Álgebra Linear – AL

Luiza Amalia Pinto Cantão

Depto. de Engenharia Ambiental

Universidade Estadual Paulista – UNESP

luiza@sorocaba.unesp.br

Transformações Lineares

Transformação Linear

Idéia: Uma *transformação linear* L do espaço vetorial V em W escreve-se $L : V \longrightarrow W$. Sendo L uma função, cada vetor $\mathbf{v} \in V$ tem um só vetor imagem $\mathbf{w} \in W$.

Exemplo (1) Se $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associa vetores $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a lei que define a transformação for

$$\begin{aligned} L(x,y) &= (3x,\ -2y,\ x-y) \quad \text{então} \\ L(2,1) &= (3\cdot 2,\ -2\cdot 1,\ 2-1) = (6,-2,1) \end{aligned}$$

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma **transformação linear** L de V em W $(L : V \to W)$ é uma função que atribui um único vetor $L(\mathbf{u})$ em W a cada $\mathbf{u} \in V$ tal que:

a. $L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$, para todos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$.

b. $L(k\mathbf{u}) = kL(\mathbf{u})$, para todo $\mathbf{u} \in V$ e todo escalar k.

Transformação Linear: Exemplos

Exemplo (2) Seja $L : P_1 \to P2$ definida por:

$$L(at+b) = t(at+b).$$

Mostre que L é uma transformação linear.

Exemplo (3) Seja $L : P_1 \to P2$ definida por:

$$L(p(t)) = tp(t) + t^2.$$

L é uma transformação linear?

Exemplo (4) Seja $L : M_{mn} \to M_{mn}$ definida por

$$L(A) = A^T$$

para A em M_{mn}. L é uma transformação linear ?

Exemplo (5) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (3x, -2y, x-y)$ é uma transformação linear ?

Exemplo (6) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x^2, 3y)$ é uma transformação linear ?

Transformação Linear: Teoremas

Teorema (1) Se $L : V \to W$ é uma transformação linear, então

$$L(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1L(\mathbf{v}_1) + c_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nL(\mathbf{v}_n)$$

para quaisquer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ em V e quaisquer escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Teorema (2) Seja $L : V \to W$ uma transformação linear. Então:

a. $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, onde $\mathbf{0}_V$ e $\mathbf{0}_W$ são os vetores nulos em V e W, respectivamente.

b. $L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v})$.

Corolário (1) Seja $L : V \to W$ uma função. Se $L(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$ então L **não** é uma transformação linear.

Exemplo (7) Seja $L : P_1 \to P2$ definida por $L(p(t)) = tp(t) + t^2$. Como $L(0) = t(0) + t^2 = t^2$, segue que L não é uma transformação linear.

Teorema (3) Seja $L : V \to W$ uma transformação linear de um espaço vetorial V em um espaço vetorial W. Além disso, seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para V. Se $\mathbf{u}$ é qualquer vetor em V, então $L(\mathbf{u})$ fica completamente determinado por $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$.

Demonstração Como $\mathbf{u} \in V$, podemos escrever

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

onde c_1, $c_2, \ldots,$ c_n são números reais determinados de maneira única. Então

$$L(\mathbf{u}) = L(c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\mathbf{v}_n) = c_1L(\mathbf{v}_1)+c_2L(\mathbf{v}_2)+\cdots+c_nL(\mathbf{v}_n),$$

pelo Teorema (1). Assim, $L(\mathbf{u})$ foi completamente determinado pelos elementos $L(\mathbf{v}_1)$, $L(\mathbf{v}_2)$, $\ldots$, $L(\mathbf{v}_n)$.

Exemplo (8) Seja $L : P_1 \to P_2$ uma transformação linear para a qual sabemos que

$$L(t+1) = t^2 + 1 \quad \text{e} \quad L(t-1) = t^2 + t.$$

a. Qual o valor de $L(7t+3)$?

Transformação Linear: Injetora

Definição: $L : V \rightarrow W$ é chamada de **injetora** se para todo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V$, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, implica que $L(\mathbf{v}_1) \neq L(\mathbf{v}_2)$. Uma afirmação equivalente é a de que L é injetora se para todos $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V$, $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ implica $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Exemplo (9) Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (x+y, x-y)$. Verifique se L é injetora.

Exemplo (10) Seja $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (x, y)$. Verifique se L é injetora.

Transformação Linear: Núcleo

Definição Seja $L : V \to W$ uma transformação linear. O **núcleo** de L, $ker(L)$, é o subconjunto de V que consiste em todos os vetores, tais que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$.

Exemplo (11) Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

Exemplo (12) Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + y + 8z)$.

Exemplo (13) Encontre o núcleo da transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ z + w \end{bmatrix}$.

Transformação Linear: Propriedades do Núcleo

Teorema (4) Se $L : V \to W$ é uma transformação linear, então $ker(L)$ é um subespaço de V.

Demonstração $ker(L)$ não é o conjunto vazio, pois $\mathbf{0}_V \in ker(L)$. Além disso, sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in ker(L)$. Então, como L é uma transformação linear

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

logo $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in ker(L)$. E mais, se k é um escalar, então como L é uma transformação linear

$$L(k\mathbf{u}) = kL(\mathbf{u}) = k\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

logo $k\mathbf{u} \in ker(L)$. Portanto, $ker(L)$ é um subespaço de V.

Exemplo (14) Se L é como no Exemplo (13), então uma base para $ker(L)$ consiste nos vetores $[1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T$ e $[0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]^T$. Assim, $dim(ker(L)) = 2$.

Transformação Linear: Prop. do Núcleo (2)

Teorema (5) Uma transformação linear $L : V \to W$ é injetora se e somente se $ker(L) = \mathbf{0}_V$.

Demonstração ($\Longrightarrow$) Seja L injetora. Mostramos que $ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$. Seja $\mathbf{x} \in \ker(L)$. Então $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$. Além disso, já sabemos que $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Assim, $L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{0}_V)$. Como L é injetora, concluímos que $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$. Portanto, $ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$.

($\Longleftarrow$) Suponha $ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$. Desejamos mostrar que L é injetora. Considere que $L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v})$, para $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$. Então

$$L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$$

logo, pelo Teorema (2), $L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, o que significa que $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in V$. Portanto, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, logo $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Assim, L é injetora.

Exemplo (15) A transformação linear do exemplo (9) é injetora e a do Exemplo (10) **não** o é.

Transformação Linear: Imagem

Definição Se $L : V \to W$ é uma transformação Linear, então a **imagem** de L, representada por $Im(L)$, é o conjunto de todos os vetores em W que são imagens, sob L, dos vetores em V. Assim, um vetor $\mathbf{w}$ está na imagem de L se existir algum vetor $\mathbf{v} \in V$ tal que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Se a $Im(L) = W$, dizemos que L é **sobrejetora**. Isto é, L é sobrejetora se e somente se, dado qualquer $\mathbf{w} \in W$, houver um $\mathbf{v} \in V$ tal que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

Teorema (6) Se $L : V \to W$ é uma transformação linear, então $Im(L)$ é um subespaço de W.

Demonstração Note que $Im(L)$ **não** é um conjunto vazio, pois $\mathbf{0}_W = L(\mathbf{0}_V)$, logo $\mathbf{0}_W \in Im(L)$. Sejam $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(L)$. Então $\mathbf{w}_1 = L(\mathbf{v}_1)$ e $\mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_2)$ para alguns $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em V. Agora

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

o que implica que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in Im(L)$. Além disso, se k é um escalar, então $k\mathbf{w}_1 = kL(\mathbf{v}_1) = L(k\mathbf{v}_1)$, logo $k\mathbf{w}_1 \in Im(L)$. Portanto $Im(L)$ é um subespaço de W.

Transformação Linear: Imagem – Exemplos

Exemplo (16) Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (x, y)$. Verifique se L é sobrejetora.

Exemplo (17) Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

a. L é sobrejetora ?

b. Encontre uma base para $Im(L)$.

c. Encontre $ker(L)$.

d. L é injetora ?

Exemplo (18) Seja $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_1 + a_3).$$

Encontre uma base para $Im(L)$.

Observação: Para determinar se uma transformação linear é injetora ou sobrejetora, devemos resolver um sistema linear.

Transformação Linear: Imagem – Teorema

Teorema (7) Se $L : V \to W$ é uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão n, V, no espaço vetorial W, então:

$$dim(ker(L)) + dim(Im(L)) = dim(V).$$

Observação: A dimensão de $ker(L)$ também é conhecida como **nulidade** de L, e da dimensão de $Im(L)$ é chamada de **posto** de L.

Exemplo (19) Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 \end{bmatrix}.$$

a. Encontre $dim(ker(L))$.

b. Encontre $dim(Im(L))$.

c. Verifique o Teorema (7).

Transformação Linear: Imagem – Corolário

Corolário Seja $L : V \to W$ uma transformação linear e $dimV = dimW$.

a. Se L é injetora, então ela é sobrejetora.

b. Se L é sobrejetora, então ela é injetora.

Exemplo (20) Seja $L : P_2 \to P_2$ a transformação linear definida por:

$$L(at^2 + bt + c) = (a + 2b)t + (b + c).$$

a. $-4t^2 + 2t - 2$ está em $ker(L)$?

b. $t^2 + 2t + 1$ está em $Im(L)$?

c. Encontre uma base para $ker(L)$.

d. L é injetora ?

e. Encontre uma base para $Im(L)$.

f. L é sobrejetora ?

g. Verifique o Teorema (7).

Transformações Lineares Planas

Idéia Transformações lineares de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Reflexões

a. Em torno do eixo x: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (x, -y)$.

b. Em torno do eixo y: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (-x, y)$.

c. Na origem: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (-x, -y)$.

d. Na reta $y = x$: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (y, x)$.

e. Na reta $y = -x$: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (-y, -x)$.

Transformações Lineares Planas (1)

Dilatação e Contrações

a. Dilatação ou contração na direção do vetor: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = k(x, y)$, $k \in \mathbb{R}$.

Observação:

- Se $|k| > 1$, L dilata o vetor;
- Se $|k| < 1$, L contrai o vetor;
- Se $k = 1$, L é a identidade I;
- Se $k <)$, L troca o sentido do vetor.

b. Dilatação ou contração na direção do eixo dos x: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (kx, y)$, $k > 0$.

Observação:

- Se $k > 1$, L dilata o vetor;
- Se $0 < k < 1$, L contrai o vetor.

c. Dilatação ou contração na direção do eixo dos y: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (x, ky)$, $k > 0$.

Transformações Lineares Planas (2)

Cisalhamento

a. Na direção do eixo dos x: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (x + ky, y)$, $k \in \mathbb{R}$.
b. Na direção do eixo dos y: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y) = (x, y + kx)$, $k \in \mathbb{R}$.

Rotação $L_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é:

$$L_\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares no Espaço

Reflexões

a. Em relação aos planos coordenados: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $L(x, y, z) = (x, y, -z)$.

b. Em relação aos eixo coordenados: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $L(x, y, z) = (x, -y, -z)$.

c. Na origem: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $L(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

Rotações em torno do eixo z: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $L(x, y, z) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta, z)$.

Exemplo

Exemplo (21) Determinar, em cada caso, a matriz da transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa a sequência de transformações dadas:

(a) Reflexão em torno do eixo dos y, seguida de um cisalhamento de fator 5 na direção horizontal.

(b) Rotação de 30^o no sentido horário, seguida de uma duplicação dos módulos e inversão dos sentidos.

(c) Rotação de 60^o, seguida de uma reflexão em relação ao eixo dos y.

(d) Rotação de um ângulo θ, seguida de uma reflexão na origem.

(e) Reflexão em torno da reta $y = -x$, seguida de uma dilatação de fator 2 na direção Ox e, finalmente, um cisalhamento de fator 3 na direção vertical.