

# Problemes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

2019

## 1 Nocions bàsiques

En aquest apartat apareixen problemes relacionats amb les nocions bàsiques de connexió i distància. A més, de problemes vinculats amb les formes matricials d'un graf.

**Problema 1:** *El nombre de vèrtexs de grau senar en un graf  $G = (V, E)$  és parell.*

**Solució:**

Aquest problema és el clàssic *lema de les encaixades*, col·lorari de la següent fórmula (que va bé recordar).

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

En paraules diu que la suma dels graus del vèrtexs és igual a dos cops el nombre d'arestes. Aquest fet és evident perquè cada aresta és adjacent a exactament dos vèrtexs, quan sumem els graus la comptarem dues vegades. Ara, el problema ens motiva a distingir entre vèrtexs de grau senar i de grau parell. Sigui  $U_1$  els vèrtexs de grau senar i  $U_2$  els vèrtexs de grau parell ( $V = U_1 \cup U_2$ ). La fórmula es pot escriure com:

$$\sum_{u \in U_1} d(u) = 2|E| - \sum_{u \in U_2} d(u)$$

On a la dreta només apareixen termes parells, per tant el resultat és parell. I a l'esquerra hi ha una suma de  $|U_1|$  termes senars. Sabent que aquesta ha de ser parell, n'hi ha d'haver un nombre parell. És a dir,  $|U_1|$  és parell, que és el que volíem veure.

**Problema 2:** *Qualsevol graf amb  $n \geq 2$  vèrtexs, en té dos del mateix grau.*

**Solució:**

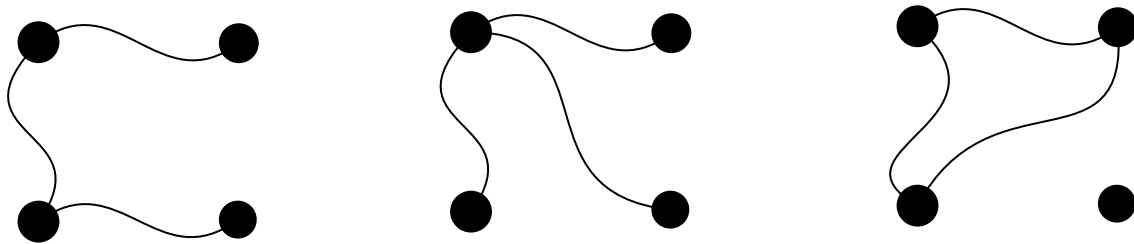
El conjunt de possibles graus d'un graf de  $n$  vèrtexs és subconjunt de  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  (de cardinal  $n$ ), ja que cada vèrtex pot no tenir cap aresta o tenir-ne alguna fins arribar al màxim que seria ser adjacent amb els altres  $n-1$  vèrtexs. Tot i així, en un graf no hi pot haver alhora un vèrtex de grau 0 (no és adjacent amb cap altre) i un vèrtex de grau  $n-1$  (és adjacent amb tots els altres). Per tant, hi ha, com a molt,  $n-1$  possibles graus diferents en un graf de  $n$  vèrtexs. Aleshores, pel *Principi del Colomar*, existeixen dos vèrtexs que tenen el mateix grau, que és el que volíem demostrar.

**Problema 3:** *Quants grafs hi ha de 4 vèrtexs i 3 arestes? Quants n'hi ha no isomorfs?*

**Solució:**

Anem a veure primer que el nombre de grafs amb  $n$  vèrtexs i  $m$  arestes és  $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ . Això es deu al fet que les arestes d'un graf  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  (és a dir,  $|V| = n$ ) és subconjunt de  $\binom{V}{2}$  i per cada subconjunt  $E$  d'arestes el graf és diferent i no n'hi ha més a part d'aquests. Si fixem que  $|E| = m$ , equival a dir que dels  $\binom{V}{2}$  se'n trien  $m$ . D'on surt que el nombre de grafs d'ordre  $n$  i mida  $m$  és  $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ . Pel cas  $n = 4$  i  $m = 3$ , n'hi ha  $\binom{\binom{4}{2}}{3} = \binom{6}{3} = 20$ .

En general, és difícil trobar tots els grafs no isomorfs de  $n$  vèrtexs i  $m$  arestes. Però per casos petits és pot fer, per  $n = 4$  i  $m = 3$  tenim:



Primer distingim entre que el graf sigui connex o no. Si no és connex l'única possibilitat és que tingui només dues components connexes. Una amb tres vèrtexs i tres arestes, i l'altre un vèrtex aïllat (això dona el tercer de la imatge). Després, pel cas connex, fem servir que necessàriament un vèrtex té almenys grau 2 (dalt esquerra amb dalt dreta i baix esquerra). Falta per determinar una aresta que ha de ser adjacent amb el vèrtex no connex i unir-lo amb un dels altres tres, dos d'ells donen el mateix graf isomorf per tant només compten per un. Així que si el graf és connex només hi ha dos casos, el camí (el primer) i l'estrella (el segon).

**Problema 4:** Siguin  $a_n$  el nombre de grafs d'ordre  $n$  i  $b_n$  el nombre de grafs no isomorfs d'ordre  $n$ . Proveu que  $\log_2 a_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$  i  $\log_2 b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n \log n)$ . En particular,  $\log b_n \sim \log a_n$ , ( $n \rightarrow \infty$ ).

#### Solució:

Sabem que hi ha  $2^{\binom{n}{2}}$  grafs d'ordre  $n$ . Perquè per a cada dos vèrtexs pot haver-hi o no aresta. Llavors,  $\log_2 a_n = \binom{n}{2} = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$ . Ara,  $b_n$  no el podem calcular explícitament però sí donar una fita, de fet ja tenim una fita superior que és  $a_n$ . Podem deduir una cota inferiorment de  $b_n$  de la següent manera. Dos grafs són isomorfs si hi ha una permutació dels vèrtexs que dona el mateix graf, però no totes les permutacions són vàlides. Per tant,  $b_n \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ , això assegura que  $\log b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(\log n!)$ . Com  $\mathcal{O}(\log n!) = \mathcal{O}(n \log n)$ , hem obtingut el que volíem. La segona part, es demostra directament de les fórmules que ja hem deduit.

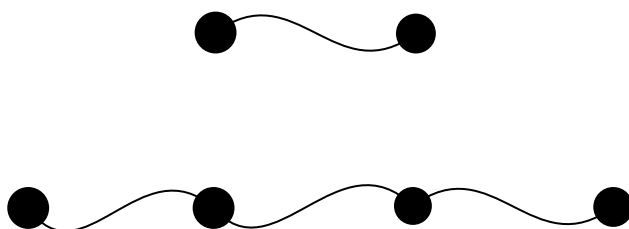
**Problema 5:** El graf complementari  $\bar{G}$  de  $G = (V, E)$  és  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ .

- Proveu que  $G \cong G'$  si i només si  $\bar{G} \cong \bar{G}'$ .
- Un graf  $G$  és autocomplementari si és isomorf a  $\bar{G}$ . Proveu que el seu ordre és  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Comproveu que per a  $k = 4, 5$  hi ha grafs autocomplementaris.
- Proveu que, si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , i  $G$  és un graf autocomplementari d'ordre  $n$ , aleshores té un nombre senar de vèrtexs de grau  $(n-1)/2$ .
- Proveu que un graf autocomplementari té diàmetre 0, 2 o 3.

#### Solució:

- Com el complementari del complementari de  $G$  és  $G$ , només cal demostrar una de les implicacions. Ara,  $G$  i  $G'$  són isomorfs si i només si existeix una permutació  $\sigma$  dels vèrtexs que manté les arestes. És a dir,  $\forall u, v \in V; \{u, v\} \in E$  si i només si  $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in E'$ . Aquesta mateixa permutació serveix per veure que  $\bar{G} \cong \bar{G}'$ . En efecte,  $\forall u, v \in V; \{u, v\} \in \bar{E}$  si i només si  $\{u, v\} \notin E$  si i només si  $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \notin E'$  si i només si  $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in \bar{E}'$ . Que és el que volíem demostrar
- Tot parell de grafs complementaris tenen el mateix nombre d'arestes, en particular, si un graf és autocomplementari tindrà un nombre exactament la meitat de totes les possibles arestes que pot tenir un graf d'ordre  $n$ . És a dir,  $|E| = \binom{V}{2}/2 = \frac{n(n-1)}{4}$ . Com ha de ser un nombre enter, necessàriament  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Pel cas  $n = 4$  el camí és autocomplementari i pel cas  $n = 5$  el cicle és autocomplementari.

- (c) Si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $n$  és senar. Ara, en un graf  $G$ , els vèrtexs de grau  $k$  tenen grau  $n-k-1$  a  $G'$  perquè a  $G'$  són adjacents només als vèrtexs que no ho era a  $G$ . Així doncs, si  $G$  és autocomplementari ha de tenir el mateix nombre de vèrtexs de grau  $k$  que de grau  $n-k-1$ , perquè sabem que hi ha una permutació. Això ens diu que podem agrupar els vèrtexs de grau  $k$  i de grau  $n-k-1$  per formar conjunts amb un nombre parell de vèrtexs. Excepte per  $k = \frac{n-1}{2}$  que són els vèrtexs que tenen el mateix grau en  $G$  com en  $G'$ , per tant no podem assegurar que siguin diferents. De fet, com hem agrupat els vèrtexs en conjunts amb un nombre parell d'elements excepte els de grau  $\frac{n-1}{2}$  i com hi ha un nombre senar de vèrtexs; necessàriament hi ha d'haver un nombre senar de vèrtexs de grau  $\frac{n-1}{2}$ . Que és el que volíem demostrar.
- (d) Anem a veure primer que per qualsevol graf  $G$  amb diàmetre més gran o igual que tres,  $\bar{G}$  té grau més petit o igual que 3. Considerem el subgraf camí de  $G$  que té per extrems dos vèrtexs a dist 3, sabem que no hi ha més arestes entre ells llavors a  $\bar{G}$  tots estan a distància com a màxim 3. Si considerem un vèrtex que no pertany al camí, com aquest no pot ser adjacent als dos extrems alhora, en el complementari estarà enllaçats amb almenys un d'ells i per tant en  $\bar{G}$  estarà a distància com a molt tres de tots els vèrtexs del camí. Per últim considerem la distància entre dos vèrtexs exteriors al camí. Si no són adjacents, en el complementari estaran a distància u.



En el cas que sí siguin adjacents, com abans, cada un dels vèrtexs exteriors al camí no poden ser adjacents als dos extrems del camí alhora. Llavors, en  $\bar{G}$  la distància màxima que tindran els dos vèrtexs exteriors és tres. Per tant, com tots els vèrtexs queden a distància menor o igual que tres, el diàmetre de  $\bar{G}$  és menor o igual que tres. Si apliquem aquest resultat a un graf autocomplementari, aquest ha de tenir diàmetre menor o igual que tres. En efecte, com el complementari és isomorf a ell mateix, i dos grafs isomorfs tenen el mateix diàmetre,  $G$  no pot tenir diàmetre quatre o més. Ara, tampoc pot tenir diàmetre 1, perquè seria un graf amb almenys dos vèrtexs, els graus dels quals són tots 1 o 0, llavors els vèrtexs del graf complementari tenen graus  $n$  i  $n-1$  ( $> 0$ ). Descartem que pogui tenir vèrtexs de grau 0. Tampoc pot tenir de grau u perquè resultaria que  $n-1 = 1$  és a dir  $n = 2$  i trivialment (o per l'apartat (b)) no hi ha grafs autocomplementaris de grau 2. Només queda la possibilitat que els grafs autocomplementaris tinguin diàmetre 0, 2 o 3. Que és el que volíem veure.

Un exemple de cada: de diàmetre 0 només hi ha el graf d'ordre 1, de diàmetre 2, tenim el cicle de 5, i de grau 3, tenim el camí de 4.

**Problema 6:** Considereu el graf d'ordre  $n > 2$  que té per vèrtexs  $V = \binom{[n]}{k}$ , per un  $k$  entre 1 (inclós) i  $n/2$  (no inclós), i té per arestes  $E = \{uv : u \cap v = \emptyset\}$ . Determineu l'ordre, la mida i el grau dels vèrtexs de  $G$ . Per a  $n = 5$ ,  $k = 2$  dibuixeu el graf que s'obté. Proveu que, per a  $k > n/3$ , el graf no té triangles.

### Solució:

Com l'ordre és el nombre de vèrtexs  $|V| = |\binom{[n]}{k}| = \binom{n}{k}$ . La mida és el nombre d'arestes que té  $G$ , i la podem deduir a partir del grau dels vèrtexs. Cada vèrtex és adjacent a aquells amb qui no comparteix cap element de  $[n]$ . Així que si  $|v| = k$ ,  $v$  serà adjacent a  $\binom{n-k}{k}$  vèrtexs, que és el nombre de subconjunts de  $k$  elements que es poden fer de  $[n]$  havent descartat  $k$  dels elements. Ara, fent servir que la suma dels graus és dos vegades la mida.  $|E| = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{k}$ .

Pel cas  $n = 5$  i  $k = 2$ , resulta el *Graf de Petersen*.

Per  $k > n/3$ , provem que no hi ha triangles per absurd. Si hi hagués tres vèrtexs adjacents entre ells  $v_1$ ,  $v_2$  i  $v_3$ , caldria que la intersecció dos a dos és buida. Així que  $|v_1 \cup v_2 \cup v_3| = 3k$  i per altra banda, junts no poden tenir més elements que dels que hi ha a  $[n]$ , així que per força  $3k \leq n$  que contradiu la hipòtesi de l'enunciat.

**Problema 7:** Una seqüència  $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  d'enters és gràfica si hi ha un graf  $G$  amb  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $d_i = d(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Proveu que la seqüència

$$1 \leq k = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$$

és gràfica si i només si, la seqüència

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \dots, d_n$$

és gràfica.

### Solució:

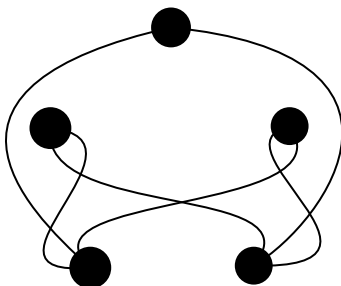
Si la primera seqüència és gràfica, existeix un graf  $G_1$  amb els graus pertinents. Volem veure que existeix un graf tal que el vèrtex de grau més petit és adjacent als següents  $k$  més petits. Fem el següent per tot  $i$  entre 2 i  $k+1$ . Si  $v_1$  és adjacent a  $v_i$  passem al següent. Altrament, com  $v_1$  no és adjacent a un del  $k+1$  primer, segur que és adjacent a un dels  $n-k+1$  últims, diem-li  $v_j$ , i com  $v_i$  té grau almenys 1, és adjacent a un altre vèrtex del graf (sigui quin sigui), anomenem-lo  $v_l$ . Llavors contruïm  $G_i$  a partir de  $G$ , treient les arestes  $v_1v_j$  i  $v_iv_l$  i posant les arestes  $v_1v_i$  i  $v_jv_l$ . Amb aquesta construcció  $G_i$  té la mateixa seqüència d'enters pels graus dels seus vèrtexs. Iterant d'aquesta manera ens assegurem que amb  $k$  iteracions existirà un graf  $G_k$  amb la seqüència donada tal que  $v_1$  és adjacent als següents  $k$  vèrtexs de grau més petit. Ara, sigui  $G'$  el graf que resulta de treure  $v_1$  i totes les arestes incidents a ell de  $G_k$ . Aleshores, per com està construït,  $G'$  compleix que té per seqüència  $d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \dots, d_n$  que és el que volíem veure.

Per l'altre implicació, si existeix un graf  $G$  construït amb la segona seqüència, sigui  $G'$  el graf resultant d'afegir un vèrtex  $v_1$  adjacent als  $k$  primers vèrtexs de  $G$ . Aleshores,  $G'$  té per seqüència de graus  $1 \leq k = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ , per tant és gràfica, que és el que volíem veure.

**Problema 8:** Determineu quina de les seqüències és gràfica: (a)  $(3,3,2,2,2)$ ; (b)  $(4,4,3,2,1)$ ; (c)  $(4,3,2,2,2)$ ; (d)  $(3,3,3,2,2)$ ; (e)  $(3,3,3,3,2)$ ; (f)  $(5,3,2,2,2)$ .

### Solució:

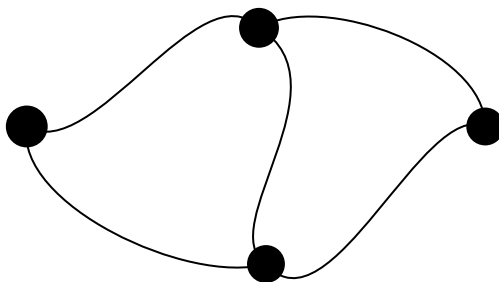
- (b) no és gràfica perquè si hi ha dos vèrtexs de grau 4 en un graf d'ordre 5 no hi pot haver un vèrtex de grau 1.
- (c) i (d) tenen un nombre senar de vèrtexs de grau senar, pel problema 1, no pot ser gràfica.
- (f) té un vèrtex de grau 5, si no considerem multigràfs, el grau màxim d'un graf d'ordre 5 és 4, per tant la seqüència no és gràfica.
- (a) és el de la imatge i (e) és com (a) amb una aresta entre els dos vèrtexs del mig:



**Problema 9:** Considerem el graf complet  $K_n$  amb conjunt de vèrtexs  $[n]$ . Calculeu el nombre de subgrafs de mida 5 que contenen exactament dos triangles.

### Solució:

L'única manera que hi hagi dos triangles en un graf de mida 5 és que els dos triangles comparteixin una aresta, és a dir, que el graf sigui com el de la imatge, amb la possibilitat que hi hagi altres vèrtexs aïllats.



Ens fixem que escollint de  $K_n$  quins seran els dos vèrtexs del mig  $\binom{n}{2}$  i quins seran els dos dels costats  $\binom{n-2}{2}$  (entre els de cada tipus són intercanviables) queda determinat el subgraf, perquè ja sabem quines arestes hi haurà. Ara, com poden haver-hi vèrtexs aïllats hem de considerar que cada un dels  $n - 4$  vèrtexs que queden pot ser-hi o no ser-hi i donaria un subgraf diferent. Tot plegat hi ha  $\binom{n}{2} \binom{n-2}{2} 2^{n-4}$  subgrafs de  $K_n$  de mida 5 que contenen exactament dos triangles.

**Problema 10:** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n \geq 1$  i mida  $m$  que no té triangles.

- (a) Demostreu que si  $u$  i  $v$  són vèrtexs de  $G$  adjacents, aleshores  $d(u) + d(v) \leq n$ .
- (b) Proveu que si  $n = 2k$ , aleshores  $m \leq k^2$ .
- (c) Proveu que  $m \leq n^2/4$ .

### Solució:

- (a) Si  $u$  i  $v$  són adjacents, com no hi pot haver triangles  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ . Per tant,  $d(u) + d(v) = |N(u)| + |N(v)| = |N(u) \cup N(v)| \leq n$ . Que és el que volíem veure
- (b) Aquest apartat es demostra amb el mateix argument que l'apartat (c), de fet n'és un col·lorari.
- (c) Ho provem per inducció sobre el nombre de vèrtexs. Si  $n = 1$  no hi ha arestes,  $m = 0$ , així que la proposició és certa. Si  $n = 2$ , només hi pot haver una aresta així que la proposició també és certa. Per  $n > 2$ , considerem el subgraf de  $G$ ,  $G'$ , resultat de treure dos vèrtexs adjacents i totes les arestes incidents a ells (si no n'hi ha  $m = 0$  i hem acabat). Ara, com les arestes de  $G$ , són les de  $G'$  més les que tenien  $u$  i  $v$ , i fent servir la hipòtesi d'inducció sobre  $G'$  i el primer apartat, deduïm que  $m = |E(G')| + d(u) + d(v) \leq (n - 2)^2/4 + n = n^2/2$ . Que és el que volíem demostrar.

**Problema 11:** L'excentricitat d'un vèrtex  $v$  en un graf connex  $G$  és la màxima distància de  $v$  a un altre vèrtex de  $G$ . El radi  $r(G)$  de  $G$  és la mínima excentricitat dels seus vèrtexs. Proveu que  $r(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2r(G)$ . Proveu que les desigualtats són justes.

### Solució:

Podem veure la definició de radi d'un graf com  $r(G) = \min_{v \in V} \max_{u \in V} d(u, v)$  i la de diàmetre com  $\text{diam}(G) = \max_{v \in V} \max_{u \in V} d(u, v)$ . Així que clarament  $r(G) \leq \text{diam}(G)$  i es pot donar la igualtat, per exemple, en els grafs cíclics. Per la segona desigualtat considerem els següents vèrtexs, siguin  $u$  i  $v$  dos vèrtexs tals que  $d(u, v) = \text{diam}(G)$  (sabem que han d'existir), i sigui  $w$  el vèrtex tal que  $r(G) = e(w)$ , és a dir, el

vèrtex central. Aleshores, per la desigualtat triangular i fent servir que  $\forall x \in V d(w, x) \leq e(G)$ , tenim que  $\text{diam}(G) \leq d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq 2r(G)$ . Que és el que volíem demostrar. Per exemple, en  $P_5$  es dona la igualtat.

**Problema 12:** Sigui  $G$  un graf connex. Proveu que, si  $l$  és la llargada màxima d'un camí, dos camins de llargada  $l$  s'intersequen en algun vèrtex.

**Solució:**

**Problema 13:** Doneu les matrius d'adjacència i d'incidència (amb una ordenació adequada dels vèrtexs i de les arestes) de cadascun dels següents grafs.

- (a) El graf complet  $K_4$ .
- (b) El camí  $P_5$ .
- (c) El cicle  $C_6$ .
- (d) El graf bipartit complet  $K_{3,3}$ .

**Solució:**

**Problema 14:** Sigui  $G$  un graf amb conjunt de vèrtexs  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i sigui  $A$  la seva matriu d'adjacència, amb els vèrtexs ordenats segons els subíndexos. Demostreu les afirmacions següents.

- (a) Si  $J$  és la matriu quadrada d'ordre  $n$  amb totes les entrades iguals a 1,  $(AJ)_{i,i} = d(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- (b) La traça de  $A^2$  és el doble de la mida de  $G$ .
- (c) La traça de  $A^3$  és  $6t$ , on  $t$  és el nombre de triangles que hi ha a  $G$ .

**Solució:**

**Problema 4:**

**Solució:**