Apunts d'Equacions diferencials ordinàries

ALEIX TORRES I CAMPS

PAU MARTÍN (P.MARTIN@GMAIL.COM), MARCEL GUARDIA I RAFAEL RAMÍREZ

1 Tema 1: Introducció i definicions bàsiques

Definició 1. Una equació diferencial és una equació que involucra una funció incógnita i les seves derivades.

Exemple 1. Alguns exemples d'equacions diferencials:

1. $y(x), x \in \mathbb{R}$ amb $y''(x) - y(x) = 0$
2. $y''(x) = -sin(y(x))$
3. $y''(x) = -sin(y(x)) + cos(x)$
4. $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ on la incògnita és una funció de dues variables $z(x, y)$.

Definició 2. Una e.d.o. és una equació diferencial de la forma:

1. Forma implícita: $g(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ on la incògnita és una funció $y(x) = (y_1(x) \dots y_m(x))^t$ d'una variable unidimensional x. Per tant, $g : U \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \to \mathbb{R}^m$.
2. Forma explícita: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{n-1}(x))$. Ara $f : V \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m$

Nota 2. *A partir d'ara treballarem amb només la forma explícita. La qual abreviarem com* $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{n-1})$

Definició 3. Direm que $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ és una solució si φ és n vegades derivable i:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)), \forall x \in (a, b)$$

Implícitament demantarem que:

$$\{(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)) | x \in (a, b)\} \subset Domf$$

La solució general és el conjunt de totes les seves solucions.

Definició 4. Es diu que l'e.d.o. $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ on $y = (y_1 \cdots y_m)^t$ és un sistema d'e.d.o's de m components, d'ordre n.

Nota 3. *Sigui* $y = (y_1 \ \cdots y_m)$*, aleshores,* $y^{(n)} = f(x, y, \dots, t^{(n-1)})$ *és equivalent a un sistema de* $n \times m$ *e.d.o.'s d'ordre 1.*

Demostració. En efecte, sigui $z_1 = y$ (vector de m components), $z_2 = y', \cdots, z_n = y^{(n-1)}$. Per tant, a $z = (z_1, \cdots, z_n)^t$ hi ha un total de $n \times m$ components.

Com que $z_1' = (y)' = y' = z_2$ i, anar fent, $z_{n-1}' = (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = z_n$ i $z_n' = (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = f(x, z_1, \dots, z_n)$. Ens queda l'e.d.o. $z' = g(x, z)$ que realment acaba sent $(z_1' \ z_2' \ \cdots \ z_n')^t = (z_2 \ z_3 \ \cdots \ z_n \ f(x, z_1, \cdots, z_n))^t$. ☐

Exemple 4. $y'' = -sin(y)$. Aleshores, $z_1 = y$ i $z_2 = y'$. Podem prendre per sistema d'equacions $z_1' = z_2$ i $z_2' = -sin(z_1)$.

1.1 Sistemes autònoms i no autònoms

Definició 5. Direm que una e.d.o. és autònoma si és de la forma $y' = f(y)$ (equació que no depen de x). Direm que un sistema es no autònom si $y' = f(x, y)$.

Proposició 6. *Siguin $y' = f(y)$ una e.d.o autònoma i $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ una solució. Llavors, $\forall x \in \mathbb{R}$ i $\varphi_\alpha : (a + \alpha, b + \alpha) \to \mathbb{R}^n$ per $x \mapsto \varphi_\alpha(x) = \varphi(x - \alpha)$ també és solució.*

Demostració. En efecte: $\varphi'_\alpha(x) = \varphi'(x - \alpha) = f(\varphi(x - \alpha)) = f(\varphi_\alpha(x))$.

Nota 5. *Podem transformar el sistema d'ordre 1 i n incògnites d'e.d.o's no autònom $y' = f(x, y)$, en un sistema d'e.d.o's autónom d'ordre 1 i $n + 1$ incògnites.*

Demostració. En efecte, fem $z_1 = x$ i $z_2 = y$. Aleshores, amb $z = (z_1\ z_2)^t$ compleix que $z' = (z_1'\ z_2')^t = (1\ f(x, y))^t = (1\ f(z))^t = F(z)$, que és un e.d.o. d'ordre 1 amb $n + 1$ incògnites. □

1.2 Problema de Cauchy o problema de valors inicials

Definició 7. Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció. Sigui $(x_0, y_0) \in U$. Anomenarem problema de Cauchy o problema de valor inicial (p.v.i) a trobar una solució de

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Exemple 6. Alguns exemples de problemes de Cauchy.

1. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(0) = 1$. Escollint $\varphi(x) = e^x$ és una solució, ja que si derivem ens dona ella mateixa i si l'igualem a 0 dona 1.
2. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(x_0) = y_0$. Escollint $\varphi(x) = y_0 e^{x - x_0}$ és solució, ja que si derivem dona ella mateixa i compleix el valor inicial.

   Pregunta: Les solucions que hem trobat són totes les possibles? N'hi ha més?
3. $yy' - x = 0$ i $y(0) = 0$. Solucions: $\varphi_{+-}(x) = + - x$ en són solució, substituint es veu.
4. $yy' + x = 0$ i $y(0) = 0$. No té cap solució. Una manera de veure-ho és veient que per $x \neq 0$ ni y ni y' poden ser 0. Llavors fixant-nos en $x > 0$ i suposant que $y > 0$, ens queda que $y' < 0$. Per tant, cal una funció contínua que és positiva per x postiva i que decreixi. Sigui $a = y(1)$, llavors $y(x) > a$ per tota x entre 0 i 1, aleshores, com que en 0 ha de ser 0 i és contínua, hem arribat a contradicció i no pot tenir solució.

1.3 Interpretació geomètrica d'una e.d.o

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto f(x, y)$. $y' = f(x, y)$ i $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ n'és solució si $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. El que diu és si existeix una funció φ, el pendent de la seva gràfica segueix $f(x, \varphi)$.

1.4 Exemples importants

Exemple 7. Equació d'una molla elàstica (oscil·lador harmònic):

$$my'' = -k^2 y$$

On y és el desplaçament respecte la posició d'equilibri.

Exemple 8. Pèndol de longitud l sota un camp gravitatori constant el qual exerceix una força mg.

$$m\theta'' l = -mg \sin\theta \iff \theta'' = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

On θ és l'angle del pèndol respecte la vertical.

Exemple 9. Model SIR. S és el nombre de persones subceptibles, I infectats i R persones que deixen de ser de la resta tant perquè es curen com perquè moren. $N = S + I + R$

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{\beta}{N} SI \\ I' &= \frac{\beta}{N} SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

Exemple 10. n cossos a l'espai de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ submessos a la seva mutua atracció gravitatòria. q_i és la posició del cos i en un sistema de referència.

$$m_i q_i'' = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{||q_j - q_i||^3} (q_j - q_i)$$

Exemple 11. E.d.o's de famílies de corbes.

Considerem la següent família de corbes: $x^2 + y^2 = r^2$, per $r \in \mathbb{R}$. Tinc les solucions i m'interessa buscar la e.d.o. que la tingui per solució. Si $y = y(x)$, derivant respecte a x: $2x + 2yy' = 0$ o simplificant $y'y + x = 0$, o també $y' = -\frac{x}{y}$.

Família ortogonal. Té el pendent ortogonal, $y' = -\frac{1}{-\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$. Té per solució $y(x) = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercici: Trobeu l'e.d.o de la família de corbes $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$. I la família de corbes ortogonals.

Crec que:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x - \alpha}{y} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

2 Sistemes lineals d'e.d.o.'s

Definició 8. Direm que un sistema d'e.d.o's és lineal si és de la forma (de funció incògnita x):

$$x' = A(t)x + b(t), \ A(t) \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \ b(t) \in \mathbb{R}^n$$

Direm que el sistema és homogeni si $b(t) = 0$. El sistema homogeni associat és $x' = A(t)x$.

Direm que el sistema té coeficients constants si A no depèn de t.

2.1 Motivació

Suposem que tenim un sistema d'e.d.o.'s $x' = f(t, x)$, on f és $\mathscr{C}^1$ respecte de x. Suposem que $x_0(t)$ n'és solució. Volem estudiar el comportament de les solucions "properes".

$$f(t, x) = f(t, x_0(t)) + D_x f(t, x_0(t))(x - x_0(t)) + o(||x - x_0(t)||)$$

On D_x és la matriu diferencial.

Sigui $\tilde{x} = x - x_0(t)$, llavors, $\tilde{x}' = x' - x_0(t)' = f(t, x_0(t)) + D_x(t, x_0(t))\tilde{x} + o(||\tilde{x}||) - f(t, x_0(t)) = D_x f(t, x_0(t))\tilde{x} + o(||\tilde{x}||)$ el qual s'aproxima a un sistema lineal.

2.2 Propietats elementals

Proposició 9. *(Principi de superposició) Considerem el sistema lineal homogeni $x' = A(t)x$, on $A(t) \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. La solució, generat del sistema és un espai vectorial, és a dir, si φ_1 i φ_2 són solució i $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), llavors $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ és també solució.*

Demostració. Sabem que $\varphi_i'(t) = A(t)\varphi_i(t)$ per $i = 1, 2$. Donats $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, sigui $\tilde{\varphi} = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$. Llavors, $\tilde{\varphi}' = \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' = \lambda_1 A(t)\varphi_1 + \lambda_2 A(t)\varphi_2 = A(t)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = A(t)\tilde{\varphi}$. $\square$

Proposició 10. *Considerem el sistema lineal*

$$x' = A(t)x + b(t)$$

Sigui φ_p *una solució del sistema* ($\varphi_p' = A(t)\varphi_p + b(t)$)*. La solució general és*

$$\{\varphi | \varphi' = A(t)\varphi + b(t)\} = \{\varphi = \varphi_p + \varphi_n | \varphi_n = A(t)\varphi_n\} = \{\varphi_p\} + \{\varphi_n | \varphi_n \textit{ solució del sistema homogeni associat}\}$$

Demostració.
$\supseteq$ Sigui $\tilde{\varphi} = \varphi_p + \varphi_n$, on $\varphi_n' = A(t)\varphi_n$. Llavors

$$\tilde{\varphi}' = \varphi_p' + \varphi_n' = A(t)\varphi_p + b(t) + A(t)\varphi_n = A(t)(\varphi_p + \varphi_n) + b(t) = A(t)\tilde{\varphi} + b(t)$$

$\subseteq$ Sigui $\hat{\varphi}$ una solució ($\hat{\varphi}' = A(t)\hat{\varphi} + b(t)$), llavors: $\hat{\varphi} = \varphi_p + \hat{\varphi} - \varphi_p$ i cal veure que $\varphi_n = \hat{\varphi} - \varphi_p$ és solució del sistema homogeni. Com que, $\varphi_n' = \hat{\varphi}' - \varphi_p' = A(t)\hat{\varphi} + b(t) - A(t)\varphi_p - b(t) = A(t)(\hat{\varphi} - \varphi_p) = A(t)\varphi_n$, per tant, φ_n és solució del sistema homogeni i hem acabat. $\square$

2.3 E.d.o's lineals unidimensionals

Consierem una e.d.o de la forma

$$x' = a(t)x + b(t),\ a(t) \in \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C}),\ x \in \mathbb{R}$$

Per resoldre-la:
1. Trobarem la solució general de $x' = a(t)x$.
2. Trobarem una solució particular de $x' = a(t)x + b(t)$.

Notació: En aquest tema $I \subset \mathbb{R}$ serà un interval obert.

Proposició 11. *Sigui* $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funció contínua. Sigui* $t_0 \in I$*. Llavors, la solució general de l'e.d.o. lineal homogenia* $x' = a(t)x$ *és*

$$\{\lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Equivalentment, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$*, l'única solució de p.v.i.*

$$x' = a(t)x$$
$$x(t_0) = x_0$$

és

$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

Demostració.

$\subseteq$ Sigui $\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Tenim que

$$\varphi(t)' = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)' = a(t)x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = a(t)\varphi(t)$$

Amb això hem vist que és solució de l'equació. Ara anem a veure que és solució del p.v.i.

$$\varphi(t_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} = x_0 e^0 = x_0$$

$\supseteq$ Observem que $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \neq 0,\ \forall t \in I$.

Sigui $\hat{\varphi}$, una solució de $x' = a(t)x$, la podem escriure com $\hat{\varphi}(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ amb $c(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}\hat{\varphi}(t)$, clarament c és una funció derivable a I.

Llavors, $c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = \hat{\varphi}'(t) = a(t)\hat{\varphi}(t) = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \iff c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = 0 \iff c'(t) = 0 \implies c = \lambda$. És a dir, com que la derivada de la c és 0, tenim que c és una constant. I hem acabat perquè hem vist que qualsevol solució és de la forma descrita. □

Nota 12. *Què va fer que escollissim $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ com a candidat de solució?*

Estem buscant solució de $x'(t) = a(t)x(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$. Ara, podem veure la equació com $\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t) \iff \int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{x(t)}dt = \int_{t_0}^t a(s)ds$ que és el mateix que $\ln(x(t) - \ln(x(t_0))) = \int_{t_0}^t a(s)ds \iff \ln(x) = \ln(x_0) + \int_{t_0}^t a(s)ds \iff x(t) = e^{\ln x_0}e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

Proposició 12. *La solució general de $x' = a(t)x + b(t)$; $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínues és:*

$$\{x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}[\lambda + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds], \lambda \in \mathbb{R}\}$$

I, per tant, la solució que satisfà $x(t_0) = x_0$ és:

$$\varphi(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds) = x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma}\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds =$$

$$= x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma}b(s)ds$$

Demostració. Per començar, veure que x de la forma descrita son solució és un càlcul. Ara, per veure que tota solució és d'aquella forma fem servir el mètode de variacions de les constants.

Semblant a la proposició del cas homogeni busquem la $c(t)$ tal que $x_p(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$, $(\forall t)$. Substituint a l'equació original tenim:

$$c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = x_p'(t) = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + b(t) \iff c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = b(t)$$

$$\implies c'(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}b(t) \implies c(t) - x_0 = \int_{t_0}^t c'(s)ds = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds$$

I, per tant,

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds$$

□

Exemple 13. Posem per cas que volem resoldre l'equació $x' = tx + \frac{1}{t}$ (coeficients continus, o bé a $(-\infty, 0)$, o bé a $(0, \infty)$).

Solució. 1. Busquem l'equació homogènia. $x' = tx \implies \frac{x'}{x} = t$, integrant entre t_0 i t, tenim

$$\ln x - \ln x_0 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 \implies x(t) = x_0e^{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2} = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2}e^{\frac{1}{2}t^2}$$

Per tant, la solució general homogenia:

$$\{x(t) = \lambda e^{\frac{1}{2}t^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

.

2. Trobem la solució de l'e.d.o. completa que en t_0 val x_0:

$x_p(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ i substituim a l'e.d.o:

$$c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}t = x_p'(t) = tc(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{t}$$

Que aleshores queda:

$$c'(t) = \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{2}t^2} \implies c(t) = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

Perquè $c'(t_0) = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2}$, finalment, la solució és:

$$x_p(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}[x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds]$$

□

2.4 Sistemes lineals de dimensió qualsevol (finita)

2.4.1 Sistemes homogenis

Sigui la e.d.o $x' = A(t)x$, per $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$, és a dir, A és una matriu $n \times n$ amb coeficients continus a $I \subset R$.

Proposició 13. *Sigui el sistema $x' = A(t)x$, amb $A \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Llavors, si φ n'és una solució definida a $I \implies \varphi \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}^n)$.*

Demostració. Provem-ho per inducció:

Pel cas base $k = 0$. Si φ és solució $\implies \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \implies \varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Suposem que A és de classe $\mathscr{C}^k$ i φ és solució de $x' = A(t)x$ de classe $\mathscr{C}^k$: llavors $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \implies A, \varphi' \in \mathscr{C}^k \implies \varphi \in \mathscr{C}^{k+1}$. □

Exemple 14. Comproveu que el mateix argument s'aplica a $x' = f(t, x)$, si f és de classe $\mathscr{C}^k$ respecte a (t, x).

Teorema 14. *(És el teorema 2.8 dels apunts) Siguin $I \subset \mathbb{R}$, interval de $\mathbb{R}$, $A \in \mathscr{C}(I, M_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Sigui $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, qualsevol. llavors el p.v.i*

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

té una solució $\mathscr{C}$, definida a I. Una solució és única en el sentit següent: si $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \subset I \to \mathbb{R}$ n'és una altra solució $\implies \tilde{\varphi}_{|\tilde{I}} = \varphi_{|\tilde{I}}$

Demostració. És un corol·lari del Teorema de Picard. □

Nota 15. *No sabem calcular φ. El teorema ens permet deduir l'aplicació: $\varphi : I \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ amb $(t, t_0, x_0) \to \varphi(t, t_0, x_0)$, on $\varphi(t, t_0, x_0)$ és la solució del p.v.i. en l'instant t. A aquesta aplicació l'anomenarem flux del p.v.i.*

Exercici: Fent servir el teorema 2.8. i el fet que la sol·lució general de $x' = A(t)x$ és un espai vectorial, proveu que, fixats $t, t_0 \in I$, l'aplicació de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, que envia x_0 a $\varphi(t, t_0, x_0)$ és una aplicació lineal.

$$\varphi(t, t_0, \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) = \lambda_0\varphi(t, t_0, x_0) + \lambda_1\varphi(t, t_0, x_1)$$

Teorema 15. *Sigui $A \in \mathscr{C}(I, M_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Llavors, la solució general de $x' = A(t)x$ (sistema lineal i homogeni) és un espai vectorial de dimensió n.*

Demostració. Veurem (1) que hi ha n solucions de $x' = A(t)x$ linealment independents ($\implies$ dimensió de la solució general $\geq n$). (2) que aquestes solucions en són base.

Per (1). Sigui $t_0 \in I$. Sigui e_i, l'i-éssim vector de la base canònica a $\mathbb{R}^n$. Pel teorema 2.8, sigui φ_i la solució del p.v.i:

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x \\ x(t_0) &= e_i \end{aligned}$$

Afirmem que $\{\varphi_i\}_{i=1,\cdots,n}$ són l.i. Hem de veure que si $\lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t) = 0$ ($\forall t \in I$) $\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Suposem que tenim uns $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que compleixen la condició anterior. En particular, si $t = t_0$, $\lambda_1\varphi_1(t_0) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t_0) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, llavors com els vectors canònics són l.i. llavors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Per (2). Sigui $\tilde{\varphi} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una solució qualsevol de $x' = A(t)x$. Siguin $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tals que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \varphi(\tilde{t_0})$. Veiem que $\tilde{\varphi}(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t)$ ($\forall t \in I$).

Per a veure-ho, comproveu que són solució del mateix p.v.i i apliquem el Teorema 2.8. Tant $\tilde{\varphi}$ com $\lambda_1\varphi + \cdots + \lambda_n\varphi_n$ són solució de $x' = A(t)x$. Com que $\lambda_1\varphi_1(t_0) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t_0) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \tilde{\varphi}(t_0)$ coincideixen en $t = t_0$ llavors, com la solució del p.v.i. és única, coincideixen en tot I. $\square$

Definició 16. Sigui $A \in (I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Anomenarem *sistema fonamental de solucions* de $x' = A(t)x$ a qualsevol base de la solució general del sistema. El teorema anterior ens diu que un s.f.s té exactament n funcions.

Definició 17. Sigui $A \in (I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Direm que una matriu $M(t)$ (per $t \in I$) és una matriu fonamental del sistema $x' = A(t)x$ si les seves columnes són un s.f.s. del sistema. És a dir, si $M(t) = (m_1(t), \cdots, m_n(t))$, llavors $m_i' = A(t)m_i$. Podem escriure $M(t)' = A(t)M(t)$ i que $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n}$ generant l'espai de solucions.

Exercici: Considerem el problema següent: Donada una matriu $C \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, busquem Φ tal que

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= A(t)\Phi(t) \\ \Phi(t_0) &= C \end{aligned}$$

On $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ i $t_0 \in I$. Proveu que $\exists!$ solució $\Phi(t)$ definida en I.

Exemple 16. Trobem una m.f. de

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x + y \\ y' &= \frac{1}{t}y \end{aligned}$$

La qual és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comencem resolent (2). $y' = \frac{1}{t}y \implies \frac{y'}{y} = \frac{1}{t} \implies \ln y = c + \ln t$ llavors $y(t) = \beta t$. Substituïm a (1):

$$x' = \frac{1}{t}x + \beta t$$

Les solucions de $x' = \frac{1}{t}x$ són $x_n(t) = \alpha t$. Variació de les constants: $x(t) = c(t)t$. $c'(t)t + c(t) = \frac{1}{t}c(t)t + \beta t \implies c'(t) = \beta \implies c(t) = \alpha + \beta t$, llavors $x(t) = (\alpha + \beta t)t = \alpha t + \beta t^2$ i $y(t) = \beta t$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Exercici: Raoneu que φ_1 i φ_2 són base de la solució general del sitema. Llavors una m.f n'és:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$