Apunts de teoria de la probabilitat

Aleix Torres i Camps

Anna de Mier (anna.de.mier@upc.edu), Guillem Perearnau i Sonia Perez

1 Espais de probabilitat

1.1 Motivació

L'objectiu de la teoria de la probabilitat és trobar models per a fenònems que depenen de l'atzar (no deterministes), cada realització d'un fenomen en direm experiment, del qual n'obtindrem un resultat. A més, tindrem els successos (observables) que son totes les preguntes raonables que ens podem fer.

1.2 Experiments i probabilitat

Definició 1. Un experiment és un parell $(\Omega, \mathscr{A})$ on Ω és un conjunt i $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tal que:

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$
3. Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una col·lecció numerables d'elements de $\mathscr{A} \implies \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$

Exemple 1. Uns quants exemples...
Volem una funció que assigni probabilitats de successos, és a dir, $P : \mathscr{A} \to \mathbf{R}$. Llavors definim:

Definició 2. Un espai de probabilitat és una terna $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ on:

1. $(\Omega, \mathscr{A})$ és un experiment.
2. $P : \mathscr{A} \to R$ tal que: $P(\emptyset) = 0$, $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{A}$. Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una col·lecció de successos dos a dos dijunts $\implies P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$.
3. $P(\Omega) = 1$.

Per tant, la probabilitat és una mesura a $(\Omega, \mathscr{A})$ normalitzada a 1. A P se l'anomena funció de probabilitat.

Exemple 2. Espia discret, si Ω és numerable i $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Si $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ prenem $\sum_{i\geq 1} p_i = 1$ (amb $p_i \geq 0$) i definim $\mathscr{P}(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\})$, alleugerint la notació podem fer servir $P(\{w_i\}) = P(w_i) = p_i$.

Exemple 3. Espai clàssic, és un éspai discret amb $|\Omega| = N$ i $p_i = 1/N$. Çassos favorables entre cassos possibles": $P(A) = \frac{|A|}{N}$.

Exemple 4. Espais clàssics amb monedes o daus, tot ben repartit.

Exemple 5. Durada d'un mòbil? $\Omega = (0, \infty)$ o bé, $(0, L]$. Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ sabem que no podem assignar-hi una mesura. Però com ens interessen els intervals com (a, b), agafe, la σ-àlgebra que conté tots els intervals (oberts). Aquí apareixen els burelians $\mathcal{B} = \sigma(I)$ i podem agafar la mesura de Lebesque a $\mathbf{R}$. En resum, $\Omega = (0, L)$, $\mathrm{B} = \sigma(I)$ i $P(B) = \frac{\mu(B)}{L}$. On $\mu(B)$ és la seva mesura de Lebesgue. Tot i així, no és realistic perquè és massa uniforme.

Proposició 3. *Propietats d'espais de probabilitat. Sigui* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$*:*

1. *Per $r \geq 2$, si $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{A}$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ llavors $P(\bigcup_{i=0}^r a_i) = \sum_{i=1}^r P(A_i)$*

2. *Si $A, B \in \mathscr{A}$ i $A \subset B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ i $P(A) \leq P(B)$.*

3. *$P(A^c) = 1 - P(A)$, $\forall A \in \mathscr{A}$*

4. *(Desigualtat de Boole) Si $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{A} \implies P(\bigcup_{i=1}^r A_i) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_r)$*

Demostració.

1. En els cassos finits, per $r < k$, cal agafar $A_k = \emptyset$, ja que així, com que $P(\emptyset) = 0$, $P(\bigcup_{1 \leq n \leq r}) = P(\bigcup_{1 \leq n} A_n) = \sum_{1 \leq n} P(A_n) = \sum_{1 \leq n \leq r} P(A_n)$.

2. Primer de tot $B \setminus A \in \mathscr{A}$, ja que $B \setminus A = (B^c \bigcup A)^c \in \mathscr{A}$. Després, reordenant el fet que $P(A) + P(B \setminus A) = P(B)$, ens queda el que volíem. Com les propietats són positives, la desigualtat es demostra automàticament.

3. De $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$ obtenim l'expressió de l'enunciat.

4. Ho anem a fer per inducció sobre r. Clarament per $r = 1$ és cert, suposem que ho és per $r - 1$, anem a veure-ho per a un r arbitrari. Sigui $B = (\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \bigcap A_r$, llavors $P(\bigcup_{i=1}^r A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \bigcup A_r) = P((\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \bigcup (A_r - B_r)) = P((\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i)) + P(A_r - B_r) =$ [per hipòtesi i per 2] $\leq P(A_1) + \cdots + P(A_{r-1}) + P(A_r)$ que és la desigualtat de Boole.

□

Proposició 4. *Successions monòtones:*
Si $A \in \mathscr{A}$, $i \geq 1$ i $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, aleshores $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.
Si $A \in \mathscr{A}$, $i \geq 1$ i $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, aleshores $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

Demostració. Fem $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, ... Aleshores, $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$ i $A_i = \bigcup_{j=1}^i B_i$. Per tant:

$$P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = P(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \sum_{n \geq 1} P(B_i) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N P(B_n) = \lim_{N \to \infty} P(A_N)$$

L'altre és demostra passant al complementari. □

Teorema 5. *Siguin $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{A}$. Per $I \subset [r]$, posem: $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ i $S_k = \sum_{I \subset [r] \ |I|=k} P(A_I)$. Aleshores,*

$$P(\bigcup_{i=1}^r A_i) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} S_k$$

Demostració. Per inducció, el cassos $r = 1, 2$ són fàcils. Aleshores, pel cas inducctiu fa falta el cas $r - 1$ i el cas 2. □

Proposició 6. *Desigualtats de Bonferroni. Sigui $M_T = \sum_{k=1}^T (-1)^{k+1} S_k$. Aleshores, si:*
1. T és senar $\implies P(\bigcup_{i=1}^r A_i) \leq M_T$.
2. T és parell $\implies P(\bigcup_{i=1}^r A_i) \geq M_T$.

Demostració. La demostració per inducció és semblant a l'anterior. □

1.3 La probabilitat condicionada

Sigui $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espai de probabilitat. Prenem $B \in \mathscr{A}$ amb $P(B) > 0$. Volem recalcular la probabilitat P dels successos sabent que ha passat B.

Definició 7. Si $B \in \mathscr{A}$ amb $P(B) > 0$ i $A \in \mathscr{A}$, la probabilitat de A condicionada a B és

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

Observació 8.

1. $P(A|B)$, a priori, pot ser major o menor a $P(A)$

2. Fixat B, $P_B : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ definida com $P_B(A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$, dona una funció de probabilitat en $(\Omega, \mathscr{A})$. (També ho és en $(\Omega, \mathscr{A}_B = \{A \bigcap B : A \in \mathscr{A}\})$).

Sigui ara $B_1, \cdots, B_n$ una partició de Ω (amb $B_i \in \mathscr{A}$ i $P(B) > 0$). Llavors, la llei de les probabilitats totals és

$$P(A) = P(A \bigcap \Omega) = P(A \bigcap (\bigcup B_i)) = P(\bigcup (A \bigcap B_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \bigcap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

2 Variables aleatòries

3 V.a Discretes

4 V.a Contínues

5 Funcions característiques i famílies exponencials

6 Convergència de variables aleatòries