

Apunts d'Àlgebra Multilineal i Geometria

ALEIX TORRES I CAMPS

1 Àlgebra Multilineal

1.1 La forma de Jordan

1.1.1 Introducció i repàs

Sigui \mathbf{k} un cos (normalment \mathbf{R} o \mathbf{C}), sigui E un \mathbf{k} -e.v. de dimensió finita ($\dim n$), sigui $f : E \rightarrow E$ un endomorfisme, sigui $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base i sigui $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ matriu bàsica per \mathcal{B} .

Aleshores, $v \in E$ és vep de vap $\lambda \in \mathbf{k}$ si v compleix que $f(v) = \lambda v$.

Direm que f diagonalitza si \exists base de veps \mathcal{B} : en aquest cas, la matriu $M_{\mathcal{B}}(f)$ és diagonal.

Quan sabem si una matriu o una aplicació diagonalitza? Fem servir el polinomi característic: $P_f(t) = \det(f - t\text{Id})$ de grau n . Aleshores, λ és vap $\iff P_f(\lambda) = 0$, per tant, $\{\text{vap}\} = \{\text{arrels de } P_f(t)\}$, la qual cosa és una manera de trobar el vaps.

Hipòtesi: Sempre suposarem que el polinomi descomposa en el cos, és a dir, $P_f(t) = (-1)^n(t - \lambda)^{n_1} \dots (t - \lambda)^{n_r}$, on $n_1 + \dots + n_r = n$. Totes les arrels de $P_f(t)$ són de \mathbf{k} . En particular, pels complexos, això sempre és cert.

Teorema 1. *El primer teorema de descomposició diu que podem separar l'espai vectorial en subespais invariants i sense intersecció entre ells tals que tots ells nuclis de l'aplicació f menys vap vegades la identitat, és a dir: $E = \ker(f - \lambda_1 \text{Id})^{n_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_r \text{Id})^{n_r}$.*

És a dir, si $\forall v \in E \implies v = v_1 + \dots + v_r$, on $v_i \in \ker(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$ és a dir, $(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}(v_i) = 0$.

Corol·lari 2. $n_1 = \dots = n_r = 1 \implies f$ diagonalitza.

Teorema 3. *Cayley-Hamilton: $P_f(A) = 0$. Considerem $m_f(t) \in \{Q(t) | Q(A) = 0\}$ que és el polinomi de grau mínim i mònic $\implies m_f(A) = 0$ i $m_f(t) | P_f(t)$ (el polinomi mínim divideix al polinomi característic). A més, $m_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}$ té totes les arrels però de grau més petit o igual.*

Proposició 4. f diagonalitza $\iff m_1 = \dots = m_r = 1$.

Recordant el fet que $E = \ker(f - \lambda_1 \text{Id})^{n_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_r \text{Id})^{n_r}$, a més sabem que: $\dim \ker(f - \lambda \text{Id})^{n_1} = n_1$, $\ker(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$ son f -invariants, $f(\ker(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}) \in \ker(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$.

Aleshores, per la propia descomposició de l'espai en nuclis, sabem que la matriu de l'aplicació com a mínim queda separada pels subespais de cada nucli. Ja que son espais separats i invariants.

Conclusió: la multiplicitat més gran del polinomi mínim és la mida màxima de la caixa que ens pot aparèixer quan intentem fer diagonalització.

Exemple 1. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal de k^3 en una certa base:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, calculem el polinomi característic $P_A(t)$.

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^3$$

Per tant, té un únic vap $\lambda = 1$ que apareix 3 vegades. Automàticament, sabem que $\mathbf{k}^3 = \ker(A - 1 \text{Id})^3$. Tot i així, observem que:

$$(A - \text{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - \text{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I que, per tant, veiem que $\mathbf{k}^3 = \ker(A - \text{Id})^2$. Llavors el polinomi mínim no coincideix amb el polinomi característic sinó que $m_A(t) = (1-t)^2$.

1.1.2 El teorema de Jordan

Sigui $f : E \rightarrow E$, on $E = \ker(f - \lambda \text{Id})^m = \ker f_\lambda^m$ (abreugem la notació amb $f_\lambda := f - \lambda \text{Id}$).

Definició 5. $v \in E$ és un **vep generalitzat d'alçada 1** si $v \notin \ker(f_\lambda^k)$ per $k \leq l-1$, però sí que $v \in \ker f_\lambda^l$. Que és el mateix que dir que $f_\lambda^k(v) \neq 0$ (per al mateix rang de k), però sí que $f_\lambda^l(v) = 0$.

Exemple 2. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal a \mathbf{k}^4 en la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ara, observem que $f_\lambda(e_1) = f(e_1) - \lambda e_1 = e_2 \neq 0$, $f_\lambda^2(e_1) = f_\lambda(e_2) = e_3 \neq 0$, $f_\lambda^3(e_1) = f_\lambda^2(e_2) = f_\lambda(e_3) = 0$ i, per últim, $f_\lambda(e_4) = 0$. Per tant, e_1 és un vepg d'alçada 3, e_2 és un vepg d'alçada 2 i tant e_3 com e_4 són vepg d'alçada 1 i, per tant, veps ordinaris.

Proposició 6. Sigui v un vep generalitzat d'alçada l , aleshores $v, f_\lambda(v), f_\lambda^2(v), \dots, f_\lambda^{l-1}(v)$ són linealment independents. Al subespai que generen l'anomenarem un *cicle de Jordan de longitud l* .

Demostració. Suposem que son linealment dependents, aleshores existeix escalars els quals no son tots 0 tals que:

$$\mu_0 v + \mu_1 f_\lambda(v) + \dots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1}(v) = 0$$

Però ara apliquem f_λ^{l-1} i ens queda:

$$\mu_0 f_\lambda^{l-1}(v) + \mu_1 f_\lambda^l(v) + \dots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1+l-1}(v) = 0$$

Aleshores, com que v és un vep generalitzat d'alçada l , a partir del $2n$ son tots 0, per tant, no queda cap altra opció que $\mu_0 = 0$. Efectuant ara, per $1 \leq i \leq l-2$, aquest procés de nou però amb f_λ^{l-i} veurem que $\mu_i = 0$. I, per tant, hem vist que totes les μ són 0, amb la qual cosa, per definició, són linealment independents. \square

Proposició 7. Els cicles de Jordan són f -invariants. (Per simplificar la notació fem servir $u_k = f_\lambda^{k-1}(v)$).

Demostració. Per $k \neq l$, sabem que, $f_\lambda(u_k) = u_{k+1}$, és a dir, $f(u_k) = \lambda u_k + u_{k+1}$. Per tant, per aquesta part, és invariant. Per últim, quan fem $f_\lambda(u_l) = 0$, per ser v un vep generalitzat d'alçada l . \square

Definició 8. Un cicle de Jordan de longitud l dona a lloc un Bloc de Jordan.

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definició 9. Una base de Jordan de f és una base de E formada per cicles de Jordan.

$$M_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

Teorema 10. Si el polinomi característic $P_f(t)$ descompon completament, aleshores, existeixen bases de Jordan.

Demostració. Anem a veure el cas en dimensió 2. Sigui $f : \mathbf{k}^2 \rightarrow \mathbf{k}^2$ un endomorfisme amb un únic vap λ amb $m_f(t) = (t - \lambda)^2$ i per tant, aquest és l'únic cas que no diagonalitza.

Agafem $u \in \mathbf{k}^2$ tal que $f_\lambda(u) \neq 0$ (per tant, u no és vep). Aleshores, escollim v de la següent manera: $v = f(u) - \lambda(u)$. Llavors la base $\{u, v\}$ és una base de Jordan. Amb matriu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ara, en general, per a cada bloc, busquem un vector generador d'ordre el bloc (l). És a dir, v veg d'alçada l , és a dir, que estigui en el $\ker f_\lambda^l$ però no en el $\ker f_\lambda^{l-1}$. Recordem que $0 \subset \ker f_\lambda \subset \cdots \subset \ker f_\lambda^l$.

Suposem f tal que $P_f(t) = (\lambda - t)^n$, aleshores \exists una base de Jordan.

En efecte, sigui $d_i = \dim \ker f_\lambda^i$. Farem un edifici on la planta i té amplada $l_m = d_i - d_{i-1}$. Escollim $u_1^m, \dots, u_{l_m}^m \in \ker f_\lambda^m \setminus \ker f_\lambda^{m-1}$ de manera que sigui l.i. u_i^m són veg d'alçada m , considerem $f_\lambda^k(u_i^m)$.

Lema 11. $f_\lambda^k(u_i^m)$ per $1 \leq i \leq l_m$ i per $0 \leq k \leq m-1$, són l.i.

Demostració. Suposem que tenim unes constants no totes nul·les μ tals que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{l_m} \mu_{ki} f_\lambda^k(u_i^m) = 0$$

Apliquem f_λ^{m-1} . Només ens queda el pis superior, el $k=0$ i, per tant, $\sum_{i=1}^{l_m} \mu_{0i} f_\lambda^{m-1}(u_i^m) = 0$, però aquests ja sabem que eren l.i. Aleshores les seves μ_0 són totes 0. Encara ens queden les $k \geq 1$.

Ara apliquem f_λ^{m-2} , només ens queden el segon pis superior, ara fem:

$$\sum_{i=1}^{l_{m-1}} \mu_{1i} f_\lambda^{m-1}(u_i^m) = f_\lambda^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{l_{m-1}} \mu_{1i} (u_i^m) \right) = 0$$

Però, com que sabem que els vectors de dins són l.i. totes les μ_1 han de ser 0 altra vegada. Reproduint aquest procés per a cada pis, arribem a que totes les μ són 0. \square

Baixem un pis, estem a $\ker f_\lambda^{m-1} \setminus \ker f_\lambda^{m-2}$ amb amplada l_{m-1} . Veurem que $\ker f_\lambda^{m-1} = \langle f_\lambda(u_1^m), \dots, f_\lambda(u_{l_m}^m) \rangle \oplus \ker f_\lambda^{m-2} \oplus V_{m-1} = (*) = u_{m-1} \oplus \ker f_\lambda^{m-2} \oplus V_{m-1}$. Aleshores, caldria escollir, $u_1^{m-1}, \dots, u_{r_{m-1}}^{m-1} \in V_{m-1} = \ker f_\lambda^{m-1} \setminus u_{m-1} \oplus \ker f_\lambda^{m-2}$ l.i. veg d'alçada $m-1$.

Lema 12 (*). Cal comprovar que $u_{m-1} \cap \ker f_\lambda^{m-2} = 0$. I per tant que la seva suma sigui directa.

Demostració. Sigui $w \in u_{m-1} \cap \ker f_\lambda^{m-2}$ i el descomponem en elements de u_{m-1} , llavors apliquem f_λ^{m-2} i, com que $w \in \ker f_\lambda^{m-2}$ el resultat hauria de ser 0, però ens queda:

$$0 = f_\lambda^{m-2}(w) = f_\lambda^{m-2} \left(\sum \mu_i f_\lambda(u_i^m) \right) = f_\lambda^{m-1} \left(\sum \mu_i u_i^m \right)$$

Ara, com que els elements que hi ha dins del parentesis són l.i. i no pertanyen al $\ker f_\lambda^{m-1}$, no pot haver constants diferents de 0 tals que el resultat sigui. Per tant, hem arribat a contradicció i les constants han de

ser 0 i $w = 0$. Aleshores, l'intersecció és buida i hem acabat. \square

Seguint el mateix raonament per a cada pis, obtenim una base de Jordan. \square

Exemple 3. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, $P_A(t) = (3 - t)^5$, $m_A(t) = (t - 3)^3$ i $d_1 = 2, d_2 = 4$ i $d_3 = 5$.

e_1	
$f_\lambda(e_1)$	v
$f_\lambda^2(e_1)$	$f_\lambda(v)$

$u_1^3 \in \ker(A - 3\text{Id})^3 \setminus \ker(A - 3\text{Id})^2$, com per exemple, $u_1^3 = e_1$, $f_\lambda(u_1^3) = (4, -1, 1, 1, 0)$ i $f_\lambda^2(u_1) = e_3$.

Ara, cal $v \in \ker(A - 3\text{Id})^2 \setminus \ker(A - 3\text{Id}) \oplus \langle f_\lambda(u_1^3) \rangle$. Per exemple, $v = (-1, 0, 0, 0, 1)$ i $f_\lambda(v) = (0, 1, -1, 0, 0)$.

Observació 13. La quantitat de cicles de longitud exactament k és $2 \dim \ker f_\lambda^k - \dim \ker f_\lambda^{k-1} - \dim \ker f_\lambda^{k+1}$. Per tant, la quantitat de caixes de mida k depèn només de f (i de λ).

Observació 14. La reduïda de Jordan és única, llevat de reordenació dels Blocs.

Corol·lari 15. A, B son matrius conjugades ($\exists \in GL_n(\mathbf{k}), B = S^{-1}AS$) $\iff J_A = J_B$.

Exemple 4. Sigui B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Veiem que $P_B(t) = (t - 1)^3(t - 2)$, que $m_B(t) = (t - 1)^2(t - 2)$ i, pel primer teorema de descomposició $E = \ker(B - \text{Id})^2 \oplus \ker(B - 2\text{Id})$. Per tant, $u_1 \in \ker(B - \text{Id})^2 \setminus \ker(B - \text{Id})$, $u_2 = f_\lambda(u_1)$ i anar fent...

1.2 Formes quadràtiques

1.3 Tensors