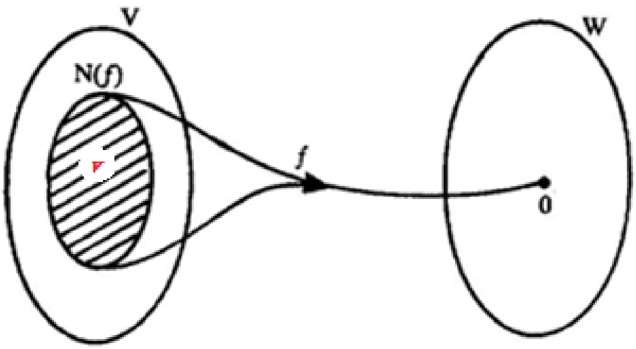
n. 33 – Núcleo de uma transformação linear

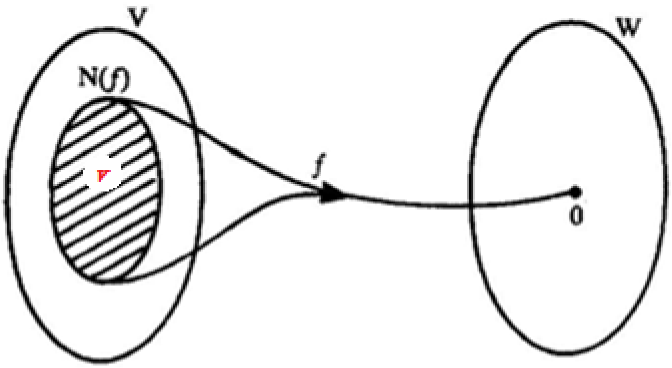
Chama-se núcleo de uma transformação linear f: V ⇒ W ao conjunto de todos os vetores v ∈ V que são transformados em 0 ∈ W. Indica-se esse conjunto por N(f) ou Ker (f).

[kernel = tradução núcleo]

- $N(f) = \{ v \in V \;/\; f(v) = 0\}$
- O $N(f) \subset V$ e todos os seus vetores têm uma única imagem que é o zero/vetor nulo de W.



Observe que $N(f) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(f)$ uma vez que $f(0) = 0$.



Exemplo:

Determine o núcleo de uma transformação linear f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = (x - 2y , x + 3y)$.

$N(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; f(x, y) = (0,0)\}$

isto é,

(x - 2y , x + 3y) = (0, 0)

$$\begin{cases} x - 2\,y = 0 \\ x + 3\,y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ x = -3y \end{cases}$$

Logo, a única solução é: x = y = 0

Logo, N(f) = {(0, 0)}

E, dim N(F) = 0

Exercícios:

1. Seja a transformação linear f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

   f(x, y, z) = (x - y + 4 z, 3 x +y + 8 z), determine o núcleo.

   R: N(f) = {(- 3 , 1, 1)}

2. Determine o núcleo da transformação linear f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por f(x, y) = (x + y, x – y). R: N(f) = {(0, 0)}

3. Determine o núcleo da transformação linear f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por f(x, y) = (x + y, x + y). R: N(f) = {(- 1, 1)}

4. Determine o núcleo da transformação linear f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por f(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y + z).

   R: N(f) = {(– 1, 1, 0)}

Exercícios resolvidos:

1. Seja a transformação linear f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

   f(x, y, z) = (x - y + 4 z, 3 x +y + 8 z), determine o núcleo.

   R: N(f) = {(- 3 , 1, 1)}

N(f) = {(x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ / f(x, y, z) =(0,0,0)}, isto é

(x - y + 4 z, 3 x +y + 8 z) = (0, 0)

$$\begin{cases} x - y + 4\,z = 0 \\ 3\,x + y + 8\,z = 0 \end{cases}$$

x = y – 4 z

3 (y – 4 z) + y + 8 z = 0

3 y – 12 z + y + 8 z = 0

4 y – 4 z = 0

$y = \frac{4\,z}{4}$

y = z

Logo, x = y – 4 y

x = - 3 y

Cuja solução é x = - 3 z e y = z

Logo, N(f) = {(- 3 z, z, z) $\in \mathbb{R}^3$/ z $\in \mathbb{R}$ } = {z (- 3, 1, 1) / z $\in \mathbb{R}$}

Ou N(f) = {(- 3 , 1, 1)}.

E, dim N(F) = 1

2. Determine o núcleo da transformação linear f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por f(x, y) = (x + y, x – y). R: N(f) = {(0, 0)}

N (f) = {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$ / f(x, y) =(0,0)}, isto é (x + y , x - y) = (0, 0)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é: x = - y e x = y Logo, N(f) = {(0, 0)}.

E, dim N(F) = 0

3. Determine o núcleo da transformação linear f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por f(x, y) = (x + y, x + y). R: N(f) = {(- 1, 1)}

N (f) = {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$ / f(x, y) =(0,0)}, isto é (x + y , x + y) = (0, 0)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é x = - y → (- y, y) → y (- 1, 1)

Logo, N(f) = {(- 1, 1)}.

E, dim N(F) = 1

4. Determine o núcleo da transformação linear f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por f(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y + z).

R: N(f) = {(– 1, 1, 0)}

N (f) = {(x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ / f(x, y, z) =(0,0, 0)}, isto é

(x + y , x + y, x + y + z) = (0, 0, 0)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Como, z = – x – y mas x = – y logo, z = –(–y) – y → z = 0

N(f) = {(- y, y , 0)} = {y (– 1, 1, 0)}.

Logo, N(f) = {(– 1, 1, 0)}.

E, dim N(F) = 1

Proposição: o núcleo de uma transformação linear $F: U \longrightarrow V$ é um subespaço vetorial de U.

Demonstração:

a. $0 \in N(f)$ pois $F(0) = 0$

b. $\forall\, u_1 \in N(f) \Rightarrow F(u_1) = 0 \quad \forall\, u_2 \in N(f) \Rightarrow F(u_2) = 0$

Mas, $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) = 0 + 0$

Logo, $u_1 + u_2 \in N(f)$

c. $\forall\, u_1 \in N(f) \Rightarrow F(u_1) = 0$

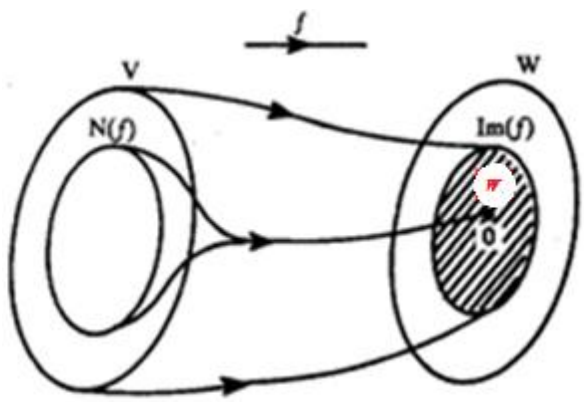
Mas $F(\alpha u_1) = \alpha F(u_1) = \alpha\, 0 = 0$

Logo, $\alpha u_1 \in N(f)$

Imagem de uma transformação linear

Chama-se imagem de uma transformação linear $f: V \longrightarrow W$ ao conjunto dos vetores $w \in W$ que são imagens de vetores $v \in V$. Indica-se esse conjunto por Im(f) ou f(V).

$Im(f) = w \in W \,/\, f(v) = w$ para algum $v \in V$.



Observe o conjunto $Im(f) \subset W$ e também o núcleo de f.

Observe que $Im(f) \neq \emptyset$, pois $0 = f(0) \in Im(f)$.

Se $Im(f) = W$, f diz-se sobrejetora (imagem = domínio), isto é, para todo $w \in W$, existe pelo menos um $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Proposição: O conjunto imagem da transformação linear $F: U \rightarrow V$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração:

a. $0 \in Im(f)$, pois $F(0) = 0$

b. $\forall\, v_1 \in Im(f) \Rightarrow \exists\, u_1 \in U \;/\; v_1 = F(u_1)$;

$\forall\, v_2 \in Im(f) \Rightarrow \exists\, u_2 \in U \;/\; v_2 = F(u_2)$

Mas, $v_1 + v_2 = F(u_1) + F(u_2) = F(u_1 + u_2)$, logo, $v_1 + v_2 \in Im(f)$

c. $\forall\, u_1 \in Im(f) \Rightarrow \exists\, u_1 \in U \;/\; v_1 = F(u_1)$

Mas $\alpha\, v_1 = \alpha\, F(u_1) = F(\alpha\, u_1)$

Logo, $\alpha\, u_1 \in Im(f)$

Exemplo:

Determine o conjunto imagem da transformação linear $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (x + 2y, x - 3y)$.

- $Im\, F = \{ v \in \mathbb{R}^2 \;/\; v = x\,(1, 1) + y\,(2, -3)\}$

  Esses são os vetores imagem.

- Primeiro temos que calcular a imagem dos vetores. Como não temos uma base, utilizamos a base canônica do R^2.

  Logo: $F(x, y) = (x + 2y, x - 3y)$

F (1, 0) = (1, 1)
F (0, 1) = (2, - 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \{L2: L2 - 2L1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma base para a imagem é {(1, 1), (0, - 5)}

Im (F): { (1, 1), (0, -5)} e dim Im (F) = 2

- Se fosse pedido para achar o Núcleo:

(x + 2 y , x – 3 y) = (0, 0)

$$\begin{cases} x + 2\,y = 0 \\ x - 3\,y = 0 \end{cases}$$

x = 3 y

Logo, 3 y + 2 y = 0

5 y = 0

y = 0

Portanto, x = 0

Logo, N(f) = {(0, 0)}.

Não temos variável livre, portanto, dim N (F) = 0

Exercícios:

1. Determine o conjunto imagem da transformação linear

   F: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por F (x, y, z) = (y, x – z, x + y + z).

   R: Im (F) = {(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2) }

2. Determine o conjunto imagem da transformação linear

   F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por F (x, y, z) = (x + y, x + y, z).

   R: Im (F) = {(1, 1, 0), (0, 0, 1)}

Resolução:

1. O conjunto imagem da transformação linear F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por F (x, y, z) = (y, x – z, x + y + z).

Im F = { v ∈ $\mathbb{R}^3$ / v = x (0, 1, 1) + y (1, 0, 1) + z (0, - 1, 1)}

Primeiro temos que calcular a imagem dos vetores. Como não temos uma base, utilizamos a base canônica do R^3.

F (x, y, z) = (y , x – z , x + y + z)
F (1, 0, 0) = (0, 1, 1)
F (0, 1, 0) = (1, 0, 1)
F (0, 0, 1) = (0, - 1, 1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \{L1 \to L2 \quad \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \{L3: L2 + L3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo, uma base para a imagem é

Im (F) = {(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2) } e dim Im (F) = 3

- Se fosse pedido para achar o Núcleo:

  (y , x – z , x + y + z) = (0, 0, 0)

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

x = z

Logo, z + 0 + z = 0

2 z = 0

z = 0

Portanto, x = 0

Logo, N(f) = {(0, 0, 0)}   e dim N (F) = 0

2. O conjunto imagem da transformação linear F: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por F (x, y, z) = (x + y, x + y, z).

Im F = { v ∈ $\mathbb{R}^3$ / v = x (1, 1, 0) + y (1, 1, 0) + z (0, 0, 1)}

Como x (1, 1, 0) + y (1, 1, 0) são LD – linearmente dependentes, temos apenas dois vetores LI para a imagem.

Logo, a dimensão da imagem é igual a 2.

dim Im(f) = 2

Primeiro temos que calcular a imagem dos vetores. Como não temos uma base, utilizamos a base canônica do R^3.

F (x, y, z) = (x + y , x + y , z)
F (1, 0, 0) = (1, 1, 0)
F (0, 1, 0) = (1, 1, 0)
F (0, 0, 1) = (0, 0, 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{L2: L1 - \ L2 \ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, uma base para a imagem é

Im (F) = {(1, 1, 0), (0, 0, 1)} e dim Im (F) = 2

- Se fosse pedido para achar o Núcleo:

  (x + y, x + y, z) = (0, 0, 0)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

x = - y

N(f) = { y(-1, 1, 0)}

Logo, N(f) = {(- 1, 1, 0)}.

Com uma variável livre, a dimensão do Núcleo é igual a 1.

Dim N(f) = 1

Teorema do Núcleo e da Imagem

Se F: U ⟶V é uma transformação linear (logo, é bijetora), então:

dim U = dim Núcleo (F) + dim Im (F)

Exemplo:

Seja F: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por F (x, y, z) = (x, x + y, x + y + z). Determinar uma base e a dimensão do N(F) e Im(F).

a. Determinação do núcleo de F:

(0, 0, 0) = (x, x + y, x + y + z)

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Logo, x = y = z = 0

Portanto, N(F) = {(0, 0, 0)} ⇒ dim(N) = 0

Assim, a base do Núcleo é o vetor nulo.

b. Determinação da imagem de F:

∀ v ∈ Im F ⇒ v = (x, x + y, x + y + z)

F(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z) = x (1, 1, 1) + y (0, 1,1) + z (0, 0, 1)

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ → a matriz já está escalonada, logo, o conjunto de vetores é linearmente independente, e formam uma base da Im(F).

R: Im(F) = { (1, 1, 1) , (0, 1,1) , (0, 0, 1) } e dim Im (F)= 3, pois temos 3 vetores, ou seja 3 elementos.

Exercícios:

1. Determinar a dimensão do núcleo e da imagem do operador linear do $\mathbb{R}^2$: F (x, y) = (0, 2y – x)

   R: dim N(F)=1 e dim Im(F)=1

2. Dado o operador linear $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$F(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$

a) Determine o núcleo de F, a dimensão do núcleo e uma de suas bases.

R: N(F): $\{(5, -2, 1)\}$ e $\dim N(F) = 1$

b) Determine a imagem de F, a dimensão da imagem e uma de suas bases.

R: Base Im(F) = $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ e $\dim Im(F) = 2$

c) Verifique a propriedade da dimensão de F. R: $\dim (F) = 3$

3. Seja $F: R^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$, encontre uma base e a dimensão da:

a) Imagem (F)

R: Base Im (F) = $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$ e $\dim Im(F) = 2$

b) Núcleo (F)

R: Base N (F) = $\{(2, 1, -1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ e $\dim N(F) = 2$

Resolução dos exercícios propostos

1. Determinar a dimensão do núcleo e da imagem do operador linear do $\mathbb{R}^2$: $F(x, y) = (0, 2y - x)$ LCTE: p. 87

Núcleo: N(f) = {(x, y) ∈$\mathbb{R}^2$ / f (x, y) = (0, 0)}

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 2\,y - x = 0 \end{cases}$$

Logo, x = 2 y

Como temos uma variável livre, a dim N(f) = 1

Logo, N (F) = (2 y, y) = {y (2, 1)}

R: Base para o N(F) = {(2, 1)} e dim N(f) = 1

Conjunto Im(f) = {(x, y) ∈$\mathbb{R}^2$ / f (x, y) = x (0, - 1) + y (0, 2)}

Como os vetores do conjunto imagem são LD, portanto, a base para a imagem é apenas um vetor. Assim, a dimensão da imagem é 1.

R: Base para a Im (F)= {(0, -1)} ou Im (F)= {(0, 2)} e dim Im(f) = 1

2. Dado o operador linear $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

   F (x, y, z) = (x + 2 y – z, y + 2 z, x + 3 y + z)

a. determine o núcleo de F, a dimensão do núcleo e uma de suas bases

a.1) Determinação do núcleo de F

Núcleo: N(f) = {(x, y, z) ∈$\mathbb{R}^3$ / f (x, y, z) = (0, 0, 0)}

Logo, (x + 2 y – z, y + 2 z, x + 3 y + z) = (0, 0, 0)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2\,z = 0 \\ x + 3\,y + z = 0 \end{cases}$$

y = - 2 z

x = z – 2y

x = z – 2 (- 2 z)

x = z + 4 z ∴ x = 5 z ∴ logo, (5 z, - 2 z, z)

N(f)= {z (5, - 2, 1)/ z ∈ℝ} → N(f)= {(5, - 2, 1)}

a.2) Determinação da dimensão do núcleo

Como a única variável livre é o z, portanto temos 1 variável livre, assim dim N(f) = 1

a.3) Determinação de uma de suas bases

Se z = 1 temos a seguinte base:

Base de N(f) = {(5, - 2, 1)}

b. determine a imagem de F, a dimensão da imagem e uma de suas bases

Determinando a imagem:

F(x, y, z) = (x + 2 y – z, y + 2 z, x + 3 y + z)

F(x, y, z) = x (1, 0, 1) + y (2, 1, 3) + z (- 1, 2, 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} L2: L2 - 2L1 \\ L3: L3 + L1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \{L3: L3 - 2L2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base para a Im (F) = {(1, 0, 1), (0, 1, 1)} e dim Im (F)= 2

- Verificando o teorema do Núcleo e da Imagem:

  dim F = dim Im(F) + dim N(F)

  dim F = 2 + 1

  dim F = 3

Outra forma de resolução:

Im(f) = {(a, b, c) ∈ $\mathbb{R}^3$ / f (x, y, z) = (a, b, c)}, isto é:

(a, b, c) ∈ Im (f) se existe (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$ tal que

(x + 2 y – z, y + 2 z, x + 3 y + z) = (a, b, c)

$$\begin{cases} x + 2\,y - z = a \\ y + 2\,z = b \\ x + 3y + z = c \end{cases}$$

<u>y = - 2 z + b</u>

x = z – 2y + a

x = z – 2 (- 2 z + b) + a

x = z + 4 z – 2 b + a

<u>x = 5 z – 2 b + a</u>

Logo: x + 3 y + z = c

5 z – 2 b + a + 3 (- 2 z + b) + z = c

<u>5 z</u> – 2 b + a <u>- 6 z</u> + 3 b <u>+ z</u> = c

a + b – c = 0

Logo, a $Im(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a + b - c = 0 \}$

b.2) Determine a dimensão da imagem

Como são duas variáveis livres, pois $c = a + b$

$\dim Im(f) = 2$

b.3) Determine uma de suas bases

- Se $a = 1$ e $b = 3$ logo, $c = 4$
- Se $a = 0$ e $b = 1$ logo, $c = 1$

Base $Im(f) = \{(1, 3, 4), (0, 1, 1)\}$

c) Verificando a propriedade da dimensão:

$\dim (F) = \dim N(F) + \dim Im(F)$

$\dim (F) = 1 + 2$

$\dim (F) = 3$

3. Seja $F: R^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2 s - t, x + y + 3 s - 3 t)$, encontre uma base e a dimensão:

   a) Imagem (F)

   b) Núcleo (F)

a) Encontrando uma base para a imagem:

Conjunto imagem:

F (x, y, s, t) = x (1, 1, 1) + y (-1, 0, 1) + s (1, 2, 3) + t (1, - 1, - 3)

Escalonando o conjunto imagem temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{cases} L2: L2 + L1 \\ L3: L3 - L1 \\ L4: L4 - L1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{cases} L3: L3 - L2 \\ L4: L4 + 2L2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos apenas 2 vetores LI que constituirão a base

Base para Im (F) = { (1, 1, 1), (0, 1, 2)} e a dim Im(F)= 2

b) Encontrando uma base para o núcleo:

$$\begin{cases} x - y + s + t = 0 \\ x + 2\,s - t = 0 \\ x + y + 3\,s - 3\,t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + s + t = 0 \\ y + \ s - 2t = 0 \\ 2y + 2\,s - 4\,t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + s + t = 0 \\ y + s - 2\,t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y - s - t & (1) \\ y = -s + 2\,t & (2) \end{cases}$$

(2) em (1): $x = (-s + 2\,t) - s - t$

$$x = -s + 2\,t - s - t$$

$$x = \ -2s + \ t$$

Logo, as variáveis livres são s e t, portanto dim W = 2

Para obter uma base:

- Faça s = -1 e t = 0 → (2, 1, -1, 0)
- Faça s = 0 e t = 1 → (1, 2, 0, 1)

Logo, Base N(F) = {(2, 1, - 1, 0), (1, 2, 0, 1)}

A dimensão do núcleo de *T* é chamada de **nulidade** de *T* e a dimensão da imagem de *T* é chamada **posto de** ***T***.

posto (F) = dim Im(F)
nulidade (F) = dim N (F)
posto (F) + nulidade (F) = dim V

Referências Bibliográficas

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. São Paulo: Harper & Row, 1980.

BORGES, A. J. **Notas de aula**. Curitiba. Set. 2010. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

CALLIOLI, C. A. et al. **Álgebra linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 1990.

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra linear contemporânea**. São Paulo: Bookman, 2008.

KOLMAN, B.; HILL, R. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 6ª ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1998.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972.

NUNES, Luiz Fernando. **Notas de aula**: Matemática 1. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. **Álgebra linear**. São Paulo: Pearson-Makron Books, 2010.

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 9 ed. Curitiba. 1949.