

Apunts d'Equacions diferencials ordinàries

ALEIX TORRES I CAMPS

PAU MARTÍN (P.MARTIN@GMAIL.COM), MARCEL GUARDIA I RAFAEL RAMÍREZ

1 Tema 1: Introducció i definicions bàsiques

Definició 1. Una equació diferencial és una equació que involucra una funció incògnita i les seves derivades.

Exemple 1. Alguns exemples d'equacions diferencials:

1. $y(x), x \in \mathbf{R}$ amb $y''(x) - y(x) = 0$
2. $y''(x) = -\sin(y(x))$
3. $y''(x) = -\sin(y(x)) + \cos(x)$
4. $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ on la incògnita és una funció de dues variables $z(x, y)$.

Definició 2. Una e.d.o. és una equació diferencial de la forma:

1. Forma implícita: $g(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ on la incògnita és una funció $y(x) = (y_1(x) \dots y_m(x))^t$ d'una variable unidimensional x . Per tant, $g : U \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^m$.
2. Forma explícita: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. Ara $f : V \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^m)^n \rightarrow \mathbf{R}^m$

Nota 2. A partir d'ara treballarem amb només la forma explícita. La qual abreviarem com $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$

Definició 3. Direm que $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^m$ és una solució si ϕ és n vegades derivable i:

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)), \forall x \in (a, b)$$

Implícitament demanarem que:

$$\{(x, \phi(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)) | x \in (a, b)\} \subset \text{Dom} f$$

La solució general és el conjunt de totes les seves solucions.

Definició 4. Es diu que l'e.d.o. $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ on $y = (y_1 \dots y_m)^t$ és un sistema d'e.d.o.'s de m components, d'ordre n .

Nota 3. Sigui $y = (y_1 \dots y_m)$, aleshores, $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ és equivalent a un sistema de $n \times m$ e.d.o.'s d'ordre 1.

Demostració. En efecte, sigui $z_1 = y$ (vector de m components), $z_2 = y', \dots, z_n = y^{(n-1)}$. Per tant, a $z = (z_1, \dots, z_n)^t$ hi ha un total de $n \times m$ components.

Com que $z'_1 = (y)' = y' = z_2$ i, anar fent, $z'_{n-1} = (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = z_n$ i $z'_n = (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = f(x, z_1, \dots, z_n)$. Ens queda l'e.d.o. $z' = g(x, z)$ que realment acaba sent $(z'_1 \ z'_2 \ \dots \ z'_n)^t = (z_2 \ z_3 \ \dots \ z_n \ f(x, z_1, \dots, z_n))^t$. \square

Exemple 4. $y'' = -\sin(y)$. Aleshores, $z_1 = y$ i $z_2 = y'$. Podem prendre per sistema d'equacions $z'_1 = z_2$ i $z'_2 = -\sin(z_1)$.

1.1 Sistemes autònoms i no autònoms

Definició 5. Direm que una e.d.o. és autònoma si és de la forma $y' = f(y)$ (equació que no depen de x). Direm que un sistema es no autònom si $y' = f(x, y)$.

Proposició 6. Sigui $y' = f(y)$ una e.d.o autònoma i $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$ una solució. Llavors, $\forall x \in \mathbf{R}$ i $\phi_\alpha : (a + \alpha, b + \alpha) \rightarrow \mathbf{R}^n$ per $x \rightarrow \phi(x - \alpha)$ també és solució.

Demostració. En efecte: $\phi'_\alpha(x) = \phi'(x - \alpha) = f(\phi(x - \alpha)) = f(\phi_\alpha(x))$.

Nota 5. Podem transformar el sistema d'ordre 1 i n incògnites d'e.d.o's no autònom $y' = f(x, y)$, en un sistema d'e.d.o's autònom d'ordre 1 i $n + 1$ incògnites.

Demostració. En efecte, fem $z_1 = x$ i $z_2 = y$. Aleshores, amb $z = (z_1 \ z_2)^t$ compleix que $z' = (z'_1 \ z'_2)^t = (1 \ f(x, y))^t = (1 \ f(z))^t = F(z)$, que és un e.d.o. d'ordre 1 amb $n + 1$ incògnites. \square

1.2 Problema de Cauchy o problema de valors inicials

Definició 7. Sigui $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ un obert i $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funció. Sigui $(x_0, y_0) \in U$. Anomenarem problema de Cauchy o problema de valor inicial (p.v.i) a trobar una solució de

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Exemple 6. Alguns exemples de problemes de Cauchy.

1. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(0) = 1$. Escollint $\phi(x) = e^x$ és una solució, ja que si derivem ens dona ella mateixa i si l'igualem a 0 dona 1.
2. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(x_0) = y_0$. Escollint $\phi(x) = y_0 e^{x-x_0}$ és solució, ja que si derivem dona ella mateixa i compleix el valor inicial.

Pregunta: Les solucions que hem trobat són totes les possibles? N'hi ha més?

3. $yy' - x = 0$ i $y(0) = 0$. Solucions: $\phi_{+-}(x) = + - x$ en són solució, substituint es veu.
4. $yy' + x = 0$ i $y(0) = 0$. No té cap solució.

1.3 Interpretació geomètrica d'una e.d.o

Sigui $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ $(x, y) \mapsto f(x, y)$. $y' = f(x, y)$ i $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ nés solució si $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$. El que diu és si existeix una funció ϕ , el pendent de la seva gràfica segueix $f(x, \phi)$.

1.4 Exemples importants

Exemple 7. Equació d'una molla elàstica (oscil·lador harmònic):

$$my'' = -k^2 y$$

On y és el desplaçament respecte la posició d'equilibri.

Exemple 8. Pendol de longitud l sota un camp gravitatori constant el qual exerceix una força mg .

$$m\theta''l = -mg \sin \theta \iff \theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

On θ és l'angle del pendol respecte la vertical.

Exemple 9. Model *SIR*. S és el nombre de persones subceptibles, I infectats i R persones que deixen de ser de la resta tant perquè es curen com perquè moren. $N = S + I + R$

$$\begin{aligned}S' &= -\frac{\beta}{N}SI \\I' &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I \\R' &= \gamma I\end{aligned}$$

Exemple 10. n cossos a l'espai de masses m_1, m_2, \dots, m_n submessos a la seva mutua atracció gravitatòria. q_i és la posició del cos i en un sistema de referència.

$$m_i q_i'' = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|q_j - q_i\|^3} (q_j - q_i)$$

Exemple 11. E.d.o's de famílies de corbes.

Considerem la següent família de corbes: $x^2 + y^2 = r^2$, per $r \in \mathbf{R}$. Tinc les solucions i m'interessa buscar la e.d.o. que la tingui per solució. Si $y = y(x)$, derivant respecte a x : $2x + 2yy' = 0$ o simplificant $y'y + x = 0$, o també $y' = -\frac{x}{y}$.

Família ortogonal. Té el pendent ortogonal, $y' = -\frac{1}{-\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$. Té per solució $y(x) = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercici: Trobeu l'e.d.o de la família de corbes $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$. I la família de corbes ortogonals.

Crec que:

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{x - \alpha}{y} \\y(0) &= 0\end{aligned}$$

2 Sistemes lineals d'e.d.o.'s

Definició 8. Direm que un sistema d'e.d.o's és lineal si és de la forma (de funció incògnita x):

$$x' = A(t)x + b(t), \quad A(t) \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{R}) \quad b(t) \in \mathbf{R}^n$$

Direm que el sistema és homogeni si $b(t) = 0$. El sistema homogeni associat és $x' = A(t)x$.

Direm que el sistema té coeficients constants si A no depèn de t .

2.1 Motivació

Suposem que tenim un sistema d'e.d.o.'s $x' = f(t, x)$, on f és \mathcal{C}^1 respecte de x . Suposem que $x_0(t)$ n'és solució. Volem estudiar el comportament de les solucions "properes".

$$f(t, x) = f(t, x_0(t)) + D_x f(t, x_0(t))(x - x_0(t)) + o(\|x - x_0(t)\|)$$

On D_x és la matriu diferencial.

Sigui $\tilde{x} = x - x_0(t)$, llavors, $\tilde{x}' = x' - x_0'(t) = f(t, x_0(t)) + D_x f(t, x_0(t))\tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|) - f(t, x_0(t)) = D_x f(t, x_0(t))\tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|)$ el qual s'aproxima a un sistema lineal.

2.2 Propietats elementals

Proposició 9. (*Principi de superposició*) Considerem el sistema lineal homogeni $x' = A(t)x$, on $A(t) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$. La solució, generat del sistema és un espai vectorial, és a dir, si ϕ_1 i ϕ_2 són solució i $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ (o \mathbf{C}), llavors $\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ és també solució.

Demostració. Sabem que $\phi'_i(t) = A(t)\phi_i(t)$ per $i = 1, 2$. Donats $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sigui $\tilde{\phi} = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$. Llavors, $\tilde{\phi}' = \lambda_1\phi'_1 + \lambda_2\phi'_2 = \lambda_1A(t)\phi_1 + \lambda_2A(t)\phi_2 = A(t)(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = A(t)\tilde{\phi}$. \square

Proposició 10. *Considerem el sistema lineal*

$$x' = A(t)x + b(t)$$

Sigui ϕ_p una solució del sistema ($\phi'_p = A(t)\phi_p + b(t)$). La solució general és

$$\{\phi | \phi' = A(t)\phi + b(t)\} = \{\phi = \phi_p + \phi_n | \phi'_n = A(t)\phi_n\} = \{\phi_p\} + \{\phi_n | \phi_n \text{ solució del sistema homogeni associat}\}$$

Demostració.

\supseteq Sigui $\tilde{\phi} = \phi_p + \phi_n$, en $\phi'_n = A(t)\phi_n$. Llavors

$$\tilde{\phi}' = \phi'_p + \phi'_n = A(t)\phi_p + b(t) + A(t)\phi_n = A(t)(\phi_p + \phi_n) + b(t) = A(t)\tilde{\phi} + b(t)$$

\subseteq Sigui $\hat{\phi}$ una solució ($\hat{\phi}' = A(t)\hat{\phi} + b(t)$), llavors: $\hat{\phi} = \phi_p + \hat{\phi} - \phi_p$ i cal veure que $\phi_n = \hat{\phi} - \phi_p$ és solució del sistema homogeni. Com que, $\phi'_n = \hat{\phi}' - \phi'_p = A(t)\hat{\phi} + b(t) - A(t)\phi_p - b(t) = A(t)(\hat{\phi} - \phi_p) = A(t)\phi_n$, per tant, ϕ_n és solució del sistema homogeni i hem acabat. \square

2.3 E.d.o's lineals unidimensionals

Consierem una e.d.o de la forma

$$x' = a(t)x + b(t), \quad a(t) \in \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}), \quad x \in \mathbb{R}$$

Per resoldre-la:

1. Trobarem la solució general de $x' = a(t)x$.
2. Trobarem una solució particular de $x' = a(t)x + b(t)$.

Notació: En aquest tema $I \subset \mathbb{R}$ serà un interval obert.

Proposició 11. *Sigui $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Sigui $t_0 \in I$. Llavors, la solució general de l'e.d.o. lineal homogenia $x' = a(t)x$ és*

$$\{\lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Equivalentment, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, l'única solució de p.v.i.

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

és

$$\phi(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} x_0$$

Demostració.

\subseteq Sigui $\phi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Tenim que

$$\phi(t)' = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \left(\int_{t_0}^t a(s)ds \right)' = a(t)x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = a(t)\phi(t)$$

Amb això hem vist que és solució de l'equació. Ara anem a veure que és solució del p.v.i.

$$\phi(t_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} = x_0 e^0 = x_0$$

\supseteq Observem que $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \neq 0, \forall t \in I$.

Segui $\hat{\phi}$, una solució de $x' = a(t)x$, la podem escriure com $\hat{\phi}(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ amb $c(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} \hat{\phi}(t)$ i c és una funció derivable a I .

Llavors, $c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = \hat{\phi}'(t) = a(t)\hat{\phi}(t) = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \iff c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = 0 \iff c'(t) = 0 \implies c = \lambda$. És a dir, com que la derivada de la c és 0, tenim que c és una constant. I hem acabat perquè hem vist que qualsevol solució és de la forma descrita. \square

Nota 12. Què va fer que escollissim $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ com a candidat de solució?

Estem buscant solució de $x'(t) = a(t)x(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$. Ara, podem veure la equació com $\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t) \iff \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \int_{t_0}^t a(s)ds$ que és el mateix que $\ln(x(t) - \ln(x(t_0))) = \int_{t_0}^t a(s)ds \iff \ln(x) = \ln(x_0) + \int_{t_0}^t a(s)ds \iff x(t) = e^{\ln x_0} e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

Proposició 12. La solució general de $x' = a(t)x + b(t)$; $a, b : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ contínues és:

$$\{x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} [\lambda + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma} b(s)ds], \lambda \in \mathbf{R}\}$$

I, per tant, la solució que satisfà $x(t_0) = x_0$ és:

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0, x_0) &= e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} (x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma} b(s)ds) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma} b(s)ds = \\ &= x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma} a(\sigma) s b(s)ds \end{aligned}$$

Demostració. Fem servir el mètode de variacions de les constants.

Busquem $x_p(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$, $(\forall t)$. Substituint a l'equació original tenim:

$$\begin{aligned} c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} &= x'_p(t) = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + b(t) \iff c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = b(t) \\ \implies c'(t) &= e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} b(t) \implies c(t) - x_0 = \int_{t_0}^t c'(s)ds = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma} b(s)ds \end{aligned}$$

I, per tant,

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma} b(s)ds$$

\square

Exemple 13. Posem per cas que volem resoldre l'equació $x' = tx + \frac{1}{t}$ (coeficients continus, o bé a $(-\infty, 0)$, o bé a $(0, \infty)$).

Solució. 1. Busquem l'equació homogènia. $x' = tx \implies \frac{x'}{x} = t$, intebrant entre t_0 i t , tenim

$$\ln x - \ln x_0 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 \implies x(t) = x_0 e^{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2} = x_0 e^{-\int_1^2 t_0^2} e^{\int_1^2 t^2}$$

Per tant, la solució general homogenia:

$$\{x(t) = \lambda e^{\int_1^2 t^2}, \lambda \in \mathbf{R}\}$$

2. Trobem la solució de l'e.d.o. completa que en t_0 val x_0 :

$x_p(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ i substituïm a l'e.d.o:

$$c(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}t = x'_p(t) = tc(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{t}$$

Que aleshores queda:

$$c'(t) = \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{2}t^2} \implies x(t) = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2} + \int_{t_0}^t \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

Perquè $c(t_0) = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2}$, finalment, la solució és:

$$x_p(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} [x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2} + \int_{t_0}^t \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{2}s^2} ds]$$

□

2.4 Sistemes lineals de dimensió qualsevol (finita)

1. Sistemes homogenis: $x' = A(t)x$, per $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R}))$, és a dir, A és una matriu $n \times n$ amb coeficients continus a $I \subset \mathbf{R}$.

Proposició 13. *Si sigui el sistema $x' = A(t)x$, amb $A \in \mathcal{C}^k(I, \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R}))$. Llavors, si ϕ n'és una solució definida a $I \implies \phi \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{R}^n)$.*

Demostració. Provem-ho per inducció:

Pel cas base $k = 0$. Si ϕ és solució $\implies \phi'(t) = A(t)\phi(t) \implies \phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}^n)$.

Suposem que A és de classe \mathcal{C}^k i ϕ és solució de $x' = A(t)x$ de classe \mathcal{C}^k : llavors $\phi'(t) = A(t)\phi(t) \implies A, \phi' \in \mathcal{C}^k \implies \phi \in \mathcal{C}^{k+1}$. □

Exemple 14. Comproveu que el mateix argument s'aplica a $x' = f(t, x)$, si f és de classe \mathcal{C}^k respecte a (t, x) .