3º curso / 1º cuatr.
Grado Ing. Inform.
Doble Grado Ing.
Inform. y Mat.

Modelos de Computación (MC)
Entrega de ejercicios.
Tema 4

Estudiante: Miguel Lentisco Ballesteros
Grupo de prácticas: A1
Fecha de entrega: 24/11/2017

Ejercicios Tema 4

Ejercicio 1. Dar gramáticas independientes del contexto que generen los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A = \{0, 1\}$:

1. L_1: conjunto de palabras tal que si la palabra empieza por 0, entonces tiene el mismo número de 0s que de 1s.
2. L_2: conjunto de palabras tal que si la palabra termina por 1, entonces tiene un número de 1s mayor o igual que el número de 0s.
3. $L_2 \cap L_2$

Respuesta.

1. L_1 está generado por la gramática con estas producciones:

$$S \to 1X \mid 0Y1Y \mid \epsilon$$

$$X \to 1X \mid OX \mid \epsilon$$

$$Y \to 0Y1Y \mid 1Y0Y \mid \epsilon$$

2. L_2 está generado por la gramática con estas producciones:

$$S \to X0 \mid Y1 \mid \epsilon$$

$$X \to X1 \mid X0 \mid \epsilon$$

$$Y \to Y1 \mid Y0Y1 \mid Y1Y0 \mid \epsilon$$

3. La intersección sería entonces:

$$S \to 0Y1Y \mid 1Z1 \mid 1X0 \mid 1 \mid \epsilon$$

$$X \to 1X \mid OX \mid \epsilon$$

$$Y \to 0Y1Y \mid 1Y0Y \mid \epsilon$$

$$Y \to 1Z \mid 1Z0Z \mid 0Z1Z \mid \epsilon$$

Ejercicio 2. Una gramática independiente del contexto generalizada es una gramática en el que las producciones son de la forma $A \longrightarrow r$ donde r es una expresión regular de variables y símbolos terminales. Una gramática independiente del contexto generalizada representa una forma compacta de representar una gramática con todas las producciones $A \longrightarrow \alpha$ donde α es una palabra del lenguaje asociado a la expresión regular r y $A \longrightarrow r$ es una producción de la gramática generalizada. Observemos que esta gramática asociada puede tener infinitas producciones, ya que una expresión regular puede representar un lenguaje con infinitas palabras. El concepto de lenguaje generado por una gramática generalizada se define de forma análoga al de las gramáticas independientes del contexto, pero teniendo en cuenta que ahora puede haber infinitas producciones. Demostrar que un lenguaje es independiente del contexto si y solo si se puede generar por una gramática generalizada.

Respuesta. Tenemos que demostrar lo siguiente:

$$\text{Lenguaje } L \text{ independiente del contexto} \iff L = L(G), \text{G es una gramática generalizada}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Esto es trivial, ya que si el lenguaje L es independiente del contexto entonces existe una gramática independiente del contexto G que la genera, viendo facilmente que $A \longrightarrow r$ como r es una expresión regular de variables y símbolos terminales, se puede ver en concreto como expresiones regulares, luego es una gramática generalizada.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tenemos que ver que con una gramática generalizada podemos construir una gramática independiente del contexto, así que vamos a ver como. Sabemos que tenemos expresiónes regulares, asi que la idea es que si tenemos una expresión regular en general poder convertirla en expresiones más simples, por ejemplo:

$$A \longrightarrow R^* \equiv A \longrightarrow RR \mid \epsilon$$

$$A \longrightarrow R_1 + R_2 \equiv A \longrightarrow R_1 \mid R_2$$

$$A \longrightarrow R_1R_2 \equiv A \longrightarrow R_1 + \cdots + R_k$$

esto último si es posible descomponiendo aplicando la distribución de la suma, si no es posible se deja igual, como concatenación, por ejemplo:

$$A \longrightarrow CD \equiv A \longrightarrow CD$$

$$A \longrightarrow (X + Y)A \equiv A \longrightarrow XA + YA \equiv A \longrightarrow XA \mid XY$$

Así una concatenación con $*$, usando lo de arriba sería:

$$A \longrightarrow R_1R_2^*R_3 \equiv A \longrightarrow R_1R_2R_3, R_2 \longrightarrow R_2R_2 \mid \epsilon$$

Por lo que en este caso ampliaríamos las producciones.

Aplicando todas estas reglas podemos transformar cualquier expresión regular compleja en simples, teniendo así las producciones simples, y por tanto una gramática independiente del contexto y por ende, el lenguaje generado es independiente del contexto.

Ejercicio 3. Demostrar que los siguientes lenguajes son independientes del contexto:

1. $L_1 = \{ u\#v : u^{-1}$ es una subcadena de $w, u, w \in \{0,1\}^* \}$
2. $L_2 = \{ u_1\#u_2\# \cdots \#u_k : k \geq 1,$ cada $u_i \in \{0,1\}^*,$ y para algún i y $j, u_i = u_j^{-1} \}$

Respuesta.

1. Es facil ver que tiene que ser de la forma $u\#yu^{-1}z$, luego usando estas producciones:

$$S \to YX$$

$$X \to 1X \mid 0X \mid \epsilon$$

$$Y \to 1Y1 \mid 0Y0 \mid \#X$$

2. La idea es que hagamos un palídromo primero, el u_i y el u_j permitiendo lo que sea a los lados y luego pudiendo rellenar entre medias, también teniendo en cuenta el caso especial para $k = 1$ que sería solo palíndromos, entonces:

$$S \to AMB$$

$$A \to AA \mid X\# \mid \epsilon$$

$$B \to BB \mid \#X \mid \epsilon$$

$$X \to 1X \mid 0X \mid \epsilon$$

$$M \to 1M1 \mid 0M0 \mid \#A \mid \epsilon$$

Ejercicio 4. Sea el lenguaje $L = \{ u\#v : u, v \in \{0,1\}^*, u \neq v\}$, demostrar que es independiente del contexto.

Respuesta. Buscaremos una gramática que genere este lenguaje, para ello tenemos que fijarnos en dos posibilidades, si el modulo de u es distinto de v; o bien que el módulo sea igual pero entonces sean distintas en sí las palabras.

- Primero la gramática para las palabras de distinto módulo:

$$S \to \#Y \mid Y\# \mid XSX$$

$$X \to 0 \mid 1$$

$$Y \to X \mid XY$$

- Luego para las que son de mismo módulo pero diferentes no he llegado a encontrar ninguna gramática, pero la idea sería encontrarla y con las unión de ambas tenemos una gramática independiente del contexto que genera el lenguaje deseado.

Ejercicio 5. Dar gramáticas independientes del contexto no ambiguas para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}^*$:

1. El conjunto de palabras w tal que en todo prefijo de w el número de 0s es mayor o igual que el número de 1s.

2. El conjunto de palabras w en las que el número de 0s es mayor o igual que el número de 1s.

Respuesta. Sé que las gramáticas son ambiguas pero no consigo encontrar unas que sean no ambiguas:

1. La gramática sería:

$$S \to 0X \mid \epsilon$$
$$X \to 0X \mid 1X0X \mid 0X1X \mid \epsilon$$

2. La gramática sería:

$$S \to 0S \mid 1S0S \mid 0S1S \mid \epsilon$$