Apunts de teoria de la probabilitat

Aleix Torres i Camps

Anna de Mier (anna.de.mier@upc.edu), Guillem Perearnau i Sonia Perez

1 Espais de probabilitat

1.1 Motivació

L'objectiu de la teoria de la probabilitat és trobar models per a fenònems que depenen de l'atzar (no deterministes), cada realització d'un fenomen en direm experiment, del qual n'obtindrem un resultat. A més, tindrem els successos (observables) que son totes les preguntes raonables que ens podem fer.

1.2 Experiments i probabilitat

Definició 1. Un experiment és un parell $(\Omega, \mathscr{A})$ on Ω és un conjunt i $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tal que:

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$
3. Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una col·lecció numerables d'elements de $\mathscr{A} \implies \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$

Exemple 1. Uns quants exemples...
Volem una funció que assigni probabilitats de successos, és a dir, $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$. Llavors definim:

Definició 2. Un espai de probabilitat és una terna $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ on:

1. $(\Omega, \mathscr{A})$ és un experiment.
2. $P : \mathscr{A} \to R$ tal que: $P(\emptyset) = 0$, $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{A}$. Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una col·lecció de successos dos a dos dijunts $\implies P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$.
3. $P(\Omega) = 1$.

Per tant, la probabilitat és una mesura a $(\Omega, \mathscr{A})$ normalitzada a 1. A P se l'anomena funció de probabilitat.

Exemple 2. Espia discret, si Ω és numerable i $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Si $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ prenem $\sum_{i\geq 1} p_i = 1$ (amb $p_i \geq 0$) i definim $\mathscr{P}(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\})$, alleugerint la notació podem fer servir $P(\{w_i\}) = P(w_i) = p_i$.

Exemple 3. Espai clàssic, és un éspai discret amb $|\Omega| = N$ i $p_i = 1/N$. Çassos favorables entre cassos possibles": $P(A) = \frac{|A|}{N}$.

Exemple 4. Espais clàssics amb monedes o daus, tot ben repartit.

Exemple 5. Durada d'un mòbil? $\Omega = (0, \infty)$ o bé, $(0, L]$. Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ sabem que no podem assignar-hi una mesura. Però com ens interessen els intervals com (a, b), agafe, la σ-àlgebra que conté tots els intervals (oberts). Aquí apareixen els burelians $\mathcal{B} = \sigma(I)$ i podem agafar la mesura de Lebesque a $\mathbb{R}$. En resum, $\Omega = (0, L)$, $\mathrm{B} = \sigma(I)$ i $P(B) = \frac{\mu(B)}{L}$. On $\mu(B)$ és la seva mesura de Lebesgue. Tot i així, no és realistic perquè és massa uniforme.

Proposició 3. *Propietats d'espais de probabilitat. Sigui* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$*:*

1. *Per $r \geq 2$, si $A_1, \dots, A_r \in \mathscr{A}$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ llavors $P(\bigcup_{i=0}^r a_i) = \sum_{i=1}^r P(A_i)$*
2. *Si $A, B \in \mathscr{A}$ i $A \subset B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ i $P(A) \leq P(B)$.*
3. *$P(A^c) = 1 - P(A)$, $\forall A \in \mathscr{A}$*
4. *(Desigualtat de Boole) Si $A_1, \dots, A_r \in \mathscr{A} \implies P(\bigcup_{i=1}^r A_i) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_r)$*

Demostració.

1. En els cassos finits, per $r < k$, cal agafar $A_k = \emptyset$, ja que així, com que $P(\emptyset) = 0$, $P(\bigcup_{1 \leq n \leq r}) = P(\bigcup_{1 \leq n} A_n) = \sum_{1 \leq n} P(A_n) = \sum_{1 \leq n \leq r} P(A_n)$.
2. Primer de tot $B \setminus A \in \mathscr{A}$, ja que $B \setminus A = (B^c \bigcup A)^c \in \mathscr{A}$. Després, reordenant el fet que $P(A) + P(B \setminus A) = P(B)$, ens queda el que volíem. Com les propietats són positives, la desigualtat es demostra automàticament.
3. De $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$ obtenim l'expressió de l'enunciat.
4. Ho anem a fer per inducció sobre r. Clarament per $r = 1$ és cert, suposem que ho és per $r - 1$, anem a veure-ho per a un r arbitrari. Sigui $B = (\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \bigcap A_r$, llavors $P(\bigcup_{i=1}^r A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \bigcup A_r) = P((\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \bigcup (A_r - B_r)) = P((\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i)) + P(A_r - B_r) =$ [per hipòtesi i per 2] $\leq P(A_1) + \cdots + P(A_{r-1}) + P(A_r)$ que és la desigualtat de Boole.

□

Proposició 4. *Successions monòtones:*
Si $A \in \mathscr{A}$, $i \geq 1$ i $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, aleshores $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.
Si $A \in \mathscr{A}$, $i \geq 1$ i $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, aleshores $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

Demostració. Fem $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, ... Aleshores, $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$ i $A_i = \bigcup_{j=1}^i B_i$. Per tant:

$$P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = P(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \sum_{n \geq 1} P(B_i) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N P(B_n) = \lim_{N \to \infty} P(A_N)$$

L'altre és demostra passant al complementari. □

Teorema 5. *Siguin $A_1, \dots, A_r \in \mathscr{A}$. Per $I \subset [r]$, posem: $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ i $S_k = \sum_{I \subset [r] \ |I| = k} P(A_I)$. Aleshores,*

$$P(\bigcup_{i=1}^r A_i) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} S_k$$

Demostració. Per inducció, el cassos $r = 1, 2$ són fàcils. Aleshores, pel cas inducctiu fa falta el cas $r - 1$ i el cas 2. □

Proposició 6. *Desigualtats de Bonferroni. Sigui $M_T = \sum_{k=1}^T (-1)^{k+1} S_k$. Aleshores, si:*
1. T és senar $\implies P(\bigcup_{i=1}^r A_i) \leq M_T$.
2. T és parell $\implies P(\bigcup_{i=1}^r A_i) \geq M_T$.

Demostració. La demostració per inducció és semblant a l'anterior. □

1.3 La probabilitat condicionada

Sigui $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espai de probabilitat. Prenem $B \in \mathscr{A}$ amb $P(B) > 0$. Volem recalcular la probabilitat P dels successos sabent que ha passat B.

Definició 7. Si $B \in \mathscr{A}$ amb $P(B) > 0$ i $A \in \mathscr{A}$, la probabilitat de A condicionada a B és

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

Observació 8.

1. $P(A|B)$, a priori, pot ser major o menor a $P(A)$.
2. Fixat B, $P_B : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ definida com $P_B(A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$, dona una funció de probabilitat en $(\Omega, \mathscr{A})$. (També ho és en $(\Omega, \mathscr{A}_B = \{A \bigcap B : A \in \mathscr{A}\})$).

Sigui ara $B_1, \cdots, B_n$ una partició de Ω (amb $B_i \in \mathscr{A}$ i $P(B) > 0$). Llavors, la llei de les probabilitats totals és

$$P(A) = P(A \bigcap \Omega) = P(A \bigcap (\bigcup B_i)) = P(\bigcup (A \bigcap B_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \bigcap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Exemple 6. Ruïna del jugador (Huygens S.XVII). Sigui J un jugador que comença amb un capital de $k \geq 1$, el seu objectiu és arribar a $N \geq k$ i s'arruina si arriba a 0. En cada torn guanya 1 amb probabilitat 1/2 i perd 1 amb probabilitat 1/2.

Sigui $B =$"a la 1a jugada, +1ï $R_k =$"s'ha arruinat amb capital inicial k". Aleshores,

$$P(R_k) = P(R_k|B)P(B) + P(R_k|B^c)P(B^c) = \frac{1}{2}P(R_{k+1}) + \frac{1}{2}(R_{k-1})$$

Definint $p_k = P(R_k)$, aleshores, obtenim l'eqüació de recurréncia: $p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$ amb $p_0 = 1$ i $p_N = 0$.

Per resoldre'l, fem $\frac{1}{2}(p_k - p_{k-1}) = \frac{1}{2}(p_{k+1} - p_k)$, definim $b_k = p_k - p_{k-1}$ que per la própia recurrència es compleix que $p_k = p_{k-t} + tb_{k-t+1}$. I veien que la solució és $p_k = 1 - \frac{k}{N}$ que es pot comprovar per inducció.

Pregunta: Qui era $(\Omega, \mathscr{A}, P)$?

Proposem $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots) : w_i \in \{0, 1\}\}$, a cada successió li associem un real (no és injectiva, però només es repeteix en alguns racionals). $P(A) = \mu(\phi(A))$ on μ és la mesura de Lebesgui a $[0, 1]$ i *phi* passa de $(w_1, w_2, \ldots)$ a $0.w_1w_2\ldots$, llavors $\mathscr{A}$ és el conjunt de conjunts que van a parar a borelians per *phi*)

Teorema 9. *Bayes.* $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum P(A|B_i)P(B_i)}$

Demostració. Bé del fet que $P(A \bigcap B_i) = P(B_i \bigcap A)$ i escrivint la definició de probabilitat condicionada de dues maneres diferents. I després, utilitzant el lemma de les probabilitats totals. □

1.4 Independència

R.Durret "Aquí acaba la teoria de la mesura i comença la probaibilitat".

Definició 10. En $(\Omega, \mathscr{A}, P)$", dos scuccessos $A, B \in \mathscr{A}$ són independents si $P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Observació 11. *Si $P(B) > 0$, $P(A|B) = \frac{P(A \bigcup B}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.*

Exercici: Proveu que el conjunt buit i el total son independents amb qualsevol altre succés.

Demostració. La probabilitat del buit sempre és 0 i si intersequem quelcom amb el buit sempre el dona el buit, per tant, sempre es compleix que $0 = P(\emptyset)P(A) = P(\emptyset \bigcap A) = 0$.

Com que la probabilitat del total és 1, succeix el següent: $P(A)P(\Omega) = P(A) = P(A \bigcap \Omega)$. □

Exercici: Proveu que si A i B són independents $\Longrightarrow$ que amb o sense complementaris també ho són.

Demostració. Només cal comprovar que A^c i B són independents, perquè veure que A i B^c són independents és el raonament simétric i per obtenir que A^c i B^c cal fer el mateix raonament dues vegades.

Simplement fem $P(A^c)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) - P(A \bigcap B) = P(A^c \bigcap B)$. $\square$

Definició 12. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ és una col·lecció de successis, són independts si $\forall J \subseteq I$, $|J| < \infty$, $P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{i \in K} P(A_j)$.

1.5 Espais productes

Tenim $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, P_1)$ i $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, P_2)$ dos espais de probabilitat. Volem un espai en $\Omega_1 \times \Omega_2$ tal que $P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)$ ($\forall A_i \in \mathscr{A}_i$ per $i = 1, 2$). La teoria de la mesura ens diu que es pot... I la σ-àlgebra. Com volem garantir que hi hagi $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathscr{A}_i, i = 1, 2\}$. Tot i així, això no tñe perquè ser un σ-àlgebra. Llavors agafem la més petita que ho contingui. Com a $\mathscr{A}$ agafem $\sigma(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$ és a dir, la generada. La probabilitat ? Volem que $P(A_1 \times A_2) = P(A_1)P(A_2)$.

Definició 13. Una àlgebra i una premesura són una σ-àlgebra i un mesura (respectivament, però només garanteix la unió finita i la suma finita.

Teorema 14. *Teorema d'extensió. Sigui p_0 una premesura en una álgebra $\mathscr{A}_0$. Aleshores existeixen una σ-àlgebra $\mathscr{A}^* \subset \sigma(\mathscr{A}_0)$ i una mesura p^* tal que p^* coincideix amb p_0 en $\mathscr{A}_0$. A més, si p_0 és finita, p és única.*

Com s'aplica?

$\mathscr{A}_0 = \{A \subset \Omega_1 \times \Omega_2|$ on A és unió finita d'elements de $\mathscr{A}_1 \times A_2\}$. (Caldria comprovar que és àlgebra i la unió es pot prendre disjunta i finita).

Exemple 7. Problema de l'agulla del comte Buffon (s. XVIII). I es pregunta, quina és la probabilitat que l'agulla talli alguna de les línies?

Sigui d la distància del punt mig a la recta més propera i sigui α l'angle amb la vertical. Aleshores, la longitud del catet $\frac{l}{2} \sin \alpha$. Tallarà si $d \leq \frac{l}{2} \sin \alpha$.

Així que com a espai mostral podem agafar $\Omega = [0, \pi) \times [0, \frac{L}{2}]$ la primera correspon a α i la segona a d. Amb la mesura de Lebesgue (volem uniformitat). Que finalment, calculem l'àrea sota la curva $l/2 \sin \alpha$ i dividim pel total, dona $\frac{2l}{L\pi}$.

2 Variables aleatòries

3 V.a Discretes

4 V.a Contínues

5 Funcions característiques i famílies exponencials

6 Convergència de variables aleatòries