Enunciats dels problemes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

1 Nocions bàsiques

Aquest apartat tracte sobre problemes relacionats amb les nocions bàsiques de connexió i distancia. A més, de problemes vinculats amb les formes matricials d'un graf.

Problema 1: *El nombre de vèrtexs de grau senar en un graf $G = (V, E)$ és parell.*

Problema 2: *Qualsevol graf amb $n \geq 2$ vèrtexs, en té dos del mateix grau.*

Problema 3: *Quants grafs hi ha de 4 vèrtexs i 3 arestes? Quants n'hi ha no isomorfs?*

Problema 4: *Siguin a_n el nombre de grafs d'ordre n i b_n el nombre de grafs no isomorfs d'ordre n. Proveu que $\log_2 a_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$ i $\log_2 b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n \log n)$. En particular, $\log b_n \sim \log a_n$, $(n \to \infty)$.*

Problema 5: *El graf complementari $\bar{G}$ de $G = (V, E)$ és $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.*

(a) Proveu que $G \cong G'$ si i només si $\bar{G} \cong \bar{G}'$.

(b) Un graf G és autocomplementari si és isomorf a $\bar{G}$. Proveu que el seu ordre és $n \equiv 0, 1 \pmod 4$. Comproveu que per a $k = 4, 5$ hi ha grafs autocomplementaris.

(c) Proveu que, si $n \equiv 1 \pmod 4$, i G és un graf autocomplementari d'ordre n, aleshores té un nombre senar de vèrtexs de grau $(n-1)/2$.

(d) Proveu que un graf autocomplementari té diàmetre 0, 2 o 3.

Problema 6: *Considereu el graf d'ordre $n > 2$ que té per vèrtexs $V = \binom{[n]}{k}$, per un k entre 1 (inclòs) i $n/2$ (no inclòs), i té per arestes $E = \{uv : u \bigcap v = \emptyset\}$. Determineu l'ordre, la mida i el grau dels vèrtexs de G. Per a $n = 5$, $k = 2$ dibuixeu el graf que s'obté. Proveu que, per a $k > n/3$, el graf no té triangles.*

Problema 7: *Una seqüència $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ d'enters és gràfica si hi ha un graf G amb $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $d_i = d(v_i), 1 \leq i \leq n$. Proveu que la seqüència*

$$1 \leq k = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

és gràfica si i només si, la seqüència

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \ldots, d_n$$

és gràfica.

Problema 8: *Determineu quina de les seqüències és gràfica: (a) (3,3,2,2,2); (b) (4,4,3,2,1); (c) (4,3,2,2,2); (d) (3,3,3,2,2); (e) (3,3,3,3,2); (f) (5,3,2,2,2).*

Problema 9: *Considerem el graf complet K_n amb conjunt de vèrtexs $[n]$. Calculeu el nombre de subgrafs de mida 5 que contenen exactament dos triangles.*

Problema 10: *Sigui G un graf d'ordre $n \geq 1$ i mida m que no té triangles.*

(a) *Demostreu que si u i v són vèrtexs de G adjacents, aleshores $d(u) + d(v) \leq n$.*

(b) *Proveu que si $n = 2k$, aleshores $m \leq k^2$.*

(c) *Proveu que $m \leq n^2/4$.*

Problema 11: *L'excentricitat d'un vèrtex v en un graf connex G és la màxima distància de v a un altre vèrtex de G. El radi $r(G)$ de G és la mínima excentricitat dels seus vèrtexs. Proveu que $r(G) \leq diam(G) \leq 2r(G)$. Proveu que les desigualtats són justes.*

Problema 12: *Sigui G un graf connex. Proveu que, si l és la llargada màxima d'un camí, dos camins de llargada l intersequen en algun vèrtex.*

Problema 13: *Doneu les matrius d'adjacència i d'incidència (amb una ordenació adequada dels vèrtexs i de les arestes) de cadascun dels següents grafs.*

(a) *El graf complet K_4.*

(b) *El camí P_5.*

(c) *El cicle C_6.*

(d) *El graf bipartit complet $K_{3,3}$.*

Problema 14: *Sigui G un graf amb conjunt de vèrtexs $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i sigui A la seva matriu d'adjacència, amb els vèrtexs ordenats segons els subíndexs. Demostreu les afirmacions següents.*

(a) *Si J és la matriu quadrada d'ordre n amb totes les entrades iguals a 1, $(AJ)_{i,i} = d(v_i)$, $1 \leq i \leq n$.*

(b) *La traça de A^2 és el doble de la mida de G.*

(c) *La traça de A^3 és $6t$, on t és el nombre de triangles que hi ha a G.*

2 Arbres

Aquest apartat tracte sobre problemes relacionats amb les propietats dels arbres, seqüències de Prüfer, arbres binaris, ...

Problema 15: *Un graf acíclic és un bosc. Proveu que si F és un bosc, cada component connexa és un arbre, i si F té n vèrtexs i k components aleshores té $n-k$ arestes.*

Problema 16: *Proveu que els boscos són els únics grafs tals que cada subgraf connex és un subgraf induït.*

Problema 17: *Sigui T un arbre de n vèrtexs.*

(a) Proveu que el nombre de fulles és $2 + \sum_{v:d(v)\geq 3}(d(v)-2)$.

(b) Proveu que el nombre de fulles és almenys $\Delta(T)$.

Problema 18: *Proveu que un graf G amb grau mínim $\delta = \delta(G)$ contè com a subgrafs tots els arbres de $\delta + 1$ vèrtexs.*

Problema 19: *Proveu que el camí P_n és l'únic arbre amb dues fulles i l'estrella $K_{1,n-1}$ és l'únic arbre amb $n-1$ fulles. Quants arbres no isomorfs hi ha amb tres fulles? I amb $n-2$ fulles?*

Problema 20: *Un vèrtex v d'un graf connex G és central si la seva excentricitat és el radi de G. Proveu que un arbre té un o dos vèrtexs centrals.*

Problema 21: *Sigui $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ una seqüència d'enters. Proveu que existeix un arbre T amb $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $d(v_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n$ si i només si $\sum_{i=1}^{n} = 2(n-1)$.*

Problema 22: *Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents dels grafs següents.*

(a) El cicle d'ordre $n \geq 3$.

(b) El graf bipartit complet $K_{2,r}$, $r \geq 1$.

(c) El graf $G = ([4], \{13, 14, 23, 24, 34\})$.

(d) El graf $G = ([5], \{12, 13, 23, 25, 34, 35, 45\}$.

(e) El graf $G = ([6], \{12, 13, 23, 34, 45, 46, 56\}$.

Problema 23: *Determineu la seqüència de Prüfer dels arbres següents.*

(a) $T = ([5], \{12, 13, 24, 35\})$.

(b) $T = ([6], \{12, 13, 14, 15, 56\})$.

(c) $T = ([8], \{12, 13, 14, 18, 25, 26, 27\})$.

(d) $T = ([15], \{12, 13, 23, 34, 45, 46, 56\})$.

Problema 24: *Detemineu els arbres que tenen seqüència de Prüfer:*

(a) (1,2,3,4).

(b) (2,2,4,1,3).

(c) (4,5,1,4,1,5).

(d) (11,7,11,9,5,5,2,2,1,1).

Problema 25: *Calculeu el nombre d'arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $V = [11]$ tals que tenen un vèrtex de grau 4, dos vèrtexs de grau 3, dos vèrtexs de grau 2 i sis vèrtexs de grau 1.*

Problema 26: *Sigui T un arbre binari, és a dir, té un vèrtexs v arrelat i cada un dels vètexs té 0 o 2 fills. Un vèrtex d'un arbre binari és intern si té dos fills.*

(a) Quantes fulles d'un arbre binari amb t vèrtexs interns.

(b) Quants arbres binaris (no ordenats) hi ha amb n vèrtexs.

(c) Quants arbres binaris ordenats hi ha amb n vèrtexs.

3 Cicles i circuits

Aquest apartat tracte sobre els *Teorema de Euler* (per cicles Eulerians), el *Teorema de Ore* (per cicles Hamiltonians) i els seus derivats.

Problema 1: *Un recorregut Eulerià és un recorregut* $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ *que conté totes les arestes de* G *i* $v_0 \neq v_m$.

(a) *Proveu que un graf* G *conté un recorregut Eulerià si i només si tots els vèrtexs de* G *tenen grau parell llevat de dos, i que aquests dos són* v_0 *i* v_m

(b) *Donat un graf* G *amb* $2k$ *vèrtexs de grau imparell, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir per a obtenir un graf (o multigraf) Eulerià?*

(c) *Quin és el nombre mínim de vegades que s'ha d'aixecar el llapis per a dibuixar el graf de Petersen?*

Problema 2: *Proveu que si* G *és un graf d'ordre imparell tal que ell i el seu complementari* G^c *són tots dos connexos. Aleshores,* G *és Eulerià si i només si ho és* G^c.

Problema 3: *El graf* Q_n *té per vèrtexs les paraules binàries de llargada* n, $\{0,1\}^n$, *i dues paraules són adjacents si difereixen exactament en una de les coordenades. Determineu els valors de* n *pels quals* Q_n *és Eulerià i per quins valors és Hamiltonià.*

Problema 4: *Donats dos grafs* G, H *el seu producte cartesià* $G \square H$ *té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià* $V(G) \times V(H)$ *i dos vèrtexs* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *són adjacents a* $G \square H$ *si, o bé* $\{x_1, x_2\} \in E(G)$ *i* $y_1 = y_2$, *o bé* $x_1 = x_2$ *i* $\{y_1, y_2\} \in E(H)$.

(a) *Comproveu que* $Q_n = K_2 \square \cdots \square K_2$ *(n vegades).*

(b) *Proveu que si* G *i* H *són Eulerians aleshores* $G \square H$ *també ho és. Proveu que, si* G *té un nombre imparell de vèrtexs, el recíproc també és cert.*

(c) *Proveu que si* G *i* H *són Hamiltonians i* $V(H)$ *és parell aleshores* $G \square H$ *també és Hamiltonià.*

(d) *Proveu que si* G *és Hamiltonia, aleshores* $G \square K_2$ *també ho és.*

Problema 5: *El graf línia* LG *d'un graf* G *té per vèrtexs* $V(LG) = E(G)$ *i dos vèrtexs són adjacents a* LG *si i només si les arestes corresponents són incidents a* G.

(a) *Proveu que si* G *és Eulerià aleshores* LG *és Eulerià i Hamiltonià. És cert el recíproc?*

(b) *Proveu que si* G *és Hamiltonià, aleshores* LG *és Hamiltonià.*

Problema 6: *Proveu que un graf amb grau mínim* $\delta(G) \geq 2$ *conté un camí de llargada* $\delta(G)$ *i un cicle de llargada* $\delta(G) + 1$. *Proveu que les cotes són òptimes.*

Problema 7: *Un camí Hamiltonià en un graf és un camí que passa per cada vèrtex una única vegada. Proveu que si el grau mínim d'un graf* G *amb* $n \geq 2$ *vèrtexs satisfà* $\delta(G) \geq (n-1)/2$ *aleshores* G *té un camí Hamiltonià.*

Problema 8: *Sigui* G *un graf amb* n *vèrtexs i* m *arestes. Proveu que, si* $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$ *aleshores* G *és Hamiltonià.*

4 Aparellaments

Problema 9:
Solució:

5 Coloració

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució: