Apunts de teoria de la probabilitat

ALEIX TORRES I CAMPS

ANNA DE MIER (ANNA.DE.MIER@UPC.EDU), GUILLEM PEREARNAU I SONIA PEREZ

1 Espais de probabilitat

1.1 Motivació

1.2 Experiments i probabilitat

Definició 1. Un experiment és un parell $(\Omega, \mathscr{A})$ on Ω és un conjunt i $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tal que:

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$
3. Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una col·lecció numerables d'elements de $\mathscr{A} \implies \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$

Exemple 1. Uns quants exemples...
Volem una funció que assigni probabilitats de successos, és a dir, $P : \mathscr{A} \to \mathbf{R}$. Llavors definim:

Definició 2. Un espai de probabilitat és una terna $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ on:

1. $(\Omega, \mathscr{A})$ és un experiment.
2. $P : \mathscr{A} \to R$ tal que: $P(\emptyset) = 0$, $P(A) \leq 0$, $\forall A \in \mathscr{A}$. Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una col·lecció de successos dos a dos dijunts $\implies P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$.
3. $P(\Omega) = 1$.

Per tant, la probabilitat és una mesura a $(\Omega, \mathscr{A})$ normalitzada a 1. A P se l'anomena funció de probabilitat.

Exemple 2. Espia discret, si Ω és numerable i $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Si $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ prenem $\sum_{i\geq 1} p_i = 1$ (amb $p_i \geq 0$) i definim $\mathscr{P}(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\})$, alleugerint la notació podem fer servir $P(\{w_i\}) = P(w_i) = p_i$.

Exemple 3. Espai clàssic, és un éspai discret amb $|\Omega| = N$ i $p_i = 1/N$. Çassos favorables entre cassos possibles": $P(A) = \frac{|A|}{N}$.

Exemple 4. Espais clàssics amb monedes o daus, tot ben repartit.

Exemple 5. Durada d'un mòbil? $\Omega = (0, \infty)$ o bé, $(0, L]$. Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ sabem que no podem assignar-hi una mesura. Però com ens interessen els intervals com (a, b), agafe, la σ-àlgebra que conté tots els intervals (oberts). Aquí apareixen els burelians $\mathcal{B} = \sigma(I)$ i podem agafar la mesura de Lebesque a $\mathbf{R}$. En resum, $\Omega = (0, L)$, $\mathrm{B} = \sigma(I)$ i $P(B) = \frac{\mu(B)}{L}$. On $\mu(B)$ és la seva mesura de Lebesgue. Tot i així, no és realistic perquè és massa uniforme.

Proposició 3. *Propietats d'espais de probabilitat. Sigui $(\Omega, \mathscr{A}, P)$:*

1. *Per $r \geq 2$, si $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{A}$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ llavors $P(\bigcup_{i=0}^{r} a_i) = \sum_{i=1}^{r} P(A_i)$*
2. *Su $A, B \in \mathscr{A}$ i $A \subset B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ i $P(A) \leq P(B)$.*
3. *$P(A^c) = 1 - P(A) \forall A \in \mathscr{A}$*
4. *(Desigualtat de Boole) Si $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{A} \implies P(\bigcap_{i=1}^{r} A_i) \leq P(A_i) + \cdots + P(A_r)$*

2 Variables aleatòries

3 V.a Discretes

4 V.a Contínues

5 Funcions característiques i famílies exponencials

6 Convergència de variables aleatòries