Apunts d'Àlgebra Multilineal i Geometria

Aleix Torres i Camps

1 Àlgebra Multilineal

1.1 La forma de Jordan

1.1.1 Introducció i repàs

Sigui $\mathbf{k}$ un cos (normalment $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$), sigui E in $\mathbf{k}$-e.v. de dimensió finita (dim n), sigui $f : E \to E$ un endomorfisme, sigui $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base i sigui $M_{\mathscr{B}}(f) = A$ matriu bàsica per $\mathscr{B}$.

Aleshores, $v \in E$ és vep de vap $\lambda \in \mathbf{k}$ si v compleix que $f(v) = \lambda v$.

Direm que f diagonalitza si $\exists$ base de veps $\mathscr{B}$: en aquest cas, la matriu $M_{\mathscr{B}}(f)$ és diagonal.

Quan sabem si una matriu o una aplicació diagonalitza? Fem servir el polinomi característic: $P_f(t) = \det(f - tId)$ de grau n. Aleshores, λ és vap $\iff P_f(\lambda) = 0$, per tant, $\{vap\} = \{\text{arrels de } P_f(t)\}$, la qual cosa és una manera de trobar el vaps.

Hipótesi: Sempre suposarem que el polinomi descomposa en el cos, és a dir, $P_f(t) = (-1)^n(t-\lambda)^{n_1} \cdots (t-\lambda)^{n_r}$, on $n_1 + \ldots + n_t = n$. Totes les arrels de $P_f(t)$ són de $\mathbf{k}$. En particular, pels conplexos, això sempre és cert.

Teorema 1. *El **primer teorema de descomposició** diu que podem separar l'espai vectorial en subespais invariants i sense intersecció entre ells tals que tots ells nuclis de l'aplicació f menys vap vegades la identitat, és a dir: $E = \ker(f - \lambda_1 \operatorname{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r \operatorname{Id})^{n_r}$.*

És a dir, si $\forall v \in E \implies v = v_1 + \ldots + v_r$, on $v_i \in \ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$ és a dir, $(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}(v_i) = 0$.

Corol·lari 2. $n_1 = \cdots = n_r = 1 \implies f$ *diagonalitza.*

Teorema 3. *Caylei-Hamilton: $P_f(A) = 0$. Considerem $m_f(t) \in \{Q(t)|Q(A) = 0\}$ que és el polinomi de grau mínim i mònic $\implies m_f(A) = 0$ i $m_f(t)|P_f(t)$ (el polinomi mínim divideix al polinomi característic). A més, $m_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$ té totes les arrels però de grau més petit o igual.*

Proposició 4. f *diagonalitza* $\iff m_1 = \ldots = m_r = 1$.

Recordant el fet que $E = \ker(f - \lambda_1 \operatorname{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r \operatorname{Id})^{n_r}$, a més sabem que: $\dim \ker(f - \lambda \operatorname{Id})^{n_1} = n_1$, $\ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$ son f-invariants, $f(\ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}) \in \ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$.

Aleshores, per la propia descomposició de l'espai en nuclis, sabem que la matriu de l'aplicació com a mínim queda separada pels subespais de cada nucli. Ja que son espais separats i invariants.

Conclusió: la multiplicitat més gran del polinomi mínim és la mida màxima de la caixa que ens pot apareixer quan intentem fer diagonalització.
Exemples 1 i 2.

1.1.2 El teorema de Jordan

Sigui $f : E \to E$, on $E = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})^m = \ker f_\lambda^m$, que abreugem la notació amb $f_\lambda = f - \lambda \operatorname{Id}$.

Definició 5. $v \in E$ és un **vep generalitzat d'alçada** l si $v \notin \ker(f_\lambda^k)$ per $k \leq l-1$, però si que $v \in \ker f_\lambda^l$. Que és le mateix que dir que $f_\lambda^k(v) \neq 0$ (per al mateix rang de k), però sí que $f_\lambda^l(v) = 0$.

Proposició 6. *Sigui v un vep generalitzat d'alçada l, aleshores $v, f_\lambda(v), f_\lambda^2(v), \ldots, f_\lambda^{l-1}(v)$ són linealment independents. El subespai que generen és un cicle de Jordan de longitud l.*

*Demostració.*Suposem que son linealment dependents, aleshores existeix escalars que no son tots 0 tals que:

$$\mu_0 v + \mu_1 f_\lambda(v) + \ldots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1}(v) = 0$$

Però ara apliquem f_λ^{l-1} i ens queda:

$$\mu_0 f_\lambda^{l-1}(v) + \mu_1 f_\lambda^l(v) + \ldots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1+l-1}(v) = 0$$

Aleshores, a partir del 2n son tots 0, per tant, no queda cap altra opció que $\mu_0 = 0$. Efectuant ara, per $1 \geq i \geq l-2$, aquest procés de nou però amb f_λ^{l-i} veurem que $\mu_i = 0$. I per tant, hem vist que totes les μ són 0 i, per definició, són linealment independents.

Proposició 7. *Els cicles de Jordan són f-invariants. (Per notació utilitzem que $u_k = f_\lambda^{k-1}(v)$).*

*Demostració.*Per $k \neq l$, sabem que, $f_\lambda(u_k) = u_{k+1}$, és a dir, $f(u_k) = \lambda u_k + u_{k+1}$. Per tant, per aquesta part, és invariant. Per últim, quan fem $f_\lambda(u_l) = 0$, per ser v un vep generalitzat d'alçada l.

Definició 8. Un cicle de Jordan de longitud l dona a lloc un Bloc de Jordan (INSERTAR BLOC DE JORDA)

Definició 9. Una base de Jordan de f és una vase de E formada per cicles de Jordan. (INSERTAR MATRIU COMPOSADA PER BLOCS DE JORDAN)

Teorema 10. *Si el polinomi característic $P_f(t)$ descompon completament, aleshores, existeixen bases de Jordan.*

*Demostració.*Anem a verue el cas en dimensió 2. $f : k^2 \to k^2$, λ vap amb $m_f(t) = (t-\lambda)^2$ i per tant, no diagonalitza.

Agafem $u \in k^2$, $f_\lambda(u) \neq 0$ (u no és vep), $v = f(u) - \lambda(u)$. Llavors la base u, v és un base de Jordan. Amb matriu:
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Ara, en general, per a cada bloc, busquem un vector generador d'ordre el bloc (l). És a dir, v vepg d'alçada l, és a dir, que estigui en el $\ker f_\lambda^l$. Recordem que $0 \subset \ker f_\lambda \subset \cdots \subset f_\lambda^l$.

1.2 Formes quadràtiques

1.3 Tensors