Solucions dels problemes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

1 Nocions bàsiques

En aquest apartat apareixen problemes relacionats amb les nocions bàsiques de connexió i distancia. A més, de problemes vinculats amb les formes matricials d'un graf.

Problema 1: *El nombre de vèrtexs de grau senar en un graf $G = (V, E)$ és parell.*

Solució:

Aquest problema és el clàssic *lema de les encaixades*, col·lorari de la següent fórmula (que va bé recordar).

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$$

En paraules diu que la suma dels graus dels vèrtexs és igual a dos cops el nombre d'arestes. Aquest fet és evident perquè cada aresta és adjacent a exactament dos vèrtexs, quan sumem els graus la comptarem dues vegades. Ara, el problema ens motiva a distingir entre vèrtexs de grau senar i de grau parell. Siguin U_1 els vèrtexs de grau senar i U_2 els de grau parell ($V = U_1 \uplus U_2$). La fórmula es pot escriure com:

$$\sum_{u \in U_1} d(u) = 2|E| - \sum_{u \in U_2} d(u)$$

On a la dreta només apareixen termes parells, per tant el resultat és parell. I a l'esquerra hi ha una suma de $|U_1|$ termes senars. Sabent que aquesta ha de ser parell, n'hi ha d'haver un nombre parell. És a dir, $|U_1|$ és parell, que és el que volíem veure.

Problema 2: *Qualsevol graf amb $n \geq 2$ vèrtexs, en té dos del mateix grau.*

Solució:

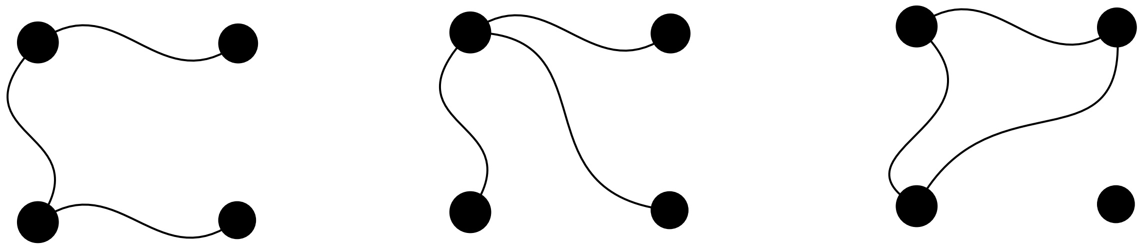
El conjunt de possibles graus d'un graf de n vèrtexs és subconjunt de $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ (de cardinal n), ja que cada vèrtexs pot no tenir cap aresta o tenir-ne alguna fins a arribar al màxim que seria ser adjacent amb els altres $n-1$ vèrtexs. Tot i això, en un graf no hi pot haver alhora un vèrtex de grau 0 (no és adjacent amb cap altre) i un vèrtex de grau $n-1$ (és adjacent amb tots els altres). Per tant, hi ha, com a molt, $n-1$ possibles graus diferents en un graf de n vèrtexs. Aleshores, pel *Principi del Colomar*, existeixen dos vèrtexs que tenen el mateix grau, que és el que volíem demostrar.

Problema 3: *Quants grafs hi ha de 4 vèrtexs i 3 arestes? Quants n'hi ha no isomorfs?*

Solució:

Anem a veure primer que el nombre de grafs amb n vèrtexs i m arestes és $\binom{\binom{n}{2}}{m}$. Això es deu al fet que les arestes d'un graf $G = (V, E)$ d'ordre n (és a dir, $|V| = n$) és subconjunt de $\binom{V}{2}$ i per cada subconjunt E d'arestes el graf és diferent i no n'hi ha més a part d'aquests. Si fixem que $|E| = m$, equival a dir que dels $\binom{V}{2}$ se'n trien m. D'on surt que el nombre de grafs d'ordre n i mida m és $\binom{\binom{n}{2}}{m}$. Pel cas $n = 4$ i $m = 3$, n'hi ha $\binom{\binom{4}{2}}{3} = \binom{6}{3} = 20$.

En general, és difícil trobar tots els grafs no isomorfs de n vèrtexs i m arestes. Però per casos petits és pot fer, per $n = 4$ i $m = 3$ tenim:



Primer distingim entre que el graf sigui connex o no. Si no és connex, l'única possibilitat és que tingui només dues components connexes. Una amb tres vèrtexs i tres arestes, i l'altre un vèrtex aïllat (això dona el tercer de la imatge). Després, pel cas connex, fem servir que necessàriament un vèrtex té almenys grau 2 (dalt esquerra amb dalt dreta i baix esquerra). Falta per determinar una aresta que ha de ser adjacent amb el vèrtex no connex i unir-lo amb un dels altres tres, dos d'ells donen el mateix graf isomorf, per tant, només compten per un. Així que, si el graf és connex, només hi ha dos casos, el camí (el primer) i l'estrella (el segon).

Problema 4: *Siguin a_n el nombre de grafs d'ordre n i b_n el nombre de grafs no isomorfs d'ordre n. Proveu que $\log_2 a_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$ i $\log_2 b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n \log n)$. En particular, $\log b_n \sim \log a_n$, $(n \to \infty)$.*

Solució:
Sabem que hi ha $2^{\binom{n}{2}}$ grafs d'ordre n. Perquè per a cada dos vèrtexs pot haver-hi o no aresta. Llavors, $\log_2 a_n = \binom{n}{2} = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$. Ara, b_n no el podem calcular explícitament però sí donar una fita, de fet, ja tenim una fita superior que és a_n. Podem deduir una cota inferiorment de b_n de la següent manera. Dos grafs són isomorfs si hi ha una permutació dels vèrtexs que dona el mateix graf, però no totes les permutacions són vàlides. Per tant, $b_n \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$, això assegura que $\log b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(\log n!)$. Com $\mathcal{O}(\log n!) = \mathcal{O}(n \log n)$, hem obtingut el que volíem. La segona part, es demostra directament de les fórmules que ja hem deduït.

Problema 5: *El graf complementari $\bar{G}$ de $G = (V, E)$ és $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.*

(a) Proveu que $G \cong G'$ si i només si $\bar{G} \cong \bar{G}'$.

(b) Un graf G és autocomplementari si és isomorf a $\bar{G}$. Proveu que el seu ordre és $n \equiv 0, 1 \pmod 4$. Comproveu que per a $k = 4, 5$ hi ha grafs autocomplementaris.

(c) Proveu que, si $n \equiv 1 \pmod 4$, i G és un graf autocomplementari d'ordre n, aleshores té un nombre senar de vèrtexs de grau $(n-1)/2$.

(d) Proveu que un graf autocomplementari té diàmetre 0, 2 o 3.

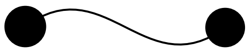
Solució:

(a) Com el complementari del complementari de G és G, només cal demostrar una de les implicacions. Ara, G i G' són isomorfs si i només si existeix una permutació σ dels vèrtexs que manté les arestes. És a dir, $\forall u, v \in V$; $\{u, v\} \in E$ si i només si $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in E'$. Aquesta mateixa permutació serveix per veure que $\bar{G} \cong \bar{G}'$. En efecte, $\forall u, v \in V$; $\{u, v\} \in \bar{E}$ si i només si $\{u, v\} \notin E$ si i només si $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \notin E'$ si i només si $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in \bar{E}'$. Que és el que volíem demostrar

(b) Tot parell de grafs isomorfs tenen el mateix nombre d'arestes, en particular, si G és un graf autocomplementari d'ordre n, tindrà exactament la meitat de totes les possibles arestes que pot tenir un graf d'ordre n. És a dir, $|E| = \binom{V}{2}/2 = \frac{n(n-1)}{4}$. Com ha de ser un nombre enter, necessàriament $n \equiv 0, 1 \pmod 4$. Pel cas $n = 4$ el camí és autocomplementari i pel cas $n = 5$ el cicle és autocomplementari.

(c) Si $n \equiv 1 \pmod 4$, n és senar. Ara, en un graf G, els vèrtexs de grau k tenen grau $n - k - 1$ a G', perquè a G' són adjacents només als vèrtexs que no ho era a G. Així doncs, si G és autocomplementari, ha de tenir el mateix nombre de vèrtexs de grau k que de grau $n-k-1$, ja que sabem que hi ha una permutació que porta uns als altres. Això ens diu que podem agrupar els vèrtexs de grau k i de grau $n-k-1$ per formar conjunts amb un nombre parell de vèrtexs. Excepte per $k = \frac{n-1}{2}$ que són els vèrtexs que tenen el mateix grau en G com en G'. Per tant, per aquesta k, els vèrtexs de grau k i de grau $n-k-1$ són els mateixos. De fet, com hem agrupat els vèrtexs en conjunts amb un nombre parell d'elements excepte els de grau $\frac{n-1}{2}$ i com hi ha un nombre senar de vèrtexs; necessàriament hi ha d'haver un nombre senar de vèrtexs de grau $\frac{n-1}{2}$. Que és el que volíem demostrar.

(d) Anem a veure primer que per qualsevol graf G amb diàmetre més gran o igual que tres, $\bar{G}$ té grau més petit o igual que 3. Considerem el subgraf camí de G que té per extrems dos vèrtexs a distància 3, sabem que no hi ha més arestes entre ells, llavors a $\bar{G}$ tots estan a distància com a màxim 3 (en particular, els extrems són adjacents a $\bar{G}$. Si considerem un vèrtex que no pertany al camí, com aquest no pot ser adjacent als dos extrems alhora, en el complementari estarà enllaçat amb almenys un d'ells i, per tant, en $\bar{G}$ estarà a distància com a molt tres de tots els vèrtexs del camí. Per últim, considerem la distància entre dos vèrtexs exteriors al camí. Si no són adjacents, en el complementari estaran a distància u.



En el cas que sí que siguin adjacents, com abans, cada un dels vèrtexs exteriors al camí no poden ser adjacents als dos extrems del camí alhora. Llavors, en $\bar{G}$ la distància màxima que tindran els dos vèrtexs exteriors és tres. Per tant, com tots els vèrtexs queden a distància menor o igual que tres, el diàmetre de $\bar{G}$ és menor o igual que tres. Si apliquem aquest resultat a un graf autocomplementari, aquest ha de tenir diàmetre menor o igual que tres. En efecte, com el complementari és isomorf a ell mateix, i dos grafs isomorfs tenen el mateix diàmetre, G no pot tenir diàmetre quatre o més. Ara, tampoc pot tenir diàmetre 1, perquè seria un graf amb almenys dos vèrtexs, els graus dels quals són tots 1 o 0, llavors els vèrtexs del graf complementari tenen graus n i $n-1$ (>0). Descartem que pugui tenir vèrtexs de grau 0. Tampoc pot tenir de grau u perquè resultaria que $n-1=1$ és a dir $n=2$ i trivialment (o per l'apartat (b)) no hi ha grafs autocomplementaris de grau 2. Només queda la possibilitat que els grafs autocomplementaris tinguin diàmetre 0, 2 o 3. Que és el que volíem veure.

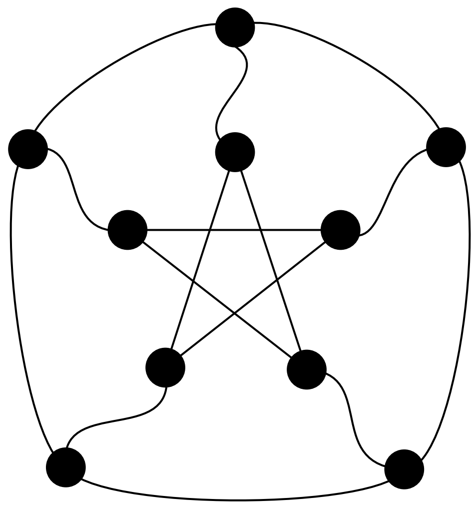
Un exemple de cada: de diàmetre 0 només hi ha el graf d'ordre 1, de diàmetre 2, tenim el cicle de 5, i de grau 3, tenim el camí de 4.

Problema 6: *Considereu el graf d'ordre $n > 2$ que té per vèrtexs $V = \binom{[n]}{k}$, per un k entre 1 (inclòs) i $n/2$ (no inclòs), i té per arestes $E = \{uv : u \bigcap v = \emptyset\}$. Determineu l'ordre, la mida i el grau dels vèrtexs de G. Per a $n = 5$, $k = 2$ dibuixeu el graf que s'obté. Proveu que, per a $k > n/3$, el graf no té triangles.*

Solució:

Com l'ordre és el nombre de vèrtexs $|V| = |\binom{[n]}{k}| = \binom{n}{k}$. La mida és el nombre d'arestes que té G, i la podem deduir a partir del grau dels vèrtexs. Cada vèrtex és adjacent a aquells amb qui no comparteix cap element de $[n]$. Així que si $|v| = k$, v serà adjacent a $\binom{n-k}{k}$ vèrtexs, que és el nombre de subconjunts de k elements que es poden fer de $[n]$ havent descartat k dels elements. Ara, fent servir que la suma dels graus és dos vegades la mida. $|E| = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{k}$.

Pel cas $n = 5$ i $k = 2$, resulta el *Graf de Petersen*.



Per $k > n/3$, provem que no hi ha triangles per absurd. Si hi hagués tres vèrtexs adjacents entre ells v_1, v_2 i v_3, caldria que la intersecció dos a dos fos buida. Així que, $|v_1 \bigcup v_2 \bigcup v_3| = 3k$ i per altra banda, junts no poden tenir més elements que dels que hi ha a $[n]$, així que per força $3k \leq n$ que contradiu la hipòtesi de l'enunciat. Per tant, hem acabat, per $k > n/3$ no hi ha triangles.

Problema 7: *Una seqüència* $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ *d'enters és gràfica si hi ha un graf* G *amb* $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *tal que* $d_i = d(v_i), 1 \leq i \leq n$. *Proveu que la seqüència*

$$1 \leq k = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

és gràfica si i només si, la seqüència

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \ldots, d_n$$

és gràfica.

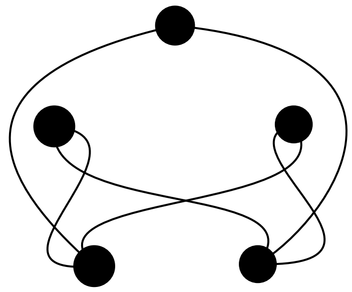
Solució:
Si la primera seqüència és gràfica, existeix un graf G_1 amb els graus pertinents. Anem a veure que existeix un graf tal que el vèrtex de grau més petit és adjacent als següents k més petits. Fem el següent per tot i entre 2 i $k+1$. Si v_1 és adjacent a v_i, passem al següent. Altrament, com v_1 no és adjacent a un dels $k+1$ primers, segur que és adjacent a un dels $n-k+1$ últims, diguem-li v_j, i com v_i té grau almenys 1, és adjacent a un altre vèrtex del graf (sigui quin sigui), anomenem-lo v_l. Llavors construïm G_i a partir de G_{i-1}, traient les arestes $v_1 v_j$ i $v_i v_l$ i posant les arestes $v_1 v_i$ i $v_j v_l$. Amb aquesta construcció G_i té la mateixa seqüència d'enters pels graus dels seus vèrtexs. Iterant d'aquesta manera ens assegurem que amb k iteracions existirà un graf G_{k+1} amb la seqüència donada tal que v_1 és adjacent als següents k vèrtexs de grau més petit. Ara, sigui G' el graf que resulta de treure v_1 i totes les arestes incidents a ell de G_{k+1}. Aleshores, per com està construït, G' compleix que té per seqüència $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \ldots, d_n$ que és el que volíem veure.

Per fer l'altra implicació, suposem que existeix un graf G construït amb la segona seqüència, sigui G' el graf resultant d'afegir un vèrtex v_1 adjacent als k primers vèrtexs de G. Aleshores, G' té per seqüència de graus $1 \leq k = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, per tant aquesta seqüència és gràfica, que és el que volíem veure.

Problema 8: *Determineu quina de les seqüències és gràfica: (a) (3,3,2,2,2); (b) (4,4,3,2,1); (c) (4,3,2,2,2); (d) (3,3,3,2,2); (e) (3,3,3,3,2); (f) (5,3,2,2,2).*

Solució:

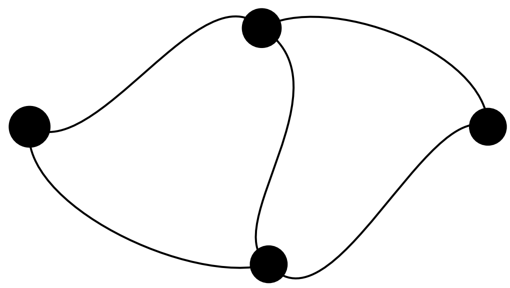
(b) no és gràfica perquè si hi ha dos vèrtexs de grau 4 en un graf d'ordre 5, no hi pot haver un vèrtex de grau 1.
(c) i (d) tenen un nombre senar de vèrtexs de grau senar, pel problema 1, no pot ser gràfica.
(f) té un vèrtex de grau 5, si no considerem multigrafs, el grau màxim d'un graf d'ordre 5 és 4, per tant la seqüència no és gràfica.
(a) és el de la imatge i (e) és com (a) amb una aresta entre els dos vèrtexs del mig:



Problema 9: *Considerem el graf complet K_n amb conjunt de vèrtexs $[n]$. Calculeu el nombre de subgrafs de mida 5 que contenen exactament dos triangles.*

Solució:

L'única manera que hi hagi dos triangles en un graf de mida 5 és que els dos triangles comparteixin una aresta, és a dir, que el graf sigui com el de la imatge, amb la possibilitat que hi hagi altres vèrtexs aïllats.



Ens fixem que escollint de K_n quins seran els dos vèrtexs del mig $\binom{n}{2}$ i quins seran els dos dels costats $\binom{n-2}{2}$ (entre els de cada tipus són intercanviables) queda determinat el subgraf, perquè ja sabem quines arestes hi haurà. Ara, com poden haver-hi vèrtexs aïllats hem de considerar que cada un dels $n-4$ vèrtexs que queden pot ser-hi o no ser-hi, i donaria un subgraf diferent. Tot plegat, hi ha $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}2^{n-4}$ subgrafs de K_n de mida 5 que contenen exactament dos triangles.

Problema 10: *Sigui G un graf d'ordre $n \geq 1$ i mida m que no té triangles.*

(a) Demostreu que si u i v són vèrtexs de G adjacents, aleshores $d(u) + d(v) \leq n$.

(b) Proveu que si $n = 2k$, aleshores $m \leq k^2$.

(c) Proveu que $m \leq n^2/4$.

Solució:

(a) Si u i v són adjacents, com no hi pot haver triangles $N(u) \bigcap N(v) = \emptyset$. Per tant, $d(u) + d(v) = |N(u)| + |N(v)| = |N(u) \bigcup N(v)| \leq n$. Que és el que volíem veure.

(b) Aquest apartat es demostra amb el mateix argument que l'apartat (c), de fet n'és un col·lorari.

(c) Ho provem per inducció sobre el nombre de vèrtexs. Si $n = 1$ no hi ha arestes, $m = 0$, així que la proposició és certa. Si $n = 2$, només hi pot haver una aresta així que la proposició també és certa. Per $n > 2$, considerem el subgraf de G, G', resultat de treure dos vèrtexs adjacents i totes les arestes incidents a ells (si no n'hi ha, $m = 0$ i hem acabat). Ara, com les arestes de G, són les de G' més les que tenien u i v, i fent servir la hipòtesi d'inducció sobre G' i el primer apartat, deduïm que $m = |E(G')| + d(u) + d(v) - 1 \leq (n-2)^2/4 + n - 1 = n^2/2$. Que és el que volíem demostrar.

Problema 11: *L'excentricitat d'un vèrtex v en un graf connex G és la màxima distància de v a un altre vèrtex de G. El radi $r(G)$ de G és la mínima excentricitat dels seus vèrtexs. Proveu que $r(G) \leq diam(G) \leq 2r(G)$. Proveu que les desigualtats són justes.*

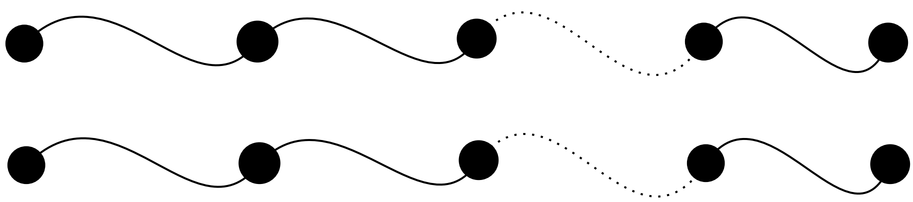
Solució:

Podem veure la definició del radi d'un graf com $r(G) = \min_{v \in V} \max_{u \in V} d(u, v)$ i la de diàmetre com $diam(G) = \max_{v \in V} \max_{u \in V} d(u, v)$. Així que, com el màxim no pot ser més petit que el mínim, $r(G) \leq diam(G)$ i es pot donar la igualtat, per exemple, en els grafs cíclics. Per la segona desigualtat considerem els següents vèrtexs, siguin u i v dos vèrtexs tals que $d(u, v) = diam(G)$ (sabem que han d'existir), i sigui w un vèrtex tal que $r(G) = e(w)$, és a dir, el vèrtex central. Aleshores, per la desigualtat triangular i fent servir que $\forall x \in V d(w, x) \leq e(G)$, tenim que $diam(G) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq 2r(G)$. Que és el que volíem demostrar. Per exemple, en P_5 es dona la igualtat.

Problema 12: *Sigui G un graf connex. Proveu que, si l és la llargada màxima d'un camí, dos camins de llargada l intersequen en algun vèrtex.*

Solució:

Ho demostrarem per absurd, suposem que hi ha dos camins, de llargada l, amb vèrtexs diferents.



Siguin v_1 i u_1 els vèrtexs extrems del primer camí, i siguin v_2 i u_2 els vèrtexs extrems del segon camí. Com el primer camí no es pot allargar més (sinó la distància màxima no seria l) tots els veïns tant de v_1 com de u_1, es troben dins el primer camí i, el mateix passa per v_2 i u_2 amb el segon camí. Aleshores, com el graf és connex, hi ha una successió de vèrtexs que comença amb v_1 i acaba amb u_2, fent servir l'observació d'abans podem assegurar que existeixen els vèrtexs w_1 en el primer camí i w_2 en el segon tals que hi ha una successió de vèrtexs que els connecta que no formen part de cap dels camins. És a dir, els dos camins estan enllaçats pel mig per almenys una aresta. Aleshores, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que w_1 està més o igual de lluny de v_1 que de u_1 dintre del primer camí. I, de la mateixa manera, podem suposar que w_2 està més o igual de lluny de u_2 que de v_2 dintre del segon camí (si cal, podem canviar el nom als vèrtexs). Així que existeix un camí que comença a v_1, passant pel primer camí arriba a w_1 (almenys $l/2$ vèrtexs), de w_1 va a w_2, per cap vèrtex dels camins, i els connecta almenys una aresta. Per últim, des de w_2, passant pel segon camí acaba a u_2 (almenys $l/2$ vèrtexs). Per tant, hem vist que existeix un camí de llargada com a mínim $l + 1$ i això contradiu la hipòtesi que el camí de llargada màxima sigui l. Així que, si G és connex, els dos camins han de compartir almenys un vèrtex. Que és el que volíem demostrar.

Problema 13: *Doneu les matrius d'adjacència i d'incidència (amb una ordenació adequada dels vèrtexs i de les arestes) de cadascun dels següents grafs.*

(a) El graf complet K_4.

(b) El camí P_5.

(c) El cicle C_6.

(d) El graf bipartit complet $K_{3,3}$.

Solució:
Totes les ordenacions són les coherents. Les matrius d'adjacència i d'incidència són, respectivament:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 14: *Sigui G un graf amb conjunt de vèrtexs $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i sigui A la seva matriu d'adjacència, amb els vèrtexs ordenats segons els subíndexs. Demostreu les afirmacions següents.*

(a) Si J és la matriu quadrada d'ordre n amb totes les entrades iguals a 1, $(AJ)_{i,i} = d(v_i)$, $1 \leq i \leq n$.

(b) La traça de A^2 és el doble de la mida de G.

(c) La traça de A^3 és $6t$, on t és el nombre de triangles que hi ha a G.

Solució:

(a) A $(AJ)_{i,i}$ tenim la suma de la fila i-éssima de la matriu d'adjacència A, que component a component diu si v_i és adjacent a cada un dels altres vèrtexs (amb un 1) o no (amb un 0). Així que per definició, $(AJ)_{i,i}$ és el nombre d'arestes incidents a v_i, també conegut com grau de v_i o $d(v_i)$. Que és el que volíem provar.

(b) $(A^2)_{i,i} = (AJ)_{i,i}$, en efecte, $(AJ)_{i,i}$ és la suma de la fila i-èssima de A. Mentre que $(A^2)_{i,i}$ per ser A una matriu simètrica, si fem el producte escalar de la fila i-èssima amb la columna i-èssima és com si elevéssim el quadrat els termes de la fila i-èssima i els suméssim. Com només hi ha 0 i 1 sumar els quadrats és com sumar sense quadrats i, per tant, és igual a $(AJ)_{i,i}$. Ara, per l'apartat (a), tenim que la traça de A^2 és la suma dels graus tots els vèrtexs de G, i per tant, dues vegades la mida de G. Que és el que volíem demostrar.

(c) Recordem la proposició que diu: $(A^k)_{i,j}$ és el nombre de camins diferent de llargada k que hi ha per anar de v_i a v_j. Aleshores, $(A^3)_{i,i}$ compta camins de llargada 3 que comencen i acaben a v_i, és a dir, triangles que contenen a v_i. Com el mateix triangle pot ser comptat per 6 camins diferents (permutacions de 3 elements), quan sumem la traça de A^3 comptarem 6 vegades el nombre de triangles que hi ha a G. Que és el que volíem veure.

2 Arbres

En aquest apartat apareixen problemes relacionats amb les propietats dels arbres, seqüències de Prüfer, arbres binaris, ...

Problema 15: *Un graf acíclic és un bosc. Proveu que si F és un bosc, cada component connexa és un arbre, i si F té n vèrtexs i k components aleshores té $n-k$ arestes.*

Solució:

Cada component connexa és un subgraf connex i acíclic, per definició, és un arbre. Si $F=(V,E)$ és un bosc té per components connexes els arbres $T_1,\dots,T_k$, és a dir, no comparteixen vèrtexs i no hi ha arestes entre ells. Utilitzant que un arbre d'ordre n té $n-1$ arestes:

$$|E| = \sum_{j=1}^{k} |E(T_j)| = \sum_{j=1}^{k} |V(T_j)| - 1 = |V| - k = n - k$$

Problema 16: *Proveu que els boscos són els únics grafs tals que cada subgraf connex és un subgraf induït.*

Solució:

Recordem que un subgraf induït de G és aquell que té triats uns vèrtexs, conté totes les arestes entre ells. Anem a veure que si G és un graf tal que cada subgraf connex és un subgraf induït, llavors cada component connexa és un arbre i, per tant, G és un bosc. Per cada component connexa, agafem un subgraf T connex format per tots els vèrtexs d'aquesta component connexa. Si consideréssim els subgrafs formats sempre a partir de T amb una aresta qualsevol menys, com aquest graf no és induït, per la hipòtesi, no seria connex. Llavors T és minimalment connex, per definició, un arbre. Que és el que volíem demostrar.

Problema 17: *Sigui T un arbre de n vèrtexs.*

(a) Proveu que el nombre de fulles és $2+\sum_{v:d(v)\geq 3}(d(v)-2)$.

(b) Proveu que el nombre de fulles és almenys $\Delta(T)$.

Solució:

(a) Siguin V_1 els vèrtexs que són fulla (grau 1) i V_2 els que no ho són. Aleshores, recordant que dues vegades el nombre d'arestes d'un graf és la suma dels graus dels vèrtexs i que un arbre d'ordre n té $n-1$ arestes. Tenim:

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) \\ 2|V_1| + 2|V_2| - 2 &= |V_1| + \sum_{v\in V_2} d(v) \\ |V_1| &= 2 + \sum_{v\in V_2}(d(v)-2) \\ |V_1| &= 2 + \sum_{v:d(v)\geq 3}(d(v)-2) \end{aligned}$$

Que és el que volíem veure.

(b) $\Delta(T)$ és el grau màxim que té l'arbre. A partir del resultat de l'apartat anterior, utilitzant que com a mínim hi ha un vèrtex amb grau $\Delta(T)$ tenim:

$$|V_1| \geq 2 + (\Delta(T)-2) + \sum_{v:d(v)\geq 3}^{\Delta(T)-1} (d(v)-2) \geq \Delta(T)$$

Que és el que volíem veure.

Problema 18: *Proveu que un graf G amb grau mínim $\delta = \delta(G)$ contè com a subgrafs tots els arbres de $\delta + 1$ vèrtexs.*

Solució:
Primer anem a veure que, si per cada un dels arbres amb n vèrtexs, construim n arbres d'ordre $n + 1$ de la següent manera: afegim un vèrtex nou adjacent a cada un dels vèrtexs, aleshores, obtindrem (encara que potser repetits) tots els arbres amb $n + 1$ vèrtexs. Aquest fet és evident ja que, tot arbre té almenys dues fulles, si en traiem una, continuarà sent un arbre. En el nostre cas, si hi hagués un arbre T de $n + 1$ vèrtexs que no l'haguéssim obtingut amb aquest procediment, si traiéssim una de les fulles (adjacent a $v \in V(T)$) segur que l'arbre de n vèrtexs resultant estaria entre els que teniem abans (perquè hi són tots), i quan li hagués tocat al vèrtex v, l'hi afegiriem un vèrtex i obtindriem T. Així que sí obtenim tots els arbres amb $n + 1$ vèrtexs.

Ara, procedim a resoldre el problema per inducció. Si un graf G té grau mínim $\delta = 0$, té almenys vértex i, per tant, tots els arbres amb 1 vèrtex. Si té grau mínim $\delta > 0$, com tots els graus tenen almenys grau δ, també podem dir que tenen almenys $\delta - 1$ arestes i, per hipòtesi d'inducció, G conté tots els arbres amb δ vèrtexs. Però també tenim que per tot arbre de δ vèrtexs i per tot vèrtex de l'arbre, aquest és adjacent a un vèrtex de G que no pertany a l'arbre. En efecte, com a l'arbre només hi ha δ vèrtexs i el grau mínim és δ, cada vèrtexs és adjacent a almenys un vèrtexs exterior. Aleshores, hem vist que G compleix els requisits de l'observió prèvia que hem fet. Així que, aplicant el procediment obtindrem tots els arbres amb $\delta + 1$ vèrtexs i seran subgrafs de G. Que és el que volíem veure.

Problema 19: *Proveu que el camí P_n és l'únic arbre amb dues fulles i l'estrella $K_{1,n-1}$ és l'únic arbre amb $n-1$ fulles. Quants arbres no isomorfs hi ha amb tres fulles? I amb $n-2$ fulles?*

Solució:
Si un arbre té dues fulles, pel problema 17(b), el grau màxim és 1 o 2, aixó corresponent únicament al camí. Com un arbre d'ordre n té $n - 1$ arestes, si té $n - 1$ fulles, ha de tenir un vèrtexs de grau $n - 1$ adjacent a totes les fulles. Per tant, correspont a l'estrella.

Un arbre amb 3 fulles té exactament un vèrtex de grau 3, perquè si no en tingués seria un camí, i si en tingués més d'un tindria més de tres fulles. Llavors, a partir dels vèrtexs adjacents al vèrtex de grau 3, només hi ha camins. Així que, com hi ha $n - 4$ vèrtexs restants i s'han de col·locar en 3 llocs no diferenciats, són particions de $n - 4$ en tres parts. Llavors hi ha $p_3(n - 4)$ arbres no isomorfs (d'ordre n) amb tres fulles. Ara, si hi ha $n - 2$ fulles, per força, hi ha d'haver una aresta que és incident als dos vértexs que no són fulles. Només queda per determinar a quin dels dos són adjacents les fulles. Com n'hi ha $n - 2$, i almenys n'han de tenir una cadascú, queden $n - 4$ per determinar. Com hem de comptar arbres no isomorfs, només hi ha $\lceil \frac{n-4}{2} \rceil$.

Problema 20: *Un vèrtex v d'un graf connex G és central si la seva excentricitat és el radi de G. Proveu que un arbre té un o dos vèrtexs centrals.*

Solució:
Ho provarem per inducció sobre el nombre de vèrtexs n de l'arbre T. Si $n = 1, 2$; T té un vèrtex central o dos. Per $n > 2$, fem servir que el centre mai estarà a una fulla i, volem veure que si T' és l'arbre T sense les fulles, llavors els dos tenen els mateixos vèrtexs centrals. Això és fàcil de veure, ja que, l'excentricitat d'un vèrtex v és $e(v) = \max_{u \in V(T)} d(v, u)$. Així que, el vèrtex (o vèrtexs) on es compleixi aquest màxim ha de ser per força una fulla, perquè sinó podriem fer, com a mínim, un pas més i trobaríem un vèrtex més llunyà. Això ens diu que, l'exentricitat de cada vèrtex a T' ($e_{T'}(v)$) és la que tenia a T ($e_T(v)$) menys 1. En efecte, claramant $e_{T'}(v) \leq e_T(v)$, no pot ser igual perquè hem tret les fulles i sí que és menys 1 perquè es pot dona en el vèrtex abans de la fulla on és donava el màxim. Amb tot això, hem vist que l'ordre dels vèrtexs (no fulla) en funció de la seva excentricitat es manté, llavors els que són centre de l'arbre ho seguiran sent. Com els arbres d'ordre $n > 2$ tenen almenys dues fulles, T' té com a molt $n - 2$ vèrtexs, per hipòtesi d'inducció, tindrà un o dos vèrtexs centrals. I com hem vist que té els mateixos que T, T tindrà un o dos vèrtexs centrals. Que és el que volíem veure.

Problema 21: *Sigui* $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ *una seqüència d'enters. Proveu que existeix un arbre* T *amb* $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *tal que* $d(v_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n$ *si i només si* $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

Solució:
La implicació cap a la dreta es demostra a partir dels fets: la suma dels graus d'un graf és dues vegades la seva mida i un de l'arbre d'ordre n té $n-1$ arestes.

La implicació cap a l'esquerra, la podem deduir gràcies a un col·lorari de Prüfer, que diu que per tota paraula $p \in [n]^{n-2}$ hi ha un arbre d'ordre n, on el vèrtex i té grau 1 més el nombre de vegades que apareix i a la paraula. Així que fem una paraula on i aparegui $d_i - 1$ vegades, només cal veure que té mida $n-2$.

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} d_i - n = 2(n-1) - n = n - 2$$

Que és el que volíem veure.

Problema 22: *Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents dels grafs següents.*

(a) *El cicle d'ordre* $n \geq 3$.

(b) *El graf bipartit complet* $K_{2,r}$, $r \geq 1$.

(c) *El graf* $G = ([4], \{13, 14, 23, 24, 34\})$.

(d) *El graf* $G = ([5], \{12, 13, 23, 25, 34, 35, 45\}$.

(e) *El graf* $G = ([6], \{12, 13, 23, 34, 45, 46, 56\}$.

Solució:

(a) Ha de tenir $n-1$ arestes, així que només se li ha de treure una. Com pot ser qualsevol, n'hi ha n.

(b) Per tal que sigui un arbre, un dels r vèrtexs té dos arestes i els altres només una (a qualsevol dels 2). Així que hi ha $r2^{r-1}$ arbres generadors.

(c)(d)(e) Cal anar comptan sense deixar-se'n cap. Les solucions són, respectivament: 8, 21 i 9.

Problema 23: *Determineu la seqüència de Prüfer dels arbres següents.*

(a) $T = ([5], \{12, 13, 24, 35\})$.

(b) $T = ([6], \{12, 13, 14, 15, 56\})$.

(c) $T = ([8], \{12, 13, 14, 18, 25, 26, 27\})$.

(d) $T = ([15], \{12, 13, 23, 34, 45, 46, 56\})$.

Solució:

(a) (2, 1, 3)

(b) (1, 1, 1, 5)

(c) (1, 1, 2, 2, 2, 1)

(d) (4, 4, 2, 5, 5, 2, 1, 3, 6, 6, 3, 7, 7)

Problema 24: *Detemineu els arbres que tenen seqüència de Prüfer:*

(a) (1,2,3,4).

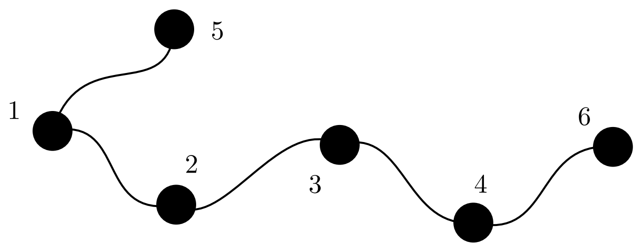
(b) (2,2,4,1,3).

(c) (4,5,1,4,1,5).

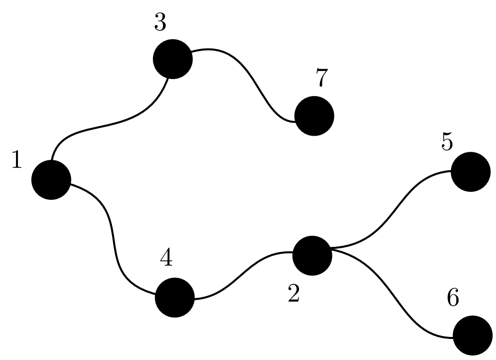
(d) (11,7,11,9,5,5,2,2,1,1).

Solució:

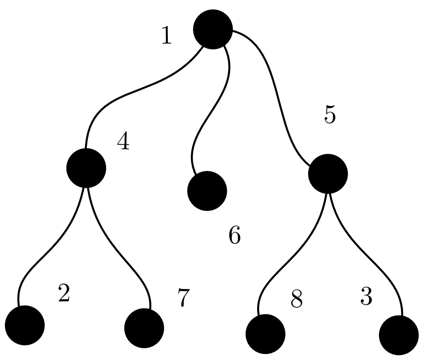
(a)



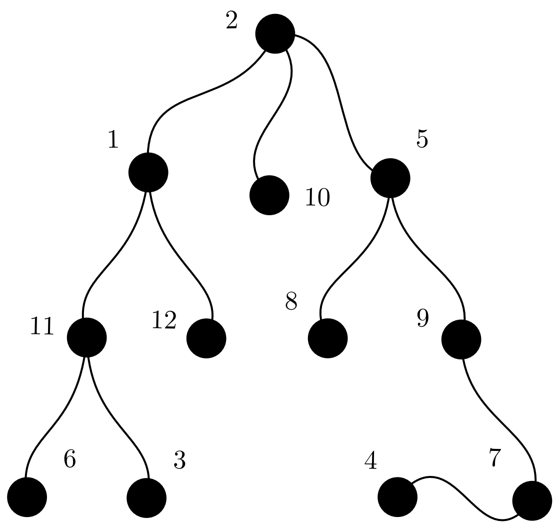
(b)



(c)



(d)



Problema 25: *Calculeu el nombre d'arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $V = [11]$ tals que tenen un vèrtex de grau 4, dos vèrtexs de grau 3, dos vèrtexs de grau 2 i sis vèrtexs de grau 1.*

Solució:
Pel col·lorari del teorema de Prüfer, hi ha $\binom{11-2}{4-1\ 3-1\ 3-1\ 2-1\ 2-1} = 15120$ arbres amb 11 vèrtexs i graus 4,3,3,2,2,1,1,1,1,1,1.

Problema 26: *Sigui T un arbre binari, és a dir, té un vèrtexs v arrelat i cada un dels vètexs té 0 o 2 fills. Un vèrtex d'un arbre binari és intern si té dos fills.*

(a) *Quantes fulles d'un arbre binari amb t vèrtexs interns.*

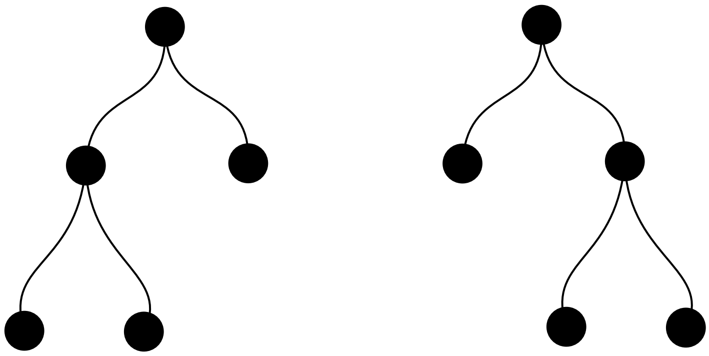
(b) *Quants arbres binaris (no ordenats) hi ha amb n vèrtexs.*

(c) *Quants arbres binaris ordenats hi ha amb n vèrtexs.*

Solució:

(a) Provarem per inducció que si un arbre binari B té $t \geq 1$ vèrtexs interns, llavors té $t+1$. Per $t = 1$, l'arbre binari té 2 fulles. Per $t > 1$, considerem B' l'arbre binari que provè de traure-li a B dues fulles que tenen el mateix pare (v), per tal que B sigui finit, n'ha de tenir. Aleshores, B' té $t - 1$ vèrtexs interns i, per hipòtesi d'inducció, té t fulles. Per tant, B té les mateixes fulles que B, més dos que són els vèrtexs fills de v, menys 1 perquè el propi v deixa de ser fulla. I B té un vèrtex intern més. Així que B té t vèrtexs interns i $t+1$ fulles. Que és el que volíem veure.

(b) Entenen no ordenats com que dos arbres són iguals si tenen els mateixos vèrtexs i arestes. I no queden determinats quan són dibuixats. És a dir, els següents podrien ser iguals depenent de la etiquetació.



Per l'apartat (a) sabem que si un arbre binari té $n > 1$ vèrtexs, com tots els vèrtexs són interns (t) o fulles ($t+1$), podem deduir que $t = \frac{n-1}{2}$. A més, sabem quin grau tenen: hi ha un vèrtex de grau 2, hi ha $t-1$ de grau 3 i n'hi ha t de grau 1. Aleshores, com els arbres binaris són els únics que ho compleixen, pel col·lorari de Prüfer, hi ha $\binom{n-2}{2-1\,\underbrace{3-1\cdots 3-1}_{t-1}}$ arbres binaris amb n vèrtexs.

(c) En aquest cas, els dos arbres de la imatge es considerarien diferents. Pel teorema que diu que hi ha C_t arbres binaris ordenats amb t nodes interns. I per la mateixa observació de l'apartat anterior, $t = \frac{n-1}{2}$, hi ha $C_{\frac{n-1}{2}}$ arbres binaris ordenats amb n vèrtexs.

3 Cicles i circuits

Aquest apartat tracte sobre els *Teorema de Euler* (per cicles Eulerians), el *Teorema de Ore* (per cicles Hamiltonians) i els seus derivats.

Problema 1: *Un recorregut Eulerià és un recorregut $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ que conté totes les arestes de G i $v_0 \neq v_m$.*

(a) *Proveu que un graf G conté un recorregut Eulerià si i només si tots els vèrtexs de G tenen grau parell llevat de dos, i que aquests dos són v_0 i v_m*

(b) *Donat un graf G amb $2k$ vèrtexs de grau imparell, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir per a obtenir un graf (o multigraf) Eulerià?*

(c) *Quin és el nombre mínim de vegades que s'ha d'aixecar el llapis per a dibuixar el graf de Petersen?*

Solució:

(a) Si G té un recorregut Eulerià, aleshores considerem el graf (o multigraf) G' construït a partir d'afegir a G una aresta entre v_0 i v_m. Com G té un recorregut Eulerià, G' té un cicle Eulerià. Per tant, pel *Teorema d'Euler* sabem que el grau dels vèrtexs de G' és parell, i com només hem afegit la aresta $v_0 v_m$, tots els vèrtexs tenen grau parell excepte 2, que són v_0 i v_m.

Si G té tots els vèrtexs de grau parell excepte dos (v_0 i v_m), aleshores considerem el mateix graf (o multigraf) G' que abans. Ara, tots els vèrtexs de G' tenen grau parell, G' té un cicle Eulerià. Si considerem la mateixa successió de vèrtexs d'aquest cicle en G començant per v_0 i sense passar per l'aresta $v_0 v_m$ tenim un recurregut Eulerià en G, que comença en v_0 i acaba a v_m.

(b) Cada aresta augmenta en 1 el grau de dos vèrtexs. Per tant, el mínim nombre d'arestes que hem d'afegir és k. En efecte, si posem k arestes incidents a vèrtexs diferents, tots els vèrtexs tindran grau parell, per tant, existirà un cicle Eulerià. Si en posem menys, hi haurà mínim de dos vèrtexs que encara serà de grau senar, per tant, no existirà un cicle Eulerià.

(c) El *graf de Petersen* és un graf de 10 vèrtexs 3-regular. Podem dir que per dibuixar-lo sense aixecar cal trobar un recorregut o un cicle Eulerià. En el cas que no es pogui, el nombre mínim d'arestes que cal afegir per tal de tenir un recorregut Eulerià és el mínim de vegades que cal aixecar el llapis per dibuixar el graf. Combinant l'apartat (a) i (b), tenim que el nombre mínim de vegades que cal aixecar el llapis per dibuixar un graf amb $2k$ vèrtexs de grau senar és $k-1$. En el nostre cas, pel *graf de Petersen*, cal aixecar el llapis 4 vegades.

Problema 2: *Proveu que si G és un graf d'ordre imparell tal que ell i el seu complementari G^c són tots dos connexos. Aleshores, G és Eulerià si i només si ho és G^c.*

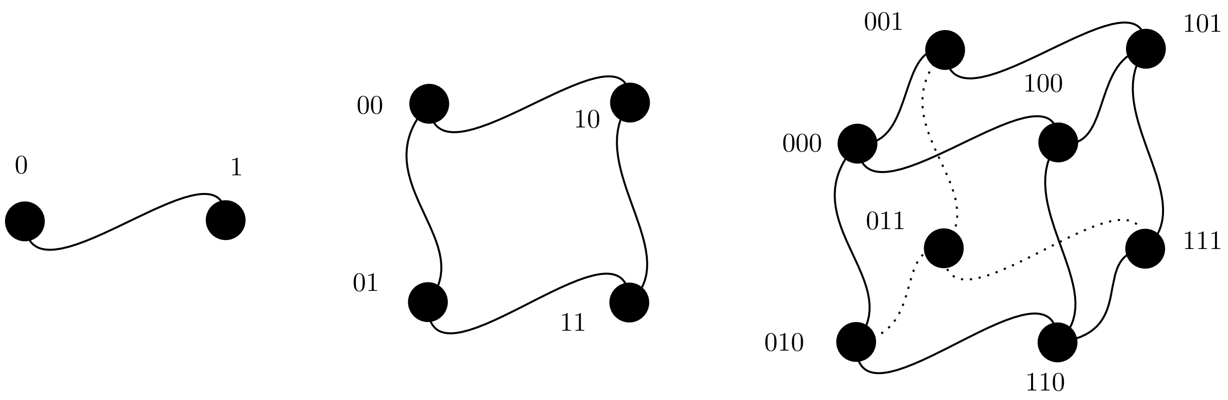
Solució:

En aquest cas, només cal demostrar una de les implicacions perquè el complementari del complementari de G és G. Ara, si G té un cicle Eulerià, llavors té tots el vèrtexs de grau parell. Sigui d_i el grau del vèrtex i en G. Aleshores, el grau del vèrtex i en G^c és, on n és l'ordre, $n-1-d_i$ perquè ara el vèrtex i és adjacent a les arestes que no ho és a G. Per hipòtesi n és senar així que $n-1-d_i$ és parell, per tant, com el grau de tots el vèrtexs de G^c és parell, G^c és Eulerià.

Problema 3: *El graf Q_n té per vèrtexs les paraules binàries de llargada n, $\{0,1\}^n$, i dues paraules són adjacents si difereixen exactament en una de les coordenades. Determineu els valors de n pels quals Q_n és Eulerià i per quins valors és Hamiltonià.*

Solució:
Com les paraules són de llargada n i cada vèrtex del graf és adjacent a les paraules que difereixen d'una coordenada, tots els vèrtexs tenen grau n. Sabem que un graf és Elerià si tots els vèrtexs tenen grau parell. Aleshores, Q_n és Elerià quan n sigui parell.

Per deduir per quines n el graf Q_n és Hamiltonià, mirem primer els casos petits Q_1, Q_2 i Q_3.



Q_1 no és Hamiltonià. Q_2 és Hamiltonià, per exemple, {00, 01, 11, 10, 00} és un cicle Hamiltonià. Q_3 també és Hamiltonià, en efecte podem trobar un exemple de cicle a partir del que ja tenim de Q_2, perquè Q_3 és com dues vegades Q_2. Una cara és Q_2 amb zeros darrera i l'altre és Q_2 amb uns darrera. Així que, si copiem el cicle (excepte l'últim) dos cops, el primer amb zeros darrera, i el segon invertit amb uns darrera ens queda, afegint al final el primer vèrtex per tal que quedi un cicle tenim un exemple de cicle Hamiltonià de Q_3: {000, 010, 110, 100, 101, 111, 011, 001, 000}.

Ara, podem intentar generalitzar aquest procediment inductiu per veure que per $n > 1$ el graf Q_n és Hamiltonià. Els casos petits ja els hem fet. Per $n > 3$, fem servir la hipòtesi d'inducció que ens diu que per $n-1$ hi ha un cicle Hamiltonià, etiquetem-lo: $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2^{n-1}}, v_1\}$. Sabem que un vèrtex amb el següent només difereixen d'una coordena. Sigui v_i0, el vèrtex de Q_n amb les $n-1$ primeres coordenades iguals a v_i i l'última un zero (el mateix amb u). Anem a veure que la successió de vèrtexs $\{v_10, v_20, \ldots, v_{2^{n-1}}0, v_{2^{n-1}}1, \ldots, v_21, v_11, v_10\}$ és un cicle Hamiltonià de Q_n. La successió conté $2^n + 1$ vèrtexs, tots diferents excepte el primer i l'últim, per tant, passa per tots els vèrtexs de Q_n un cop. Aixì que, si provem que sempre hi ha una aresta entre un vèrtex i el següent de la successió, haurem provat que exiteix un cicle Hamiltonià i, per tant, per tot $n > 1$, Q_n és Hamiltonià. En efecte, (per $1 \leq i < 2^{n-1}$) entre v_i0 i $v_{i+1}0$ hi ha una aresta perquè, per hipòtesi d'inducció, v_i i v_{i+1} només difereixen d'una coordenada, si la última és igual seguiran diferint en una coordenada, per tant, tindran una aresta. De manera anàloga es demostra que hi ha una aresta entre $v_{i+1}1$ i v_i1. Entre $v_{2^{n-1}}0$ i $v_{2^{n-1}}1$, i entre v_10, v_11 passa la mateixa situació, les $n-1$ primeres coordenades són iguals i només canvia l'última, així que hi ha una aresta entre ells. Aleshores, hem provat que la successió de vèrtexs és realment un cicle, que és el que volíem demostrar.

Problema 4: *Donats dos grafs G, H el seu producte cartesià $G \Box H$ té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià $V(G) \times V(H)$ i dos vèrtexs (x_1, y_1), (x_2, y_2) són adjacents a $G \Box H$ si, o bé $\{x_1, x_2\} \in E(G)$ i $y_1 = y_2$, o bé $x_1 = x_2$ i $\{y_1, y_2\} \in E(H)$.*

(a) Comproveu que $Q_n = K_2 \Box \cdots \Box K_2$ (n vegades).

(b) Proveu que si G i H són Eulerians aleshores $G \Box H$ també ho és. Proveu que, si G té un nombre senar de vèrtexs, el recíproc tambè és cert.

(c) *Proveu que si G i H són Hamiltonians i $V(H)$ és parell aleshores $G\Box H$ també és Hamiltonià.*

(d) *Proveu que si G és Hamiltonia, aleshores $G\Box K_2$ també ho és.*

Solució:

(a) Ho provarem per inducció sobre n. Per $n = 1$, clarament $Q_1 = K_2$. Per $n > 1$, cal veure que, $Q_n = Q_{n-1}\Box K_2$. Els vèrtexs de Q_n són les paraules $\{0,1\}^n$, mentre que els vèrtexs de $Q_{n-1}\Box K_2$ són, per definició: $\{0,1\}^{n-1} \times \{0,1\}$. Per tant, tenen els mateixos vèrtexs. Ara, a Q_n una aresta és incident a dos vèrtexs v i w si aquests dos difereixent només en una component. A $Q_{n-1}\Box K_2$, dos vèrtexs (x_1, y_1), (x_2, y_2) són incidents si passa un dels següents casos: o bé és del tipus 1 $\{x_1, x_2\} \in E(Q_{n-1})$ i $y_1 = y_2$, o bé és del tipus 2 $x_1 = x_2$ i $\{y_1, y_2\} \in E(K_2)$. En el primer cas, com que en Q_{n-1}, x_1 i x_2 difereixen en una coordenada, i $y_1 = y_2$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) difereixen en una coordenada. En el segon cas, la coordenada només canvia l'última coordenada, així que difereixen en una. Amb això hem vist que si v, $w \in Q_{n-1}\Box K_2$ tenen aresta, llavors també la tenen en Q_n. Falta veure-ho al revés. Si v i w tenen una aresta en Q_n, mirem quina és la coordenada diferent. Si no és l'última, és una aresta del tipus 1, i si sí és l'última, és una aresta del tipus 2 en $Q_{n-1}\Box K_2$. Així que, com Q_n i $Q_{n-1}\Box K_2$ tenen els mateixos vèrtexs i arestes, són el mateix graf. Que és el que volíem demostrar.

(b) Primer anem a deduir el grau d'un vèrtex $v = (x, y)$ a $G\Box H$. Per una banda, v és adjacent a tots els vèrtexs del tipus (x, y') on $\{y, y'\} \in E(H)$, d'aquests n'hi ha clarament $d_H(y)$. El mateix raonament serveix per veure que v és adjacent a uns altres $d_G(x)$ vèrtexs del tipus (x', y) on $\{x, x'\} \in E(G)$. I com no n'hi pot haver més, $d_{G\Box H} = d_G(x) + d_G(y)$.

Ara, si G i H són Eulerians, aleshores tots els graus dels seus vèrtexs són parells, així que la suma de dos d'ells qualsevol és parell i, per tant, tots els vèrtexs de $G\Box H$ tenen grau parell. Utilitzant de nou el *Teorema de Euler*, $G\Box H$ és Eulerià.

Per veure que el recíproc és cert si G té un nombre senar (n) de vèrtexs, per tot y en H considerem la següent suma: $\sum_{i=1}^{n}(d(x_i) + d(y))$. On x_i són els vèrtexs de G. Per una banda, $d(x_i) + d(y)$ és el grau del vèrtex (x_i, y) en $G\Box H$. Com és un graf Eulerià, és parell sempre, així que la suma és parell. Per altra,

$$\sum_{i=1}^{n}(d(x_i) + d(y)) = nd(y) + \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = nd(y) + 2|E(H)|$$

Com n és senar per hipòtesi, $d(y)$ és parell per tot y en H, llavors H és Eulerià. Com $d(y) + d(x_i)$ és parell, $d(x_i)$ és parell per tot x_i en G, així que G també és Eulerià. Que és el que volíem veure.

(c) Siguin $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_1\}$ la successió de vèrtexs que conforma el cicle Hamiltonià en G i $\{w_1, w_2, \dots, w_m, w_1\}$ el cicle Hamiltonià en H. Ara, considerem el següent camí de $G\Box H$:

$$\begin{array}{ccccccc}
(v_1, w_1) & & (v_1, w_2) & \rightarrow & \dots & & (v_1, w_m) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
(v_2, w_1) & & (v_2, w_2) & & \ddots & & (v_2, w_m) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
(v_n, w_1) & \rightarrow & (v_n, w_2) & & \dots & \rightarrow & (v_n, w_m)
\end{array}$$

Sabem que acaba a (v_1, w_m) perquè n és parell. I que entre dos vèrtexs amb fletxa hi ha una aresta, perquè una component és la mateixa i l'altre tenen aresta en G o en H perquè són del cicle Hamiltonià. Per la mateixa raó, (v_1, w_1) és adjacent a (v_1, w_1) i el cicle queda tancat, passant per tots el vèrtexs de $G\Box H$ exactament un cop, per tant, $G\Box H$ és un graf Hamilitonià. Que és el que volíem veure.

(d) Semblant a abans, sigui $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$ la successió de vèrtexs que conforma el cicle Hamiltonià en G. Considerem el següent cicle Hamiltonià:

$$\begin{array}{ccccccc} (v_1,0) & \rightarrow & (v_2,0) & \rightarrow & \ldots & \rightarrow & (v_n,0) \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ (v_1,1) & \leftarrow & (v_2,1) & \leftarrow & \ldots & \leftarrow & (v_n,1) \end{array}$$

En efecte, ho és perquè passa per tots els vèrtexs exactament un cop. I, amb el mateix argument que l'apartat anterior, on hi ha fletxa, en el graf tenen aresta. Aleshores, $G \square K_2$ és un graf Hamiltonià. Que és el que volíem provar.

Problema 5: *El graf línia LG d'un graf G té per vèrtexs $V(LG) = E(G)$ i dos vèrtexs són adjacents a LG si i només si les arestes corresponents són incidents a G.*

(a) Proveu que si G és Eulerià aleshores LG és Eulerià i Hamiltonià. Són certs els recíprocs?

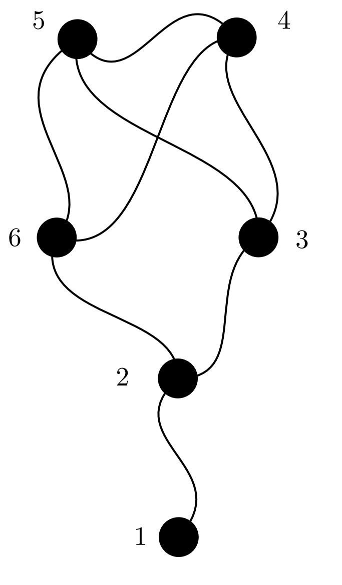
(b) Proveu que si G és Hamiltonià, aleshores LG és Hamiltonià. És cert el recíproc?

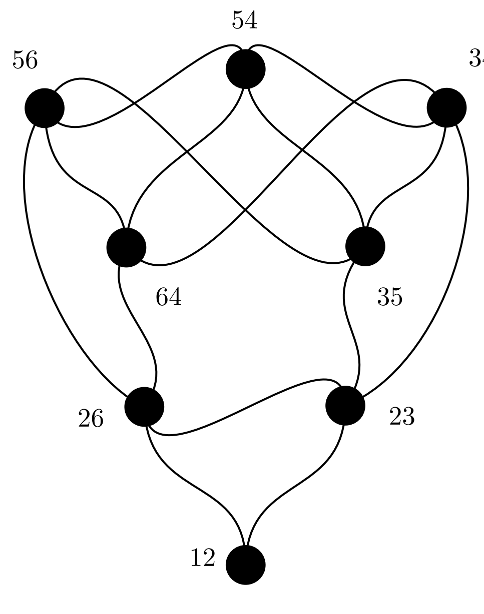
Solució:

(a) Primer anem a veure quin grau té $v_i v_j \in E(G)$ a LG. A LG, és adjacent amb totes les arestes diferents a ella que siguin incedents a v_i i v_j. Aleshores, $d_{LG}(v_i v_j) = d_G(v_i) + d_G(v_j) - 2$, que com G és Eulerià, els seus vèrtexs tenen tots graus parell. Per tant, tots els vèrtexs de LG tenen grau parell. Així que LG és Eulerià.

Ara, per veure que LG és Hamiltonià, considerem les arestes $(v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1, v_1v_2)$ on la successió de vèrtexs $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ és el cicle Eulerià que té G. A LG, cada aresta de la successió és adjacent amb la següent perquè són incidents en un vèrtex. A més, com el cicle Eulerià de G passa per totes les arestes un sol cop, aquesta successió d'arestes té tots els vèrtexs de LG exactament un cop. Per tant, és un cicle Hamiltonià i LG és un graf Hamiltonià. Que és el que voliem veure.

Si LG és Hamiltonià, el mateix raonament que acabem de fer invers serveix per veure que G és Eulerià. En canvi, pot ser que LG sigui Eulerià i G no ho sigui. Només cal que tots els vèrtexs de G siguin de grau senar per tal que LG sigui Eulerià però no ho sigui G. Per exemple, posats a complicar-nos, el de l'esquerra és G i el de la dreta LG. El primer no és Eulerià, però el segon sí.





(b) Sigui $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ el cicle Hamiltonià de G. Aleshores, considerem el següent:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \\ v_1v_2 & \leftrightarrow & V_1 \\ \downarrow & & \\ v_2v_3 & \leftrightarrow & V_2 \\ \downarrow & & \\ \dots & & \\ \downarrow & & \\ v_nv_1 & \leftrightarrow & V_n \\ \downarrow & & \end{array}$$

On V_i són les arestes incidents a V_i que no han aparegut en els anteriors i que no formen part del cicle Hamiltonià de G. Com totes les arestes d'un mateix V_i són incidents a un mateix vèrtex, a LG són adjacents, aleshores el subgraf induït de V_i és complet. Clarament, en el diagrama apareixen tots els vèrtexs de LG. Ara, procedim a construir el següent cicle. Comencem per v_1v_2 i anem a un vèrtex de V_2 (si no n'hi ha anem a v_2v_3 directe), podem anar a qualsevol perquè v_1v_2 també és incident a v_2. Com V_2 és complet, podem passar per tots els vèrtexs un cop i acabar a v_2v_3. D'aquesta manera, podem seguir fins que acabem passant per tots els V_i i finalment v_1v_2 per tancar el cicle Hamiltonià. Així que, si G és un graf Hamiltonià, LG també és Hamiltonià. Que és el que volíem veure. El recíproc és fals, els de la imatge anterior en són un contraexemple.

Problema 6: *Proveu que un graf amb grau mínim $\delta(G) \geq 2$ conté un camí de llargada $\delta(G)$ i un cicle de llargada $\delta(G) + 1$. Proveu que les cotes són òptimes.*

Solució:

Sigui P un camí maximal dintre de G, on v és el primer vèrtex de P. Com $d(v) \geq \delta(G)$, tots els veïns de v s'han de trobar per força dins de P, perquè sinó no seria maximal. Aleshores P té alemenys $\delta(G) + 1$ vèrtexs, que és el que volíem veure. Ara, el veï més llunyà de v dins de P, w, ha d'estar a una distància mínima de $\delta(G)$. Aleshores, començant el cicle en v, seguint el camí fins a w i retornant a v, tenim un cicle de llargada $\delta(G) + 1$. Que és el que volíem provar.

Problema 7: *Un camí Hamiltonià en un graf és un camí que passa per cada vèrtex una única vegada. Proveu que si el grau mínim d'un graf G amb $n \geq 2$ vèrtexs satisfà $\delta(G) \geq (n-1)/2$ aleshores G té un camí Hamiltonià.*

Solució:

Sigui un camí maximal P del graf G, on v i w són el primer i l'últim vèrtexs. Primer, tant els veïns de v com els de w han de pertanyer a P perquè sinó no seria maximal. SAbem que el camí té almenys $\frac{n+1}{2}$ vèrtexs. Ara, anem a veure que el camí té almenys $n-1$ vèrtexs. Sigui k, la llargada del camí i $(v = v_0, v_1, \dots, v_k = w)$ els seus vèrtexs. Siguin $I = \{i | vv_i \in E(G)\}$ (l'índex dels veïns de v) i $J = \{i | wv_{i+1} \in E(G)\}$ (l'índex anterior dels veïns de w). Aleshores, suposem que $k < n-1$ i arribem a contradicció. $|I \bigcup J| = |I| + |J| - |I \bigcap J| \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} - |I \bigcap J| = n - 1 - |I \bigcap J|$, per tant, cap que la intersecció no sigui buida. Per a què això passi, cal que per algun i: $vv_i \in E(G)$ i $wv_{i+1} \in E(G)$. I, per tant, podem fer un cicle amb un nombre de vèrtexs menor o igual que $n-1$. Ara, sigui u un vèrtex qualsevol que no pertanyi al cicle. Com u té grau més gran que $\frac{n-1}{2}$ i en el cicle hi ha com a mínim $\frac{n+1}{2}$ vèrtexs, implica que u té almenys un veí dins el cicle. Per tant, el camí original no era maximal, ja que podem fer un camí començant per u, que vagi seguint tots els vèrtexs del cicle, aquest camí té llargada $k+1$ i conté tots els vèrtexs del cicle. Aleshores, podem arribar a fer un cicle de llargada $n-1$. Finalment, el vèrtex, u, que no pertany al cicle, segur que té un veí al cicle. Podem contruir un camí Hamiltonià, començant per u i reseguint el cicle fins acabar amb un camí amb els n vèrtexs del graf. Que és el que volíem veure.

Problema 8: *Sigui G un graf amb n vèrtexs i m arestes. Proveu que, si $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$ aleshores G és Hamiltonià.*

Solució:

Anem a veure si compleix la condició del *Teorema de Ore*, que diu si per cada dos vèrtexs no adjacents u i v de G, es compleix que $d(v) + d(u) \geq n$ aleshores G és Hamiltonià. Fem servir que a G com a molt hi ha tantes arestes com les que té v, més les que té u, més el cas hipotétic que els altres $n-2$ vèrtexs fossin adjacents tots amb tots.

$$2 + \binom{n-1}{2} \leq m \leq d(u) + d(v) + \binom{n-2}{2}$$

Aleshores $d(u) + d(v) \geq 2 + \binom{n-1}{2} - \binom{n-2}{2} = 2 + n - 2 = n$. Que és el que volíem veure.

4 Aparellaments

Aquest apartat tracte sobre el *Teorema de Hall* (per aparellamets de grafs bipartits) i els seus derivats i apliacions.

Problema 9: *Proveu que un graf bipartit regular contè un aparellament perfecte. Proveu que, a més, les arestes del graf es poden partir en d aparellaments perfectes, on $d = d(G)$ és el grau del graf.*

Solució:
Sigui $G = (V_1 \bigcup V_2, E)$ un graf bipartit regular i $U \subset V_1$ un subconjunt de vértexs qualsevol de V_1. Ara, com els veïns de U tenen almenys les arestes de U i potser més, podem deduir la següent desigualtat:

$$\begin{aligned} \text{número d'arestes de } U &\leq \text{número d'arestes de } N(U) \\ d \cdot |U| &\leq d \cdot |N(U)| \\ |U| &\leq |N(U)| \end{aligned}$$

Aleshores, com G compleix la condició de Hall, exiteix un aparellament perfecte. Si traiem les arestes que pertanyen a l'aparellament perfecte, ens queda un graf $d-1$-regular, aplicant el mateix argument iterativament arribem a que G té d aparellaments perfectes. Que és el que volíem veure.

Problema 10: *Sigui $\{A_1, \ldots, A_k\}$ una família de subconjunts de $[n]$. Un transversal de la família és una seqüència $(x_1, \ldots, x_k)$ amb $x_i \in [n]$ tal que tots els elements són diferents i $x_i \in A_i$ per a cada $i = 1, \ldots, k$. Proveu que $\{A_1, \ldots, A_k\}$ té un transversal si i només si, per a cada subconjunt no buit $I \subset [k]$, es satisfà*

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$$

Solució:
Per demostrar-ho anem a contruir un graf bipartit i veurem que existeix un transversal de la família, si i només si, existeix un aparellament complet del graf. Sigui $G = (V_1 \bigcup V_2, E)$ un graf bipartit, on els vèrtexs de V_1 són els subconjunts A_i i on els vèrtexs de V_2 són els elements de $[n]$. A més, A_i té aresta amb $j \in [n]$ si i només si $j \in A_i$. Aleshores, si d'aquest graf trobem un aparellament complet voldrà dir que de cada A_i podem escollir un element que hi pertany i que tots siguin diferents, per definició, haurem trobat un transversal. Ara, si apliquem el *Teorema de Hall* en aquest graf, ens diu que exiteix un aparellament complet, si i només si, per cada subconjunt $U \subset V_1$ passa que $|N(U)| \geq |U|$. Que és el mateix que dir que, per tot $I \subset [k]$, passa que $|N(\bigcup_{i \in I} A_i)| \geq |I|$. En aquest cas, els veïns d'un A_i són els elements que conté, i els veïns de la unió d'uns quants A_i són els elements que conté la unió dels A_i. Llavors, el graf conté un aparellament perfecte (i, per tant, existeix un transversal), si i només si, per tot $I \subset [k]$ passa que $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$. Que és el que volíem veure.

Problema 11: *Una matriu de permutació P és una matriu quadrada d'ordre n amb entrades a $\{0, 1\}$ tal que cada fila i cada columna contenen exactament un 1 (i la resta són zeros). Sigui A una matriu quadrada d'ordre n amb entrades a $\{0,1\}$. Proveu que A es pot escriure com $A = P_1 + \ldots + P_k$, on cada P_i és una matriu de permutacions si i només si la suma dels elements de cada columna val k i el mateix passa amb la suma dels elements de cada columna.*

Solució:
Si $A = P_1 + \ldots + P_k$, fem servir que la suma dels elements de la fila i-éssima de A és la suma de les sumes dels elements de les files i-éssimes de les matrius P, i com cada una d'aquestes només té un 1 i n'hi ha k: la suma dels elements de la fila i-éssima de A és k. Per tot i entre 1 i n, i el mateix raonament per les columnes. Que és el que volíem demostrar.

Per a l'altra implicació, considerem el graf associat a una matriu A d'ordre n amb entrades a $\{0, 1\}$, $G(A) =$

$(V \bigcup W, E)$ el graf bipartit amb vèrtexs $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, i amb arestes $v_i w_j \in E \Leftrightarrow a_{ij} = 1$, on a_{ij} és el component de fila i, columna j de la matriu A. Aleshores, és fàcil veure que $G(P)$ és un aparellament, si i només si, P és una matriu de permutació. Llavors, si veiem que el graf $G(A)$ es pot dividir en k aparellaments perfectes, voldrà dir que A és suma de k matrius de permutació. Per la hipótesi, a cada fila i columna de A hi ha k 1's i la resta són 0, així que $G(A)$ és un graf k-regular. Aprofitant el *Problema 9*, A es pot dividir en k aparellaments perfectes. Que és el que volíem veure.

Problema 12: *Sigui G un graf bipartit amb bipartició $\{V_1, V_2\}$ tal que hi ha $U \subset V_1$ amb $|U| > |N(U)|$ (G no satisfà la condició de Hall). Sigui*

$$k = \max\{|U| - |N(U)| : U \subset V_1\}$$

Proveu que hi ha un aparellament M amb $|V_1| - k$ arestes i que és un aparellament de mida màxima.

Solució:

Sigui G' el graf amb la bipartició $(V_1, V_2 \bigcup A)$, on V_1, V_2 i les arestes entre ells són els mateixos que en G, $|A| = k$, i tots els vèrtexs de A són adjacents a tots els vèrtexs de V_1. Aleshores, G' compleix la condició de Hall, i per tant, existeix un aparellament perfecte (de $|V_1|$ arestes). Així que, com G no té els k vèrtexs de A, amb el mateix aparellament de G', podem assegurar que exiteix un aparellament de $|V_1| - k$ aresten a G. Ara, si n'existís un amb almenys $|V_1| - k + 1$ arestes, construiriem G' amb $|A| = k - 1$ i augmentant l'aparellament de G amb els $k - 1$ vèrtexs afegits, obtindriem un aparellament perfecte de G'. Però això no és possible, ja que el subconjunt de V_1, U, tal que $|U| - |N_G(U)| = k$, compleix que $|U| - |N_{G'}(U)| = 1$, i per tant, no compleix la condició de Hall, és a dir, no hi pot haver un aparellament perfecte a G'. Conseqüentment, l'aparellament de $|V_1| - k$ aresten a G és de mida màxima. Que és el que volíem veure.

Problema 13: *Sigui $G = (V_1 \bigcup V_2, E)$ un graf bipartit tal que, per a cada $U \subset V_1$ tenim $|N(U)| > |U|$. Proveu que cada aresta es pot estendre a un aparellament de V_1 a V_2.*

Solució:

Sigui $G' = (V_1' \bigcup V_2', E)$ el graf resultant de treure una aresta qualsevol de G i els vèrtexs que és incident. Si veiem que a G' existeix un aparellament perfecte, haurem acabat. Sigui $U \subset V_1'$, aleshores, $|N_{G'}(U)| \geq |N_G(U)| - 1 \geq |U|$ que és la condició de Hall, per tant, G' conté un aparellament perfecte. Que és el que volíem veure.

Problema 14: *Sigui $n \geq 2k \geq 2$. Proveu que hi ha una aplicació injectiva $f : \binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{k+1}$ tal que $A \subset f(A)$ per a cada $A \in \binom{[n]}{k}$.*

Solució:

5 Coloració

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució: