Definicions i teoremes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

1 Nocions bàsiques

Definició 1. Un graf és un parell $G = (V, E)$ on V és un conjunt i $E \subset \binom{V}{2}$ és un conjunt de parells d'elements de V. Als elements de V se'ls anomena vèrtexs i als de E arestes.

Direm que $v_i, v_j \in V$ són adjacents si $\{v_i, v_j\} \in E$, i tant v_i com v_j són incidents a l'aresta $\{v_i, v_j\}$.

Definició 2. Un graf $H = (V(H), E(H))$ és subgraf de $G = (V(G), E(G))$ si $V(H) \subset V(G)$ i $E(H) \subset E(G)$.

Si $V(H) = V(G)$ es diu que H és un subgraf generador de G.
Si $U \subset V(G)$, el subgraf de G generat per U és $G[U] = (U, E(G) \bigcap \binom{U}{2})$.

Exemple 3. Alguns exemples de grafs són:

(a) Graf complet $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$.

(b) Graf complet bipartit $K_{n,m} = (A \bigcup B, A \times B)$ on A, B són disjunts, $|A| = n$ i $|B| = m$.

(c) Camí $P_n = ([n], \{\{i, i+1\}, i = 1, \ldots, n-1\})$.

(d) Cicle $C_n = ([n], \{\{i, i+1 \pmod n\}, i = 1, \ldots, n\})$.

Proposició 4. *Hi ha $2^{\binom{n}{2}}$ grafs d'ordre n i $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ grafs amb n vèrtexs i m arestes.*

Definició 5. Dos grafs $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ són isomorfs si hi ha una bijecció

$$f : V_1 \to V_2$$

tal que $\{u, v\} \in E_1$ si i només si $\{f(u), f(v)\} \in E_2$, i en aquest cas escrivim $G_1 \cong G_2$.

Definició 6. El grau d'un vèrtex $v \in V$ a un graf $G = (V, E)$ és

$$d(v) = \{w \in V : \{v, w\} \in E\}$$

Definició 7. El grau màxim i mínim de G es denoten per $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$ i $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$.

Lema 8. *En un graf $G = (V, E)$,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Corol·lari 9 (Lema de les encaixades)**.** *El nombre de vèrtexs de grau imparell en un graf $G = (V, E)$ és parell.*

Nota 10. La connexió és una de les nocions bàsiques.

Definició 11. Un recorregut a un graf G del vèrtex u al vèrtex v és una seqüència de vèrtexs $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ tal que $u_1 = u$, $u_k = v$ i $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(G)$ per a $1 \leq i < k$. La llargada del recorregut és $k - 1$. Si $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$ diem que el recorregut és un camí.

Dos vèrtexs $u, v \in V(G)$ de G estan connectats si hi ha un recorregut a G de u a v.

Observació 12. *La relació $\sim$, on els vèrtexs $u \sim v$ si i només si estan connectats en el seu graf, és un relació d'equivalència.*

Definició 13. Les classes d'equivalència de la relació anterior són les components connexes del graf.

Definició 14. Un graf és connex si i només si té una sola component connexa.

Proposició 15. *El graf $G = (V, E)$ és connex si i només si, per a cada subconjunt propi $U \subsetneq V$, $U \neq \emptyset$, hi ha una aresta incident amb un vèrtex de U i un vèrtex de $V \setminus U$.*

Nota 16. La segona noció bàsica és la distància.

Definició 17. Siguin $v, v' \in V(G)$. La distància entre v i v' és

$$d(v, v') = \min\{|E(P)| : P \subset G;\ P \text{ un camí};\ v, v' \in V(P)\}$$

entenent que $d(v, v') = \infty$ si v i v' estan a components connexes diferents de G.

Proposició 18. *La funció*

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,\ y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

(per a $x, y, z \in V(G)$) és simètrica ($d(x, y) = d(y, x)$), definida positiva ($d(x, y) \geq 0$ i val la igualtat només si $x = y$) i satisfà la desigualtat triagular ($d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$). És a dir, d és una distància.

Definició 19. El diàmetre, $D(G)$, d'un graf G connex G és la màxima distància entre dos vèrtexs de G.

Proposició 20. *Sigui G un graf amb n vèrtexs, de diàmetre $D = D(G)$ i de grau màxim $\Delta = \Delta(G) \geq 3$. Aleshores,*

$$n \leq 1 + \Delta \left(\frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2} \right)$$

La cota s'assoleix per als grafs complets K_n i pel graf de Petersen.

Definició 21. Un graf amb $n \geq 2$ vèrtexs és bipartit si és un subgraf de $K_{n,m}$ per a alguns $n, m > 0$. Equivalentment, un graf $G = (V, E)$ és bipartit si hi ha una partició $V = V_1 \bigcup V_2$ tal que totes les arestes són incidents amb un vèrtex de V_1 i un de V_2.

Les següents són dues representacions matricials últils de grafs.

Definició 22. La matriu d'adjacència d'un graf $G = (V, E)$ amb $n = |V(G)|$ vèrtexs és una matriu $A = A(G)$ quadrada d'ordre n amb entrades a $\{0, 1\}$ on $A(i, j) = 1$ si i només si $\{v_i, v_j\} \in E(G)$.

Definició 23. Per a una ordenació $e_1, \ldots, e_m$ de les arestes d'un graf G, la matriu d'incidència de G és una matriu $N = N(G)$ d'ordre $n \times m$ amb entrades a $\{0, 1\}$ on $N(i, j) = 1$ si i només si el vèrtex v_i és incident amb l'aresta e_j.

Proposició 24. *Sigui $A = A(G)$ la matriu d'adjacència d'un graf $G = (V, E)$ d'ordre n. Per a $k \geq 1$, $A^k(i, j)$ és el nombre de recorreguts entre v_i i v_j de llargada k. En particular, el diàmetre de G és el mínim k tal que $(A + I_n)^k(i, j) > 0$ per a cada $1 \geq i, j \geq n$.*

2 Arbres

Definició 25. Un graf acíclic (sense cicles) és un bosc. Un arbre és un graf connex i acíclic.

Proposició 26. *Les següents afirmacions són totes equivalents.*

(1) $T = (V, E)$ *és un arbre.*

(2) Per cada parell de vèrtexs hi ha un únic camí que els uneix.

(3) T *és un graf minimalment connex:* T *és connex i per a cada* $e \in E$, $(V, E \setminus \{e\})$ *no és connex.*

(4) T *és un graf maximalment acíclic:* T *és acíclic i per cada* $e \in \binom{V}{2} \setminus E$, $(V, E \bigcup \{e\})$ *no és acíclic.*

(5) T *és un graf connex amb* n *vèrtexs i* $n-1$ *arestes.*

(6) T *és un graf acíclic amb* n *vértexs i* $n-1$ *arestes.*

Definició 27. Una fulla és un vèrtex de grau 1.

Proposició 28. *Un arbre amb* $n \geq 2$ *vèrtexs tñe almenys dues fulles.*

Definició 29 (Seqüència de Prüfer)**.** Sigui T un arbre amb conjunt de vèrtexs $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Sigui $T = T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_{n-2}$ la seqüència de subarbres de T on T_i s'obté de T_{i-1} eliminant la fulla amb menor subíndex. La seqüència de Prüfer de T és la paraula $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$ de $[n-2]$ on y_i és el subíndex de l'únic vèrtex adjacent a la fulla de T_i de menor subíndex.

Teorema 30. *La seqüència de Prüfer identifica unívocament un arbre (etiquetat) de* n *vèrtexs.*

Corol·lari 31 (Fórmula de Cayley)**.** *Hi ha* n^{n-2} *arbres de* n *vèrtexs.*

Teorema 32. *Sigui* $1 = d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ *una seqüència d'enters tal que* $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$*. El nombre d'arbres (etiquetats) de* n *vèrtecs que tenen aquesta seqüència de graus és el coeficient multinomial*

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

Nota 33. Els grafs acíclics, en particular els arbres, són bipartits. El codi de Prüfer es pot generalitzar per enumerar els arbres amb n vèrtexs que admeten una bipartició en parts de mides n_1 i n_2, $n_1 + n_2 = n$.

Teorema 34. *El nombre d'arbres que tenen una bipartició en parts* $A = \{1, 2, \ldots, n_1\}$ *i* $B = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n\}$ *és*

$$n_1^{n_2 - 1} n_2^{n_1 - 1}$$

Definició 35 (Arbres generador)**.** Sigui $G = (V, E)$ un graf. Un arbre generador de G és un subgraf $T \subset G$ que és un arbre i tal que $V(T) = V(G)$.

Nota 36. La *Fórmula de Cayley* es pot enunciar dient que el graf complet K_n conté n^{n-2} arbres generadors, i el *Teorema 34* dóna el nombre d'arbres generadors del graf bipartit complet K_{n_1, n_2}.

3 Cicles i circuits

4 Aparellaments

5 Coloració