Enunciats dels problemes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

1 Nocions bàsiques

Aquest apartat tracte sobre problemes relacionats amb les nocions bàsiques de connexió i distancia. A més, de problemes vinculats amb les formes matricials d'un graf.

Problema 1: *El nombre de vèrtexs de grau senar en un graf $G = (V, E)$ és parell.*

Problema 2: *Qualsevol graf amb $n \geq 2$ vèrtexs, en té dos del mateix grau.*

Problema 3: *Quants grafs hi ha de 4 vèrtexs i 3 arestes? Quants n'hi ha no isomorfs?*

Problema 4: *Siguin a_n el nombre de grafs d'ordre n i b_n el nombre de grafs no isomorfs d'ordre n. Proveu que $\log_2 a_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$ i $\log_2 b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n \log n)$. En particular, $\log b_n \sim \log a_n$, $(n \to \infty)$.*

Problema 5: *El graf complementari $\bar{G}$ de $G = (V, E)$ és $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.*

(a) *Proveu que $G \cong G'$ si i només si $\bar{G} \cong \bar{G}'$.*

(b) *Un graf G és autocomplementari si és isomorf a $\bar{G}$. Proveu que el seu ordre és $n \equiv 0, 1$ (mod 4). Comproveu que per a $k = 4, 5$ hi ha grafs autocomplementaris.*

(c) *Proveu que, si $n \equiv 1$(mod 4), i G és un graf autocomplementari d'ordre n, aleshores té un nombre senar de vèrtexs de grau $(n-1)/2$.*

(d) *Proveu que un graf autocomplementari té diàmetre 0, 2 o 3.*

Problema 6: *Considereu el graf d'ordre $n > 2$ que té per vèrtexs $V = \binom{[n]}{k}$, per un k entre 1 (inclòs) i $n/2$ (no inclòs), i té per arestes $E = \{uv : u \bigcap v = \emptyset\}$. Determineu l'ordre, la mida i el grau dels vèrtexs de G. Per a $n = 5$, $k = 2$ dibuixeu el graf que s'obté. Proveu que, per a $k > n/3$, el graf no té triangles.*

Problema 7: *Una seqüència $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ d'enters és gràfica si hi ha un graf G amb $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $d_i = d(v_i), 1 \leq i \leq n$. Proveu que la seqüència*

$$1 \leq k = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

és gràfica si i només si, la seqüència

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \ldots, d_n$$

és gràfica.

Problema 8: *Determineu quina de les seqüències és gràfica: (a) (3,3,2,2,2); (b) (4,4,3,2,1); (c) (4,3,2,2,2); (d) (3,3,3,2,2); (e) (3,3,3,3,2); (f) (5,3,2,2,2).*

Problema 9: *Considerem el graf complet K_n amb conjunt de vèrtexs $[n]$. Calculeu el nombre de subgrafs de mida 5 que contenen exactament dos triangles.*

Problema 10: *Sigui G un graf d'ordre $n \geq 1$ i mida m que no té triangles.*

(a) *Demostreu que si u i v són vèrtexs de G adjacents, aleshores $d(u) + d(v) \leq n$.*

(b) *Proveu que si $n = 2k$, aleshores $m \leq k^2$.*

(c) *Proveu que $m \leq n^2/4$.*

Problema 11: *L'excentricitat d'un vèrtex v en un graf connex G és la màxima distància de v a un altre vèrtex de G. El radi $r(G)$ de G és la mínima excentricitat dels seus vèrtexs. Proveu que $r(G) \leq diam(G) \leq 2r(G)$. Proveu que les desigualtats són justes.*

Problema 12: *Sigui G un graf connex. Proveu que, si l és la llargada màxima d'un camí, dos camins de llargada l intersequen en algun vèrtex.*

Problema 13: *Doneu les matrius d'adjacència i d'incidència (amb una ordenació adequada dels vèrtexs i de les arestes) de cadascun dels següents grafs.*

(a) *El graf complet K_4.*

(b) *El camí P_5.*

(c) *El cicle C_6.*

(d) *El graf bipartit complet $K_{3,3}$.*

Problema 14: *Sigui G un graf amb conjunt de vèrtexs $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i sigui A la seva matriu d'adjacència, amb els vèrtexs ordenats segons els subíndexs. Demostreu les afirmacions següents.*

(a) *Si J és la matriu quadrada d'ordre n amb totes les entrades iguals a 1, $(AJ)_{i,i} = d(v_i)$, $1 \leq i \leq n$.*

(b) *La traça de A^2 és el doble de la mida de G.*

(c) *La traça de A^3 és $6t$, on t és el nombre de triangles que hi ha a G.*

2 Arbres

Aquest apartat tracte sobre problemes relacionats amb les propietats dels arbres, seqüències de Prüfer, arbres binaris, ...

Problema 15: *Un graf acíclic és un bosc. Proveu que si F és un bosc, cada component connexa és un arbre, i si F té n vèrtexs i k components aleshores té $n-k$ arestes.*

Problema 16: *Proveu que els boscos són els únics grafs tals que cada subgraf connex és un subgraf induït.*

Problema 17: *Sigui T un arbre de n vèrtexs.*

(a) Proveu que el nombre de fulles és $2+\sum_{v:d(v)\geq 3}(d(v)-2)$.

(b) Proveu que el nombre de fulles és almenys $\Delta(T)$.

Problema 18: *Proveu que un graf G amb grau mínim $\delta=\delta(G)$ contè com a subgrafs tots els arbres de $\delta+1$ vèrtexs.*

Problema 19: *Proveu que el camí P_n és l'únic arbre amb dues fulles i l'estrella $K_{1,n-1}$ és l'únic arbre amb $n-1$ fulles. Quants arbres no isomorfs hi ha amb tres fulles? I amb $n-2$ fulles?*

Problema 20: *Un vèrtex v d'un graf connex G és central si la seva excentricitat és el radi de G. Proveu que un arbre té un o dos vèrtexs centrals.*

Problema 21: *Sigui $1\leq d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$ una seqüència d'enters. Proveu que existeix un arbre T amb $V(T)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ tal que $d(v_i)=d_i$, $1\leq i\leq n$ si i només si $\sum_{i=1}^{n}=2(n-1)$.*

Problema 22: *Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents dels grafs següents.*

(a) El cicle d'ordre $n\geq 3$.

(b) El graf bipartit complet $K_{2,r}$, $r\geq 1$.

(c) El graf $G=([4],\{13,14,23,24,34\})$.

(d) El graf $G=([5],\{12,13,23,25,34,35,45\}$.

(e) El graf $G=([6],\{12,13,23,34,45,46,56\}$.

Problema 23: *Determineu la seqüència de Prüfer dels arbres següents.*

(a) $T=([5],\{12,13,24,35\})$.

(b) $T=([6],\{12,13,14,15,56\})$.

(c) $T=([8],\{12,13,14,18,25,26,27\})$.

(d) $T=([15],\{12,13,23,34,45,46,56\})$.

Problema 24: *Detemineu els arbres que tenen seqüència de Prüfer:*

(a) (1,2,3,4).

(b) (2,2,4,1,3).

(c) *(4,5,1,4,1,5).*

(d) *(11,7,11,9,5,5,2,2,1,1).*

Problema 25: *Calculeu el nombre d'arbres diferents amb conjunt de vèrtexs $V = [11]$ tals que tenen un vèrtex de grau 4, dos vèrtexs de grau 3, dos vèrtexs de grau 2 i sis vèrtexs de grau 1.*

Problema 26: *Sigui T un arbre binari, és a dir, té un vèrtexs v arrelat i cada un dels vètexs té 0 o 2 fills. Un vèrtex d'un arbre binari és intern si té dos fills.*

(a) *Quantes fulles d'un arbre binari amb t vèrtexs interns.*

(b) *Quants arbres binaris (no ordenats) hi ha amb n vèrtexs.*

(c) *Quants arbres binaris ordenats hi ha amb n vèrtexs.*

3 Cicles i circuits

Aquest apartat tracte sobre els *Teorema de Euler* (per cicles Eulerians), el *Teorema de Ore* (per cicles Hamiltonians) i els seus derivats.

Problema 1: *Un recorregut Eulerià és un recorregut $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ que conté totes les arestes de G i $v_0 \neq v_m$.*

(a) Proveu que un graf G conté un recorregut Eulerià si i només si tots els vèrtexs de G tenen grau parell llevat de dos, i que aquests dos són v_0 i v_m

(b) Donat un graf G amb $2k$ vèrtexs de grau imparell, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir per a obtenir un graf (o multigraf) Eulerià?

(c) Quin és el nombre mínim de vegades que s'ha d'aixecar el llapis per a dibuixar el graf de Petersen?

Problema 2: *Proveu que si G és un graf d'ordre imparell tal que ell i el seu complementari G^c són tots dos connexos. Aleshores, G és Eulerià si i només si ho és G^c.*

Problema 3: *El graf Q_n té per vèrtexs les paraules binàries de llargada n, $\{0,1\}^n$, i dues paraules són adjacents si difereixen exactament en una de les coordenades. Determineu els valors de n pels quals Q_n és Eulerià i per quins valors és Hamiltonià.*

Problema 4: *Donats dos grafs G, H el seu producte cartesià $G \Box H$ té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià $V(G) \times V(H)$ i dos vèrtexs (x_1, y_1), (x_2, y_2) són adjacents a $G \Box H$ si, o bé $\{x_1, x_2\} \in E(G)$ i $y_1 = y_2$, o bé $x_1 = x_2$ i $\{y_1, y_2\} \in E(H)$.*

(a) Comproveu que $Q_n = K_2 \Box \cdots \Box K_2$ (n vegades).

(b) Proveu que si G i H són Eulerians aleshores $G \Box H$ també ho és. Proveu que, si G té un nombre imparell de vèrtexs, el recíproc tambè és cert.

(c) Proveu que si G i H són Hamiltonians i $V(H)$ és parell aleshores $G \Box H$ també és Hamiltonià.

(d) Proveu que si G és Hamiltonia, aleshores $G \Box K_2$ també ho és.

Problema 5: *El graf línia LG d'un graf G té per vèrtexs $V(LG) = E(G)$ i dos vèrtexs són adjacents a LG si i només si les arestes corresponents són incidents a G.*

(a) Proveu que si G és Eulerià aleshores LG és Eulerià i Hamiltonià. És cert el recíproc?

(b) Proveu que si G és Hamiltonià, aleshores LG és Hamiltonià.

Problema 6: *Proveu que un graf amb grau mínim $\delta(G) \geq 2$ conté un camí de llargada $\delta(G)$ i un cicle de llargada $\delta(G) + 1$. Proveu que les cotes són òptimes.*

Problema 7: *Un camí Hamiltonià en un graf és un camí que passa per cada vèrtex una única vegada. Proveu que si el grau mínim d'un graf G amb $n \geq 2$ vèrtexs satisfà $\delta(G) \geq (n-1)/2$ aleshores G té un camí Hamiltonià.*

Problema 8: *Sigui G un graf amb n vèrtexs i m arestes. Proveu que, si $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$ aleshores G és Hamiltonià.*

4 Aparellaments

Aquest apartat tracte sobre el *Teorema de Hall* (per aparellamets de grafs bipartits) i els seus derivats i aplicacions.

Problema 9: *Proveu que un graf bipartit regular contè un aparellament perfecte. Proveu que, a més, les arestes del graf es poden partir en d aparellaments perfectes, on $d = d(G)$ és el grau del graf.*

Problema 10: *Sigui $\{A_1, \ldots, A_k\}$ una família de subconjunts de $[n]$. Un transversal de la família és una seqüència $(x_1, \ldots, x_k)$ amb $x_i \in [n]$ tal que tots els elements són diferents i $x_i \in A_i$ per a cada $i = 1, \ldots, k$. Proveu que $\{A_1, \ldots, A_k\}$ té un transversal si i només si, per a cada subconjunt no buit $I \subset [k]$, es satisfà*

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| \geq |I|$$

Problema 11: *Una matriu de permutació P és una matriu quadrada d'ordre n amb entrades a $\{0, 1\}$ tal que cada fila i cada columna contenen exactament un 1 (i la resta són zeros). Sigui A una matriu quadrada d'ordre n amb entrades a $\{0,1\}$. Proveu que A es pot escriure com $A = P_1 + \ldots + P_k$, on cada P_i és una matriu de permutacions si i només si la suma dels elements de cada columna val k i el mateix passa amb la suma dels elements de cada columna.*

Problema 12: *Sigui G un graf bipartit amb bipartició $\{V_1, V_2\}$ tal que hi ha $U \subset V_1$ amb $|U| < |N(U)|$ (G no satisfà la condició de Hall). Sigui*

$$k = \max\{|U| - |N(U)| : U \subset V_1\}$$

Proveu que hi ha un aparellament M amb $|V_1| - k$ arestes i que és un aparellament de mida màxima.

Problema 13: *Sigui $G = (V_1 \bigcup V_2, E)$ un graf bipartit tal que, per a cada $U \subset V_1$ tenim $|N(U)| > |U|$. Proveu que cada aresta es pot estendre a un aparellament de V_1 a V_2.*

Problema 14: *Sigui $n \geq 2k \geq 2$. Proveu que hi ha una aplicació injectiva $f : \binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{k+1}$ tal que $A \subset f(A)$ per a cada $A \in \binom{[n]}{k}$.*

5 Coloració

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució:

Problema 22:
Solució: