

Apunts de Càlcul numéric

ALEIX TORRES I CAMPS

MERCÉ OLLÉ, J.R.PACHA I JUAN SÀNCHEZ

Índex

1	Zeros de funcions	2
1.1	Mètodes d'iteració. Mètodes de punt fix	3
2	Interpolació i aproximació de funcions	3
2.1	Introducció	3
2.2	Interpolació polinòmica	3
2.3	Mètodes de càlcul del polinomi interpolador	4
2.4	Cas particular: Abscisses equiespaiades	6
2.5	Interpolació inversa:	7
3	Bibliografia	8

1 Zeros de funcions

Teorema 1. *Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^2 tal que*

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$
3. $f''(x) \geq 0$ (o $f''(x) < 0$) $\forall x \in [a, b]$
4. Si c és l'extrem de $[a, b]$ en el que $|f'(x)|$ és menor, llavors $|f(c)|/|f'(c)| \leq b - a$.

Llavors, el mètode de Newton convergeix a l'única solució α de $f(x) = 0$ a $[a, b]$ per a qualsevol condició inicial $x_0 \in [a, b]$.

Demostració. Separem en casos.

(a) Si $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'' \leq 0$, com que la derivada és sempre positiva i decreix $c = b$.

(b) Si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'' \leq 0$, com que la derivada és sempre negativa i creix $c = b$.

(c) Si $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'' \geq 0$, com que la derivada és sempre positiva i creix $c = a$.

(d) Si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'' \geq 0$, com que la derivada és sempre negativa i decreix $c = a$.

Ara, com l'objectiu és trobar zeros, els cassos (a) i (b) són equivalent i (c) amb (d) fent el canvi de f a $-f$. Per passar de (c) a (a) podem canviar $f(x)$ per $-f(-x)$ (també s'ha de canviar els extrems).

Suposem que $a \leq x_0 \leq s$, com que $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0$, perquè la derivada és positiva i $f(x_0)$ negativa. Ara, pel teorema del valor mitjà $-f(x_0) = f(s) - f(x_0) = f'(\zeta) \cdot (s - x_0) \leq f'(x_0) \cdot (s - x_0)$. Perquè, al estar $x_0 \leq \zeta \leq s$ segur que $f'(x_0) \geq f'(\zeta) \geq f'(s) > 0$. Llavors, aïllant s queda $s \geq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$. Com que el mateix argument serveix per tot n , tenim que x_n és una successió creixent i fitada. Per tant, tenim que la successió dels x_n convergeix a un punt q .

Ara, calculem el límit a banda i banda de $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ que queda $q = q - \frac{f(q)}{f'(q)}$ i per tant, $f(q) = 0$, així que $q = s$.

Si $s \leq x_0 \leq b$, comencem veient que $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq s$. Pel teorema del valor mitjà $f(x_0) - f(s) = f'(\zeta)(x_0 - s) \geq f'(x_0)(x_0 - s) \implies \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq (x_0 - s)$. Que, reordenant, és el que volíem. Ara veurem que $x_1 \geq a$, i fem:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(b)} \geq x_0 - \frac{f(b)}{f'(b)} + b - x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \geq b - (b - a) = a$$

La primera desigualtat, vé del fet que:

$$f'(x_0) \geq f'(b) \geq 0 \implies \frac{1}{f'(x_0)} \leq \frac{1}{f'(b)} \implies \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq \frac{f(x_0)}{f'(b)}$$

La segona, pel teorema del valor mitjà $f(b) - f(x_0) = f'(\zeta)(b - x_0) \geq f'(b)(b - x_0) \implies \frac{f(x_0)}{f'(b)} \leq \frac{f(b)}{f'(b)} - (b - x_0)$. I, l'última, prové d'utilitzar la quarta condició que ens proposaven, és a dir:

$$\frac{|f(c)|}{|f'(c)|} = \frac{f(b)}{f'(b)} \leq b - a$$

Aleshores, hem vist que $a \leq x_1 \leq s$ i, per tant, estem en el cas anterior que ja hem demostrat que convergia a la solució. \square

1.1 Mètodes d'iteració. Mètodes de punt fix

Motivació: Busquem s tal que $f(s) = 0 \iff s = g(s)$ (per una g adequada). Llavors s serà un zero o una arrel d' f si, i només si, s és un punt fix de g .

La idea és fer la següent successió x_0 lliure i $x_n = g(x_{n-1})$. Si $x_n \rightarrow s$ llavors per g contínua, $g(x_n)$ tendirà a $g(s)$.

Teorema 2. (Teorema del punt fix) Sigui $g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua tal que:

- i) $g(I) \subset I$
- ii) $\forall x_1, x_2 \in I, |g(x_2) - g(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$ amb L constant $0 < L < 1$. És a dir, L -Lispstisch. Llavors, si això es compleix:
 - a) $\exists! s \in I$ que és un punt fix (i.e. $g(s) = s$).
 - b) La successió $x_n = g(x_{n-1})$ convergeix cap a s per a qualsevol $x_0 \in I$.
 - c.1) $|x_n - s| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$
 - c.2) $|x_n - s| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostració. a) Cal comprovar per inducció que $|x_{r+\nu+1} - x_{r+\nu}| \leq L^{\nu+1} |x_r - x_{r-1}|$ per a cada $\nu \in \mathbb{N}$ i qualsevol $r \in \mathbb{N}$. Ara, com que per $n, m \in \mathbb{N}$ amb $m > n$ es compleix que $|x_m - x_n| = |\sum_{j=n}^{m-1} (x_{j+1} - x_j)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |x_{j+1} - x_j| = \sum_{k=0}^{m-n-1} |x_{k+n+1} - x_{k+n}| \leq [\nu = k + n + 1, r = 1] \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} L^{k+n} |x_1 - x_0| \leq L^n |x_1 - x_0| \sum_{k=0}^{m-n-1} L^k \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$.

Aleshores, tenim que x_n és una successió de Cauchy en un interval tancat i, per tant, té límit. Sigui q aquest límit, llavors $q = \lim x_n = \lim g(x_{n-1}) = g(q)$, per tant, q és un punt fix. Suposem que és diferent de s , llavors $|s - q| = |g(s) - g(q)| \leq L|s - q| \iff (1 - L)|s - q| \leq 0$. Necessàriament $s = q$.

b) Ve de no utilitzar el punt inicial en cap moment per l'apartat anterior.

c.1) Com que hem vist que $|x_m - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$, per tant, fent tenir n a infinit, tenim $|x_m - s| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$.

c.2) Teniem $|x_m - x_n| \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} |x_{k+n+1} - x_{k+n}| \leq [r = n, \nu = k] \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} L^{k+1} |x_n - x_{n-1}|$. Aleshores, fent tendir m a infinit i per la suma geomètrica, tenim que $|s - x_n| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$, que és el que volíem veure. \square

2 Interpolació i aproximació de funcions

2.1 Introducció

El problema d'interpolació correspon a un cas d'aproximació de funcions. Interpol·lar una funció f en un conjunt de punts (x_k, y_k) per $0 \leq k \leq n$ (amb $x_k \neq x_i$, si $k \neq i$) és trobar una altra funció f^* de manera que a sobre d'aquests punts la nova funció prengui el mateix valor que la funció original: $f^*(x_k) = y_k$ (per $0 \leq k \leq n$).

Ens serà especialment útil quan no coneguem la funció original $f(x)$.

Pregunta: Donada la xarxa de punts (x_k, y_k) , per $0 \leq k \leq n$, de quin tipus prenem f^* ?

La resposta ve lligada a les sospites o la informació que tinguem sobre la f . Per exemple, si les dades corresponen a un comportament periòdic, prenem f^* entre les funcions trigonomètriques. Si f té assíptotes verticals, prendrem f^* una funció racional, és a dir, quocient de polinomis.

Si sospitem que f té un comportament polinomial (o proper), prendrem f^* com un polinomi. S'anomena interpolació polinomial.

2.2 Interpolació polinòmica

Donats $n + 1$ punts d'una xarxa (x_k, f_k) , per $0 \leq k \leq n$ amb $x_k = x_i$ si, i només si, $k \neq i$, anomenem **interpolació polinòmica** a la determinació d'un polinomi $p(x)$ tal que $p(x_k) = f_k$, per $1 \leq k \leq n$.

Pregunta natural: Existeix $p(x)$? És únic?

Teorema 3. *Existència i unicitat. Existeix un únic polinomi $p_n(x)$ de grau $\leq n$, tal que interpola, és a dir, $p_n(x_k) = f_k$, per $1 \leq k \leq n$. L'anomenem el polinomi interpolador de f en x_0, \dots, x_n .*

Demostració. Sigui $p_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + C_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$. Ara, impossem que p_n interpola, és a dir:

$$\begin{aligned} f_0 &= p_n(x_0) = C_0 \\ f_1 &= p_n(x_1) = C_0 + C_1(x_1 - x_0) = p_1(x) \\ f_2 &= p_n(x_2) = C_0 + C_1(x_2 - x_0) + C_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = p_2(x) \\ &\dots \\ f_k &= p_n(x_k) = C_0 + C_1(x_k - x_0)(x_2 - x_1) + \dots + C_k(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1}) = p_k(x) \end{aligned}$$

El qual és un sistema lineal en C_0, \dots, C_n .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

És un sistema determinat? Només cal veure que el determinant de A sigui diferent de 0. Així és perquè A és una matriu triangular inferior i, per tant, el seu determinant és el producte dels elements de la diagonal, que són tots de la forma $(x_j - x_i)$ amb $i \neq j$ i com diu l'enunciat, les x_i són totes diferents. Aleshores, $\exists C_0, \dots, C_n$.

Per demostrar la unicitat, suposem que existeixen dos polinomis interpoladors $p_n(x)$ i $q_n(x)$ de grau $\leq n$ amb $p_n(x_k) = q_n(x_k) = f_k$ per $1 \leq k \leq n$. Prenem $r_n = p_n - q_n$, el qual és un polinomi de grau $\leq n$ i quan fem $r_n(x_k) = p_n(x_k) - q_n(x_k) = f_k - f_k = 0$ per $1 \leq k \leq n$. Així que el polinomi r_n és de grau n però té $n + 1$ zeros, aleshores únicament pot ser el polinomi idènticament 0. \square

Pregunta natural: Quin error fem si aproximem $f(x)$ per $p_n(x)$ en $x = x_k$?

Notació: Denotarem $f \in \mathcal{C}^k(a, b)$ si f és $\mathcal{C}^k(I)$ on $[a, b] \subset I$ i I és un interval obert.

Teorema 4. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(a, b)$, $x_k \in (a, b)$ per $0 \leq k \leq n$ i $p_n(x)$ el polinomi interpolador. Llavors

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

on $\zeta(x) \in \langle x_0, \dots, x_n, x \rangle := (\min(x_0, \dots, x_n, x), \max(x_0, \dots, x_n, x))$.

Demostració. Si $x = x_k$, automàticament és cert. Per $x \neq x_k$, $\forall k$ prenem $\phi(z) = f(z) - p_n(z) - a(x)(z - x_0) \dots (z - x_n)$, amb $a(x)$ tal que $\phi(x) = 0$ (aïllant es veu que existeix i després se'n veu una de més concreta).

Aleshores, es compleix que ϕ s'anul·la en $n + 2$ abscisses, que són els punts x_0, \dots, x_n, x . Llavors podem derivar $n + 1$ vegades a banda i banda i aplicar el teorema de Rolle per assegurar que existeix un zero a la derivada $n + 1$ -èssima de $\zeta(x)$. És a dir, si derivem $n + 1$ vegades, ens queda: $\phi^{n+1}(z) = f^{(n+1)}(z) - a(x)(n+1)!$ i sabem que, per algun punt $z = \zeta(x)$ (perquè depen de x) la derivada $n + 1$ -èssima s'anul·la. Llavors, aïllant $a(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}$.

I, com que $\phi(x) = 0$, aïllant, deduïm que:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

2.3 Mètodes de càlcul del polinomi interpolador

Recordem que volem interpolar una xarxa de $n + 1$ punts que anomenem (x_k, f_k) per $1 \leq k \leq n$.

Definició 5. Mètode de Lagrange. Proposa trobar el polinomi interpolador de la següent forma:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k l_k(x)$$

que, per definició, són els polinomis de grau n .

$$l_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$$

És compleix que $l_k(x_j) = 1$ si $j = k$ i altrament, $l_k(x_j) = 0$. Llavors, $p_n(x_j) = f_j$ ja que tots els termes del sumatori són 0 excepte el que concideix amb j que és $f_j \cdot 1$.

Exemple 1. $f(x) = \sin x$ amb $x = 0, \pi/6, \pi/2$. Per tant, els punts són $(0, 0), (\pi/6, 1/2), (\pi/2, 1)$. Si volem interpolar amb un polinomi, cal un polinomi de grau com a molt 2. És a dir, $p_2(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + f_2 l_2(x)$. On,

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x - \pi/6)(x - \pi/2)}{(0 - \pi/6)(0 - \pi/2)} \\ l_1(x) &= \frac{(x - 0)(x - \pi/2)}{(\pi/6 - 0)(\pi/6 - \pi/2)} \\ l_2(x) &= \frac{(x - 0)(x - \pi/6)}{(\pi/2 - 0)(\pi/2 - \pi/6)} \end{aligned}$$

Amb la qual cosa, queda com a polinomi: $\frac{-3}{\pi^2}x^2 + \frac{7}{2\pi}x$.

Ara, si interpoem un punt interior, $0.866025 = f(\pi/3) \approx p_2(\pi/3) = 0.83332$. La diferencia o error és $|f(\pi/3) - p_2(\pi/3)| = \frac{1}{3!} |f^{(3)}(\zeta)| |\pi/3 - 0| |\pi/3 - \pi/6| |\pi/3 - \pi/2|$. Coneixent que la tercera derivada del sinus és el cosinus i podem fitar per 1 i trobar una fita de l'error, la qual dona $\frac{\pi^3}{3 \cdot 6^3} = 0.047$.

Definició 6. Mètode de Newton (diferències dividides). Proposa trobar el polinomi interpolador de la següent forma:

$$p_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + C_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Impossant que el polinomi $p_n(x)$ interpoli els punts. Donant-nos un sistema triangular inferior:

$$\begin{aligned} f_0 &= p_n(x_0) = C_0 \\ f_1 &= p_n(x_1) = C_0 + C_1(x_1 - x_0) = p_1(x) \\ f_2 &= p_n(x_2) = C_0 + C_1(x_2 - x_0) + C_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = p_2(x) \\ &\dots \\ f_k &= p_n(x_k) = C_0 + C_1(x_k - x_0)(x_2 - x_1) + \cdots + C_k(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) = p_k(x) \end{aligned}$$

Aleshores, deixant les C en funció de diferències dividides:

$$\begin{aligned} C_0 &= f_0 \\ C_1 &= \frac{(f_1 - f_0)}{(x_1 - x_0)} \\ &\dots \\ C_k &= \frac{f_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})} \end{aligned}$$

Definició 7. Volem expressar les C_i en funció de les diferències dividides que per definició $f[x_i] = f_i$. Per $0 \leq j \leq n-1$ i $0 \leq i \leq n-j$.

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}, x_{i+j+1}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+j+1}] - f[x_i, \dots, x_j]}{x_{i+j+1} - x_i}$$

Aleshores, clarament $C_0 = f_0 = f[x_0]$ i $C_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$. I aleshores, per C_2 fem:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{f_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - (f_0 + f[x_0, x_1](x_2 - x_0))}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{\frac{f_2}{x_2 - x_1} - \frac{f_0}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_0, x_1](x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{f_2}{x_2 - x_1} - \frac{f_1}{x_2 - x_1} + \frac{f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_0}{x_2 - x_1} - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{f[x_1, x_2] + \frac{f_1 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

I, així en general, es pot comprovar que $C_k = f[x_0, \dots, x_k]$. Per tant,

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Aleshores, apliquem el següent esquema per calcular les diferències:

1. Amb x_i, x_{i+1} i f_i, f_{i+1} es calcula $f[x_0, x_1]$.
2. Amb x_i, x_{i+2} i $f[x_i, x_{i+1}], f[x_{i+1}, x_{i+2}]$ es calcula $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$.
3. ...
4. Amb x_0, x_n i $f[x_0, \dots, x_{n-1}], f[x_1, \dots, x_n]$ es calcula $f[x_0, \dots, x_n]$.

Nota 2. Què passa quan afeim un punt més? En tal cas, podem aprofitar càlculs previs (cosa que no passa amb Laplace)

Nota 3. El coeficient de x^n és $C_n = f[x_0, \dots, x_n]$.

Exemple 4. Tenim els punts $(0, 0), (\pi/6, 1/2), (\pi/2, 1)$. Aleshores, $f[x_0, x_1] = \frac{1/2 - 0}{\pi/6 - 0} = 3/\pi$ i $f[x_1, x_2] = \frac{1 - 1/2}{\pi/2 - \pi/6} = 3/(2\pi)$. Llavors, $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3/(2\pi) - 3/\pi}{\pi/2 - 0} = -\frac{3}{\pi^2}$. Per últim, $P_n(x) = 0 + 3/\pi(x - 0) - \frac{3}{\pi^2}(x - 0)(x - \pi/6) = -\frac{3}{\pi^2}x^2 + \frac{7}{2\pi}x$.

2.4 Cas particular: Abscisses equiespaiades

Tenim x_0 i h , aleshores, $x_i = x_0 + ih$. Definim l'operador diferència ordinària Δ per:

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

$$\Delta^1 f(x) = f(x + h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x) = f(x + 2h) - f(x + h) - [f(x + h) - f(x)] = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)$$

$$\vdots$$

Llavors la relació entre les diferències dividides Δ és:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f_0 = \Delta^0 f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h} \left[\frac{\Delta f(x_1)}{h} - \frac{\Delta f(x_0)}{h} \right] = \frac{1}{2h} [\Delta f(x_0 + h) - \Delta f(x_0)] = \frac{1}{2!h^2} \Delta^2 f(x_0) \\ f[x_0, \dots, x_k] &= \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f(x_0) \end{aligned}$$

I, per tant, el polinomi interpolador és:

$$P_n(x) = \Delta^0 f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Exemple 5. Tenim els punts $X = (1, 2, 3, 4, 5)$ i $f = (1, 16, 81, 256, 625)$ i $h = 1$. Llavors les $\Delta = (15, 65, 175, 369)$, $\Delta^2 = (50, 110, 194)$, $\Delta^3 = (60, 84)$ i $\Delta^4 = (24)$. Per últim:

$$P_4(x) = 1 + 15(x-1) + \frac{50}{2}(x-1)(x-2) + \frac{60}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{24}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = x^4$$

Expressió del polinomi de Lagrange en el cas de xarxa equiespaiada: (Problema 5)

2.5 Interpolació inversa:

En aquest cas, coneixem $(x_k, f(x_k)) = (x_k, f_k)$, per $0 \leq k \leq n$ i volem resoldre l'equació $f(x) = c$. Per tal de tenir (una aproximació de) x , podem:

1. Trobar el polinomi interpolador $p_n(x)$ i resoldre l'equació polinòmica $p_n(x) = c$.
2. O bé, suposem que f és invertible i calculem $x = g(c)$ amb $g = f^{-1}$. Aleshores, interpolem la taula $(f_i, x_i) = (y_i, g_i)$ per $0 \leq i \leq n$. Calculem el polinomi interpolador de $q_n(y)$ que aproxima g i prenem $x_{approx} = q_n(r)$.

Exemple 6. Tenim els punts $x = (0, 1, 2, 3)$ i $f = (0, 1, 4, 9)$. Volem x tal que $f(x) = 2$.

1. El polinomi interpolador dona $P_3(x) = x^2$ i llavors solucionant $x^2 = 2$ tenim $x = \sqrt{2}$.
2. Calculant les $f[]$ resulten $(1, 1/3, 1/5)$, $(-1/6, -1/60)$ i $(1/60)$. i, per tant, $q_3(y) = 0 + 1(y-0) - \frac{1}{6}(y-0)(y-1) + \frac{1}{60}(y-0)(y-1)(y-2)$. L'aproximació final serà $q_3(2)$.

Abscisses de Tchebyshev

Sabem que l'expressió de l'error en la interpolació és (E) i, per tant, si volem el màxim de la funció error a $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| &= \max_{x \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(x)| |(x-x_0) \cdots (x-x_n)| \right\} \leq \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(x)| \right\} \max_{x \in [a, b]} \{|(x-x_0) \cdots (x-x_n)|\} \end{aligned}$$

Pregunta natural: Com triar $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ de manera que $\max_{x \in [a, b]} |(x-x_0) \cdots (x-x_n)|$ sigui el mínim possible?

Veiem com: 1. Passem de $[a, b]$ a $[-1, 1]$ fent: $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-(-1)}{2} \iff x = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}$, $x \in [a, b]$ i $y \in [-1, 1]$.

El següent polinomi i les seves propietats ens serviran pel problema que vé a continuació:

Definició 8. Definim el polinomi de Tchebishev de grau n com:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x]$$

Alguns valors: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \cos[\arccos x] = x$, $\cos(2 \arccos) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = x^2 - (1 - \cos^2)(\arccos x) = 2x^2 - 1$, veiem que es compleix:

1. $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ i $T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
2. El coeficient de x^n de $T_n(x)$ és 2^{n-1} .
3. $T_n(x)$, $n \geq 1$ té n zeros en $[-1, 1]$ de la forma

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

4. $T_n(x)$ té $n + 1$ extrems en $[-1, 1]$ de la forma:

$$\bar{x}_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad T_n(\bar{x}_k) = (-1)^k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Teorema 9. *La millor elecció dels punt y_0, \dots, y_n a $[-1, 1]$ de manera que el $\max |(y - y_0) \dots (y - y_n)|$ sigui el mínim vé donada per les arrels del polinomi de Tchebyshev de grau $n + 1$ i aquest màxim val $\frac{1}{2^n}$.*

Demostració.

□

3 Bibliografia

1. *Càlcul numéric* de C.Bonet.
2. *Eines bàsiques de Càlcul numéric* de A.Aubanell i altres.
3. *Càlcul numèric* de M.Grau i altres.
4. *Numerical Analysis* de J.Stoer i altres.