Problemes de teoria de la probabilitat

ALEIX TORRES I CAMPS

ANNA DE MIER (anna.de.mier@upc.edu), GUILLEM PEREARNAU I SONIA PEREZ

1 Espais de probabilitat

Problema 1. Siguin $\mathcal{A}, B$ dues σ-àlgebra sobre Ω.

a Proveu que són tancades per interseccions numerables.

b Proveu que $\mathcal{A} \bigcap \mathcal{B}$ és una σ-àlgebra.

c Vegeu que $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$ no té perquè ser una σ-àlgebra.

Solució.

1. Suposem $A_i \in \mathcal{A}$, per $i \geq 1$, volem veure que $\bigcap_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}$, però com que els complementaris sí pertanyen a $\mathcal{A}$ i les unions numerables també, per les lleis de Morgan sabem que $(\bigcap_{i\geq 1} A_i)^c = \bigcup_{i\geq 1} A_i^c \in \mathcal{A}$.

2. A la intersecció hi ha el conjunt buit perquè els dos el contenen. Si tenim un element a la intersecció segur que hi ha el seu complementari perquè aquest element ha de pertanyer tant a $\mathcal{A}$ com a $\mathcal{B}$ i, com que son σ-àlgebres les dues contenen el seu complementari i, per tant, està a la intersecció.

3. Per exemple, siguin $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ i $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ dues σ-àlgebra del conjunt $\Omega = \{a, b, c\}$. (Està clar que són σ-àlgebres). Tot i així, la unió de les σ-àlgebres és el conjunt $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ que no és una σ-àlgebra perquè conté $\{a\}$ i $\{c\}$ però no conté $\{a, c\}$.

$\square$

Problema 2. Sigui $\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ o } \mathbb{R} \setminus X \text{ és finit}\}$. La família $\mathcal{A}$, és una àlgebra? i és una σ-àlgebra?

Solució. Anem a veure que és una àlgebra.

$\emptyset \in \mathcal{A}$ perquè $\emptyset$ és finit.

Suposem que $X \in \mathcal{A}$, aleshores, X és finit o complementari d'un finit. Per tant, X^c és el complementari d'un finit o finit, respectivament. Així que, $X^c \in \mathcal{A}$.

Suposem que $A_i \in \mathcal{A}$ per $1 \leq i \leq n$. Ara, recordem que $(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c$, llavors si totes les A_i són finites, aleshores, la unió d'ells és finita i pertany a $\mathcal{A}$. Per altre banda, si hi ha algun A_i que no sigui finit, el seu complementari ho ha de ser, per tant, a la intersecció com a molt, hi ha un nombre finit d'elements i, per tant, pertany a $\mathcal{A}$.

Ara, veurem un contraexemple per notar que no és una σ-àlgebra. Cada un dels naturals per separat pertanyen a $\mathcal{A}$ però la unió numerable no hi pertany perquè ni els naturals són finits ni el complementari dels naturals en els reals és finit. $\square$

Problema 3. Sigui $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra i $B \in \mathcal{A}$. La família $\mathcal{B} = \{A \bigcap B : A \in \mathcal{A}\}$, és una σ-àlgebra?

Solució. Anem a veure que és una σ-àlgebra però del conjunt B.

El buit pertany a $\mathcal{B}$ perquè $\emptyset \in \mathcal{A}$ i $\emptyset \bigcap B = \emptyset$.

L'oposat d'un element $A \bigcap B$ respecte B s'aconseguix amb $A^c \bigcap B$.

La unió numerable es compleix amb gràcies a les lleis de Morgan. $\bigcup(A_i \bigcap B) = (\bigcup A_i) \bigcap B$. $\square$

Problema 4. Si $P(A) = 1/2$ i $P(B) = 2/3$, doneu fites superiors i infereios justes de $P(A \bigcap B)$ i de $P(A \bigcap B^c)$.

Solució. Utilitzarem que si un conjunt està inclós en una altre, el primer té una probabilitat menor o igual que el segon.

Per propietats de conjunts i de probabilitat tenim $P(A \bigcap B) = 1 - P(A^c \bigcup B^c)$. Aleshores busquem el mínim i el màxim de $P(A^c \bigcup B^c)$, el mínim es troba quan un està inclós en l'altra (prob. del gran 1/2) i el màxim quan són disjunts (prob. 1/2+1/3=5/6). Això correspon al 1 menys el màxim i al mínim de la probabilitat original. Per tant, $1/6 \leq P(A \bigcap B) \leq 1/2$.

Pel segon cas, fem el mateix però hem de fitar per sobre per 1. D'aquí: $\frac{1}{2} \leq P(A^c \bigcup B) \leq 1$. Llavors, com que $P(A \bigcap B^c) = 1 - P(A^c \bigcup)$, tenim $0 \leq P(A \bigcap B^c) \leq \frac{1}{2}$. $\square$

Problema 5. En un curs hi ha quatre assignatures. El 70% dels estudiants aproven l'assignatura A, el 75% aproven l'assignatura B, el 80% aproven l'assignatura C i el 85% aproven l'assignatura D. Quin és el mínim percentatge d'estudiants que aproven les quatre assignatures?

Solució. Farem servir conceptes de probabilitat per calcular el percentatge que ens demanen. Sigui X_A, X_B, X_C i X_D els succesos d'aprovar les assignatures A, B, C i D, respectivament. $P(X_A \bigcap X_B \bigcap X_C \bigcap X_D) = 1 - P((X_A \bigcap X_B \bigcap X_C \bigcap X_D)^C) = 1 - P(X_A^c \bigcup X_B^c \bigcap X_C^c \bigcap X_D^c)$. Ara, sabent que el màxim de la unió és la suma de probabilitats (i el mínim és el màxim de les probabilitats), el mínim de la probabilitat és $\min P(X_A \bigcap X_B \bigcap X_C \bigcap X_D) = 1 - \max P(X_A^c \bigcup X_B^c \bigcap X_C^c \bigcap X_D^c) = 1 - \sum_{i \in \{A,B,C,D\}} P(X_i) = 1 - 0.9 = 0.1$. $\square$

Problema 6. (Problema de Chevalier de Méré, formulat a Blaise Pascal). Aquest és un dels problemes que inicià la teoria de la probabilitat. Empíricament, el Chevalier de Méré havia observat que és més probable obternir "almenys un 6"en 4 tirades d'un dau que obtenir "almenys un doble 6"en 24 tirades de dos daus. Comproveu que és efectivalemt així.

Solució. El primer cas, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0.5177....$ En el segon, $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{35}{36}^2 4 = 0.4914....$ Llavors, clarament el primer és més probable que el segon. $\square$

Problema 7. (Una pregunta a De Moivre). Es tiren tres daus n vegades. Calculeu la probabilitat $f(n)$ de que en alguna tirada hagin sortit tres sisos. Quin és el valor menor de n pel qual és més probabli que hagin sortit tres sisos alguna de les n tirades que el contrari?

Solució. Com sempre, fem el complementari perquè és més fàci. Que no hagin sortit 3 sisos té probabilitat $\frac{215}{216}$. Llavors, $f(n) = 1 - f(n)^c = 1 - \frac{215}{216}^n$ és la solució. $\square$

Problema 8. Es koparteixen les 52 cartes d'una baralla entre quatre jugadors. Quina és la probabilitat que cada jugador tingui un as?

Solució. Ho anem a desgloçar de la següent manera: la forma en que es reparteixin les cartes és indiferent, així que primer repartirem al primer jugador, després al segon, després al tercer i, per últim, al quart. Formalment, sigui A_i, per $i = 1, 2, 3, 4$ el succés que el jugador i tingui exactament un as. Llavors la probabilitat que ens demanen és (per la llei de probabilitats totals):

$$P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2, A_1)P(A_4|A_3, A_2, A_1)$$

Així que anem a calcular $P(A_1)$, hi ha 52 cartes en joc, en rep 13 i ha de tenir exactament un as (el 13 és per les maneres que hi ha de rebre l'as, és a dir, en cada una de les posicions):

$$P(A_1) = 13 \cdot \frac{4}{52} \frac{48}{51} \frac{47}{50} \cdots \frac{38}{41} \frac{37}{40} =$$

$$= 13\frac{4\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}$$

Ara, anem a calcular $P(A_2|A_1)$, queden 39 cartes en joc, en rep 13 i ha de tenir exactament un as dels 3 que queden:

$$P(A_2|A_1) = 13\cdot\frac{3}{39}\frac{36}{38}\frac{35}{37}\cdots\frac{30}{28}\frac{29}{27} =$$
$$= 13\cdot\frac{3\cdot 30\cdot 29}{\cdot 39\cdot 38\cdot 37}$$

I, ara, calculem $P(A_3|A_2, A_1)$, quedem 26 cartes en joc, en rep 13 i ha de tenir exactament un as dels 2 que quede:

$$P(A_3|A_2, A_1) = 13\cdot\frac{2}{26}\frac{24}{25}\frac{23}{24}\cdots\frac{14}{15}\frac{13}{14} =$$
$$= 13\cdot\frac{2\cdot 13}{30\cdot 29}$$

I, per últim, tenim $P(A_4|A_3, A_2, A_1)$ que trivialment és 1, perquè queden 13 cartes amb un as. Llavors si els multpliquem tots ens queda:

$$= \frac{13^4\cdot 24}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} = 0.105...$$

Que és la probabilitat que cada jugador tingui exactament un as. □

Problema 9. Proveu que no és possible dos daus de forma que la suma de les seves cares superiors pugui prendre qualsevol valor de 2 a 12 amb igual probabilitat.

Solució. Sigui X la suma dels dos daus, suposem que totes les sumes tenen igual probabilitat, és a dir, $P(X = 2) = P(X = 3) = \cdots = P(X = 11) = P(X = 12) = \frac{1}{11}$. Sigui a_i el succés que en el primer dau sorti i, sigui b_j el succés que en el primer dau sorti j. Aleshores, com a_i i b_j són successos independents, podem deduir que: $a_1b_1 = P(X = 2) = P(X = 12) = a_6b_6 = \frac{1}{11}$. Ara, fixem-nos que $P(X = 7) = a_1b_6 + a_6b_1 + \cdots = \frac{1}{11}$. Veiem que per passar de a_1b_1 a a_1b_6 fa falta multiplicar per $\frac{b_6}{b_1}$ i per passar de a_6b_6 a a_6b_1 fa falta multiplicar per l'invers. Aleshores, per algun dels dos es multiplica per un nombre més gran o igual que 1, mentre que l'altra és positiu. Per tant, $a_1b_6 + a_6b_1 > \frac{1}{11}$, així que $P(X = 7) > \frac{1}{11}$ i que contradiu la suposició que totes les sumes tenen igual probabilitat. □

Problema 10. Proveu que si es llença dues vegades una moneda que té probabilitat de cara p fins que surten dos resultats diferents, els dos possibles resultats ($C+$ i $+C$) són equiprobables.

Solució. La probabilitat que a la primera vegada que es llencen els daus surti $C+$ és $p(1-p)$ i que surti $+C$ és $(1-p)p$. Altrament, si surt CC i $++$, es torna a tirar sense influenciar la següent tirada. Així que $P(C + |$ tirades anteriors $) = P(C+)$ i similarment: $P(+C|$ tirades anteriors $) = P(+C)$. Per tant, els dos possibles resultats diferents són equiprovables. □

Problema 11. En un grup de n persones una d'elles s'assabenta d'una xafarderia. Tria una persona a l'atzar i la hi conta, aquesta en tria una a l'atzar diferent de qui li ha contat per explicar-la-hi, i així successivament: l'r-èssima persona en tria una a l'atzar diferent de qui li acaba de contar i la hi explica. Quina és la probabilitat que en r rondes la xafarderia no hagi tornat a la persona que l'ha originada? quina és la probabilitat que en r rondes la xafarderia hagi passat per $r+1$ persones diferents?

Solució. Sigui A_i el succés "a la ronda i la xafardaria no torna a l'origen". Aleshores, volem saber la probabilitat: $P(A) = P(A_1\bigcap A_2\bigcap A_3\bigcap\cdots\bigcap A_r) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_r|A_1\cdots A_{r-1})$. En aquest cas, els succesos condicionats només ens donen informació que la xafardaria no ha tornat a l'origen i que, per tant, es mou entre els que no son el primer. Així doncs, tant $P(A_1)$ com $P(A_2|A_1)$, al no poder tornar a l'origen de cap manera, tenen probabilitat 1. Mentre que, tots els altres, tenen probabilitat $\frac{n-3}{n-2}$, perquè d'entre les $n-2$ persones restants que els hi pot explicar, totes menys una són l'origen. Així doncs, $P(A) = (\frac{n-3}{n-2})^{r-2}$.

Sigui B_i el succés "a la ronda i la xafardaria no torna a una persona que ja la sabia". Aleshores, volem saber la probabilitat: $P(B) = P(B_1\bigcap B_2\bigcap\cdots\bigcap B_r) = P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_r|B_1\cdots B_{r-1})$. En aquest cas, els successos condicionats ens indiquen quantes persones saben la xafardaria. A més, com que en les dues primeres rondes no pot tornar a una persona que ja la sabia, les dues primeres probabilitats són 1. Mentre que $P(B_i|B_1\cdots B_{i-1}) = \frac{n-i}{n-2}$, per $i \geq 2$, perquè de les $n-2$ persones a qui li pot explicar, només en queden $n-i$ que no ho sapiguen. Finalement, $P(B) = \frac{(n-3)\cdots(n-r)}{(n-2)^{r-2}}$. $\square$

Problema 12. (Problema dels aniversaris.)Quina és la probabilitat $f(n)$ que en un grup de n persones n'hi hagi almenys dues que tinguin l'aniversari el mateix dia de l'any? (Suposem anys de 365 dies i que la probabilitat que un individu tingui l'aniversari en un dia concret és 1/365.) Clarament $f(n) = 1$ per a $n = 366$. Quin és el valor més petit de n pel qual $f(n) > 1/2$?

Solució. Sigui A_i el succés l·la persona i no fa l'aniversari amb cap dels anteriors". Per tant, el que volem calcular és $P(A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_{n-1})$, està clar que $P(A_1) = 1$, pels altres, sabent que tots els anteriors fan l'aniversari en diferents dies: $P(A_i|A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_{i-1}) = \frac{366-i}{365}$, perquè dels 365 dies que té l'any, en queden $365-(i-1)$ on encara no fa anys ningú. Si multipliquem tots ens queda:

$$\frac{364 \cdot 363 \cdots (366-n)}{365^n} = \frac{(365)_n}{365^n}$$

La cota del 1/2 s'assoleix a partir de $n = 23$. Altres cotes: la del 1% s'assoleix a partir de $n = 57$ i la de 0.1% s'assoleix a partir de $n = 70$. $\square$

Problema 13. (Mixtures d'espais de probabilitat) Sigui $\{(\Omega_i, \mathscr{A}_i, P_i)\}_{i\in I}$ una col·lecció numerable d'espais de probabilitat, amb espais mostrals Ω_i dos a dos disjunts.

(a) Definim $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ i $\mathscr{A} = \{A \subseteq \Omega : A \bigcap \Omega_i \in \mathscr{A}_i \ \forall i \in I\}$. Proveu que $(\Omega, \mathscr{A})$ és un experiment.

(b) Sigui ara $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, p_0)$ un altre espai de probabilitat, amb $\Omega_0 = I$ i $\{i\} \in \mathscr{A}_0$ per a tot $i \in I$. Proveu que l'aplicació $p : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ següent és una funció de probabilitat en $(\Omega, \mathscr{A})$.

$$P(A) = \sum_{i\in I} p_0(\{i\}) P_i(A \cap \Omega_i)$$

Solució.

(a) Per veure que és un experiment cal comprovar 3 coses.

Cal que $\emptyset \in \mathscr{A}$, com que $\emptyset \subset \Omega$ i $\emptyset \cap \Omega_i = \emptyset \in \mathscr{A}_i \ \forall i \in I$, $\emptyset$ compleix la condició per estar a $\mathscr{A}$.

Cal veure que si $A \in \mathscr{A}$, llavors $A^c \in \mathscr{A}$. Per a cada i, $A \cap \Omega_i \in \mathscr{A}_i$ però com que el complementari d'aquest conjunt respecte Ω_i és $A^c \cap \Omega_i$, tenim que aquest també està dins de $\mathscr{A}_i$, llavors $A^c \in \mathscr{A}$.

Si tenim una col·lecció numerable de succesos $\{A_n\}$ disjunts dos a dos que pertanyen a $\mathscr{A}$, anem a veure que la seva unió també hi pertany. Per a tot i, volem veure que $(\cup A_n) \cap \Omega_i \in \mathscr{A}_i$, però aquesta intersecció és igual a $\bigcup(A_n \cap \Omega_i)$ on cada un dels termes de la unió pertanyen a $\mathscr{A}_i$ i són disjunts dos a dos, per tant, la unió de tots ells, pertany a $\mathscr{A}_i$. Llavors la unió de tota la col·lecció pertany a $\mathscr{A}$.

(b) Per veure que defineix una probabilitat cal comprovar les següents condicions:

Que la probabilitat del buit sigui 0. Que vé del fet que en cada sumand hi ha un terme de la forma $P_i(\emptyset \cap \Omega_i) = P_i(\emptyset) = 0$, llavors la suma és 0.

Que la probabilitat sigui no negativa vé directament del fet que és suma de coses no negatives llavors no pot ser negativa.

Que la probabilitat del total sigui 1. Com que $P_i(\Omega \cap \Omega_i) = P(\Omega_i) = 1$, la suma acaba sent $\sum_{i\in I} p_0(i)$ que és una col·lecció numerable i disjunta de tots els elements de $\mathscr{A}_0$, la unió dels quals és el total llavors la suma de totes les seves probabilitats és 1.

Per últim, hem de veure que si tenim una col·lecció numerable de successos $\{A_n\}_{n\geq 1}$ disjunts dos a dos, aleshores la probabilitat de la unió és suma de probabilitats. $P(\cup A_n) = \sum_{i\in I} p_0(\{i\}) P_i(\cup_{n\geq 1} A_n \cup \Omega_i) = \sum_{i\in I} p_0(\{i\}) \sum_{n\geq 1} P_i(A_n \cap \Omega_i) = \sum_{n\geq 1} \sum_{i\in I} p_0(\{i\}) P_i(A_n \cap \Omega_i) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$, que és el que volíem veure.

$\square$

Problema 14. Siguin $A_1, \ldots, A_n$ successos amb $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. Proveu que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Solució. Ho podem fer per inducció, per $n = 1$ és compleix automàticament. Per $n = 2$ es tracte de la definició de probabilitat condicionada passant $P(A_1)$ a l'altra banda.

Suposem cert fins a un $n-1$, amb n arbitrari i anem a demostrar-ho per n. Podem escriure la intersecció de tots com $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$, ara, subsituint el cas $n-1$, ens queda la fórmula descrita. □

Problema 15. En una urna hi ha n boles blanques i n de negres. S'extreuen d'una en una. Si surt blanca es torna a l'urtna i si surt negra es treu. Quina és la probabilitat que les n primeres extraccions siguin totes del mateix color?

Solució. La condició que totes siguin del mateix color es pot donar en dos casos disjunts, que siguin totes blanques o totes negres.

Si son totes blanques, com que quan surt una blamca es torna a posar la probabilitat que torni a sortir una blanca no canvia, sempre és un mig. Llavors, la probabilitat que en sortin n blanques és $(\frac{1}{2})^n$.

Si son totes negres, sabent que la quantitat de boles negres va disminuint, la probabilitat que se n'extreguin n és (sabent que són succcessos independets, multipliquem la probabilitat de cada extracció):

$$\frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n-2}{2n-2} \cdots \frac{1}{n+1} = \frac{n!^2}{(2n)!}$$

Llavors, la probabilitat que sortin n boles del mateix color és $(\frac{1}{2})^n + \frac{n!^2}{(2n)!}$. □

Problema 16. Dos successos A, B amb $P(A), P(B) > 0$ estan *positivament correlats* si $P(A|B) \geq P(A)$. Proveu que aleshores $P(B|A) \geq P(B)$ (i, per tant, la relació és simètrica). Com són A^c, B^c i A, B^c? Suposem A, B positivament correlats i B, C postivament correlats. Es pot dir que A, C són positivament correlats? o negativament correlats?

Solució. Anem a veure que la condició de positivament correlats és simètrica. Suposem que $P(A|B) \geq P(A)$, llavors, per definició de probabilitat condicionada: $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq P(A)$ i passant dividint $P(A)$ i multiplicant $P(B)$, tenim que $P(B) \leq \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B|A)$. Aleshores, queda demostrat que la condició és simétrica.

Ara, anem a veure que si A i B estan positivament correlats, llavors A i B^c estan negativament correlats. Fem $P(A|B^c) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B^c)} \leq \frac{P(A)-P(A)P(B)}{P(B^c)} = P(A)\frac{P(B^c)}{P(B^c)} = P(A)$. Negativament correlats també és simétrica (es demostra amb els mateixos passos que abans). A més si C, D estan negativament correlats, llavors C i D^c estan positivament correlats (amb la mateixa demostració canviant $\leq$ per $\geq$). Així que si A i B estan positivament correlats, llavors A i B^c estan negativament correlats i, per tant, A^c i B^c estan positivament correlats.

Per últim, si A amb B estan positivament correlats i B amb C també no es pot deduir res de A amb C. Pels següents exemples:

Considerem l'experiment de tirar un dau de 6 cares. Sigui A el succés que surti un 2, B el succés que surti parell i C el succés que surti un 4. Clarament estan A, B i B, C estan positivament correlats però $P(A|C) = 0$, llavors A i C no estan postivament correlats. Ara redefinim C perquè sigui el succés que surti un 2 o un 4. Es seguix complint que B i C estan positivament correlats i ara sí, A i C estan positivament correlats (i no negativament correlats). □

Problema 17. Una capsa conté n cartes numerades de 1 a n i es treuen d'una en una a l'atzar. Si la carta k-éssima és la més gran de les k primeres extretes, quina és la probabilitat que sigui la més gran de totes?

Solució. Sigui C_i la i-éssima carta extreta. Busquem $P(C_k = n|C_k > C_i, i < k) = \frac{P(C_k=n \cap C_k > C_i, i<k)}{P(C_k > C_i, i<k)} = \frac{P(C_k=n)}{P(C_k > C_i, i<k)}$. Fins ara, hem utilitzat la definició de probabilitat condiciona i el fet que si la k-éssima carta és n, segur que és més gran que totes les altres. Ara, busquem dues probabilitats diferets:

$P(C_k = n)$? Com que no tenim més informació de com estan distribuides les cartes, escollir la k-éssima és com escollir una aleatòria i, per tant, $P(C_k = n) = \frac{1}{n}$.

$P(C_k > C_i, i < k)$? Anem a raonar-ho de la següent manera, la probabilitat que la k-éssima sigui més gran que les anteriors és la mateixa que de totes les possibles combinacions de k cartes d'una baralla de n, l'última sigui la més gran. I, a més, com totes les combinacions són equiprovables només cal fer casos favorables entre casos possibles. Traduit al problema, el nombre de maneres que hi ha d'extreure k cartes d'una baralla de n de tal manera que l'última sigui la més gran entre el nombre de maneres que hi ha d'extreure k cartes d'una baralla de n (l'ordre importa).

El segon és el cas fàcil, simplement és $(n)_k = \frac{n!}{k!}$ (al principi n'hi ha n per escollir, després $n-1$ i anar fent). El primer és més complicat, però anem a considerar-ho de la següent manera. El nombre de maneres d'agafar-ne k de tal manera que l'última sigui la més gran és igual al nombre de maneres d'agafar k cartes sense que l'ordre importi pel nombre de permutacions de $k-1$ cartes. Això és així perquè d'un conjunt no ordenat de k cartes podem considerar tots els conjunts ordenats on l'última és la més gran. És a dir, agafem un conjunt no ordenat de k cartes, fixem la més gran al final i les altres les podem posar en l'ordre que vulguem. D'aquesta manera obtenim totes les possibles combinacions de k cartes on l'última és la més i sense repetir-ne cap. Númericament hi ha un total de $\binom{n}{k}(k-1)! = \frac{n!}{k(n-k)!}$. Ara, la divisió de casos favorables entre casos possibles és $\frac{\frac{n!}{k(n-k)!}}{\frac{n!}{k!}} = \frac{1}{k}$

Llavors, tenim que $P(C_k = n|C_k > C_i, i < k) = \frac{P(C_k=n)}{P(C_k > C_i, i<k)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{n}$. □

Problema 18. (Problema dels tres presoners) Tres presoners són informats que un, que ha estat triat a l'atzar, serà alliberat i els altres dos executats. Un d'ells, A, demana al carceller quin dels altres dos, B o C, serà executat. El carceller respon la pregunta triant un dels dos a l'atzar si ho han de ser tots dos, o dient la veritat si només és un. Afecta aquesta informació la probabilitat que A sigui l'alliberat?

Solució. Sigui X el presoner que és alliberat i Y el presoner que el carceller respon. Llavors, $P(X = A) = P(X = B) = P(X = C) = \frac{1}{3}$. De l'enunciat també tenim $P(Y = B|X = A) = P(Y = C|X = A) = \frac{1}{2}$, $P(Y = C|X = B) = P(Y = B|X = C) = 1$ i $P(Y = B|X = B) = P(Y = C|X = C) = 0$. Per últim, estar clar que $P(Y = B) = P(Y = C) = \frac{1}{2}$. Llavors, per a que es donguin els següents dos casos s'han de complir independentment $P(X = A \cap Y = B) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ i el mateix per $P(X = A \cap Y = C)$. Per tant, $P(X = A|Y = B) = P(X = A|Y = C) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Llavors sigui quina sigui la resposta, la probabilitat que A sigui l'alliberat, no millora ni empitjora. Ara bé, pels altres dos sí canvia, $P(X = B|Y = B) = \frac{P(Y=B|X=B)P(X=B)}{P(Y=B)} = 0$ perquè el primer terme del numerador és 0, llavors, restant del total $P(X = C|Y = B) = \frac{2}{3}$. Simetricament ho calculariem per $Y = C$. □

Problema 19. (Regla de successió de Laplace) Tenim $N + 1$ urnes numerades de 0 a N, cadascuna amb N boles. L'urna i té i boles blanques i $N - i$ de negres. Escollim una urna a l'atzar i fem n extraccions amb reposició. Si totes les boles extretes resulten ser blanques, doneu una aproximació asimptòtica per a N gran de la probabilitat p_{n+1} que l'extracció $n + 1$ torni a sortir blanca?

INDICACIÓ: $\sum_{i=0}^{N} i^n \sim \int_0^N x^n dx$

Solució. Com diu l'enunciat, p_{n+1} és la probabilitat que surtin $n+1$ blanques sabent que n'han sortit n boles negres. Aleshores, $p_{n+1} = P(\text{blanca}|\text{les } n \text{ primeres blanques}) = \frac{P(\text{blanca} \cap \text{les } n \text{ primeres blanques})}{P(\text{les } n \text{ primeres blanques})} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}$, perquè el succés de la part de dalt es pot reconvertir a 'les $n+1$ primeres blanques' i definint A_n. Sigui u_i la i-éssima urna. Llavors $P(A_n) = \sum_{0 \le i \le N} P(A_n \cap u_i) = \sum_{0 \le i \le N} P(A_n|u_i)P(u_i) = \sum_{0 \le i \le N} P(A_n|u_i)\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{0 \le i \le N} P(A_n|u_i)$. Ara, estar clar que $P(A_n|u_i) = (i/N)^n$, perquè agafem boles al atzar amb reposició d'una urna amb i boles blanques d'un total de N. Llavors

$$P(A_n) = \frac{\sum_{i=0}^{N}(i/N)^n}{N+1} = \frac{\sum_{i=0}^{N} i^n}{N^n(N+1)}$$

Ara, utilitzarem que $\sum_{i=0}^{N} i^n \sim \int_0^N x^n dx$ sense demostrar-ho, i això ens diu que $\sum_{i=0}^{N} i^n \sim \frac{N^{n+1}}{n+1}$. Llavors:

$$\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} = \frac{\frac{\sum_{i=0}^{N} i^{n+1}}{N^{n+1}(N+1)}}{\frac{\sum_{i=0}^{N} i^{n}}{N^{n}(N+1)}} = \frac{\sum_{i=0}^{N} i^{n+1}}{N\sum_{i=0}^{N} i^{n+1}} \sim \frac{\frac{N^{n+2}}{n+2}}{N\frac{N^{n+1}}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Aleshores, aquesta és una aproximació una assimptotica de p_{n+1}.

□

Problema 20. Un malalt té hepatitis, que pot ser de tipus A, B o C amb probabilitats 0.5, 0.2, 0.3 respectivament. Es disposa de tres proves U, V, W que identifiquen correctament el tipus amb les probabilitats de la taula següent:

Taula 1: Diferència màxima de les mitjanes entre poblacions.

	U	V	W
A	0.5	0.6	0.95
B	0.2	0.3	0.05
C	0.9	0.4	0.4

Si només es pot fer una prova, quina seria la millor elecció per maximitzar la probabilitat de diagnòstic correcte? Si es tria una prova a l'atzar, quina és la probabilitat que el diagnòstic sigui correcte? Si es poguessin fer totes tres, i s'adopta el resultat de la majoria, quina seria la probabilitat de diagnòstic correcte?

Problema 21. Tirem un dau n vegades i diem $A_{i,j}$ al succés 'les tirades i i j han donat el mateix resultat'. Són independents $A_{i,j}$ i $A_{i',j'}$? Són independents els successos $A_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$?

Problema 22. Sigui A un succés independent amb B_1 i B_2. És cert que A és independent amb $B_1 \cap B_2$? Proveu-ho o doneu un contraexemple.

Problema 23. Sigui $\Omega = \{1, \ldots, p\}$, p primer, i definim la probabilitat 2^Ω com $P(A) = |A|/p$. Hi ha cap parell de conjunts independents?

Problema 24. (Teorema del mico escriptor.) Proveu que qualsevol seqüència de k cares i creus apareix infinites vegades amb probabilitat 1 si es tira una maneda indefinidament.

Problema 25. És possible definir una funció de probabilitat p sobre l'espai $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \mathcal{P}(\mathbb{N}_{geq1}))$ de tal forma que el succés $A_r = \{n \in \mathbb{N}_{\geq 1} : r|n\}$ satisfà que $P(A_r) = \frac{1}{r}$?

Indicacio: estudieu si per nombres primers diferents $p_1, p_2, \cdots, p_m$ els successos $A_{p_1}, A_{p_2}, \cdots, A_{p_m}$ són independents. També pot ser útil recordar que la suma $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$ és divergent.

Problema 26. Sigui $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una seqüència de successos en un espai de probabilitat tal que $\lim P(A_n) = 0$. A més a més, $\sum_{n\geq 1} P(A_n \cap \bar{A}_{n+1})$ és convergent. Demostreu que $P(\limsup A_n) = 0$.

Indicació: Definiu $B_n = A_n \cap \bar{A}_{n+1}$ i justifiqueu que $\limsup A_n = \limsup B_n \cup \liminf A_n$).