Apunts d'estructures algrebraiques

ALEIX TORRES I CAMPS

JORDI GUARDIA (JORDI.GUARDIA-RUBIES@UPC.EDU), ANNA RIO I SANTI MOLINA
(MARTÍ OLLER)

Índex

1 Introducció

Definició 1. Una operació en un conjunt A és una aplicació $\varphi : A \times A \to A$

Possibles propietats de les operacions

1. (PC) Propietat commutativa (o abeliana) $\forall a, b \in A$ $\varphi(a,b) = \varphi(b,a)$.
2. (PA) Propietat associativa $\forall a, b, c \in A$ $\varphi(a, \varphi(b,c)) = \varphi(\varphi(a,b), c)$.
3. (EN) Element neutre $\exists e \in A$ tal que $\forall a \in A$ $\varphi(e,a) = \varphi(a,e) = a$.

   Clarament, l'element neutre és únic. En efecte, si n'existisin 2 elements neutres, e i e', aleshores $e = \varphi(e, e') = e'$, amb la qual cosa hem arribat a contradicció.

4. (PI) Invers d'un element $a \in A$ és $b \in A$ tal que $\varphi(a,b) = \varphi(b,a) = e$.

   Si existeix i és associatiu també és únic. En efecte, si $\exists b, c$ tals que $\varphi(a,b) = \varphi(b,a) = \varphi(a,c) = \varphi(c,a) = e$. En aquest cas, $b = \varphi(b, \varphi(a,c)) = \varphi(\varphi(b,a), c) = c$, per tant, $b = c$ i són el mateix element.

5. (PD) Si tenim dues operacions, que la primera (φ) sigui distributiva respecte la segona (μ) vol dir que $\varphi(a, \mu(b,c)) = \varphi(\mu(a,b), \mu(a,c))$ i que $\varphi(\mu(b,c), a) = \varphi(\mu(b,a), \mu(b,c))$.

1.1 Estructures algebraiques bàsiques

Definició 2. Un Grup $(G, *)$ cal que compleixi EN, PA, PI.

Definició 3. Un Semigrup $(G, *)$ cal que compleixi EN, PA.

Definició 4. Un Grup Abelià és un grup amb PC.

Definició 5. Una Anell $(A, +, *)$ cal que $(A, +)$ sigui un grup abelià, $(A, *)$ un semigrup i la PD respecte la primera.

Definició 6. Un Anell communtatiu (o abelià) és un anell on $(A, *)$ és commutatiu.

Definició 7. Un Cos és un Anell $(A, +, *)$ tal que $(A \setminus \{0\}, *)$ és un grup abelià. On 0 és l'element neutre de $(A, +)$.

Definició 8. Mòdul $(M, +)$ és un mòdul sobre l'Anell A tal que: $(M, +)$ és un grup abelià i $A \times M \to M$ (multiplicació per escalars) tal que: $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$, $(a+b)m = am + bm$, $a(bm) = (ab)m$ i $1_A m = m$ $(\forall a, b \in A, \forall m, m_1, m_2 \in M$.

Definició 9. Un espai vectorial és un mòdul sobre un Cos.

2 Anells

Sigui $(A, +, \cdot)$ un Anell (sempre ens referirem a Anells commutatius sense haver de dir-ho cada vegada).

Notació: 0_A és l'emenent neutre de la suma $(+)$, el "zero". I a l'element neutre del producte $(\cdot)$ és 1_A, l'ü". Denotarem $-a$ l'element invers d'a respecte $+$ (l'"oposat"). a^{-1} l'element invers d'a respecte del producte. $A^* = \{a \in A \text{ tal que } \exists a^{-1}\}$ s'obté un grup abelià.

Proposició 10. *Propietats:*

1. $\forall a, b, c \in A$ *si* $a + b = a + c$ *llavors* $b = c$.
2. $\forall a \in A$ *es compleix que* $0_A \cdot a = 0_A$.
3. $\forall a \in A$ *es compleix que* $(-1_A) \cdot (-a) = a$.
4. $\forall a \in A$ *es compleix que* $(-1_A) \cdot (a) = -a$.

Demostració.

1. $-a+(a+b) = -a+(a+c) \iff$ *(per PA)* $(-a+a)+b = (-a+a)+c \iff O_A+b = O_A+c \iff b = c$.
2. $0_A \cdot a + 0_A = 0_A \cdot a = ((0_A + 0_A) \cdot a) = [PD] = 0_A \cdot a + 0_A \cdot a \implies 0_A = 0_A \cdot a$.
3. $(-1_A)(-a) = (-1_A)(-a) + (-a) + (a) = [PD] = (1_A - 1_A)(-a) + a = 0_A + a = a$.
4. $-a = [3] = ((-1_A)(-1_A))(-a) = [PA] = (-1_A)((-1_A)(-a)) = [3] = (-1_A)(a)$.

□

Exemple 1. Alguns exemples d'anells.

1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
2. $Z[x] \subset Q[x] \subset R[x] \subset C[x]$
3. $M_n(A)$ on A és un Anell
4. $\mathbb{Z}[J] = \{a_0 + a_1 J + a_2 J^2 + a_3 J^3 + a_4 J^4 : a_i \in \mathbb{Z}\}$ $J = e^{2\pi i/5}$
5. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Taules d'operacions per $n = 6, 8$.

Proposició 11. *Sigui A un anell tal que neutre de la suma és el neutre del producte* ($0_A = 1_A$) *aleshores l'Anell té un sol element* ($A = \{0_A\}$).

Demostració. Suposem que tenim un element $a \in A$ diferent del neutre. Aleshores, $0_A = 0_A \cdot a = 1_A \cdot a = a$. I, per tant, aquest element també és 0_A. □

Definició 12. Sigui A un anell, $n \in \mathbb{Z}$ i $a \in A$. Llavors, si $n > 0$, $n \cdot a := a + \cdots + a$, si $n < 0$, $n \cdot a := (-a) + \cdots + (-a)$, si $n = 0_{\mathbb{Z}}$, $0_{\mathbb{Z}} \cdot a = 0_A$. De la mateixa manera, si $n > 0$, $a^n := a \cdot \ldots \cdot a$, si $n < 0$, $a^n := a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}$ i si $n = 0_{\mathbf{Z}}$, $a^n = 1_A$.

Definició 13. Direm que l'anell A té característica n, si n és el menor nombre enter positiu més petit tal que $n \cdot 1_A = 0_A$. En cas que no existeixi ($n \cdot 1_A \neq 0_A$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$), direm que té característica 0.

Observació 14. *Està clar que* $char(A) \cdot a = O_A$ $\forall a \in A$.

Definició 15. Un subanell d'un anell A és un subconjunt S tal que:

1. $1_A \in S$
2. $a, b \in S \implies a - b \in S$
3. $a, b \in S \implies a \cdot b \in S$

Proposició 16. *$S \subset A$, llavors S és un subanell $\iff$ S és un anell.*

Demostració. $\implies$ Cal veure que $(S, +)$ és un grup (Abelià), $(S, \cdot)$ és un semigrup i que és compleix la PD. De les operacions de A s'hereden automaticament les propietats PA, PC, PD. Ara de la primera característica dels subanells tenim $1_A \in S$. I de la 2a, fent $b = a$, tenim $0_A \in S$ i ara, fent $a = 0_A$, $b = a$, tenim l'invers per la suma. Per tant, S és un anell.

$\impliedby$ Si S és un anell, té el neutre de la multiplicació, té invers de la suma, està tancat per la suma i està tanvat per la multiplicació. Cosa que demostra les característiques 1, 2 i 3, respectivament. $\square$

Exemple 2. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ són anells.

Exemple 3. $2\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{Z} : a \cong 0(\text{mod}2)\} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ No és un subanell.

Proposició 17. *Sigui $J = e^{2\pi i/n}$. $\mathbb{Z}[J] = \{a_0 + a_1 J + \ldots + a_{n-1} J^{n-1} : a_i \in \mathbb{Z}\}$* Demostreu que és una anell comprovant que és un subanell de $\mathbb{C}$.

Definició 18. Donats A, B anells. el seu anell producte és el conjunt $A \times B$ amb les operacions:

$$\begin{aligned} + : (A \times B) \times (A \times B) &\to A \times B \\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) &\to (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ \cdot : (A \times B) \times (A \times B) &\to A \times B \\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) &\to (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2) \end{aligned}$$

Definició 19. Sigui A un anell. Un subconjunt $I \subset A$ és un ideal si $\forall u, v \in I,\ \forall \alpha, \beta \in A$.
1. $u \in I$, $\alpha \in A \implies \alpha \cdot u \in I$
2. $u, v \in I \implies u + v \in I$

I, per tant, només cal comprovar que $\alpha u + \beta v \in I$.

Exemple 4. Alguns ideals:

1. $\{0_A\}$ L'ideal zero. A l'ideal total.
2. $m\mathbf{Z} \subset Z$ és un ideal.
3. Anell principals o l'anell generat per $a \in A$ és $(a) := \{am : m \in A\}$. Similarment l'ideal finitament generat per $a_1, \ldots, a_n \in A$ és $(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \{a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n : m_i \in A\}$.
4. Per $\alpha \in \mathbb{Q}$, definim $I = \{f(x) \in Q$, llavors $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(x) = 0\}$ és un ideal de $\mathbb{Q}[x]$ i coincideix amb el generat per $(x - \alpha) = I$
5. $I = \{f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y] : f(0, 0) = 0\}$ ideal de $\mathbb{Q}[x, y]$. Coincideix amb $(x, y) = I$.

Proposició 20. *$I, J \subset A$ ideals*

1. *$I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ és un ideal i és el menor que conté I i J.*
2. *$I \cdot J = \{\sum_{j<\infty} a_j b_j : a_j \in I, b_j \in J\}$ és un ideal*

Demostració.

1. Primer comprovem que és un ideal. Siguin $a_1, a_2 \in I$, $b_1, b_2 \in J$ i $u = a_1 + b_1, v = a_2 + b_2 \in I + J$, $\alpha, \beta \in A$, llavors $\alpha u + \beta v = \alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2) = (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)$ que pertany a $I + J$, ja que $(\alpha a_1 + \beta a_2) \in I$ i $(\alpha b_1 + \beta b_2) \in J$.

   I és el menor que conté els I i a J, perquè si un ideal K els conté, com que $\forall a \in I \subset K,\ \forall b \in J \subset K$ aleshores, com que K ha de ser tancat per la suma, segur que $a + b \in K$.

2. Siguin $a_j, a_i \in I$, $b_j, b_i \in J$ i $u = \sum_j a_j \cdot b_j, v = \sum_i a_i \cdot b_i \in I \cdot J$, $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, llavors, $\alpha_1 u + \alpha_2 v = \alpha_1 \sum_j a_j \cdot b_j + \alpha_2 \sum_i a_i \cdot b_i = [\text{PD i PA}] = \sum_j (\alpha_1 a_j) \cdot b_j + \sum_i (\alpha_2 a_i) \cdot b_i = \sum_{k=i,j} (\alpha a_k) b_k \in I \cdot J$, perquè $\alpha_1 a_j, \alpha_2 a_i \in I$.

□

Proposició 21. *En un anell, $a \in A$, $u \in A^*$, aleshores $(a) = (ua)$, és a dir, l'ideal generat per a i per ua son el mateix.*

Demostració.

$\subseteq$ Sigui $b \in (a)$, aleshores $b \in (ua)$ perquè b ha de ser de la forma $b = ax$ llavors, podem escrire b de la forma $b = au(u^{-1}x)$, el qual, clarament és un element de (ua).

$\supseteq$ Sigui $b \in (ua)$ aleshores b és de la forma $b = uax$ llavors també és de la forma $b = uau^-1ux = a(ux)$, per la qual cosa b és un element de (a). □

Proposició 22. *A és un cos $\iff$ els seus únics ideals són 0 i A.*

Demostració. $\implies$ Sigui $I \subset A$ un ideal no nul. Sigui $x \in I$, $x \neq 0$, A cos $\implies \exists x^{-1}$, i com $x \in I \implies 1 = xx^{-1} \in I \implies \forall a \in A\ a = a \cdot 1 \in I \implies I = A$.

$\impliedby$ Sigui $x \in A$, $x \neq 0$ si $0 \neq (x) \implies (x) = A \implies 1 \in (x) \implies \exists y \in A$ tal que $1 = xy$ per tant, $y = x^{-1}$.
□

Teorema 23. *Tots els ideals de l'anell de $\mathbb{Z}$ son principals.*

Demostració. Sigui $I \subset \mathbb{Z}$ un ideal. Si $I = (0)$ és principal clarament. Suposem que $\exists x \in I$ amb $x \neq 0$ llavors $x \in I \iff -x \in I$. Per tant, $I^+ = \{x \in I : x > 0\} = I \bigcap \mathbb{N} \neq 0$. Pel principi de bona ordenació de $\mathbb{N}$, $\exists m = \min I^+$.

Aleshores, suposem que hi ha un element y que no és de la forma mk. Li fem la divisio euclidiana i escrivim $y = mk + r$ per algun r (el qual pertany a I perquè I és tancat per la suma) entre m i 0 no inclosos. Aleshores, hem arribat a contradicció, perquè abans haviem dit que m era el mínim i ara hem vist que n'existeix un element positiu més petit. □

Proposició 24. *Sigui k un cos. Tots els ideals de $k[x]$ són principals.*

Demostració. Semblant amb la demostració anterior, només cal canviar el mínim pel polinomi del mínim grau. La contradicció és la mateixa. □

Definició 25. Un anell principal és un anell que tots els seus ideals son principals.

Definició 26. Siguin A, B dos anells. Una apliacació $f : A \to B$ és un morfisme d'anells si preserva les operacions en A i B.

1. $f(1_A) = 1_B$
2. $\forall x, y \in A\ f(x + y) = f(x) + f(y)$
3. $\forall x, y \in A\ f(xy) = f(x)f(y)$

Anomenarem Monomorfisme al morfisme injectiu, Epimorfisme al morfisme exhaustiu i isomorfisme al morfisme bijectiu.

Observació 27. *Sigui A un anell qualsevol. $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ amb $\varphi(m) = m \cdot 1_A$. Aquest morfisme és injectiu si char(A) =0, i es compleix que $\varphi^{-1}(0)$ =char(A).*

Proposició 28. *Propietats bàsiques dels anells . Siguin A i B dos anells i f un morfisme d'anell.*

1. $f(a^n) = f(a)^n$
2. $a \in A^* \implies f(a) \in B^*$, $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$
3. *Sigui $J \subset B$ un ideal, llavors $f^{-1}(J) \subset A$ és un ideal*
4. *En general, la imatge d'un ideal d'A no és un ideal de B.*
5. *Si f és exhaustiva, llavors $I \subset A$ ideal $\implies f(I) \subset B$ també és un ideal.*
6. $\ker f := \{a \in A : f(a) = 0\} = f^{-1}((0))$ *és un ideal d'A.*
7. *$Imf := \{f(a) : a \in A\} \subset B$ subanell de B.*
8. *f injectiva* $\iff \ker f = 0$.
9. *A cos $\implies f = 0$ o f injectiu.*

Demostració.

1. Per inducció, es poden treure potencies una per una.
2. Per la propietat del producte dels morfirmes i envia l'element neutre a l'element neutre $1_B = f(1_A) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^-1)$.
3. Siguin $a_1, a_2 \in f^{-1}(J)$ i $\lambda, \mu \in A$, llavors $\lambda a_1 + \mu a_2 \in f^{-1}(J)$? Sí, perquè $f(\lambda a_1 + \mu a_2) = f(\lambda)f(a_1) + f(\mu)f(a_2) \in J$ perquè és combinació d'elements de J. Per tant, és un ideal.
4. Contraexemple, Si $A = \mathbb{Z}$ i $B = \mathbb{Q}$ i f és la inclusió. Un ideal de A és per exemple (2) però $f((2))$ no és un ideal perquè $2\frac{1}{3} \notin f((2))$.
5. Siguin $f(a), f(b) \in f(I)$ i $\lambda, \mu \in B$, llavors $\lambda f(a) + \mu f(b) \in f(I)$, sí, perquè al ser exhaustiva, $\exists x_\lambda, x_\mu$ tal que $f(x_\lambda) = \lambda$ i $f(x_\mu) = \mu$. Per tant, $\lambda f(a) + \mu f(b) = f(x_\lambda)f(a) + f(x_\mu)f(b) = f(x_\lambda a + x_\mu b) \in f(I)$.
6. L'element neutre hi és perquè $f(1_A) = 1_B$, la resta i el producte de dos elements hi són perquè f està tancat per la suma (i resta) i pel producte.
7. Que f sigui injectiva fa que només el 0 pugui anar al 0. Ja que, en qualsevol cas $f(0+0) = f(0)+f(0) \implies f(0) = 0$. I que $\ker f = 0$ implica que si dos elements tiguéssin la mateixa imatge $f(a) = f(b) \implies f(a) - f(b) = 0 \implies f(a-b) = 0$ i com que només el 0 va al 0, $a = b$.
8. Suposem que A és un cos i que dos elements diferents tenen la mateixa imatge $f(a) = f(b) \implies f(a-b) = 0$. Aleshores, $f(x) = f(x)f(1) = f(x(a-b)^{-1}(a-b)) = f(x(a-b)^{-1})f(a-b) = 0$. Llavors, f és la funció que va tot a 0. (I sembla que $0_B = 1_B$). Altrament f és injectiva.

□

Definició 29. Anell quocient. Sigui A un anell i $I \subset A$ un ideal. Definim la relació d'equivalència $\sim$ com (per $a, b \in A$) $a \sim b \iff a - b \in I$. El corresponent conjunt quocient l'anotarme com A/I.

En el conjunt quocient A/I definim dues operacions:

1. $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$
2. $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$

Hem de veure que estan ben definides:

Suposem que $a' \in \bar{a}, b' \in \bar{b}$, llavors $\overline{a' + b'} = \overline{a + b}$ i $\overline{a'b'} = \overline{ab}$. Aleshores, les seves respectives diferencies pertanyen a l'ideal. Llavors $(a+b) - (a'+b') = (a-a') + (b-b') \in I$ perquè cada una de les diferencies pertany a l'ideal. I $ab - a'b' = b'(a-a') - a(b-b') \in I$, perquè l'ideal és tancat per la multiplicació.

Exercici: Coproveu que aquestes dues operacions tenen totes les propietats necessàries per a què A/I sigui un anell. En direm anell quocient d'A per I.

Exemple 5.

1. $A = \mathbb{Z}$ i $I = (m)$ i $A/I = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
2. $A = K[x]$, $\alpha \in K$ i $I = (x - \alpha)$.

$$\begin{aligned} A/I = K[x]/(x-\alpha) &\to K \\ \bar{p(x)} &\to p(\alpha) \end{aligned}$$

   Està ben definit, si $q(x) \in \bar{p(x)}$, llavors $q(x) - p(x) \in (x - \alpha) \implies q(x) - p(x) = (x - \alpha)h(x) \implies q(\alpha) - p(\alpha) = 0$.

3. $A = \mathbb{R}[x]$ i $I = (x^2 + 1)$ llavors el seu quocient és isomorf a C. Enviant $\bar{p(x)}$ a $p(i)$.

Proposició 30. *L'aplicació natural*

$$\begin{aligned} \pi : A &\to A/I \\ a &\to \bar{a} \end{aligned}$$

és un morfisme d'anells.

Demostració. La definició de les operacions A/I ho garanteix. ☐

Proposició 31. *(a) Sigui $J \subset A$ ideal tal que $J \supset I$, llavors $J/I := \pi(J) \subset A/I$ és un ideal. (b) Sigui $U \subset A/I$ ideal, existeix un únic ideal $J \subset A$ tal que $J \supset I$ i $J/I = U$.*

Demostració. (a) L'aplicació π és exhaustiva perquè $\ker \pi = \{a \in A, \bar{a} = \bar{0}\} = \{a \in A : a \in I\} = I$, llavors per una propietat anterior la imatge d'un ideal és un ideal.

(b) Sigui $J = \pi^{-1}(U) \subset A$ un ideal (perquè l'antiimatge d'un ideal és un ideal), notem que $\pi(J) = \pi(\pi^{-1}(U)) = [exh] = U$. Aleshores, com que U és ideal, $\bar{0} \in U \implies I = \pi^{-1}(0) \subset \pi^{-1}(U) = J$

Suposem que J' també satisfà $\pi(J') = U$ i $J' \supset I$. $\pi(J') = U \implies J' = \pi^{-1}(\pi(J')) \supset \pi^{-1}(U) = J$ i $a \in J' \implies \pi(a) \in U \implies a \in \pi^{-1}(U) = J$. Llavors $J = J'$. ☐

Proposició 32. *Propietat universal del quocient. Sigui $f : A \to B$ un morfisme d'anells $I \subset A$ ideal tal que $I \subset \ker f$. Existeix un únic morfisme $\varphi : A/I \to B$ tal que $\varphi \circ \pi = f$*

Demostració. Comencem definint $\varphi(\bar{a}) := f(a)$. Anem a veure que està ben definida i compleix que $\varphi \circ \pi = f$. Que compleix la segona condició està clar perquè $\varphi \circ \pi(a) = \varphi(\bar{a}) = f(a)$. Aleshores, està ben definida perquè si tenim que $\bar{a} = \bar{b}$, vol dir que $a - b \in I$, llavors, per condició de l'enunciat $f(a - b) = 0$ i, per tant, $f(a) = f(b)$, que és el que ens cal perquè $\varphi(\bar{a}) = \varphi(\bar{b})$.

Suposem que existeix una $\varphi' \neq \varphi$ que comleix la mateixa propietat. Aleshores, sigui $x \in A$ un element el qual es compleixi que $\varphi(\bar{x}) \neq \varphi'(\bar{x})$, al ser π exhaustiva, sempre existeix. Però sabem que $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\pi(x)) = f(x) = \varphi'(\pi(x))$ llavors són la mateixa funció. Per tant, hem acabat, només n'hi ha una. ☐

Teorema 33. *(Teorema d'isomorfisme d'anells) Sigui $f : A \to B$ un morfisme d'anells. Hi ha un morfisme canònic $\bar{f} : A/\ker f \to Imf$.*

Demostració. Definim $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$, aplicant la proposició anterior al morfisme $\tilde{f} : A \to \mathrm{Im}(f) \subseteq B$ (vam veure que la imatge era un subanell) com a ideal triem $I = \ker f$ (ho vam comprovar en proposicions anteriors). Llavors tenim: $\bar{f} := \varphi$. φ és exhaustiu perquè $\tilde{f}$ ho és i és injectiu perquè $\ker \varphi = \{\bar{a} : \varphi(\bar{a}) = 0\} = \{\bar{a} : \tilde{f}(\bar{a}) = 0\} = \{\bar{a} : f(a) = 0\} = \bar{0}$, perquè els elements a tals que $f(a) = 0$ pertanyen al nucli i, per tant, en aquest cas, en el $\bar{0}$. ☐

Definició 34. Un divisor de zero en un anell A és un element $a \in A$, $a \neq 0$ tal que $ab = 0$ per algun $b \in A$, $b \neq 0$.

Definició 35. Un anell íntegre és un anell sense divisors de zero.

Definició 36. Un ideal $\mathfrak{p} \subset A$ d'un anell qualsevol s'anomena primer si $ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.

Definició 37. L'espectre de A $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A; \mathfrak{p} \text{ primer}\}$

Proposició 38. *Sigui $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal. Llavors $\mathfrak{p}$ primer $\iff$ $A/\mathfrak{p}$ és un anell íntegre.*

Demostració. $\implies$ Siguin $\bar{a}, \bar{b} \in A/\mathfrak{p}$ tal que $\bar{a}, \bar{b} \neq 0$. Suposem que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0} \implies \bar{ab} = \bar{0} \implies ab \in \bar{0} = \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Però això voldria dir que o a o b pertanyen a la classe del 0, contradicció amb el que hem suposat.

$\impliedby$ Suposem que $ab \in \mathfrak{p}$ si $ab \in \mathfrak{p} \implies \bar{a}\bar{b} = \bar{ab} = 0 \implies$ per ser $A/\mathfrak{p}$ íntegre, o a o b són de la classe del 0, per tant, o un o l'altre pertanyen a $\mathfrak{p}$. □

Definició 39. Un ideal $m \subset A$ s'anomena maximal si no està contingut en cap altre ideal propi d'A.

Proposició 40. *$m \subset A$ és un ideal. Llavors, m maximal $\iff$ A/m és un cos.*

Demostració. $\impliedby$ Suposem $m \subsetneq J$ ideal, per tant, $\exists x \in J \smallsetminus m$ per tant, $x \notin m \implies \bar{x} \neq 0 \implies \exists \bar{y} \neq 0$ tal que $\bar{x}\bar{y} = 1 \implies u = 1 - xy \in J$, llavors $1 = u + xy$, com és suma de dos elements de J, $1 \in J \implies A = J$.

$\implies$ Els ideals de A/m són de la forma J/m amb $m \subset J$ ideal d'A. Com que m és maximal, o $J = m$ o bé, $J = A$, en el primer cas $J/m = (J)$ i, en el segon, $J/m = A/m$. Per tant, els únics ideals de A/m són el zero i el total $\implies A/m$ és un cos (propietat dels cossos que vam veure). □

Corol·lari 41. *m maximal $\implies$ m primer.*

2.1 Anell de fraccions

Sigui A un anell íntegre, $F = A \times (A \smallsetminus \{0\}) = \{(a, s) : a, s \in A, s \neq 0\}$. Definim en F una relació $\sim$ amb $(a, b) \sim (b, t) \iff at - bs = 0$ i és una relació d'equivaléncia (**exercici**).

Definició 42. Sigui $Fr(A)$ = conjunt de classes d'equivaléncia segons aquesta relació i l'anomenarem *fraccions d'A.* $\frac{a}{s} := \overline{(a, s)}$. En $Fr(A)$ definim dues operacions:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Cal demostrar que estan ben definides.

Aquestes operacions compleixen totes les propietats necessàries per tal que $Fr(A)$ sigui un anell. On el $0_{Fr(A)} = \frac{0}{1}$ i $1_{Fr(A)} = \frac{1}{1}$.

En aquest anell, tot element no nul té invers. Si $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$, llavors $a1 = 0s = 0 \implies a = 0$. Llavors si $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1} \implies a \neq 0$, el seu element invers és $\frac{s}{a}$ ja que $\frac{a}{s}\frac{s}{a} = \frac{1}{1}$, per tant $Fr(A)$ és un cos.

Tenim un morfisme natural

$$\begin{aligned} i : A &\longrightarrow Fr(A) \\ a &\mapsto i(a) = \frac{a}{1} \end{aligned}$$

Aquesta aplicació és un morfisme d'anells i és infectiva. **Cal demostració**.

Exemple 6. $Q := Fr(\mathbb{Z})$ o $Q(x) := Fr(\mathbb{Z}[x])$ o també $Q(x) = Fr(\mathbb{Z}[x])$

Proposició 43. *(propietat universal del cos de fraccions) Sigui A un anell íntegre. (a) Si $f : A \to B$ és un morfisme d'anells tal que $f(A \smallsetminus \{0\}) \subset B^*$ llavors existeix un únic morfisme $\varphi : Fr(A) \to R$ tal que $\varphi \circ i = f$.*
(b) Si $i : A \to F$ és una injecció d'A en un altre cos F' que satisfà (a) llavors $F' \simeq Fr(A)$.

Demostració. (a) Anem a deduir què ha de ser φ: $\varphi(\frac{a}{b}) = \varphi(\frac{a}{1}\frac{1}{s}) = \varphi(\frac{a}{1})\varphi(\frac{1}{s}) = \varphi(i(a))\varphi(i(s)^{-1}) = f(a)f(s)^{-1}$. Llavors definim $\varphi(\frac{a}{s}) := f(a)f(s)^{-1}$. Cal veure que φ està ben definida, que φ és un morfisme i unicitat. **DEMOSTRACIÓ**.

(b) Combinant les dues propietats provinents d'(a) tenim que existeixen unes úniques funcions $\varphi : Fr(A) \to F$ i $\psi : F \to Fr(A)$ tal que $\varphi \circ i = i'$ i al revés, $\psi \circ i' = i$. Llavors, fixem-nos que $\psi \circ \varphi \circ i = i$ (substituint). Però fixem-nos també que la propietat universal també la podem aplicar amb el mateix conjunt $Fr(A)$ i la inclusió, aleshores, la funció $\psi \circ \varphi$ és l'única que compleix la propietat universal, però triviament la identitat també, així que son la mateix funció. Similarment escollint F dues vegades, tenim que $\varphi \circ \psi = i'$. Amb això i sabent que composició de morfismes és morfisme tenim que $Fr(A) \simeq F$. □

3 Cossos

4 Grups

5 Moduls