

Problemes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

2019

1 Nocions bàsiques

En aquest apartat apareixen problemes relacionats amb les nocions bàsiques de connexió i distància. A més, de problemes vinculats amb les formes matricials d'un graf.

Problema 1: *El nombre de vèrtexs de grau senar en un graf $G = (V, E)$ és parell.*

Aquest problema és el clàssic *lema de les encaixades*, col·lorari de la següent fórmula (que va bé recordar).

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

En paraules diu que la suma dels graus dels vèrtexs és igual a dos cops el nombre d'arestes. Aquest fet és evident perquè cada aresta és adjacent a exactament dos vèrtexs, quan sumem els graus la comptarem dues vegades. Ara, el problema ens motiva a distingir entre vèrtexs de grau senar i de grau parell. Siguin U_1 els vèrtexs de grau senar i U_2 els vèrtexs de grau parell ($V = U_1 \cup U_2$). La fórmula es pot escriure com:

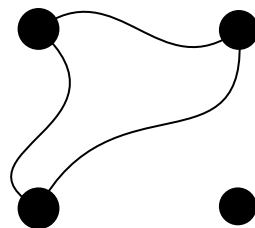
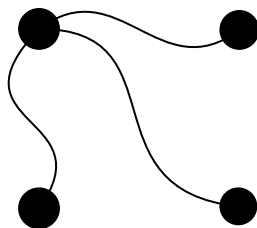
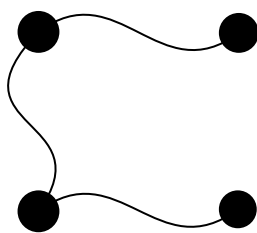
$$\sum_{u \in U_1} d(u) = 2|E| - \sum_{u \in U_2} d(u)$$

On a la dreta només apareixen termes parells, per tant el resultat és parell. I a l'esquerra hi ha una suma de $|U_1|$ termes senars. Sabent que aquesta ha de ser parell, n'hi ha d'haver un nombre parell. És a dir, $|U_1|$ és parell, que és el que volíem veure.

Problema 2: *Qualsevol graf amb $n \geq 2$ vèrtexs, en té dos del mateix grau.*

El conjunt de possibles graus d'un graf de n vèrtexs és subconjunt de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ (de cardinal n), ja que cada vèrtex pot no tenir cap aresta o tenir-ne alguna fins arribar al màxim que seria ser adjacent amb els altres $n-1$ vèrtexs. Tot i així, en un graf no hi pot haver alhora un vèrtex de grau 0 (no és adjacent amb cap altre) i un vèrtex de grau $n-1$ (és adjacent amb tots els altres). Per tant, hi ha, com a molt, $n-1$ possibles graus diferents en un graf de n vèrtexs. Aleshores, pel *Principi del Colomar*, existeixen dos vèrtexs que tenen el mateix grau, que és el que volíem demostrar.

Problema 2:



Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2:

Problema 2: