Apunts d'Àlgebra Multilineal i Geometria

Aleix Torres i Camps

1 Àlgebra Multilineal

1.1 La forma de Jordan

1.1.1 Introducció i repàs

Sigui $\mathbf{k}$ un cos (normalment $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), sigui E in $\mathbf{k}$-e.v. de dimensió finita (dim n), sigui $f : E \to E$ un endomorfisme, sigui $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base i sigui $M_{\mathscr{B}}(f) = A$ matriu bàsica per $\mathscr{B}$.

Aleshores, $v \in E$ és vep de vap $\lambda \in \mathbf{k}$ si v compleix que $f(v) = \lambda v$.

Direm que f diagonalitza si $\exists$ base de veps $\mathscr{B}$: en aquest cas, la matriu $M_{\mathscr{B}}(f)$ és diagonal.

Quan sabem si una matriu o una aplicació diagonalitza? Fem servir el polinomi característic: $P_f(t) = \det(f - tId)$ de grau n. Aleshores, λ és vap $\iff P_f(\lambda) = 0$, per tant, $\{vap\} = \{\text{arrels de } P_f(t)\}$, la qual cosa és una manera de trobar el vaps.

Hipótesi: Sempre suposarem que el polinomi descomposa en el cos, és a dir, $P_f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$, on $n_1 + \ldots + n_r = n$. Totes les arrels de $P_f(t)$ són de $\mathbf{k}$. En particular, pels conplexos, això sempre és cert.

Teorema 1. *El **primer teorema de descomposició** diu que podem separar l'espai vectorial en subespais invariants i sense intersecció entre ells tals que tots ells nuclis de l'aplicació f menys vap vegades la identitat, és a dir: $E = \ker(f - \lambda_1 \operatorname{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r \operatorname{Id})^{n_r}$.*

És a dir, si $\forall v \in E \implies v = v_1 + \ldots + v_r$, on $v_i \in \ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$ és a dir, $(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}(v_i) = 0$.

Corol·lari 2. $n_1 = \cdots = n_r = 1 \implies f$ *diagonalitza.*

Teorema 3. *Caylei-Hamilton: $P_f(A) = 0$. Considerem $m_f(t) \in \{Q(t) | Q(A) = 0\}$ que és el polinomi de grau mínim i mònic $\implies m_f(A) = 0$ i $m_f(t) | P_f(t)$ (el polinomi mínim divideix al polinomi característic). A més, $m_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$ té totes les arrels però de grau més petit o igual.*

Proposició 4. *f diagonalitza $\iff m_1 = \ldots = m_r = 1$.*

Recordant el fet que $E = \ker(f - \lambda_1 \operatorname{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r \operatorname{Id})^{n_r}$, a més sabem que: $\dim \ker(f - \lambda \operatorname{Id})^{n_1} = n_1$, $\ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$ son f-invariants, $f(\ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}) \subset \ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$.

Aleshores, per la propia descomposició de l'espai en nuclis, sabem que la matriu de l'aplicació com a mínim queda separada pels subespais de cada nucli. Ja que son espais separats i invariants.

Conclusió: la multiplicitat més gran del polinomi mínim és la mida màxima de la caixa que ens pot aparèixer quan intentem fer diagonalització.

Exemple 1. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal de k^3 en una certa base:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, calculem el polinomi característic $P_A(t)$.

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^3$$

Per tant, té un únic vap $\lambda = 1$ que apareix 3 vegades. Automàticament, sabem que $\mathbf{k}^3 = \ker(A - 1\,\mathrm{Id})^3$. Tot i així, observem que:

$$(A - \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I que, per tant, veiem que $\mathbf{k}^3 = \ker(A - \mathrm{Id})^2$. Llavors el polinomi mínim no coincideix amb el polinomi característic sinó que $m_A(t) = (1-t)^2$.

1.1.2 El teorema de Jordan

Sigui $f : E \to E$, on $E = \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})^m = \ker f_\lambda^m$ (abreugem la notació amb $f_\lambda := f - \lambda\,\mathrm{Id}$).

Definició 5. $v \in E$ és un **vep generalitzat d'alçada l** si $v \notin \ker(f_\lambda^k)$ per $k \leq l-1$, però sí que $v \in \ker f_\lambda^l$. Que és el mateix que dir que $f_\lambda^k(v) \neq 0$ (per al mateix rang de k), però sí que $f_\lambda^l(v) = 0$.

Exemple 2. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal a $\mathbf{k}^4$ en la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ara, observem que $f_\lambda(e_1) = f(e_1) - \lambda e_1 = e_2 \neq 0$, $f_\lambda^2(e_1) = f_\lambda(e_2) = e_3 \neq 0$, $f_\lambda^3(e_1) = f_\lambda^2(e_2) = f_\lambda(e_3) = 0$ i, per últim, $f_\lambda(e_4) = 0$. Per tant, e_1 és un vepg d'alçada 3, e_2 és un vepg d'alçada 2 i tant e_3 com e_4 són vepg d'alçada 1 i, per tant, veps ordinaris.

Proposició 6. *Sigui v un vep generalitzat d'alçada l, aleshores $v, f_\lambda(v), f_\lambda^2(v), \ldots, f_\lambda^{l-1}(v)$ són linealment independents. Al subespai que generen l'anomenarem un cicle de Jordan de longitud l.*

Demostració. Suposem que son linealment dependents, aleshores existeix escalars els quals no son tots 0 tals que:

$$\mu_0 v + \mu_1 f_\lambda(v) + \ldots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1}(v) = 0$$

Però ara apliquem f_λ^{l-1} i ens queda:

$$\mu_0 f_\lambda^{l-1}(v) + \mu_1 f_\lambda^{l}(v) + \ldots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1+l-1}(v) = 0$$

Aleshores, com que v és un vep generalitzat d'alçada l, a partir del segon son tots 0, per tant, no queda cap altra opció que $\mu_0 = 0$. Efectuant ara, per $1 \leq i \leq l-2$, aquest procés de nou però amb f_λ^{l-i} veurem que $\mu_i = 0$. I, per tant, hem vist que totes les μ són 0, amb la qual cosa, per definició, són linealment independents. □

Proposició 7. *Els cicles de Jordan són f-invariants. (Per simplificar la notació fem servir $u_k = f_\lambda^{k-1}(v)$).*

Demostració. Per $k \neq l$, sabem que, $f_\lambda(u_k) = u_{k+1}$, és a dir, $f(u_k) = \lambda u_k + u_{k+1}$. Per tant, per aquesta part, és invariant. Per últim, quan fem $f_\lambda(u_l) = 0$, per ser v un vep generalitzat d'alçada l. □

Definició 8. Un cicle de Jordan de longitud l dona a lloc un Bloc de Jordan.

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definició 9. Una base de Jordan de f és una vase de E formada per cicles de Jordan.

$$M_{\mathscr{J}} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

Teorema 10. *Si el polinomi característic $P_f(t)$ descompon completament, aleshores, existeixen bases de Jordan.*

Demostració. Anem a verue el cas en dimensió 2. Sigui $f : \mathbf{k}^2 \to \mathbf{k}^2$ un endomorfisme amb un únic vap λ amb $m_f(t) = (t-\lambda)^2$ i per tant, aquest és l'únic cas que no diagonalitza.

Agafem $u \in \mathbf{k}^2$ tal que $f_\lambda(u) \neq 0$ (per tant, u no és vep). Aleshores, escollim v de la següent manera: $v = f(u) - \lambda(u)$. Llavors la base $\{u, v\}$ és un base de Jordan. Amb matriu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ara, en general, per a cada bloc, busquem un vector generador d'ordre el bloc (l). És a dir, v vepg d'alçada l, és a dir, que estigui en el $\ker f_\lambda^l$ però no en el $\ker f_\lambda^{l-1}$. Recordem que $0 \subset \ker f_\lambda \subset \cdots \subset \ker f_\lambda^l$.

Suposem f tal que $P_f(t) = (\lambda - t)^n$, aleshores $\exists$ una base de Jordan.

En efecte, sigui $d_i = \dim \ker f_\lambda^i$. Farem un edifici on la planta i té amplada $l_m = d_i - d_{i-1}$. Escollim $u_1^m, \ldots, u_{l_m}^m \in \ker f_\lambda^m \setminus \ker f_\lambda^{m-1}$ de manera que sigui l.i. u_i^m són vepg d'alçada m, considerem $f_\lambda^k(u_i^m)$.

Lema 11. *$f_\lambda^k(u_i^m)$ per $1 \leq i \leq l_m$ i per $0 \leq k \leq m-1$, són l.i*

Demostració. Suposem que tenim unes constants no totes nul·les μ tals que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{l_m} \mu_{ki} f_\lambda^k(u_i^m) = 0$$

Apliquem f_λ^{m-1}. Només ens queda el pis superior, el $k = 0$ i, per tant, $\sum_{i=1}^{l_m} \mu_{0i} f_\lambda^{m-1}(u_i^m) = 0$, però aquests ja sabiem que eren l.i. Aleshores les seves μ_0 són totes 0. Encara ens queden les $k \geq 1$.

Ara apliquem f_λ^{m-2}, només ens queden el segon pis superior, ara fem:

$$\sum_{i=1}^{l_{m-1}} \mu_{1i} f_\lambda^{m-1}(u_i^m) = f_\lambda^{m-1}(\sum_{i=1}^{l_{m-1}} \mu_{1i}(u_i^m)) = 0$$

Però, com que sabem que els vectors de dins són l.i. totes les μ_1 han de ser 0 altra vegada. Reproduint aquest procés per a cada pis, arribem a que totes les μ són 0. ☐

Baixem un pis, estem a $\ker f_\lambda^{m-1} \setminus \ker f_\lambda^{m-2}$ amb amplada l_{m-1}. Veurem que $\ker f_\lambda^{m-1} =< f_\lambda(u_1^m), \ldots, f_\lambda(u_{l_m}^m) > \oplus \ker f_\lambda^{m-2} \oplus V_{m-1} = (*) = u_{m-1} \oplus \ker f_\lambda^{m-2} \oplus V_{m-1}$. Aleshores, caldria escollir, $u_1^{m-1}, \ldots, u_{r_{m-1}}^{m-1} \in V_{m-1} = \ker f_\lambda^{m-1} \setminus u_{m-1} \oplus \ker f_\lambda^{m-2}$ l.i. vepg d'alçada $m-1$.

Lema 12 (*)**.** *Cal comprovar que $u_{m-1} \bigcap \ker f_\lambda^{m-2} = 0$. I per tant que la seva suma sigui directa.*

Demostració. Sigui $w \in u_{m-1} \bigcap \ker f_\lambda^{m-2}$ i el descomponem en elements de de u_{m-1}, llavors apliquem f_λ^{m-2} i, com que $w \in \ker f_\lambda^{m-2}$ el resultat hauria de ser 0, però ens queda:

$$0 = f_\lambda^{m-2}(w) = f_\lambda^{m-2}(\sum \mu_i f_\lambda(u_i^m)) = f_\lambda^{m-1}(\sum \mu_i u_i^m)$$

Ara, com que els elements que hi ha dins del parentesis són l.i. i no pertanyen al $\ker f_\lambda^{m-1}$, no pot haver constants diferents de 0 tals que el resultat sigui. Per tant, hem arribat a contradicció i les constants han de ser 0 i $w = 0$. Aleshores, l'intersecció és buida i hem acabat. $\square$

Seguint el mateix raonament per a cada pis, obtenim una base de Jordan.

$\square$

Exemple 3. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, $P_A(t) = (3-t)^5$, $m_A(t) = (t-3)^3$ i $d_1 = 2$,$d_2 = 4$ i $d_3 = 5$.

e_1	
$f_\lambda(e_1)$	v
$f_\lambda^2(e_1)$	$f_\lambda(v)$

$u_1^3 \in \ker(A - 3\,\mathrm{Id})^3 \setminus \ker(A - 3\,\mathrm{Id})^2$, com per exemple, $u_1^3 = e_1$, $f_\lambda(u_1^3) = (4, -1, 1, 1, 0)$ i $f_\lambda^2(u_1) = e_3$.

Ara, cal $v \in \ker(A - 3\,\mathrm{Id})^2 \setminus \ker(A - 3\,\mathrm{Id}) \oplus < f_\lambda(u_1^3) >$. Per exemple, $v = (-1, 0, 0, 0, 1)$ i $f_\lambda(v) = (0, 1, -1, 0, 0)$.

Observació 13. *La quantitat de cicles de longitud exactament k és $2 \dim \ker f_\lambda^k - \dim \ker f_\lambda^{k-1} - \dim \ker f_\lambda^{k+1}$. Per tant, la quantitat de caixes de mida k depèn només de f (i de λ).*

Observació 14. *La reduïda de Jordan és única, llevat de reordenació dels Blocs.*

Corol·lari 15. *A, B son matrius conjugades ($\exists \in GL_n(\mathbf{k}), B = S^{-1}AS$) $\iff J_A = J_B$.*

Exemple 4. Sigui B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Veiem que $P_B(t) = (t-1)^3(t-2)$, que $m_B(t) = (t-1)^2(t-2)$ i, pel primer teorema de descomposició $E = \ker(B - \mathrm{Id})^2 \oplus \ker(B - 2\,\mathrm{Id})$. Per tant, $u_1 \in \ker(B - \mathrm{Id})^2 \setminus \ker(B - \mathrm{Id})$, $u_2 = f_\lambda(u_1)$ i anar fent...

1.2 Aplicacions de Jordan

Sigui $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{k})$, $P_A(k)$ descompon completament, $\exists$ base de Jordan, una matriu J i una matriu invertible S tal que $J = S^{-1}AS$, o equivalentment $A = SJS^{-1}$.

1. Potències de A: A^k.

Observació 16. *$A^k = (SJS^{-1})^k = (SJS^{-1})(SJS^{-1}) \cdots (SJS^{-1}) = (SJ^kS^{-1})$. Per tant, només cal calcular J^k.*

Observació 17. *La matriu de Jordan J és una matriu per blocs. Aleshores:*

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m^k \end{pmatrix}$$

Podem suposar que $J = J_l(\lambda)$ (que només té un bloc).

Observació 18. *Podem escriure $J = D + N$ on D és una matriu diagonal (on tots els valors son el vap λ) i la matriu N és una matriu amb uns a la diagonal inferior. Aquesta matriu N compleix que la matriu N^k té només 1's a la diagonal k inferior. Per tant, en cada poténcia, la diagonal baixa i es reduix en 1 el nombre de uns i arriba un poténcia l tal que $N^l = 0$ que és la matriu 0.*

Observació 19. *Les matrius N i D commuten ($D^nN^m = N^nD^m$). Ja que $D^nN^m = \lambda^n \operatorname{Id} N^m = \lambda^n N^m = N^m\lambda^n \operatorname{Id} = N^mD^n$. Aleshores, quan fem J^k dona:*

$$J^k = (D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N + \cdots + N^k = \lambda \operatorname{Id} + k\lambda^{k-1}N + \binom{k}{2}\lambda^{k-2}N^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}\lambda N^{k-1} + N^k$$

Proposició 20. *Sigui l el nombre tal que $N^l = 0$ (bàsicament l és la mida de la matriu). Aleshores*

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_m^k \end{pmatrix}$$

2. Exponencial d'una matriu.

Sigui A una matriu, aleshores definim l'exponencial d'una matriu com:

$$e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n = \operatorname{Id} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

(Faltarien fer comprovacions com que convergeix)

Formalment podem fer: $e^A = e^{SJS^{-1}} = Se^JS^{-1}$ i $e^J = e^{D+N} = e^De^N$. I, a partir d'aquí, queda clar que $e^D = e^\lambda \operatorname{Id}$ i que $e^N = \operatorname{Id} + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(l-1)!}N^{l-1} + 0$. Per tant, podem veure que:

$$e^J = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(l-1)!} & \frac{1}{(l-2)!} & \frac{1}{(l-3)!} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sistemes lineals d'e.d.o. amb coef. constants.

Tenim un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ &\cdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned}$$

És a dir, $x‘(t) = Ax(t)$, amb $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ i $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pel cas $n = 1$, $x'(t) = ax(t)$, fem $\frac{x'(t)}{x(t)} = a$, integrant, $\ln x(t) = at + b$, llavors $x(t) = e^{at}e^b = ce^{at}$. I per deduir la t ens calen unes condicions inicials.

En general, sense comprovació, és $x(t) = e^{At}x_0$, de la mateixa forma, x_0 són per les condicions inicials.

1.3 Formes quadràtiques

Motivació: Estudiar polinokmis homogenis (de més d'una variable) de grau 2.

Definició 21. Una forma bilinial ϕ simétrica sobre E és una aplicació $\phi : E \times E \to \mathbf{k}$ tal que:

1. $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$
2. $\phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v)$
3. $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

Exemple 5. Alguns exemples:

1. $k = \mathbb{R}$ un producte escalar (euclidià) és una forma bilineal simètrica a més és def. positiva.
2. $k = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ amb $\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = y_1x_2 + y_2x_1$ és bilineal i simètrica, però no definida postiva.

Definició 22. La forma quadràtica q_ϕ associada a ϕ és l'aplicació

$$\begin{aligned} q_\phi : E &\to \mathbf{k} \\ u &\to q_\phi(u) := \phi(u, u) \end{aligned}$$

Proposició 23. *Propietats:*

1. $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$
2. $\phi(u, v) = \frac{1}{2}[q(u + v) - q(u) - q(v)]$ *(amb char*$(k) \neq 2$*, p.e.* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$*)*
3. *Hi ha una bijecció* $\{\phi$ *formes bilineals simètriques* $\} \leftrightarrow \{q$ *formes quadràtiques* $\}$*. Si tinc una* ϕ *em determina una* q_ϕ *i si tinc una* q *aquesta determina una* ψ *tal que* $q = q_\psi$*.*

Demostració.

1. $q(\lambda u) = \phi(\lambda u, \lambda u) = \lambda^2 = \phi(u, u) = \lambda^2 q(u)$
2. $q(u + v) = \phi(u + v, u + v) = \phi(u, u) + \phi(u, v) + \phi(v, u) + \phi(v, v)$ I aïllem.
3. Col·lorari de l'apartat anterior.

□

Formes bilineals i quadràtiques en una base $\mathscr{B}$. $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base de E. $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ i $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. I sigui ϕ una forma bilineal. Llavors

$$\phi(u, v) = \phi(x_1e_1 + \cdots x_ne_n, y_1e_1 + \cdots + y_ne_n) = \sum x_iy_i\phi(e_i, e_j)$$

Definició 24. La matriu de ϕ en la base $\mathscr{B}$ és $A = (a_{ij})$ amb $a_{ij} = \phi(e_1, e_2)$.

Llavors, $\phi(u, v) = \sum a_{ij}x_iy_j$ i $q(u) = \phi(u, u) = \sum a_{ij}x_ix_j$ que és un polinomi homogeni de grau 2 en les coordenades de u en $\mathscr{B}$.

Observació 25. $\phi(u, v) = X^tAY =$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Canvi de base: Sigui $\mathscr{B}' = \{u_1, \cdots, u_n\}$ un nova base i tenim $u = x'_1u_1 + \cdots + x'_nu_n$ i ϕ una forma bilineal. Sigui S la matriu de canvi de base de $SX' = X$, llavors

$$X^tAY = (SX')^tA(SY') = X'^t(S^tAS)Y'$$

Proposició 26. $M_{\mathscr{B}'}(\phi) = B = S^tAS$

Observació 27. $B = S^t A S$, S *inveritble.*

1. *rang(A)=rang(B). Llavors podem definir rang* ϕ *= rang* A*.*
2. $\det A \neq \det B$ *perquè* $\det B = \det S^2 \det A$*.*

Una manera de veure-ho és $\hat{\phi} : E \to E^*$ que agafa u i l'envia a $\phi(u, -)$.

1.4 Tensors