

# Sistemas de control:

## Ejercicios tema 2

### Ejercicio 1.(2,5 ptos)

Descomponer  $F(s) = \frac{2s-8}{s^2-5s+6}$  en fracciones parciales y calcular  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$$F(s) = 2 \cdot \frac{s-4}{s^2-5s+6} \rightarrow \frac{s-4}{s^2-5s+6}$$

Factorizamos el denominador:

$$s = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned} \rightarrow s_1 &= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \rightarrow s_2 &= \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

La descomposición en fracciones simples se define según la expresión:

$$\frac{s-4}{(s-3)(s-2)} = \frac{A_1}{s-3} + \frac{A_2}{s-2}$$

Calculamos los coeficientes  $A_i$ :

$$\begin{aligned} \rightarrow A_1 &= \lim_{s \rightarrow 3} \frac{\cancel{(s-3)}(s-4)}{\cancel{(s-3)}(s-2)} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s-4}{s-2} = \frac{3-4}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \rightarrow A_2 &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\cancel{(s-2)}(s-4)}{(s-3)\cancel{(s-2)}} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s-4}{s-3} = \frac{2-4}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2 \end{aligned}$$

Obtenemos la expresión de  $F(s)$  como suma de fracciones:

$$F(s) = 2 \cdot \left( \frac{-1}{s-3} + \frac{2}{s-2} \right) = \frac{-2}{s-3} + \frac{4}{s-2}$$

Aplicamos la transformada inversa  $\mathcal{L}^{-1}$ , que por linealidad se puede expresar como:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-2) \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-3} \right] + 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-2} \right]$$

A partir de Table of Laplace Transforms 7 llegamos al resultado buscado:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-2) \cdot e^{3t} + 4 \cdot e^{2t}$$

## Ejercicio 2.(2,5 ptos)

Descomponer  $F(s) = \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)}$  en fracciones parciales y calcular  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

Las raíces del denominador son:

$$\rightarrow s_1 = 0 \quad (\text{doble})$$

$$\rightarrow s_2 = 2 \quad (\text{simple})$$

La descomposición en fracciones simples se define según la expresión:

$$\frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{s-2}$$

Calculamos los coeficientes  $A_i$  utilizando la expresión general para raíces reales múltiples:

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \lim_{s \rightarrow p} \left[ \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \left( (s-p)^m \frac{N(s)}{D(s)} \right) \right]$$

1. p es la raíz del denominador relacionada con los coeficientes  $A_i$
2. k es el índice del coeficiente que estamos calculando ( $A_k$ )
3. m es la multiplicidad de la raíz

Para  $A_2$  se simplifica la expresión al ser m=2 y k=2 ( $m-k=0$ )

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cancel{s}^2(8s^2 - 7s + 6)}{\cancel{s}^2(s-2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8s^2 - 7s + 6}{s-2} = \frac{8 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6}{0-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$A_2 = -3$$

Calculamos  $A_1$  utilizando la expresión general con m=2 y k=1 ( $m-k=1$ )

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{ds} \left( (s-0)^2 \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{ds} \left( \cancel{s}^2 \frac{8s^2 - 7s + 6}{\cancel{s}^2(s-2)} \right) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(16s-7)(s-2) - (8s^2 - 7s + 6) \cdot 1}{(s-2)^2} = \\ &= \frac{(16 \cdot 0 - 7)(0-2) - (8 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6)}{(0-2)^2} = \frac{14-6}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

$$A_1 = 2$$

Calculamos  $B_1$  de manera análoga a  $A_2$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(\cancel{s-2})(8s^2 - 7s + 6)}{s^2(\cancel{s-2})} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2} = \frac{8 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6}{2^2} =$$

$$= \frac{16 - 7 + 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Podemos expresar  $F(s)$  como suma de fracciones:

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-3}{s^2} + \frac{6}{s-2}$$

Aplicamos la transformada inversa  $\mathcal{L}^{-1}$ , que por linealidad se puede expresar como:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + (-3) \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + 6 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

A partir de Table of Laplace Transforms 1, 2 y 7 llegamos al resultado buscado:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot t + 6e^{2t} = 2 - 3t + 6e^{2t}$$

### Ejercicio 3. (3,5 ptos)

Obtenga las transformadas inversas  $g(t)$  de las siguientes funciones  $G(s)$

$$G(s) = \frac{4}{s+6} = 4 \cdot \frac{1}{s-(-6)}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 4 \cdot e^{-6t}$$


---

$$G(s) = \frac{2}{s^4} = 2 \cdot \frac{1}{s^4}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2 \cdot \frac{t^{4-1}}{(4-1)!} = 2 \cdot \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{3}$$


---

$$G(s) = \frac{2s}{s^2+3} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2 \cos(\sqrt{3}t)$$


---

$$G(s) = \frac{3}{s^2+16} = 3 \cdot \frac{1}{s^2+4^2}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{3}{4} \sin(4t)$$


---

$$G(s) = \frac{2s+4}{s^3} + \frac{3s-14}{s^2+9} =$$

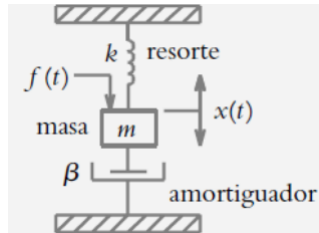
$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \left( \frac{s}{s^2} + 2 \cdot \frac{1}{s^3} \right) + 3 \cdot \frac{s}{s^2 + 3^2} - 14 \cdot \frac{1}{s^2 + 3^2} \\
\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= 2 \left( t + 2 \cdot \frac{t^2}{2!} \right) + 3 \cos(3t) - \frac{14}{3} \sin(3t) = \\
&= 2t + 2t^2 + 3 \cos(3t) - \frac{14}{3} \sin(3t)
\end{aligned}$$


---

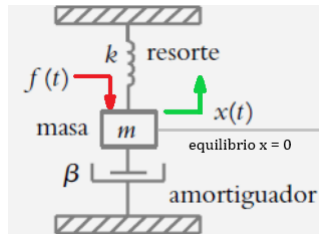
$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{8}{2s-3} + \frac{6s-10}{16s^2+9} = \\
&= 8 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2s}{2} - \frac{3}{2}} + 6 \cdot \frac{\frac{s}{16}}{\frac{16s^2}{16} + \frac{9}{16}} - 10 \cdot \frac{\frac{1}{16}}{\frac{16s^2}{16} + \frac{9}{16}} = \\
&= 4 \cdot \frac{1}{s - \frac{3}{2}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{s}{s^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{s^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\
\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= 4 \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{3}{8} \cos\left(\frac{3}{4}t\right) - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{3}{4}t\right) = \\
&= 4 \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3}{4}t\right) - \frac{5}{6} \sin\left(\frac{3}{4}t\right)
\end{aligned}$$

#### Ejercicio 4. (1,5 ptos)

Para el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura, obtenga la función de transferencia  $G(s)$  (nombre dado a la función racional que representa a un sistema compuesto por polos y ceros y es el cociente de la salida sobre la entrada en el dominio de Laplace), donde se supone cero en todas las condiciones iniciales. Además, obtenga una expresión del desplazamiento  $X(s)$  de la masa  $m$ , cuando le aplica una entrada a manera de fuerza  $f(t)$



Como consideración inicial elegimos los ejes del sistema, en este caso solo nos interesa el eje vertical (en adelante eje  $x$ ) tomamos como  $x = 0$  la posición de equilibrio, con sentido vertical hacia arriba, es decir, hacia valores positivos de  $x$  los vectores posición, velocidad y aceleración serán positivos (el signo de las fuerzas se obtiene del signo de la aceleración que aplican  $F = m \cdot a$ )



Fuerzas que intervienen:

- Fuerza del muelle

$$F_k = k \cdot \Delta L = k \cdot (L - L_0)$$

$L_0$  es la elongación del muelle en la posición de equilibrio, para nuestro sistema de coordenadas  $L = x$  y  $L_0 = 0$  y por tanto la fuerza del muelle queda  $F_k = k \cdot x(t)$ . Si la posición de la masa ( $x(t)$ ) se encuentra por encima de la posición de equilibrio será una fuerza negativa (y positiva en caso contrario).

- Fuerza del amortiguador

$$F_\beta = \beta \cdot x'(t)$$

Si la velocidad de la masa ( $x'(t)$ ) es en sentido de las  $x$  positivas será una fuerza negativa (y positiva en caso contrario).

- Fuerza de entrada

$$f(t)$$

Siguiendo nuestro sistema de coordenadas, es negativa al ir en sentido contrario de las  $x$  positivas.

Nota: Por simplicidad y al no especificarse en el enunciado ignoraremos la presencia de un posible campo gravitatorio (Y así poder reproducir el ejemplo de los apuntes).

Ecuación del modelo:

$$\sum F = m \cdot a = F_k + F_\beta + u(t)$$

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) - \beta \cdot x'(t) - f(t)$$

Reordenando términos queda:

$$m \cdot x''(t) + \beta \cdot x'(t) + k \cdot x(t) = -f(t)$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados para pasar al dominio  $s$ .

$$m \cdot s^2 \cdot X(s) + \beta \cdot s \cdot X(s) + k \cdot X(s) = F(s)$$

Dividiendo por  $X(s)$  obtenemos la función de transferencia  $G(s)$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + \beta \cdot s + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{\beta}{m} \cdot s + \frac{k}{m}}$$

Una expresión de  $X(s)$  cuando se le aplica una entrada a manera de fuerza  $f(t)$  es:

$$X(s) = \frac{F(s)}{m \cdot s^2 + \beta \cdot s + k}$$

Siendo  $F(s)$  la transformada de Laplace de nuestra función de entrada  $f(t)$ :

$$\rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

NOTA: En este caso por los ejes elegidos es negativa