= 4\cdot\frac{1}{s-\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}\cdot\frac{s}{s^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{s^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\\
\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= 4\cdot e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}\cos\left(\frac{3}{4}t\right)-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{3}{4}t\right)=\\
&= 4\cdot e^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{4}t\right)-\frac{5}{6}\sin\left(\frac{3}{4}t\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. (1,5 ptos)

Para el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura, obtenga la función de transferencia $G(s)$ (nombre dado a la función racional que representa a un sistema compuesto por polos y ceros y es el cociente de la salida sobre la entrada en el dominio de Laplace), donde se supone cero en todas las condiciones iniciales. Además, obtenga una expresión del desplazamiento $X(s)$ de la masa m, cuando le aplica una entrada a manera de fuerza $f(t)$



Como consideración inicial elegimos los ejes del sistema, en este caso solo nos interesa el eje vertical (en adelante eje x) tomamos como $x = 0$ la posición de equilibrio, con sentido vertical hacia arriba, es decir, hacia valores positivos de x los vectores posición, velocidad y aceleración serán positivos (el signo de las fuerzas se obtiene del signo de la aceleración que aplican $F = m \cdot a$)



Fuerzas que intervienen:

- Fuerza del muelle

  $F_k = k \cdot \Delta L = k \cdot (L - L_0)$

  L_0 es la enlongación del muelle en la posición de equilibrio, para nuestro sistema de coordenadas $L = x$ y $L_0 = 0$ y por tanto la fuerza del muelle queda $F_k = k \cdot x(t)$. Si la posición de la masa ($x(t)$) se encuentra por encima de la posición de equilibrio será una fuerza negativa (y positiva en caso contrario).

- Fuerza del amortiguador

  $F_\beta = \beta \cdot x'(t)$

  Si la velocidad de la masa ($x'(t)$) es en sentido de las x positivas será una fuerza negativa (y positiva en caso contrario).

- Fuerza de entrada

  $f(t)$

  Siguiendo nuestro sistema de coordenadas, es negativa al ir en sentido contrario de las x positivas.

Nota: Por simplicidad y al no especificarse en el enunciado ignoraremos la presencia de un posible campo gravitatorio (Y así poder reproducir el ejemplo de los apuntes).

Ecuación del modelo:

$$\sum F = m \cdot a = F_k + F_\beta + u(t)$$
$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) - \beta \cdot x'(t) - f(t)$$

Reordenando términos queda:

$$m \cdot x''(t) + \beta \cdot x'(t) + k \cdot x(t) = -f(t)$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados para pasar al dominio s.

$$m \cdot s^2 \cdot X(s) + \beta \cdot s \cdot X(s) + k \cdot X(s) = F(s)$$

Dividiendo por $X(s)$ obtenemos la función de transferencia $G(s)$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + \beta \cdot s + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m} \cdot s + \frac{k}{m}}$$

Una expresión de $X(s)$ cuando se le aplica una entrada a manera de fuerza $f(t)$ es:

$$X(s) = \frac{F(s)}{m \cdot s^2 + \beta \cdot s + k}$$

Siendo F(s) la transformada de Laplace de nuestra función de entrada f(t):

$$\rightarrow \mathcal{L}[-f(t)] = F(s)$$

NOTA: En este caso por los ejes elegidos es negativa