(13) Gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky para el lenguaje:

$$L = \{ u c v : u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y } n_{01}(u) = n_{10}(v) \}$$

Usar algoritmo CYK para ver si 010c101 pertenece al lenguaje.

Gramática:

- $S \rightarrow X c Y \mid 01S10 \mid 01c10 \mid X S' \mid S' Y$
- $S' \rightarrow 01S10 \mid 01c10 \mid c$
- $X \rightarrow 1X \mid 0X' \mid 1X' \mid 1 \mid 0$
- $X' \rightarrow 0X' \mid 0$
- $Y \rightarrow 0Y \mid 0Y' \mid 1Y' \mid 1 \mid 0$
- $Y' \rightarrow 1Y' \mid 1$

No hay producciones nulas ni del tipo $A \rightarrow B$ luego pasamos a Chomsky:

- $S \rightarrow X Y_c \mid C_0 S_{1S} \mid C_0 S_{1c} \mid X S' \mid S' Y$
- $S' \rightarrow C_0 S_{1S} \mid C_0 S_{1c} \mid c$
- $S_{1S} \rightarrow C_1 S_S$
- $S_S \rightarrow S C_{10}$
- $C_{10} \rightarrow C_1 C_0$
- $S_{1c} \rightarrow C_1 S_c$
- $S_c \rightarrow C_c C_{10}$
- $Y_c \rightarrow C_c Y$
- $X \rightarrow C_1 X \mid C_0 X' \mid C_1 X' \mid 1 \mid 0$
- $X' \rightarrow C_0 X' \mid 0$
- $Y \rightarrow C_0 Y \mid C_0 Y' \mid C_1 Y' \mid 1 \mid 0$
- $Y' \rightarrow C_1 Y' \mid 1$

- $C_c \rightarrow c$
- $C_0 \rightarrow 0$
- $C_1 \rightarrow 1$

Hacemos CYK para 010c101

0	1	0	c	1	0	1
X, X, Y, C_0						

Hacemos CYK para 010c101

0	1	0	c	1	0	1
C_0, X, X', Y	C_1, X, Y, Y'	C_0, X, X', Y	C_c, S'	C_1, X, Y, Y'	C_0, X, X', Y	C_1, X, Y, Y'
Y	X, C_{10}	S	S, Y_c	X, C_{10}	Y	
$\emptyset$	$\emptyset$	S	S_c	$\emptyset$		
$\emptyset$	S	[illegible]	$\emptyset$			
$\emptyset$	S_{1S}	$\emptyset$				
$\cancel{S'}$	$\emptyset$					
S						

Efectivamente 010c101 pertenece al lenguaje L

15. Gramática libre del contexto en forma normal de Chomsky que genere los siguientes lenguajes sobre $\{a, 0, 1\}$

$L_1 = \{auava : u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$

$L_2 = \{uvu : u \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$

Usar CYK para ver si $a0a0a$ pertenece a L_1 y $011001a$ a L_2.

a) Gramática para L_1:

- $S \to a0S'0a \mid a1S'1a$
- $S' \to 0S'0 \mid 1S'1 \mid a$

No hay producciones vacías ni del tipo $A \to B$, pasamos a Chomsky:

- $S \to C_a X$
- $X \to C_1 X_1 \mid C_0 X_0$
- $X_1 \to S_1' C_a$
- $X_0 \to S_0' C_a$
- $S_1' \to S' C_1$
- $S_0' \to S' C_0$
- $S' \to C_1 S_1' \mid C_0 S_0' \mid a$
- $C_a \to a$
- $C_0 \to 0$
- $C_1 \to 1$

Algoritmo CYK:

a	0	a	0	a
C_a, S'	C_0	C_a, S'	C_0	C_a, S'
S_0'	$\emptyset$	S_0'	$\emptyset$	
X_0	S'	X_0		
$\emptyset$	S_1', S_0'			
S				

b) $L_2 = \{ u v u : u \in \{0,1\}^*, u^{-1} = v \}$

Vemos que el lema de Bombeo no se cumple:

Tomamos $\forall n \in \mathbb{N}$ la palabra $z = 1^n 0 1^{2n} 0 1^{2n} 0 1^{3n}$

de haber usado $u = 1^n 0 1^n$, y obv $z \in L_2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Para cualquier descomposición $z = uvwxy$ con $|vwx| \leq n$ y $|vx| > 1$

vemos que:

- $0 \in v$ ó $0 \in x$ pero no a la vez porque $|vwx| \leq n$, si tomamos $i = 0$ entonces uwy solo tiene un 1 y entonces $uwy \notin L$ (no es de entre 3)
- vx solo son ceros, y si $i = 0$ con $|vwx| \leq n$, al dividir entre 2 partes algunas tienen más ceros que otros

En cualquier caso no se cumple $\Rightarrow L_2$ no es indep del contexto $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ no algoritmo CYK

(21) L_1 y L_2 lenguajes sobre A, se define el cociente $L_1/L_2 = \{u \in A^* : \exists w \in L_2 : uw \in L_1\}$. Demostrar que si L_1 es indep del contexto y L_2 regular $\Rightarrow L_1/L_2$ indep. contexto

No estoy seguro de la demostración pero la idea sería tomar el autómata con pila asociado a L_1 y el AFD asociado a L_2, entonces la idea es coger del autómata con pila los estados tales que al aplicarle una palabra $w \in L_2$ entonces en L_1 acaba en un estado final (en ambos con la misma secuencia), luego haciendo estos estados finales tenemos un autómata con pila que solo ha sido "restringido" por decirlo así.

(22) L lenguaje sobre $\{0,1\}$, sea SUF(L) el conjunto de sufijos de palabras de L:

$$SUF(L) = \{u \in \{0,1\}^* : \exists v \in \{0,1\}^*, vu \in L\}$$

Demostrar que si L indep del contexto $\Rightarrow$ SUF(L) también

Vemos primero que si L es indep. del contexto entonces L^{-1}, esto es fácil ya que solo hay que darle la vuelta a las producciones es decir si $S \to ab$ entonces $S^{-1} \to ba$. Por tanto como se tiene que $SUF(L) = PREF(L^{-1})^{-1}$, nos centramos en ver si un L' indep del contexto entonces $PREF(L')$ sea indep, que es trivial viendo que $A^* = \{0,1\}^*$ es regular y por lo visto en el ejercicio anterior $PREF(L') = L' / \{0,1\}^* = A^*$ es indep. del contexto, luego L indep $\Rightarrow L^{-1}$ indep $\Rightarrow PREF(L^{-1})$ indep $\Rightarrow$
$\Rightarrow PREF(L^{-1})^{-1}$ indep $\Rightarrow SUF(L)$ indep