Apunts d'estructures algrebraiques

Aleix Torres i Camps

Jordi Guardia (jordi.guardia-rubies@upc.edu), Anna Rio i Santi Molina
(Martí Oller)

1 Introducció

Definició 1. Una operació en un conjunt A és una aplicació $\phi : A \times A \to A$

Possibles propietats de les operacions

1. (PC) Propietat commutativa (o abeliana) $\forall a, b \in A$ $\phi(a, b) = \phi(b, a)$.
2. (PA) Propietat associativa $\forall a, b, c \in A$ $\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c)$.
3. (EN) Element neutre $\exists e \in A$ tal que $\forall a \in A \phi(e, a) = \phi(a, e) = a$.

   Clarament, l'element neutre és únic. En efecte, si n'existisin 2 elements neutres, e i e', aleshores $e = \phi(e, e') = e'$, amb la qual cosa hem arribat a contradicció.

4. (PI) Invers d'un element $a \in A$ és $b \in A$ tal que $\phi(a, b) = \phi(b, a) = e$.

   Si existeix i és associatiu també és únic. En efecte, si $\exists b, c$ tals que $\phi(a, b) = \phi(b, a) = \phi(a, c) = \phi(c, a) = e$. En aquest cas, $b = \phi(b, \phi(a, c)) = \phi(\phi(b, a), c) = c$, per tant, $b = c$ i són el mateix element.

5. (PD) Si tenim dues operacions, que la primera (ϕ) sigui distributiva respecte la segona (μ) vol dir que $\phi(a, \mu(b, c)) = \phi(\mu(a, b), \mu(a, c))$ i que $\phi(\mu(b, c), a) = \phi(\mu(b, a), \mu(b, c))$.

1.1 Estructures algebraiques bàsiques

Definició 2. Un Grup $(G, *)$ cal que compleixi EN, PA, PI.

Definició 3. Un Semigrup $(G, *)$ cal que compleixi EN, PA.

Definició 4. Un Grup Abelià és un grup amb PC.

Definició 5. Una Anell $(A, +, *)$ cal que $(A, +)$ sigui un grup abelià, $(A, *)$ un semigrup i la PD respecte la primera.

Definició 6. Un Anell communtatiu (o abelià) és un anell on $(A, *)$ és commutatiu.

Definició 7. Un Cos és un Anell $(A, +, *)$ tal que $(A \setminus \{0\}, *)$ és un grup abelià. On 0 és l'element neutre de $(A, +)$.

Definició 8. Mòdul $(M, +)$ és un mòdul sobre l'Anell A tal que: $(M, +)$ és un grup abelià i $A \times M \to M$ (multiplicació per escalars) tal que: $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$, $(a + b)m = am + bm$, $a(bm) = (ab)m$ i $1_A m = m$ $(\forall a, b \in A, \forall m, m_1, m_2 \in M$.

Definició 9. Un espai vectorial és un mòdul sobre un Cos.

2 Anells

Sigui $(A, +, \Delta)$ un Anell (sempre ens referirem a Anells commutatius sense haver de dir-ho cada vegada).

Notació: 0_A és l'emenent neutre de la suma $(+)$, el "zero". I a l'element neutre del producte $(\cdot)$ és 1_A, l'ü". Denotarem $-a$ l'element invers d'a respecte $+$ (l'"oposat"). a^{-1} l'element invers d'a respecte del producte. $A^* = \{a \in A$ tal que $\exists a^-1\}$ obtinc un grup abelià.

Proposició 10. *Propietats:*

1. $\forall a, b, c \in A$ *si* $a + b = a + c$ *llavors* $b = c$.
2. $\forall a \in A$ *es compleix que* $0_A \Delta a = 0_A$.
3. $\forall a \in A$ *es compleix que* $(-1_A)\Delta(-a) = a$.
4. $\forall a \in A$ *es compleix que* $(-1_A)\Delta(a) = -a$.

Demostració.

1. $-a+(a+b) = -a+(a+c) \iff$ *(per PA)* $(-a+a)+b = (-a+a)+c \iff O_A+b = O_A+c \iff b = c$.
2. $0_A\Delta a + 0_A = 0_A\Delta a = (0_A + 0_A)\Delta a) = [PD] = 0_A\Delta a + 0_A\Delta a \implies 0_A = 0_A\Delta a$
3. *Coses*
4. *Coses*

Exemple 1.
1. $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$
2. $Z[x] \subset Q[x] \subset R[x] \subset C[x]$
3. $M_n(A)$ on A és un Anell
4. $\mathbf{Z}[J] = \{a_0 + a_1 J + a_2 J^2 + a_3 J^3 + a_4 J^4 : a_i \in \mathbf{Z}\}$ $J = e^{2\pi i/5}$
5. $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ Taules d'operacions per $n = 6, 8$.

3 Cossos

4 Grups

5 Moduls