

Definicions i teoremes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

1 Nocions bàsiques

Definició 1. Un graf és un parell $G = (V, E)$ on V és un conjunt i $E \subset \binom{V}{2}$ és un conjunt de parells d'elements de V . Als elements de V se'ls anomena vèrtexs i als de E arestes.

Direm que $v_i, v_j \in V$ són adjacents si $\{v_i, v_j\} \in E$, i tant v_i com v_j són incidents a l'aresta $\{v_i, v_j\}$.

Definició 2. Un graf $H = (V(H), E(H))$ és subgraf de $G = (V(G), E(G))$ si $V(H) \subset V(G)$ i $E(H) \subset E(G)$.

Si $V(H) = V(G)$ es diu que H és un subgraf generador de G .

Si $U \subset V(G)$, el subgraf de G generat per U és $G[U] = (U, E(G) \cap \binom{U}{2})$.

Exemple 3. Alguns exemples de grafs són:

- (a) Graf complet $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$.
- (b) Graf complet bipartit $K_{n,m} = (A \cup B, A \times B)$ on A, B són disjunts, $|A| = n$ i $|B| = m$.
- (c) Camí $P_n = ([n], \{\{i, i+1\}, i = 1, \dots, n-1\})$.
- (d) Cicle $C_n = ([n], \{\{i, i+1 \pmod{n}\}, i = 1, \dots, n\})$.

Proposició 4. Hi ha $2^{\binom{n}{2}}$ grafs d'ordre n i $\binom{n}{m}$ grafs amb n vèrtexs i m arestes.

Definició 5. Dos grafs $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ són isomorfs si hi ha una bijecció

$$f : V_1 \rightarrow V_2$$

tal que $\{u, v\} \in E_1$ si i només si $\{f(u), f(v)\} \in E_2$, i en aquest cas escrivim $G_1 \cong G_2$.

Definició 6. El grau d'un vèrtex $v \in V$ a un graf $G = (V, E)$ és

$$d(v) = \{w \in V : \{v, w\} \in E\}$$

Definició 7. El grau màxim i mínim de G es denoten per $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$ i $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$.

Lema 8. En un graf $G = (V, E)$,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Corol·lari 9 (Lema de les encaixades). El nombre de vèrtexs de grau imparell en un graf $G = (V, E)$ és parell.

Nota 10. La connexió és una de les nocions bàsiques.

Definició 11. Un recorregut a un graf G del vèrtex u al vèrtex v és una seqüència de vèrtexs (u_1, u_2, \dots, u_k) tal que $u_1 = u$, $u_k = v$ i $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(G)$ per a $1 \leq i < k$. La llargada del recorregut és $k-1$. Si $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$ diem que el recorregut és un camí.

Dos vèrtexs $u, v \in V(G)$ de G estan connectats si hi ha un recorregut a G de u a v .

Observació 12. La relació \sim , on els vèrtexs $u \sim v$ si i només si estan connectats en el seu graf, és una relació d'equivalència.

Definició 13. Les classes d'equivalència de la relació anterior són les components connexes del graf.

Definició 14. Un graf és connex si i només si té una sola component connexa.

Proposició 15. El graf $G = (V, E)$ és connex si i només si, per a cada subconjunt propi $U \subsetneq V$, $U \neq \emptyset$, hi ha una aresta incident amb un vèrtex de U i un vèrtex de $V \setminus U$.

Nota 16. La segona noció bàsica és la distància.

Definició 17. Sigui $v, v' \in V(G)$. La distància entre v i v' és

$$d(v, v') = \min\{|E(P)| : P \subset G; P \text{ un camí}; v, v' \in V(P)\}$$

entenent que $d(v, v') = \infty$ si v i v' estan a components connexes diferents de G .

Proposició 18. La funció

$$\begin{aligned} d : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

(per a $x, y, z \in V(G)$) és simètrica ($d(x, y) = d(y, x)$), definida positiva ($d(x, y) \geq 0$ i val la igualtat només si $x = y$) i satisfà la desigualtat triangular ($d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$). És a dir, d és una distància.

Definició 19. El diàmetre, $D(G)$, d'un graf G connex G és la màxima distància entre dos vèrtexs de G .

Proposició 20. Sigui G un graf amb n vèrtexs, de diàmetre $D = D(G)$ i de grau màxim $\Delta = \Delta(G) \geq 3$. Aleshores,

$$n \leq 1 + \Delta \left(\frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2} \right)$$

La cota s'assoleix per als grafos complets K_n i pel graf de Petersen.

Definició 21. Un graf amb $n \geq 2$ vèrtexs és bipartit si és un subgraf de $K_{n,m}$ per a alguns $n, m > 0$. Equivalentment, un graf $G = (V, E)$ és bipartit si hi ha una partició $V = V_1 \cup V_2$ tal que totes les arestes són incidents amb un vèrtex de V_1 i un de V_2 .

Les següents són dues representacions matricials útils de grafos.

Definició 22. La matriu d'adjacència d'un graf $G = (V, E)$ amb $n = |V(G)|$ vèrtexs és una matriu $A = A(G)$ quadrada d'ordre n amb entrades a $\{0, 1\}$ on $A(i, j) = 1$ si i només si $\{v_i, v_j\} \in E(G)$.

Definició 23. Per a una ordenació e_1, \dots, e_m de les arestes d'un graf G , la matriu d'incidència de G és una matriu $N = N(G)$ d'ordre $n \times m$ amb entrades a $\{0, 1\}$ on $N(i, j) = 1$ si i només si el vèrtex v_i és incident amb l'aresta e_j .

Proposició 24. Sigui $A = A(G)$ la matriu d'adjacència d'un graf $G = (V, E)$ d'ordre n . Per a $k \geq 1$, $A^k(i, j)$ és el nombre de recorreguts entre v_i i v_j de llargada k . En particular, el diàmetre de G és el mínim k tal que $(A + I_n)^k(i, j) > 0$ per a cada $1 \leq i, j \leq n$.

2 Arbres

Definició 25. Un graf acíclic (sense cicles) és un bosc. Un arbre és un graf connex i acíclic.

Proposició 26. Les següents afirmacions són totes equivalents.

- (1) $T = (V, E)$ és un arbre.
- (2) Per cada parell de vèrtexs hi ha un únic camí que els uneix.
- (3) T és un graf minimalment connex: T és connex i per a cada $e \in E$, $(V, E \setminus \{e\})$ no és connex.
- (4) T és un graf maximalment acíclic: T és acíclic i per cada $e \in \binom{V}{2} \setminus E$, $(V, E \cup \{e\})$ no és acíclic.
- (5) T és un graf connex amb n vèrtexs i $n - 1$ arestes.
- (6) T és un graf acíclic amb n vèrtexs i $n - 1$ arestes.

Definició 27. Una fulla és un vèrtex de grau 1.

Proposició 28. Un arbre amb $n \geq 2$ vèrtexs tñe almenys dues fulles.

Definició 29 (Seqüència de Prüfer). Sigui T un arbre amb conjunt de vèrtexs $V(T) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Sigui $T = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-2}$ la seqüència de subarbres de T on T_i s'obté de T_{i-1} eliminant la fulla amb menor subíndex. La seqüència de Prüfer de T és la paraula $(y_1, y_2, \dots, y_{n-2})$ de $[n-2]$ on y_i és el subíndex de l'únic vèrtex adjacent a la fulla de T_i de menor subíndex.

Teorema 30. La seqüència de Prüfer identifica unívocament un arbre (etiquetat) de n vèrtexs.

Corol·lari 31 (Fórmula de Cayley). Hi ha n^{n-2} arbres de n vèrtexs.

Teorema 32. Sigui $1 = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ una seqüència d'enters tal que $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$. El nombre d'arbres (etiquetats) de n vèrtexs que tenen aquesta seqüència de graus és el coeficient multinomial

$$\binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$$

Nota 33. Els grafs acíclics, en particular els arbres, són bipartits. El codi de Prüfer es pot generalitzar per enumerar els arbres amb n vèrtexs que admeten una bipartició en parts de mides n_1 i n_2 , $n_1 + n_2 = n$.

Teorema 34. El nombre d'arbres que tenen una bipartició en parts $A = \{1, 2, \dots, n_1\}$ i $B = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n\}$ és

$$n_1^{n_2-1} n_2^{n_1-1}$$

Definició 35 (Arbres generador). Sigui $G = (V, E)$ un graf. Un arbre generador de G és un subgraf $T \subset G$ que és un arbre i tal que $V(T) = V(G)$.

Nota 36. La Fórmula de Cayley es pot enunciar dient que el graf complet K_n conté n^{n-2} arbres generadors, i el Teorema 34 dona el nombre d'arbres generadors del graf bipartit complet K_{n_1, n_2} .

3 Cicles i circuits

4 Aparellaments

5 Coloració