1. **LCS(最长公共子序列问题)**

（1） LCS(x – 1,  y – 1) + 1如果Ax ＝ By

这对应L(x,y) = L(x,- 1 y- 1)末尾接上Ax

（2.1） LCS(x – 1, y)  如果Ax ≠ By且LCS(x – 1, y) ≥LCS(x, y – 1)

这对应L(x,y)= L(x – 1, y)

（2.2） LCS(x, y – 1)  如果Ax ≠ By且LCS(x – 1, y) <LCS(x, y – 1)

这对应L(x,y) = L(x, y – 1)

（3） 0 如果 x =0或者y = 0

这对应L(x,y)=空序列

1. **最长单增子序列**

Dp[i]表示以a[i]结尾的单调增子序列长度

Dp[i] = max(Dp[i],Dp[j]+1),其中j<I,显然，如果j是一个单调增子序列，且位于i之前，那么Dp[i]至少等于以j为结尾的单调增序列长+1；

1. **最短编辑距离**

这里res[i][j]表示子串word1[0....i-1]和字串word2[0...j-1]的最短编辑距离。当word1[i]和word2[j]相等，那么res[i][j]自然等于res[i-1][j-1]; 当word1[i]和word2[j]不相等时，分三类情况，方法1是删去word1[i],试图让word1[0....i-1]转变为word2[0...j]，那么其最小编辑距离等于res[i-1][j]+1; 方法2是将word2[j]插入到word1[i]后，如果这样能匹配的话，显然word1[0...i]要与word2[0....j-1]匹配，故其最小编辑距离等于res[i][j-1]+1， 方法3是将word1[i]替换为word2[j],这样如果匹配的话，显然word1[0...i-1]要与word2[0...j-1]匹配，故其最小编辑距离等于res[i-1][j-1]+1

1. **字符串匹配(KMP算法)**
2. **最长回文子串**

Dp[i][j]表示区间[i,j]的字串是否回文

Dp[i][i] = true;（单个字符一定是回文串）

先遍历一遍长度为2的情况，即s[j]和s[j+1]如果相等,则dp[j][j+1] = true;

遍历每个可能的回文长度i=3---->size

J表示区间起始，end表示区间结束；

如果s[j] == s[end] 并且dp[j+1][end-1]为true，则dp[j][end]为true，并更新最长回文长度为i，并保存该回文串的起始地址j

**6.单词拆分**

给定一个**非空**字符串 s 和一个包含**非空**单词列表的字典 wordDict，判定 s 是否可以被空格拆分为一个或多个在字典中出现的单词。

Dp[i]表示到字符s的第i个字符为止的字串是否可以被拆分。

bool wordBreak(string s, vector<string>& wordDict) {

vector<bool> dp(s.size()+1,false);

dp[0] = true;

for(int i = 1; i < s.size()+1; ++i){

for(auto str : wordDict){ //每次循环都遍历字典中的所有单词

//如果单前字串长度大于等于单词长度，且该单词又是字串的后缀，则该字串可能被拆分；如果已经拆分好，就永远为true了，否则取决于其前缀是否可以被拆分

if(i >= str.size() && str == s.substr(i-str.size(),str.size())){

dp[i] = dp[i] || dp[i-str.size()];

}

}

}

return dp[s.size()];

}

**7.最大正方形**

在一个由 0 和 1 组成的二维矩阵内，找到只包含 1 的最大正方形，并返回其面积。

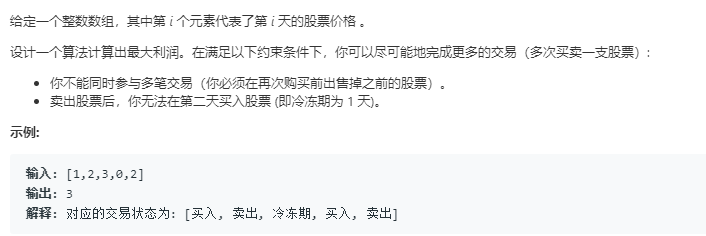


设dp[i][j]表示以二维矩阵的第i行和第j列的点为左下角的最大正方形变长。

那么可以发现，如果该点为1，则最大正方形边长取决于该点左侧、右侧和左上对应的正方形中边长最小的那个+1.

所以dp[i][j] = min(dp[i-1][j],dp[i][j-1],dp[i-1][j-1]);

**8.最佳买卖股票时机含冷冻期**



解:

设定两个数组hold和profits分别表示到第i天为止，持有成本(成本是负数)的最大值(也可以理解为用正数表示的成本的最小值)和获得利润的最大值。目标就是让利润最大

转移方程为

当天数小于等于1时，hold[i] = max(hold[i-1],-prices[1]);

当天数大于1时:

Hold[i] = max(hold[i-1],profits[i-2] – prices[i])—即第i天不买入或者买入，如果不买入，那么第i天的成本就是第i-1天的成本，如果买入，那么由于冷冻期的存在，第i天的成本为到第i-2天为止的最大利润(上一次卖出必然是在i-2天之前，如果是i-1天卖出，第i天就冷冻了)减去当日价格。

Profits[i] = max(profits[i-1],hold[i-1] + prices[i])---即第i天不卖出或者卖出。如果不卖出，那么迄今为止的利润就是前i-1天的最大利润；如果卖出，则迄今为止的利润就是当日卖出价格减去i-1天前的成本(因为成本是负的，所以用加法)；

**普通解法：**

用dp[i]表示第i天前的最大获利情况，则可以得到转移方程

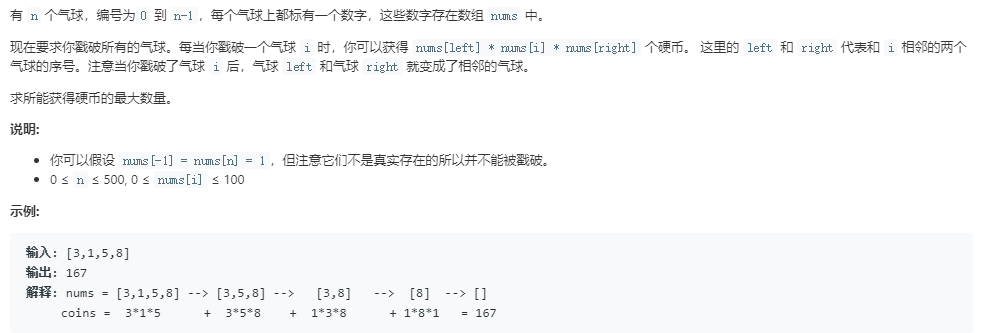
If( j >= 2) dp[i] = max(difference + dp[j-2],dp[i])

Else Dp[i] = max(difference,dp[i]);

其中difference表示第i天的价格与第j天的价格之差---即第j天买入，第i天卖出；



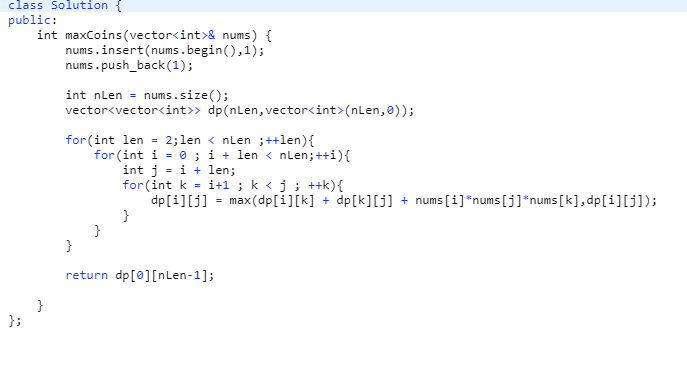
**9.戳气球**



解：

设dp[i][j]表示从i+1----j-1范围内戳气球可以得到的最大回报值。设每次最后一个被戳破的气球标号为k(k的范围是i+1---j-1)那么，转移方程为：

Dp[i][j] = max(Dp[i][j],nums[i]\*nums[j]\*nums[k] + dp[i][k] + dp[k][j])



**10.分割动态子集**



解:

这个问题可以看作,在数组内，是否有任意个元素的和可以恰好等于数组之和的一半

那么，这其实就转化为了一个01背包问题：

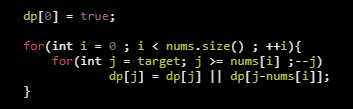
背包中各个物品的价值等于元素的值，重量均为“1“，现在是要从中选取物品使得刚好填满容量为V的背包；

这里用dp[V]表示是否能恰好填满大小为V的背包—也就是能否恰好求得和为target。

转移方程为:

Dp[V] = dp[V] || dp[V – nums[i] ]

且根据01背包的优化方法，对于每一个i，V的遍历顺序应当从V到nums[i],这样，当前需要的状态才由上一时刻决定。

关键代码部分如下：  


**11、不同的子序列**

**题目描述:**



**解:**

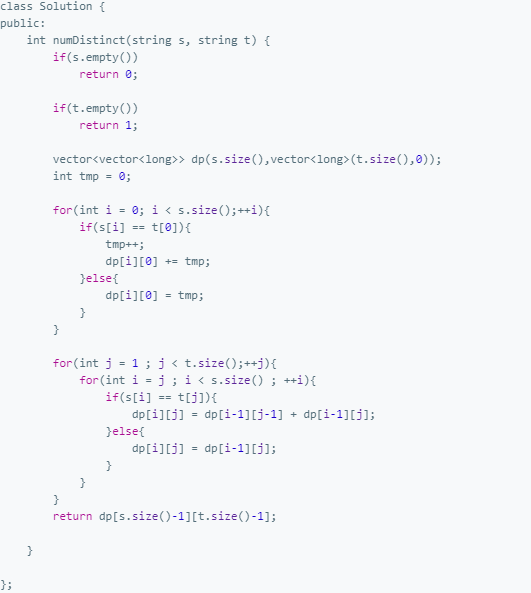
利用动态规划的思想

Dp[i][j]表示到s[i]为止,包含到t[j]为止得字串个数. 则有转移方程:

Dp[i][j] = Dp[i-1][j-1] + Dp[i-1][j] (s[i] == t[j])

Dp[i][j] = Dp[i-1][j] (s[i] != t[j])

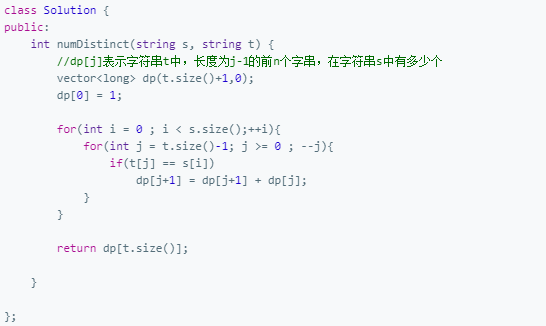
代码如下:



**优化:可以将二维的dp数组降为一维，和背包问题的优化方法类似:**

这里想到这么优化的原因和01背包问题相似. 优化前的转移方程式dp[i][j] = dp[i-1][j-1] + dp[i-1][j]，可以类似这么认为:"i时刻的状态仅仅与i-1时刻有关"。如果我们让i递增，实际上并不需要单独为i开辟空间了。比如，当前状态是dp[j]，而当前时刻为i，即在dp[j]在i时刻还没有更新的时候，dp[j]保存的自然就是上一时刻(i-1)的状态，也就是对应于优化前的dp[i-1][j]啦！ 那么为什么需要倒序呢？仔细想想转移方程dp[j ] = dp[j] + dp[j-1]，其中dp[j]和dp[j-1]都应当是“上一时刻的状态”,如果是顺序的话，这时候的dp[j-1]显然已经更新过了，也就不是“上一时刻”而是“这一时刻”的状态了。如果是倒序的话,这时候dp[j-1]还没有更新，所以也保存的是“上一时刻的状态”！

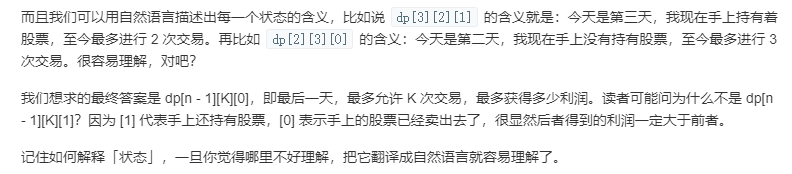
代码如下

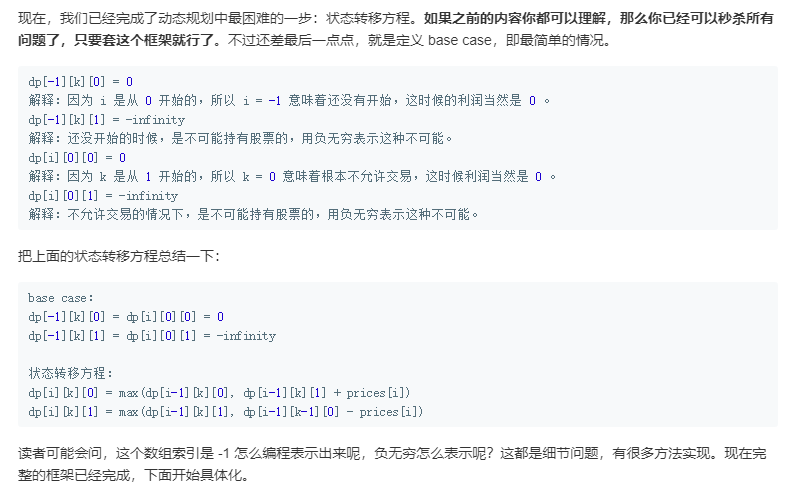


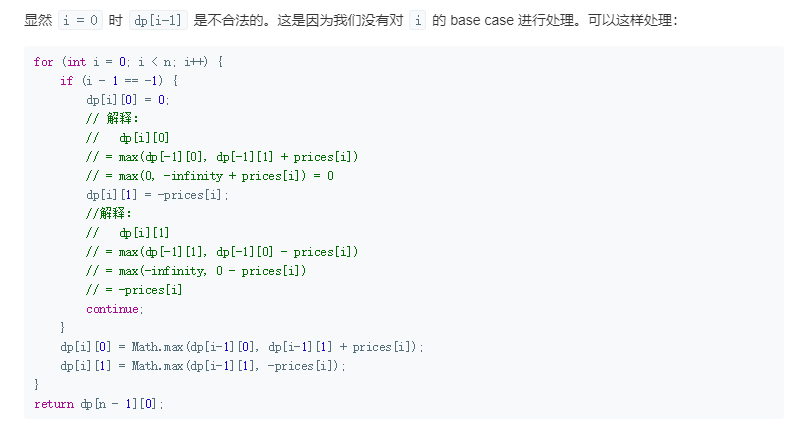
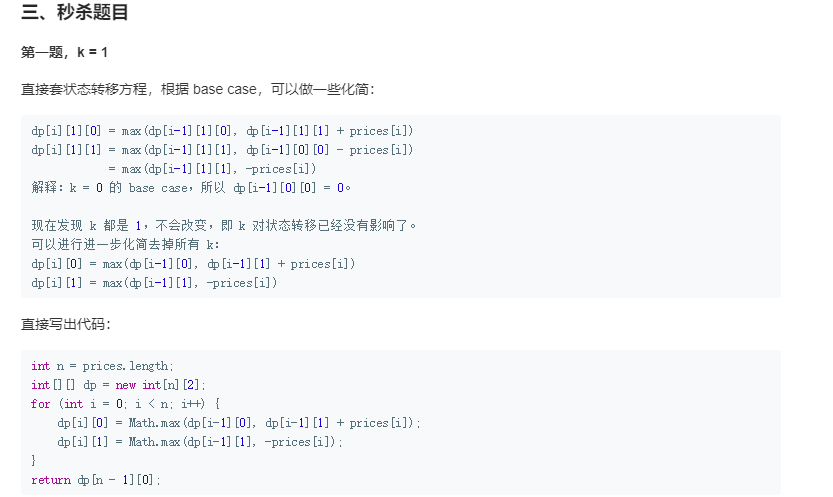
**12、股票问题通解**

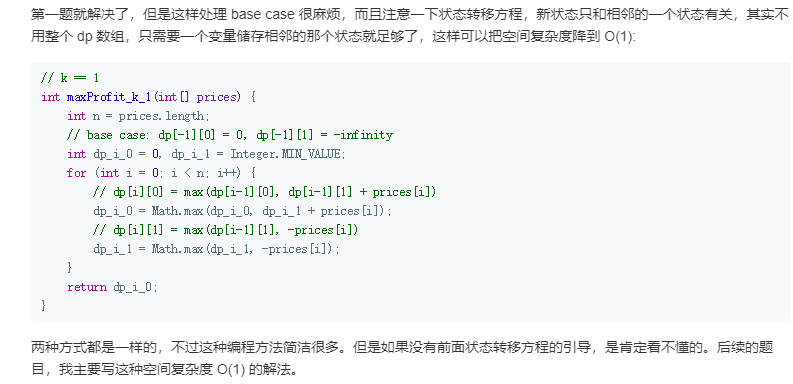


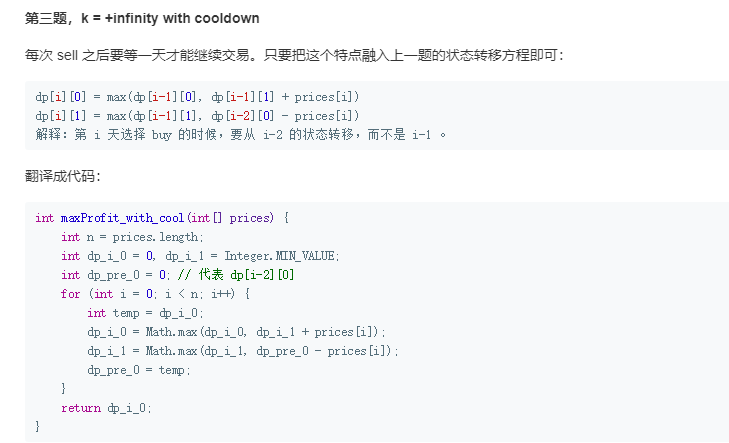
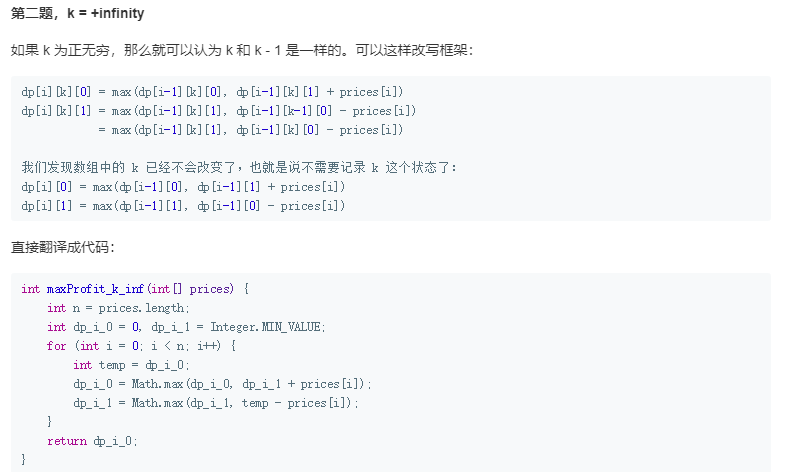


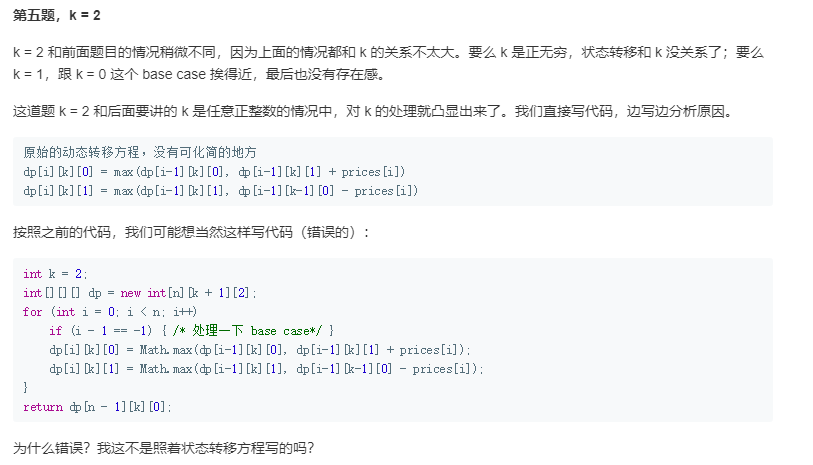






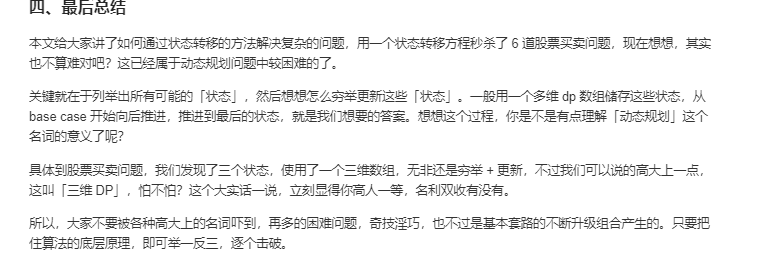












**13、01矩阵**



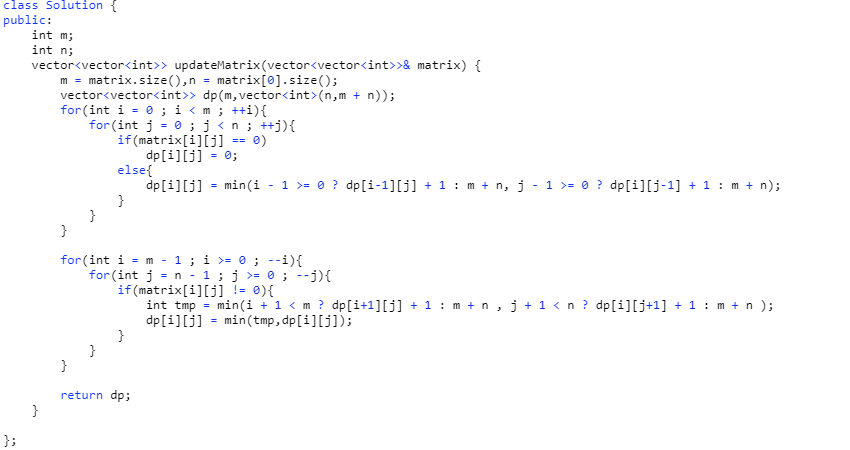
**解题思路:**

**乍一看有些像是DP的题目,但发现状态空间之间好像并没有递推关系**

**比如假设我们按照左上到右下的遍历顺序,但每个元素的状态并不仅仅取决于之前的(即左上的那些元素),也取决于未来的(即右下的那些元素);从右下到左上遍历也存在同样问题,怎么办呢？**

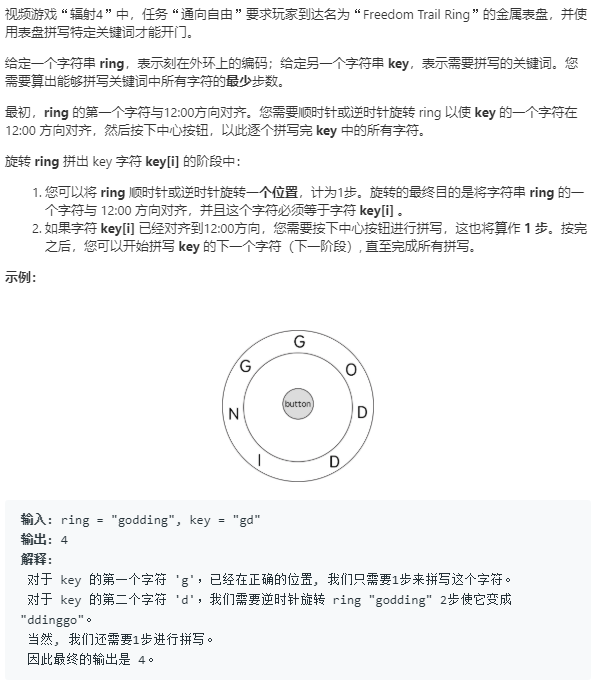
**当然是将两种遍历顺序区分开来,显然,一个元素的状态仅仅取决于左上元素们和右下元素们中的最小者！所以我们只需要按照两种顺序分别遍历,最后取最小即可！**

**代码:**



.

**14、自由之路**



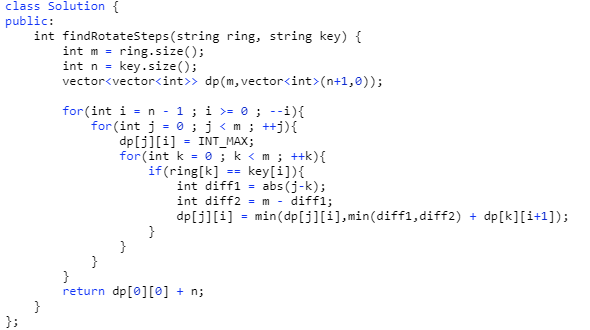
**解题思路：**

**本题的DP方法可能并不是很直观.我们先观察一下有哪些状态：**

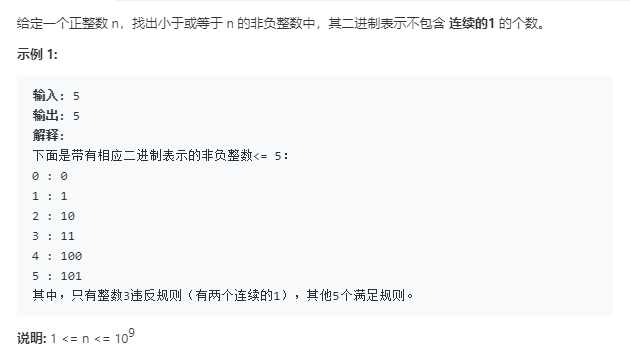
1. **起始位置,也就是位于12点钟方向的ring上的字符**
2. **剩余要拼接的字符串,也就是已经拼接到的key中的位置**

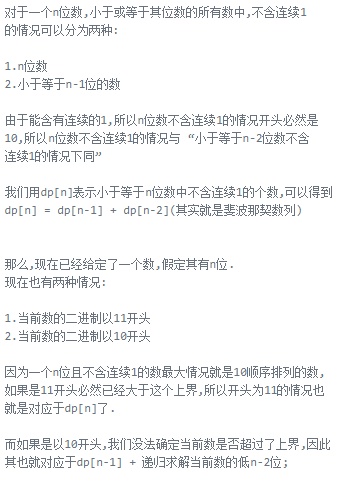
**所以我们用dp[i][j]来表示起始位置为ring[j],要拼接key[i]后的所有字串所需要的最小步数，显然有dp[i][j] = min(dp[i][j],dp[i+1][k] + step)其中k表示与key[i]相同的ring中字符的位置。**

**代码：**

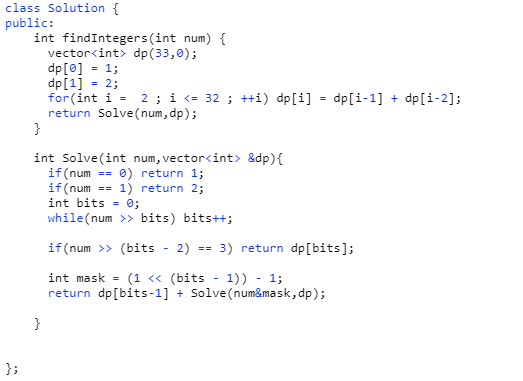


**15、不含连续1的非负整数**



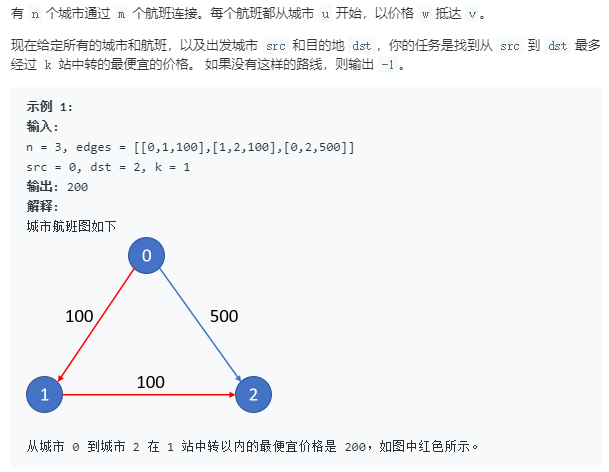
**解法:**

代码：



**16、K 站中转内最便宜的航班**

**题目：**

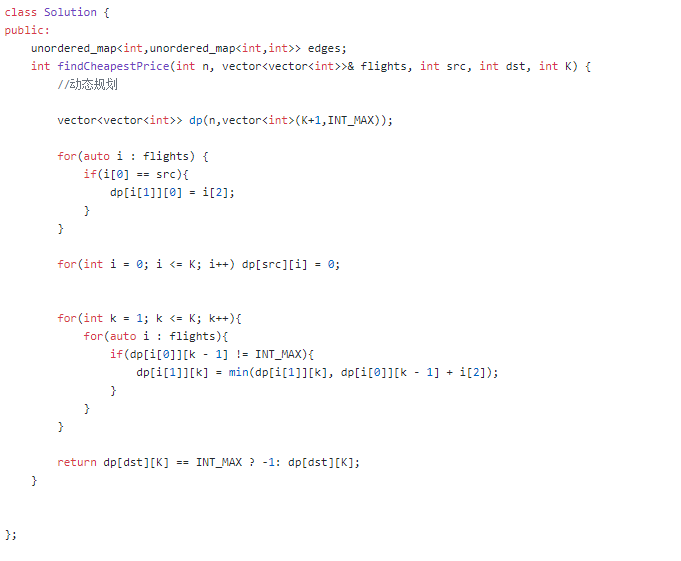


**解：**

dp[i][K]表示从起始地到达i地,最多中转K次的最小费用

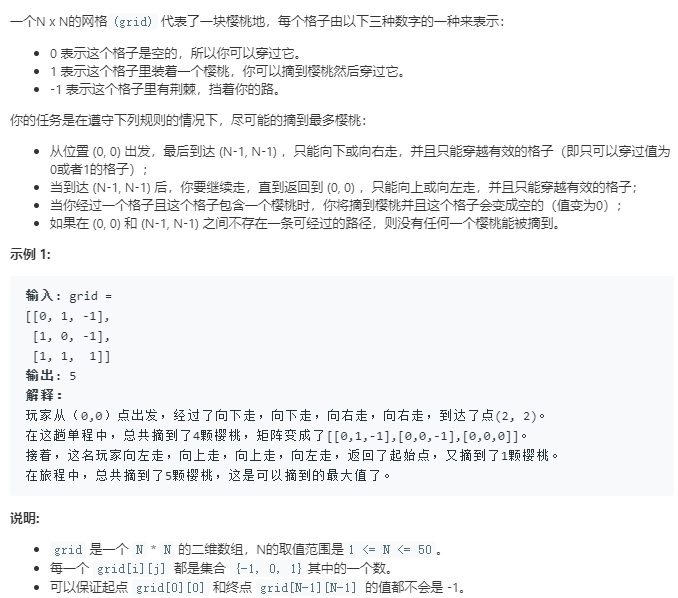
有转移方程,l表示所有可达i的站点

dp[i][K] = min(dp[i][K],dp[l][K-1] + cost(l,i))



**17、摘樱桃**

**题目描述**



**解：**

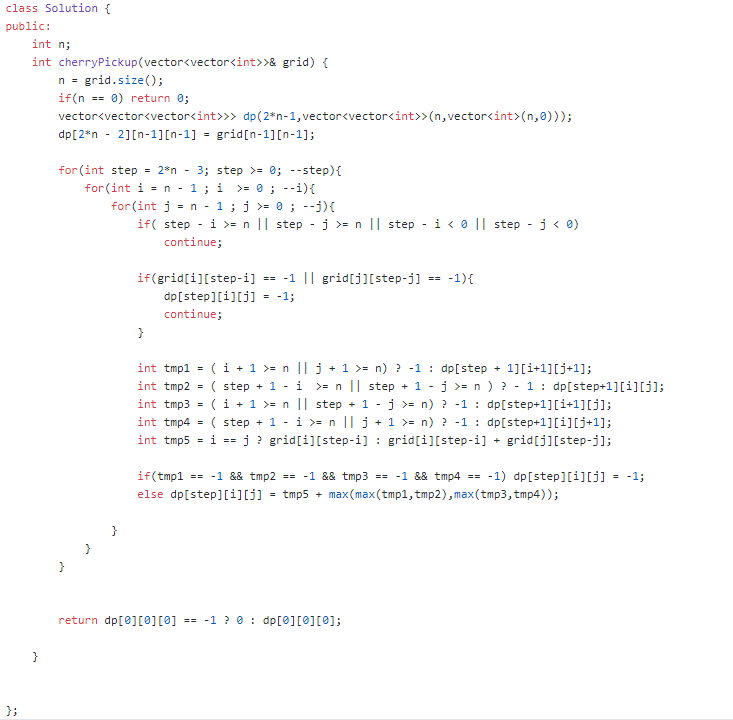
本题DP思路于常规不同,实际上根据题意,我们可以把这个问题等价于 “两人同时按照指定规则,一直走到终点时所能得到的最大回报”

这里同时涉及到步数\第一人的x\第一人的y\第二人的x\第二人的y 一共五个状态。但是由于在步数确定的情况下只要知道x也就知道y。所以最终只需要3个状态就可以遍历完整的状态空间

dp[step][row1][row2]表示两人都走了从step步的情况下

第一人在row1行,第二人在row2行时开始,走到终点所可得到的最大收益

**代码：**



**18、环形子数组的最大和**

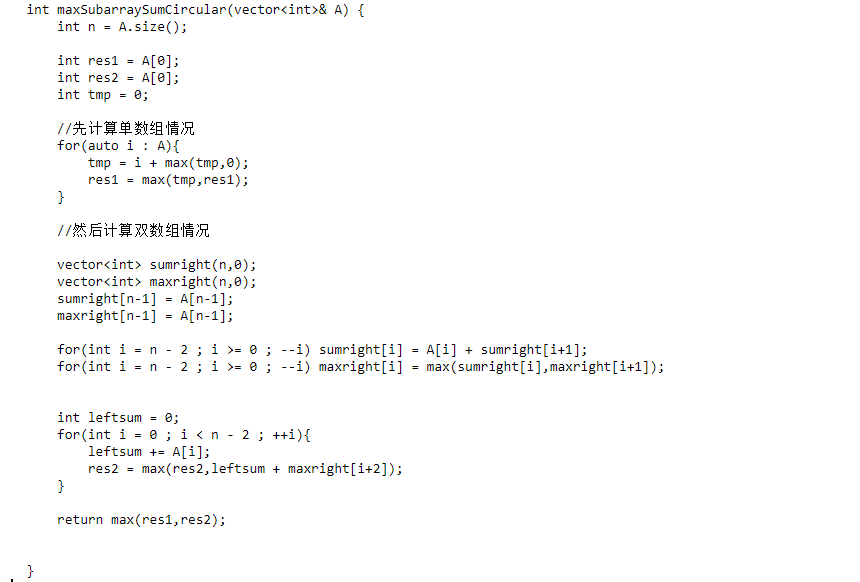
**解：**

无非分两种情况

1. 最大子数组只存在于一个数组内
2. 最大子数组很横跨了两个数

**代码：**

情况1即是**Kadane算法**



**19、赛车**

**题目描述：**



**解：**

dp[i]表示到达目的地i所需要的最小步数

那么 到达任何地点都可以分为两种情况：

1.向右行驶直接到达

2.先向右行驶,然后向左行驶到达

3.先向右,再向左,再向右行驶到达

对于每一个位置i,我们可以求出向右行驶的最大步数和向左行驶的最大步数，

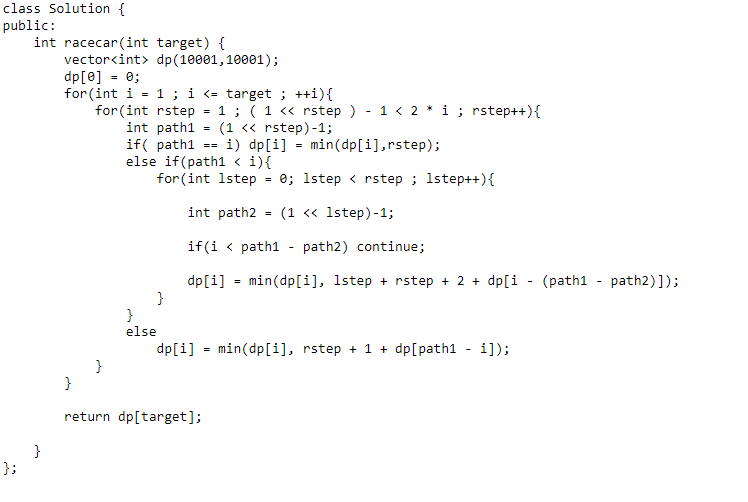
假设向右行驶了rstep步,向左行驶了lstep步.那么现在可以做如下讨论：

1. rstep步后刚好达到目的结点 那么有dp[i] = min(dp[i],rpath);

2.rstep步后还未超过终点,先行驶lstep步后再向终点前进,则有dp[i] = min(dp[i],rstep+ 1 + lstep + 1 +dp[i - (rpath - lpath)]);

3.rstep步后,超过了i,那么我们只需要考虑返回走dp[rpath - i]步,故dp[i] = min(dp[i],rstep + 1 + dp[rpath - i]);

**代码**



**20、鸡蛋掉落(很经典的一道DP)**

**题目描述:**



**解:**

我们不妨用dp[k][m]表示拥有k个鸡蛋的情况下最多试m次可以到达的最高楼层高度

假设第一步我们到达了某个楼层 L,那么此时从该层扔下鸡蛋，无非有两种情况：

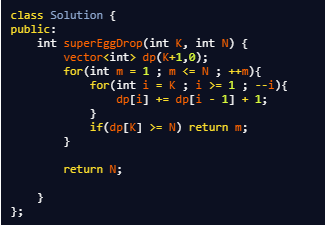
1. 鸡蛋碎了
2. 鸡蛋没碎

如果鸡蛋碎了，那么意味着再往上测就没意义了，我们还可以向下侧dp[k-1][m-1]层(因为碎了一个鸡蛋所以k-1)；

反之，如果鸡蛋没碎，我们可以继续向上测，那么最多还可以测dp[k][m-1]层。

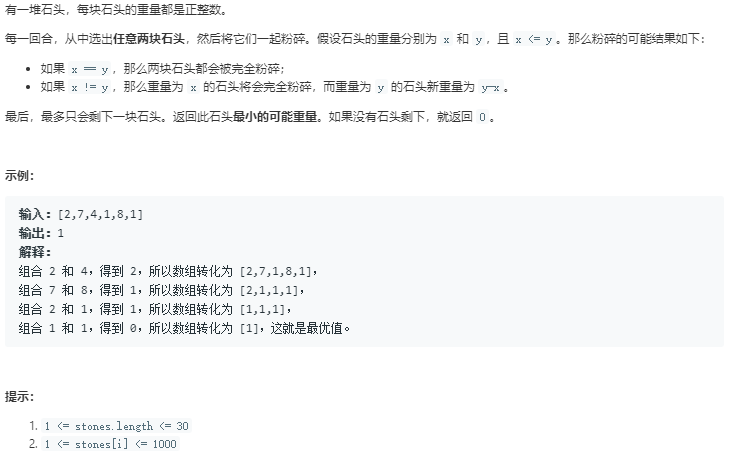
算上本层，则在当前楼层可以测出的最大层数为dp[k][m] = dp[k-1][m-1] + dp[k][m-1] + 1层（即两种情况之和 + 本层）

**代码:**



**21、最后一块石头的重量2**

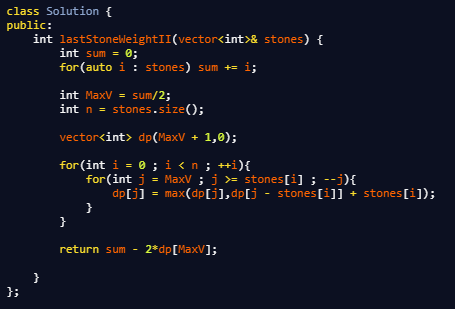
**题目描述：**



**解:**

实质是一道01背包问题。这个问题可以等价于把石子分为两堆,要使得两堆之差尽量小,也就是尽量将其中一堆的大小分配到总和的一半。所以容量V就是石子重量和的一半

**代码：**



**22、DI 序列的有效排列**

**题目描述:**



**解:**

dp[i][j] 长度为i + 1的数组,以顺序下标 j (所谓顺序下标即按小到大顺序排列后的下标) 为结尾的排列满足序列S的规则的数目

则有转移方程

dp[i][j] = sum(dp[i-1][k]) (if S[i] == 'D' && k > j && k < i)

dp[i][j] = sum(dp[i-1][k]) (if S[i] == 'I' && k < j)

其意义是,我们用i这个数,替换了原本长度为i的数组(下标为0到i-1)中,下标为j的数，然后用j做新的结尾。

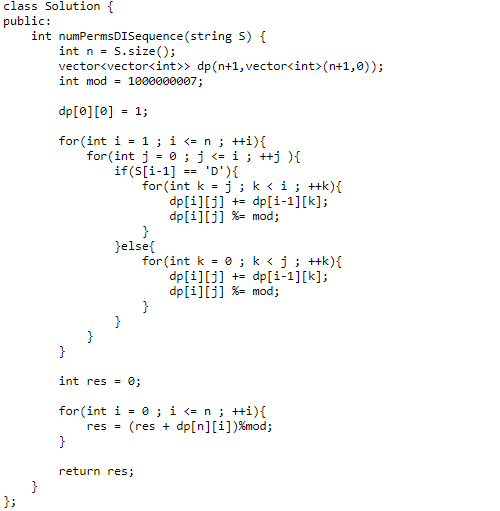
那么现在只要保证0到i-1下标的排序，最后一个数与原下标j对应的数的关系满足S序列的关系即可。

因为只看相对大小,所进行替换后,DP的意义不变。故当前dp[i-1][k]所表示的意义，与未替换前的dp[i-1][k]的意义相同。

所以，如果k大于j,那么在新的数组中下标为k的数也一定大于原本下标为j的数(因为新增了一个最大值)

同理，如果k小于j，那么在新的数组中下标为k的数也一定小于原本下标为j的数

**代码：**



**23、最长递增子序列(O(NlogN)做法)**

O(N^2)的做法很简单，即有状态转移方程：

dp[i] = max(dp[j] + 1,dp[i]);

要改为O(NlogN)时间复杂度，实际上也就是利用二分搜索来寻找“先前可行的子序列，使之与当前最后一个数拼凑后仍为递增”

这里，需要用到几个变量:

Left: 表示先前可行子序列长度的下界

Right：表示先前可行子序列的上界

End[len]: 表示先前可行的、长为len + 1的子序列的最小结尾数值

显然，我们用二分法遍历先前可行序列的长度，显然，可行序列长度越长，结尾数必然越大（反证法，长为Len的序列必然包含了长为Len-1的序列，如果递增序列长为Len-1的结尾比递增序列长为Len的结尾大，与递增性质矛盾）。由此可用二分搜索的方法进行搜索。

伪代码大致如下：

For(int i = 0 ;i < n;++i){

left = 0;

right = last\_len;

while(left <= right){

mid = (left + right)/2;

if(nums[i] > end[mid]){

left = mid + 1;

}else{

right = mid – 1;

}

}

last\_len = max(last\_len,left);

end[left] = nums[i];

dp[i] = left + 1;

}

**24、四边形不等式优化**

对于任意转移方程，如果有形如：

dp[i][j] =Op(dp[i][k] + dp[k + 1][j] + cost[i][j]) (Op == min or Op == max)

且cost[i][j]满足四边形不等式即cost[i][j] + cost[i+1][j+1] <= cost[i][j+1] + cost[i+1][j]时，可以优化时间复杂度。

对于此类问题,如果用s[i][j] 表示dp[i][j]取得最优值时的k值，那么其满足下列关系

s[i][j] <= s[i][j+1] <= s[i+1][j+1](或者s[i][j] <= s[i+1][j] <= s[i+1][j+1],两者完全等价)

所以，对于下标k而言，我们不必再遍历[0,border]整个区间，根据上式的含义有：

s[i-1][j] <= k <= s[i][j+1] (此时i递增 j递减遍历)

或s[i][j-1] <= k <= s[i+1][j] (此时i递减 j递增遍历)

通过上两式可以把k的遍历维度进行优化，只需要我们额外牺牲一些空间复杂度(即开辟一个s[i][j]的数组)