

# Problemes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

2019

## 1 Nocions bàsiques

En aquest apartat apareixen problemes relacionats amb les nocions bàsiques de connexió i distància. A més, de problemes vinculats amb les formes matricials d'un graf.

**Problema 1:** *El nombre de vèrtexs de grau senar en un graf  $G = (V, E)$  és parell.*

**Solució:**

Aquest problema és el clàssic *lema de les encaixades*, col·lorari de la següent fórmula (que va bé recordar).

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

En paraules diu que la suma dels graus del vèrtexs és igual a dos cops el nombre d'arestes. Aquest fet és evident perquè cada aresta és adjacent a exactament dos vèrtexs, quan sumem els graus la comptarem dues vegades. Ara, el problema ens motiva a distingir entre vèrtexs de grau senar i de grau parell. Siguin  $U_1$  els vèrtexs de grau senar i  $U_2$  els vèrtexs de grau parell ( $V = U_1 \cup U_2$ ). La fórmula es pot escriure com:

$$\sum_{u \in U_1} d(u) = 2|E| - \sum_{u \in U_2} d(u)$$

On a la dreta només apareixen termes parells, per tant el resultat és parell. I a l'esquerra hi ha una suma de  $|U_1|$  termes senars. Sabent que aquesta ha de ser parell, n'hi ha d'haver un nombre parell. És a dir,  $|U_1|$  és parell, que és el que volíem veure.

**Problema 2:** *Qualsevol graf amb  $n \geq 2$  vèrtexs, en té dos del mateix grau.*

**Solució:**

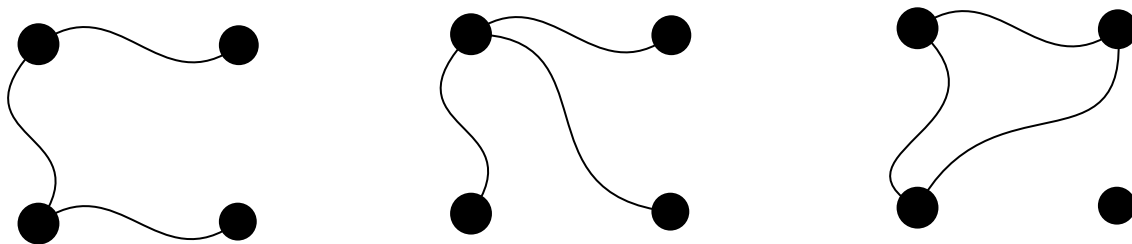
El conjunt de possibles graus d'un graf de  $n$  vèrtexs és subconjunt de  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  (de cardinal  $n$ ), ja que cada vèrtex pot no tenir cap aresta o tenir-ne alguna fins arribar al màxim que seria ser adjacent amb els altres  $n-1$  vèrtexs. Tot i així, en un graf no hi pot haver alhora un vèrtex de grau 0 (no és adjacent amb cap altre) i un vèrtex de grau  $n-1$  (és adjacent amb tots els altres). Per tant, hi ha, com a molt,  $n-1$  possibles graus diferents en un graf de  $n$  vèrtexs. Aleshores, pel *Principi del Colomar*, existeixen dos vèrtexs que tenen el mateix grau, que és el que volíem demostrar.

**Problema 3:** *Quants grafs hi ha de 4 vèrtexs i 3 arestes? Quants n'hi ha no isomorfs?*

**Solució:**

Anem a veure primer que el nombre de grafs amb  $n$  vèrtexs i  $m$  arestes és  $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ . Això es deu al fet que les arestes d'un graf  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  (és a dir,  $|V| = n$ ) és subconjunt de  $\binom{V}{2}$  i per cada subconjunt  $E$  d'arestes el graf és diferent i no n'hi ha més a part d'aquests. Si fixem que  $|E| = m$ , equival a dir que dels  $\binom{V}{2}$  se'n trien  $m$ . D'on surt que els nombre de grafs d'ordre  $n$  i mida  $m$  és  $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ . Pel cas  $n = 4$  i  $m = 3$ , n'hi ha  $\binom{\binom{4}{2}}{3} = \binom{6}{3} = 20$ .

En general, és difícil trobar tots els grafs no isomors de  $n$  vèrtexs i  $m$  arestes. Però per casos petits és pot fer, per  $n = 4$  i  $m = 3$  tenim:



Primer distingim entre que el graf sigui connex o no. Si no és connex l'única possibilitat és que tingui només dues components connexes. Una amb tres vèrtexs i tres arestes, i l'altre un vèrtex aïllat (això dona el tercer de la imatge). Després, pel cas connex, fem servir que necessàriament un vèrtex té almenys grau 2 (dalt esquerra amb dalt dreta i baix esquerra). Falta per determinar una aresta que ha de ser adjacent amb el vèrtex no connex i unir-lo amb un dels altres tres, dos d'ells donen el mateix graf isomorf per tant només compten per un. Així que si el graf és connex només hi ha dos casos, el camí (el primer) i l'estrella (el segon).

**Problema 4:** Sigui  $a_n$  el nombre de grafs d'ordre  $n$  i  $b_n$  el nombre de grafs no isomorfs d'ordre  $n$ . Proveu que  $\log_2 a_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$  i  $\log_2 b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n \log n)$ . En particular,  $\log b_n \sim \log a_n$ , ( $n \rightarrow \infty$ ).

#### Solució:

Sabem que hi ha  $2^{\binom{n}{2}}$  grafs d'ordre  $n$ . Perquè per a cada dos vèrtexs pot haver-hi o no aresta. Llavors,  $\log_2 a_n = \binom{n}{2} = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$ . Ara,  $b_n$  no el podem calcular explícitament però sí donar una fita, de fet ja tenim una fita superior que és  $a_n$ . Podem deduir una cota inferiorment de  $b_n$  de la següent manera. Dos grafs són isomorfs si hi ha una permutació dels vèrtexs que dona el mateix graf, però no totes les permutacions són vàlides. Per tant,  $b_n \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ , això assegura que  $\log b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(\log n!)$ . Com  $\mathcal{O}(\log n!) = \mathcal{O}(n \log n)$ , hem obtingut el que volíem. La segona part, es demostra directament de les fórmules que ja hem deduit.

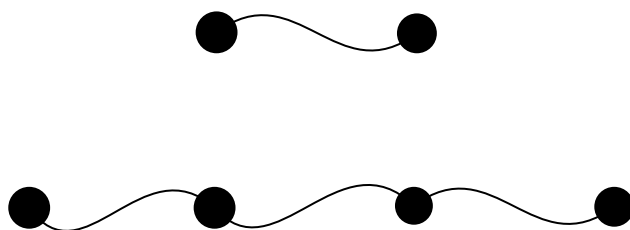
**Problema 5:** El graf complementari  $\bar{G}$  de  $G = (V, E)$  és  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ .

- Proveu que  $G \cong G'$  si i només si  $\bar{G} \cong \bar{G}'$ .
- Un graf  $G$  és autocomplementari si és isomorf a  $\bar{G}$ . Proveu que el seu ordre és  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Comproveu que per a  $k = 4, 5$  hi ha grafs autocomplementaris.
- Proveu que, si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , i  $G$  és un graf autocomplementari d'ordre  $n$ , aleshores té un nombre senar de vèrtexs de grau  $(n-1)/2$ .
- Proveu que un graf autocomplementari té diàmetre 0, 2 o 3.

#### Solució:

- Com el complementari del complementari de  $G$  és  $G$ , només cal demostrar una de les implicacions. Ara,  $G$  i  $G'$  són isomorfs si i només si existeix una permutació  $\sigma$  dels vèrtexs que manté les arestes. És a dir,  $\forall u, v \in V; \{u, v\} \in E$  si i només si  $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in E'$ . Aquesta mateixa permutació serveix per veure que  $\bar{G} \cong \bar{G}'$ . En efecte,  $\forall u, v \in V; \{u, v\} \in \bar{E}$  si i només si  $\{u, v\} \notin E$  si i només si  $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \notin E'$  si i només si  $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in \bar{E}'$ . Que és el que volíem demostrar
- Tot parell de grafs complementaris tenen el mateix nombre d'arestes, en particular, si un graf és autocomplementari tindrà un nombre exactament la meitat de totes les possibles arestes que pot tenir un graf d'ordre  $n$ . És a dir,  $|E| = \binom{V}{2}/2 = \frac{n(n-1)}{4}$ . Com ha de ser un nombre enter, necessàriament  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Pel cas  $n = 4$  el camí és autocomplementari i pel cas  $n = 5$  el cicle és autocomplementari.

- (c) Si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $n$  és senar. Ara, en un graf  $G$ , els vèrtexs de grau  $k$  tenen grau  $n - k - 1$  a  $G'$  perquè a  $G'$  són adjacents només als vèrtexs que no ho era a  $G$ . Així doncs, si  $G$  és autocomplementari ha de tenir el mateix nombre de vèrtexs de grau  $k$  que de grau  $n - k - 1$ , perquè sabem que hi ha una permutació. Això ens diu que podem agrupar els vèrtexs de grau  $k$  i de grau  $n - k - 1$  per formar conjunts amb un nombre parell de vèrtexs. Excepte per  $k = \frac{n-1}{2}$  que són els vèrtexs que tenen el mateix grau en  $G$  com en  $G'$ , per tant no podem assegurar que siguin diferents. De fet, com hem agrupat els vèrtexs en conjunts amb un nombre parell d'elements excepte els de grau  $\frac{n-1}{2}$  i com hi ha un nombre senar de vèrtexs; necessàriament hi ha d'haver un nombre senar de vèrtexs de grau  $\frac{n-1}{2}$ . Que és el que volíem demostrar.
- (d) Anem a veure primer que per qualsevol graf  $G$  amb diàmetre més gran o igual que tres,  $\bar{G}$  té grau més petit o igual que 3. Considerem el subgraf camí de  $G$  que té per extrems dos vèrtexs a dist 3, sabem que no hi ha més arestes entre ells llavors a  $\bar{G}$  tots estan a distància com a màxim 3. Si considerem un vèrtex que no pertany al camí, com aquest no pot ser adjacent als dos extrems alhora, en el complementari estarà enllaçats amb almenys un d'ells i per tant en  $\bar{G}$  estarà a distància com a molt tres de tots els vèrtexs del camí. Per últim considerem la distància entre dos vèrtexs exteriors al camí. Si no són adjacents, en el complementari estaran a distància u.



En el cas que sí siguin adjacents, com abans, cada un dels vèrtexs exteriors al camí no poden ser adjacents als dos extrems del camí alhora. Llavors, en  $\bar{G}$  la distància màxima que tindran els dos vèrtexs exteriors és tres. Per tant, com tots els vèrtexs queden a distància menor o igual que tres, el diàmetre de  $\bar{G}$  és menor o igual que tres. Si apliquem aquest resultat a un graf autocomplementari, aquest ha de tenir diàmetre menor o igual que tres. En efecte, com el complementari és isomorf a ell mateix, i dos grafs isomorfs tenen el mateix diàmetre,  $G$  no pot tenir diàmetre quatre o més. Ara, tampoc pot tenir diàmetre 1, perquè seria un graf amb almenys dos vèrtexs, els graus dels quals són tots 1 o 0, llavors els vèrtexs del graf complementari tenen graus  $n$  i  $n - 1$  ( $> 0$ ). Descartem que pugui tenir vèrtexs de grau 0. Tampoc pot tenir de grau u perquè resultaria que  $n - 1 = 1$  és a dir  $n = 2$  i trivialment (o per l'apartat (b)) no hi ha grafs autocomplementaris de grau 2. Només queda la possibilitat que els grafs autocomplementaris tinguin diàmetre 0, 2 o 3. Que és el que volíem veure.

Un exemple de cada: de diàmetre 0 només hi ha el graf d'ordre 1, de diàmetre 2, tenim el cicle de 5, i de grau 3, tenim el camí de 4.

#### **Problema 4:**

**Solució:**

#### **Problema 4:**

**Solució:**

#### **Problema 4:**

**Solució:**