Apunts d'Àlgebra Multilineal i Geometria

Aleix Torres i Camps

Índex

1 Àlgebra Multilineal

1.1 La forma de Jordan

1.1.1 Introducció i repàs

Sigui $\mathbf{k}$ un cos (normalment $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), sigui E in $\mathbf{k}$-e.v. de dimensió finita (dim n), sigui $f : E \to E$ un endomorfisme, sigui $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base i sigui $M_{\mathscr{B}}(f) = A$ matriu bàsica per $\mathscr{B}$.

Aleshores, $v \in E$ és vep de vap $\lambda \in \mathbf{k}$ si v compleix que $f(v) = \lambda v$.

Direm que f diagonalitza si $\exists$ base de veps $\mathscr{B}$: en aquest cas, la matriu $M_{\mathscr{B}}(f)$ és diagonal.

Quan sabem si una matriu o una aplicació diagonalitza? Fem servir el polinomi característic: $P_f(t) = \det(f - tId)$ de grau n. Aleshores, λ és vap $\iff P_f(\lambda) = 0$, per tant, $\{vap\} = \{\text{arrels de } P_f(t)\}$, la qual cosa és una manera de trobar el vaps.

Hipótesi: Sempre suposarem que el polinomi descomposa en el cos, és a dir, $P_f(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}$, on $n_1+\ldots+n_r = n$. Totes les arrels de $P_f(t)$ són de $\mathbf{k}$. En particular, pels conplexos, això sempre és cert.

Teorema 1. *El **primer teorema de descomposició** diu que podem separar l'espai vectorial en subespais invariants i sense intersecció entre ells tals que tots ells nuclis de l'aplicació f menys vap vegades la identitat, és a dir: $E = \ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r \mathrm{Id})^{n_r}$.*

És a dir, si $\forall v \in E \implies v = v_1 + \ldots + v_r$, on $v_i \in \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}$ és a dir, $(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}(v_i) = 0$.

Corol·lari 2. $n_1 = \cdots = n_r = 1 \implies f$ *diagonalitza.*

Teorema 3. *Caylei-Hamilton: $P_f(A) = 0$. Considerem $m_f(t) \in \{Q(t)|Q(A) = 0\}$ que és el polinomi de grau mínim i mònic $\implies m_f(A) = 0$ i $m_f(t)|P_f(t)$ (el polinomi mínim divideix al polinomi característic). A més, $m_f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$ té totes les arrels però de grau més petit o igual.*

Proposició 4. f *diagonalitza* $\iff m_1 = \ldots = m_r = 1$.

Recordant el fet que $E = \ker(f-\lambda_1 \mathrm{Id})^{n_1} \oplus\cdots\oplus \ker(f-\lambda_r \mathrm{Id})^{n_r}$, a més sabem que: $\dim\ker(f-\lambda \mathrm{Id})^{n_1} = n_1$, $\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}$ son f-invariants, $f(\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}) \subset \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}$.

Aleshores, per la propia descomposició de l'espai en nuclis, sabem que la matriu de l'aplicació com a mínim queda separada pels subespais de cada nucli. Ja que son espais separats i invariants.

Conclusió: la multiplicitat més gran del polinomi mínim és la mida màxima de la caixa que ens pot aparéixer quan intentem fer diagonalització.

Exemple 1. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal de k^3 en una certa base:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, calculem el polinomi característic $P_A(t)$.

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^3$$

Per tant, té un únic vap $\lambda = 1$ que apareix 3 vegades. Automàticament, sabem que $\mathbf{k}^3 = \ker(A - 1\,\mathrm{Id})^3$. Tot i així, observem que:

$$(A - \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I que, per tant, veiem que $\mathbf{k}^3 = \ker(A - \mathrm{Id})^2$. Llavors el polinomi mínim no coincideix amb el polinomi característic sinó que $m_A(t) = (1-t)^2$.

1.1.2 El teorema de Jordan

Sigui $f : E \to E$, on $E = \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})^m = \ker f_\lambda^m$ (abreugem la notació amb $f_\lambda := f - \lambda\,\mathrm{Id}$).

Definició 5. $v \in E$ és un **vep generalitzat d'alçada l** si $v \notin \ker(f_\lambda^k)$ per $k \leq l-1$, però sí que $v \in \ker f_\lambda^l$. Que és el mateix que dir que $f_\lambda^k(v) \neq 0$ (per al mateix rang de k), però sí que $f_\lambda^l(v) = 0$.

Exemple 2. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal a $\mathbf{k}^4$ en la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ara, observem que $f_\lambda(e_1) = f(e_1) - \lambda e_1 = e_2 \neq 0$, $f_\lambda^2(e_1) = f_\lambda(e_2) = e_3 \neq 0$, $f_\lambda^3(e_1) = f_\lambda^2(e_2) = f_\lambda(e_3) = 0$ i, per últim, $f_\lambda(e_4) = 0$. Per tant, e_1 és un vepg d'alçada 3, e_2 és un vepg d'alçada 2 i tant e_3 com e_4 són vepg d'alçada 1 i, per tant, veps ordinaris.

Proposició 6. *Sigui v un vep generalitzat d'alçada l, aleshores $v, f_\lambda(v), f_\lambda^2(v), \ldots, f_\lambda^{l-1}(v)$ són linealment independents. Al subespai que generen l'anomenarem un cicle de Jordan de longitud l.*

Demostració. Suposem que son linealment dependents, aleshores existeix escalars els quals no son tots 0 tals que:

$$\mu_0 v + \mu_1 f_\lambda(v) + \ldots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1}(v) = 0$$

Però ara apliquem f_λ^{l-1} i ens queda:

$$\mu_0 f_\lambda^{l-1}(v) + \mu_1 f_\lambda^{l}(v) + \ldots + \mu_{l-1} f_\lambda^{l-1+l-1}(v) = 0$$

Aleshores, com que v és un vep generalitzat d'alçada l, a partir del segon son tots 0, per tant, no queda cap altra opció que $\mu_0 = 0$. Efectuant ara, per $1 \leq i \leq l-2$, aquest procés de nou però amb f_λ^{l-i} veurem que $\mu_i = 0$. I, per tant, hem vist que totes les μ són 0, amb la qual cosa, per definició, són linealment independents. □

Proposició 7. *Els cicles de Jordan són f-invariants. (Per simplificar la notació fem servir $u_k = f_\lambda^{k-1}(v)$).*

Demostració. Per $k \neq l$, sabem que, $f_\lambda(u_k) = u_{k+1}$, és a dir, $f(u_k) = \lambda u_k + u_{k+1}$. Per tant, per aquesta part, és invariant. Per últim, quan fem $f_\lambda(u_l) = 0$, per ser v un vep generalitzat d'alçada l. □

Definició 8. Un cicle de Jordan de longitud l dona a lloc un Bloc de Jordan.

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definició 9. Una base de Jordan de f és una vase de E formada per cicles de Jordan.

$$M_{\mathscr{J}} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

Teorema 10. *Si el polinomi característic $P_f(t)$ descompon completament, aleshores, existeixen bases de Jordan.*

Demostració. Anem a verue el cas en dimensió 2. Sigui $f : \mathbf{k}^2 \to \mathbf{k}^2$ un endomorfisme amb un únic vap λ amb $m_f(t) = (t-\lambda)^2$ i per tant, aquest és l'únic cas que no diagonalitza.

Agafem $u \in \mathbf{k}^2$ tal que $f_\lambda(u) \neq 0$ (per tant, u no és vep). Aleshores, escollim v de la següent manera: $v = f(u) - \lambda(u)$. Llavors la base $\{u, v\}$ és un base de Jordan. Amb matriu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ara, en general, per a cada bloc, busquem un vector generador d'ordre el bloc (l). És a dir, v vepg d'alçada l, és a dir, que estigui en el $\ker f_\lambda^l$ però no en el $\ker f_\lambda^{l-1}$. Recordem que $0 \subset \ker f_\lambda \subset \cdots \subset \ker f_\lambda^l$.

Suposem f tal que $P_f(t) = (\lambda - t)^n$, aleshores $\exists$ una base de Jordan.

En efecte, sigui $d_i = \dim \ker f_\lambda^i$. Farem un edifici on la planta i té amplada $l_m = d_i - d_{i-1}$. Escollim $u_1^m, \ldots, u_{l_m}^m \in \ker f_\lambda^m \setminus \ker f_\lambda^{m-1}$ de manera que sigui l.i. u_i^m són vepg d'alçada m, considerem $f_\lambda^k(u_i^m)$.

Lema 11. *$f_\lambda^k(u_i^m)$ per $1 \leq i \leq l_m$ i per $0 \leq k \leq m-1$, són l.i*

Demostració. Suposem que tenim unes constants no totes nul·les μ tals que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{l_m} \mu_{ki} f_\lambda^k(u_i^m) = 0$$

Apliquem f_λ^{m-1}. Només ens queda el pis superior, el $k = 0$ i, per tant, $\sum_{i=1}^{l_m} \mu_{0i} f_\lambda^{m-1}(u_i^m) = 0$, però aquests ja sabiem que eren l.i. Aleshores les seves μ_0 són totes 0. Encara ens queden les $k \geq 1$.

Ara apliquem f_λ^{m-2}, només ens queden el segon pis superior, ara fem:

$$\sum_{i=1}^{l_{m-1}} \mu_{1i} f_\lambda^{m-1}(u_i^m) = f_\lambda^{m-1}(\sum_{i=1}^{l_{m-1}} \mu_{1i}(u_i^m)) = 0$$

Però, com que sabem que els vectors de dins són l.i. totes les μ_1 han de ser 0 altra vegada. Reproduint aquest procés per a cada pis, arribem a que totes les μ són 0. ☐

Baixem un pis, estem a $\ker f_\lambda^{m-1} \setminus \ker f_\lambda^{m-2}$ amb amplada l_{m-1}. Veurem que $\ker f_\lambda^{m-1} = < f_\lambda(u_1^m), \ldots, f_\lambda(u_{l_m}^m) > \oplus \ker f_\lambda^{m-2} \oplus V_{m-1} = (*) = u_{m-1} \oplus \ker f_\lambda^{m-2} \oplus V_{m-1}$. Aleshores, caldria escollir, $u_1^{m-1}, \ldots, u_{r_{m-1}}^{m-1} \in V_{m-1} = \ker f_\lambda^{m-1} \setminus u_{m-1} \oplus \ker f_\lambda^{m-2}$ l.i. vepg d'alçada $m-1$.

Lema 12 (*)**.** *Cal comprovar que $u_{m-1} \bigcap \ker f_\lambda^{m-2} = 0$. I per tant que la seva suma sigui directa.*

Demostració. Sigui $w \in u_{m-1} \bigcap \ker f_\lambda^{m-2}$ i el descomponem en elements de de u_{m-1}, llavors apliquem f_λ^{m-2} i, com que $w \in \ker f_\lambda^{m-2}$ el resultat hauria de ser 0, però ens queda:

$$0 = f_\lambda^{m-2}(w) = f_\lambda^{m-2}(\sum \mu_i f_\lambda(u_i^m)) = f_\lambda^{m-1}(\sum \mu_i u_i^m)$$

Ara, com que els elements que hi ha dins del parentesis són l.i. i no pertanyen al $\ker f_\lambda^{m-1}$, no pot haver constants diferents de 0 tals que el resultat sigui. Per tant, hem arribat a contradicció i les constants han de ser 0 i $w = 0$. Aleshores, l'intersecció és buida i hem acabat. ☐

Seguint el mateix raonament per a cada pis, obtenim una base de Jordan.

☐

Exemple 3. Sigui A la matriu d'una aplicació lineal.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, $P_A(t) = (3-t)^5$, $m_A(t) = (t-3)^3$ i $d_1 = 2$,$d_2 = 4$ i $d_3 = 5$.

e_1	
$f_\lambda(e_1)$	v
$f_\lambda^2(e_1)$	$f_\lambda(v)$

$u_1^3 \in \ker(A - 3\,\mathrm{Id})^3 \setminus \ker(A - 3\,\mathrm{Id})^2$, com per exemple, $u_1^3 = e_1$, $f_\lambda(u_1^3) = (4, -1, 1, 1, 0)$ i $f_\lambda^2(u_1) = e_3$.

Ara, cal $v \in \ker(A - 3\,\mathrm{Id})^2 \setminus \ker(A - 3\,\mathrm{Id}) \oplus < f_\lambda(u_1^3) >$. Per exemple, $v = (-1, 0, 0, 0, 1)$ i $f_\lambda(v) = (0, 1, -1, 0, 0)$.

Observació 13. *La quantitat de cicles de longitud exactament k és $2 \dim\ker f_\lambda^k - \dim\ker f_\lambda^{k-1} - \dim\ker f_\lambda^{k+1}$. Per tant, la quantitat de caixes de mida k depèn només de f (i de λ).*

Observació 14. *La reduïda de Jordan és única, llevat de reordenació dels Blocs.*

Corol·lari 15. *A, B son matrius conjugades ($\exists \in GL_n(\mathbf{k}), B = S^{-1}AS$) $\iff J_A = J_B$.*

Exemple 4. Sigui B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Veiem que $P_B(t) = (t-1)^3(t-2)$, que $m_B(t) = (t-1)^2(t-2)$ i, pel primer teorema de descomposició $E = \ker(B - \mathrm{Id})^2 \oplus \ker(B - 2\,\mathrm{Id})$. Per tant, $u_1 \in \ker(B - \mathrm{Id})^2 \setminus \ker(B - \mathrm{Id})$, $u_2 = f_\lambda(u_1)$ i anar fent...

1.1.3 Aplicacions de Jordan

Sigui $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{k})$, $P_A(k)$ descompon completament, $\exists$ base de Jordan, una matriu J i una matriu invertible S tal que $J = S^{-1}AS$, o equivalentment $A = SJS^{-1}$.

1. Potències de A: A^k.

Observació 16. $A^k = (SJS^{-1})^k = (SJS^{-1})(SJS^{-1}) \cdots (SJS^{-1}) = (SJ^kS^{-1})$. *Per tant, només cal calcular J^k.*

Observació 17. *La matriu de Jordan J és una matriu per blocs. Aleshores:*

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m^k \end{pmatrix}$$

Podem suposar que $J = J_l(\lambda)$ (que només té un bloc).

Observació 18. *Podem escriure $J = D + N$ on D és una matriu diagonal (on tots els valors son el vap λ) i la matriu N és una matriu amb uns a la diagonal inferior. Aquesta matriu N compleix que la matriu N^k té només 1's a la diagonal k inferior. Per tant, en cada poténcia, la diagonal baixa i es reduix en 1 el nombre de uns i arriba un poténcia l tal que $N^l = 0$ que és la matriu 0.*

Observació 19. *Les matrius N i D commuten ($D^nN^m = N^nD^m$). Ja que $D^nN^m = \lambda^n \operatorname{Id} N^m = \lambda^n N^m = N^m\lambda^n \operatorname{Id} = N^mD^n$. Aleshores, quan fem J^k dona:*

$$J^k = (D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N + \cdots + N^k = \lambda \operatorname{Id} + k\lambda^{k-1}N + \binom{k}{2}\lambda^{k-2}N^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}\lambda N^{k-1} + N^k$$

Proposició 20. *Sigui l el nombre tal que $N^l = 0$ (bàsicament l és la mida de la matriu). Aleshores*

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_m^k \end{pmatrix}$$

2. Exponencial d'una matriu.

Sigui A una matriu, aleshores definim l'exponencial d'una matriu com:

$$e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n = \operatorname{Id} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

(Faltarien fer comprovacions com que convergeix)

Formalment podem fer: $e^A = e^{SJS^{-1}} = Se^JS^{-1}$ i $e^J = e^{D+N} = e^De^N$. I, a partir d'aquí, queda clar que $e^D = e^\lambda \operatorname{Id}$ i que $e^N = \operatorname{Id} + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(l-1)!}N^{l-1} + 0$. Per tant, podem veure que:

$$e^J = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(l-1)!} & \frac{1}{(l-2)!} & \frac{1}{(l-3)!} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sistemes lineals d'e.d.o. amb coef. constants.

Tenim un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ &\cdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned}$$

És a dir, $x`(t) = Ax(t)$, amb $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ i $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pel cas $n = 1$, $x'(t) = ax(t)$, fem $\frac{x'(t)}{x(t)} = a$, integrant, $\ln x(t) = at + b$, llavors $x(t) = e^{at}e^b = ce^{at}$. I per deduir la t ens calen unes condicions inicials.

En general, sense comprovació, és $x(t) = e^{At}x_0$, de la mateixa forma, x_0 són per les condicions inicials.

1.2 Formes quadràtiques

Motivació: Estudiar polinomis homogenis (de més d'una variable) de grau 2.

Definició 21. Una forma bilinial φ simétrica sobre E és una aplicació $\varphi : E \times E \to \mathbf{k}$ tal que:

1. $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$
2. $\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v)$
3. $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

Exemple 5. Alguns exemples:

1. $k = \mathbb{R}$ un producte escalar (euclidià) és una forma bilineal simètrica a més és def. positiva.
2. $k = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ amb $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = y_1x_2 + y_2x_1$ és bilineal i simètrica, però no definida postiva.

Definició 22. La forma quadràtica q_φ associada a φ és l'aplicació

$$\begin{aligned} q_\varphi : E &\to \mathbf{k} \\ u &\mapsto q_\varphi(u) := \varphi(u, u) \end{aligned}$$

Proposició 23. *Propietats:*

1. $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$
2. $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}[q(u + v) - q(u) - q(v)]$ *(amb char(k)* $\neq 2$*, p.e.* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$*)*
3. *Hi ha una bijecció* $\{\varphi$ *formes bilineals simètriques* $\} \leftrightarrow \{q$ *formes quadràtiques* $\}$*. Si tinc una* φ *em determina una* q_φ *i si tinc una* q *aquesta determina una* ψ *tal que* $q = q_\psi$*.*

Demostració.

1. $q(\lambda u) = \varphi(\lambda u, \lambda u) = \lambda^2 = \varphi(u, u) = \lambda^2 q(u)$
2. $q(u + v) = \varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v)$ I aïllem.
3. Col·lorari de l'apartat anterior.

□

Formes bilineals i quadràtiques en una base $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E. $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ i $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. I sigui φ una forma bilineal. Llavors

$$\varphi(u, v) = \varphi(x_1e_1 + \cdots x_ne_n, y_1e_1 + \cdots + y_ne_n) = \sum_{i,j} x_iy_i\varphi(e_i, e_j)$$

Definició 24. La matriu de φ en la base $\mathscr{B}$ és $A = (a_{ij})$ amb $a_{ij} = \varphi(e_1, e_2)$.

Llavors, $\varphi(u, v) = \sum a_{ij}x_iy_j$ i $q(u) = \varphi(u, u) = \sum a_{ij}x_ix_j$ que és un polinomi homogeni de grau 2 en les coordenades de u en $\mathscr{B}$.

Observació 25. $\varphi(u, v) = X^tAY =$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Canvi de base: Sigui $\mathscr{B}' = \{u_1, \cdots, u_n\}$ un nova base i tenim $u = x'_1u_1 + \cdots + x'_nu_n$ i φ una forma bilineal. Sigui S la matriu de canvi de base de $SX' = X$, llavors

$$X^tAY = (SX')^tA(SY') = X'^t(S^tAS)Y'$$

Proposició 26. $M_{\mathscr{B}'}(\varphi) = B = S^tAS$

Observació 27. $B = S^tAS$*,* S *inveritble.*

1. *rang(A)=rang(B). Llavors podem definir rang* φ *= rang A.*

2. $\det A \neq \det B$ *perquè* $\det B = \det S^2 \det A$.

Una manera de veure-ho és definint $\hat{\varphi} : E \to E^*$ que agafa u i l'envia a $\varphi(u, -) : E \to k$ i envia $v \mapsto \varphi(u, v)$.

Proposició 28. *B una base i B^* la base dual, aleshores, $M_{B,B^*}(\hat{\varphi}) = A$.*

Demostració. Calculem $\hat{\varphi}(e_i) = b_{1i}e_1^* + \cdots + b_{n1}e_n^*$, que cada component és $b_{ji} = \hat{\varphi}(e_i)(e_j) = \varphi(e_i, e_j) = a_{ij} = a_{ji}$. Per tant, les matrius tenen les mateixes components. □

Definició 29. El radical de φ és:

$$\mathrm{rad}\varphi = \{u \in E | \varphi(u, v) = 0, \ \forall v \in E\} = \ker \hat{\varphi}$$

i escriurem $r_0 = \dim \mathrm{rad}\varphi$. Direm que φ i q és de rang $r = n - r_0 = \mathrm{rang}\ \hat{\varphi} = \mathrm{rang}\ A$.

Exemple 6. $\varphi(x, y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_3 + x_2y_1 + x_3y_1$, la matriu de la forma és:

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Definició 30. B és una base q-ortogonal si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ per $i \neq j$. I, per tant, la matriu A és diagonal.

Teorema 31. *$\forall \varphi, q$ $\exists$ bases q-ortogonals.*

Demostració. Per inducció sobre n (la dimensió de E).

Per $n = 1$, la matriu és una sola constant i, per tant, diagonal.

Per $n - 1 \to n$ prenem $u \in E$ tal que $q(u) = \varphi(u, u) \neq 0$ $[\varphi \neq 0]$. Llavors, separem $E = \langle u \rangle + F$, amb $F = \ker \hat{\varphi}(u)$, però

$$\hat{\varphi}(u) : E \to k$$

Al ser k una imatge de dimensió 1, per dimensions $F = \ker \hat{\varphi}(u) = n - 1$. I u no està en el ker de $\hat{\varphi}(u)$, llavors, es compleix que $E = \langle u \rangle \oplus F$. Per inducció, tenim $\varphi_{|F}$ admet una base q ortogonal $\{u_2, u_3, \cdots, u_n\}$. Per últim, afegint $u_1 = u$ tenim una base de E que és q-ortogonal. □

Observació 32. *$\exists B$ de φ o q tal que*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Amb r =rang φ = rang $A = \#\{\alpha_i \neq 0\}$. Llavors $q(x_1, \cdots, x_r, \cdots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2$.

Observació 33. *Els valors de α_i estan determinats llevat de quadrats de k. Perquè al fer un canvi de base $B = S^tAS$, si $v_i = \beta_i u_i$, ens queda que α_i passa a $\beta_i^2\alpha_i$. I la forma quadràtica: $q(y_1, \cdots, y_n) = \alpha_i\beta_i^2 y_1^2 + \cdots + \alpha_n\beta^2 y_n^2$.*

Exemple 7. En el cas dels complexos, $k = \mathbb{C}$ sempre podem fer un canvi de base $y_i = \sqrt{\alpha_i}x_i$ i sempre ens acaba quedant suma de quadrats.

Exemple 8. Pels $\mathbb{R}$ sempre podem aconseguir que la forma quadràtica quedi en sumes i restes de quadrats (perquè amb quadrats de reals no podem canviar de signe).

1.2.1 Diagonalització de φ i q

Sigui A una matriu simétrica.

1. Congruéncia-pivot: Consisteix en fer canvis elementals per files i columnes alhora.

Exemple 9. Sigui $q(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2yz$, llavors

$$A^t = A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara fem operacions que han de ser iguals per files que per columnes, per exemple, ara sumem la primera fila a la segona i, per tant, hem de sumar la primera columna a la segona columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ara, decidim sumar la tercera fula a la segona, llavors també sumarem la tercera columna a la segona:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ara, anem a fer, menys dues vegades la tercera més la segona:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Per tant, hem trobat un canvi de base tal que $D = B^tAB$, on D és la matriu diagonal i B és la de canvi de base:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ara bé, si ho haguéssim fet diagonalitzat a $k = \mathbb{R}$ pel teorema espectral el $P_A(t)$ és de grau 3 amb vaps 4,12..., -0.76..., 0.63... Aleshores, s'hagués complicat molt.

2. Completació de quadrats. Consisteix en fer canvis algebraics per agrupar quadrats perfectes.

Exemple 10. Tenim $q = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2yz = 2(x^2 - 2xy) + 2y^2 - 2yz = 2(x-y)^2 - 2yz$, ara, una nova variable segur que és $\overline{x} = x - y$ així ja tenim un quadrat. Com volem que yz sigui un quadrat fem que $y = \overline{y} + \overline{z}$ i $z = \overline{y} - \overline{z}$, llavors, $\overline{y} = (y+z)/2$ i $\overline{z} = (y-z)/2$. Llavors, $q = 2\overline{x} - 2\overline{y} + 2\overline{z}$.

3. Mètode de Sylvester. En aquest métode, suposem que la matriu és definida postiva. Per tant, tots els menors principals són positius estrictes.

Els menors principals d'una matriu són els determinants de les matrius $i \times i$ d'agafar només les primeres i files i columnes.

$$\delta_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}{}^{\circ}1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, $\exists B$ tal que

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\delta_1}{1}x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1}x_2^2 + \cdots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}x_n^2}$$

Observació 34. *Per l'exemple anterior no s'aplica, perquè $\delta_2 = 0$.*

1.2.2 Classificació de formes quadràtiques en $\mathbf{k} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$

Teorema 35. *Dues formes bilineals (o quadràtiques) φ i ψ són equivalents (per canvi de base) si, i només si, rang(φ)=rang(ψ) i, en aquest cas, són equivalents a:*

$$R = \begin{pmatrix} 1_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $q(x_1, \cdots, x_n)$ amb q sobre $\mathbb{C}$, llavors podem trobar un canvi de q per $q'(y_1, \cdots, y_n) = y_1^2 + \cdots + y_r^2$ on r =rang q.

Demostració. Hi ha una base B on φ diagonalitza amb 1s i 0s on el nombre de 1s és el rang de φ i, el mateix per ψ. Com tenen el mateix rang, contemplen el mateix nombre de 1's. Així que els dos acaben arribant a la mateixa base. □

Teorema 36. *1. Si φ/q és una forma real en $\mathbb{R}$, $\exists r_+ \geq 0$ tal que φ/q és equivalent:*

$$q(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{r_+}^2 - x_{r_++1}^2 - \cdots - x_r^2$$

2. Si (r_+, r'_+) en les mateixes condicions $\implies r'_+ = r_+$.
3. $q \sim q' \iff r(q) = r(q')$ i $r_+(q) = r_+(q')$.

Demostració. 1. perquè els elements de la diagonal estan definits llevat de quadrats.

2. (r, r_+, r_-, r_0) on r =rang q, $r_- = r - r_+$, $r_0 = \dim \operatorname{rad} \varphi$. Llavors $E = E^+ \oplus E^- \oplus \operatorname{rad} \varphi$, on $\dim E^+ = r_+$. Si trobéssim una altra descomposició $E = F^+ \oplus F^- \oplus \operatorname{rad} \varphi$. Veient que $F^+ \bigcap E^- = 0$ (perquè no es pot passar de negatiu a positiu amb un quadrat d'un real), llavors $\dim F^+ \leq \dim E - \dim E^- - r_0 = \dim E^+$ i $\dim F^- \leq \dim E - \dim E^+ - r_0 = \dim E^-$. Per tant, sumant a banda i banda: $\dim F^+ + \dim F^- \leq \dim E^- + \dim E^-$, que com tots dos són iguals a $r - r_0$, arribem a que $\dim F^+ = \dim E^+ \implies r'_+ = r_+$.

3. La implicació de la dreta és per l'apartat anterior i cap a l'esquerra és perquè arriben a la mateixa matriu q-ortogonal i composant canvis de base tenim la manera de veure que $q \sim q'$. □

Observació 37. $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, *φ/q forma bilineal $A/M_B(\varphi)$. Llavors:*
φ/q definida positiva $\iff r = r_+ = n \iff \delta_1, \cdots, \delta_n > 0$.
φ/q definida negativa $\iff r = r_- = n \iff \delta_1 = a_n < 0, \delta_2 \cdots, \delta_n$ alternats de signe.

Observació 38. *r_+ es pot calcular per la regla de Descartes. Que diu: agafem $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ (el polinomi característic) que descompon completament, aleshores, el nombre d'arrels positives és el nombre de canvis de signe dels coeficients de $P(t)$. (per teorema espectral)*

1.3 Tensors

Definició 39. Siguin $E_1, \ldots, E_p, F$ $\mathbf{k}$-e.v. de dimensió finita. Una aplicació $f : E_1 \times E_p \to F$ és multilineal si $f(v_1, \cdots, \lambda v_i + \mu v'_i, \cdots, v_p) = \lambda f(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_p) + \mu f(v_1, \cdots, v'_i, \cdots, v_p)$.

Observació 40. *Si $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_p; F) = \{f | \text{multilineal}\}$ és el conjunt de les aplicacions multilineals, és un espai vectorial.*

Definició 41. Un tensor de tipus (p, q) de E és una aplicació multilineal

$$T : E \times \cdots \times E \times E^* \times \cdots \times E^* \to \mathbf{k}$$

amb E^* és el dual de E. Notarem com $\mathfrak{T}_p^q(E) = L(E^p \times (E^*)^q; \mathbf{k})$ que és un $\mathbf{k}$-e.v. Anomenarem un tensor $T \in \mathfrak{T}_p^q(E)$ es diu que és p-vegades covariant i q-vegades contravariant.

Observació 42. *Farem servir que $E^{**} \cong E$, ja que tenen un isomorfisme que no depen de la base. Per tant, $\mathfrak{T}_p^q(E) = \mathfrak{T}_q^p(E^*)$.*

Exemple 11. Alguns exemples de tensors coneguts:

1. $\mathfrak{T}_1(E) = \{w : E \to \mathbf{k}, \text{lineals}\} = E^*$.
2. $T \in \mathfrak{T}_2(E)$, $T : E \times E \to \mathbf{k}$ bilineal.
3. $E = \mathbb{R}^n$, l'aplicació det : $E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$ que envia n vectors de $\mathbb{R}^n$ al seu determinant, és un tensor. Similarment, el variant o menor d'una matriu, només afaga k vectors de $\mathbb{R}^n$ i retorna el menor $k \times k$.

Preguntes: Quina dimensió té $\mathfrak{T}_p^q(E)$? Quina base es pot donar de $\mathfrak{T}_p^q(E)$?

Sigui $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ una base de E. I sigui $B^* = \{e^1, \cdots, e^n\}$ una base dual ($e^i(e_j) = \delta_i j$). Per $T : (E)^p \times (E^*)^q \to \mathbf{k}$, considerem $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^{j_q}, \cdots, e^{j_q})$ una base de $(E)^p \times (E^*)^q$, amb $0 \leq i_k, j_l \leq n$.

Prenem $T(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q)$, $v_i = \sum_{k=1}^n x_i^k e_k$ i $w_j = \sum_{l=1}^n y_l^i e^l$, llavors

$$T(\cdots) = T(\sum_k x_1^k e_k, \sum_k x_2^k e_k, \cdots, \sum_k x_p^k e_k, \sum_l y_l^1 e^l, \cdots, \sum_l e_l^q e^l) =$$

$$= \sum x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_p^{i_p} y_{j_1}^1 \cdots y_{j_q}^q T(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^{j_1}, \cdots, e^{j_q}) = \sum_{|I|>p, |J|>q} x^I y_J T(e_I, e^J)$$

on $I = (i_1, \cdots, i_p)$ amb $p = |I|$ i $J = (j_1, \cdots, j_q)$ amb $q = |J|$.

Per la pròpia fòrmula $(T(e_I, e^J))$, com que cada component té n elements, i hi ha $p + q$ components, tenim que la $\dim \mathfrak{T}_p^q = n^{p+q}$. Base $\mathscr{T}_I^J$ és tal que $\mathscr{T}_I^J(e_I, e^J) = \delta_{(I,J),(I',J')}$.

Definició 43. Siguin $T \in \mathfrak{T}_p^q(E)$, $S \in \mathfrak{T}_r^s(E)$, es defineix el producte vectorial $T \otimes S \in \mathfrak{T}_{p+r}^{q+s}(E)$:

$$(T \otimes S)(v_1, \cdots, v_p, v_1', \cdots, v_r', w_1, \cdots, w_q, w_1', \cdots, w_s') := T(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) S(v_1', \cdots, v_r', w_1', \cdots, w_s') \in \mathbf{k}$$

Observació 44. *$T \otimes S$ és un tensor d'ordre $(p + r, q + s)$ perquè quan fixem totes les components excepte una, ens queda que la part de la dreta és linel.*

Proposició 45. *Propietats de $\otimes$:*

1. *Distributiva: $(T + T') \otimes S = T \otimes S + T' \otimes S$ i $T \otimes (S + S') = T \otimes S + T \otimes S'$.*
2. *Comptible amb escalars: $(\lambda T) \otimes S = \lambda(T \otimes S) = T \otimes (\lambda S)$.*
3. *Asociativa: $(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R) = [T \otimes S \otimes R]$.*
4. *No és commutatiu (en general): $T \otimes S \neq S \otimes T$.*

Exemple 12. Siguin els tensors e^1, e^2 del espai dual ($\mathfrak{T}_1(E) = E^*$). Per tant, $e^1 \otimes e^2 : E \times E \to \mathbf{k}$, $e^1 \otimes e^2 \in \mathfrak{T}_2(E) = \mathfrak{T}_1(E) \otimes \mathfrak{T}_1(E)$. Notem que:

$$\begin{aligned}(e^1 \otimes e^2)(e_1, e_2) =& e^1(e_1) \cdot e^2(e_2) = 1\\ (e^2 \otimes e^1)(e_1, e_2) =& e^2(e_1) \cdot e^1(e_1) = 0\end{aligned}$$

Que no són diferents i per tant, els tensors, en general, no son commutatius.

Observació 46. $\otimes : \mathfrak{T}_p^q(E) \times \mathfrak{T}_r^s(E) \to \mathfrak{T}_{p+r}^{q+s}$ *és una aplicació bilineal (per les propietats 1. i 2. anteriors).*

Teorema 47. $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$, $B' = \{e^1, \cdots, e^n\}$ *bases de E i E^*, aleshores:*

$$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} | 1 \leq i_k, j_l \leq n\}$$

es base de $\mathfrak{T}_p^q(E)$. En particular, $\dim \mathfrak{T}_p^q(E) = n^{p+q}$.

Abans de res, el tensor referent a una base és:

$$(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q})(e^{i_1'} \otimes \cdots \otimes e^{i_p'} \otimes e_{j_1'} \otimes \cdots \otimes e_{j_q'}) = e^{i_1}(e_{i_1}) \cdots e^{i_p}(e_{i_p'}) e_{j_1}(e^{j_1'}) \cdots e_{j_q}(e^{j_q'}) = \delta_{(I,J),(I',J')}$$

Demostració. Són linealment independents: agafem una combinació lineal amb coeficients que no siguin tots 0,

$$\Omega = \sum_{\lambda \leq i_k, j_l \leq n} \lambda_{i_1,\cdots,i_p}^{j_1,\cdots,j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} = 0$$

Fixem una tupla $(i'_1, \cdots, i'_p, j'_1, \cdots, j'_p)$. Llavors, aplicant el tensor anterior Ω a la l'element amb aquests índexs:

$$0 = \Omega(e_{i'_1}, \cdots, e_{i'_p}, e^{j'_1} \cdots e^{j'_q}) = \lambda_{i'_1,\cdots,i'_p}^{j'_1,\cdots,j'_p}$$

Llavors, totes les lambdes són 0. Per tant, són l.i. i per dimensió són base. □

1.4 Canvi de base

Tenim $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base de E i $B^* = \{e^1, \cdots, e^n\}$ la seva base dual. Sigui $T \in \mathfrak{T}_p^q(E)$ té coordenades en la base $e^I \otimes e_J) : T(e_I, e^J)$. Siguin $B' = \{u_1, \cdots, u_n\}$, $B^* = \{u^1, \cdots, u^n\}$ unes noves bases. Llavors, A és la matriu de canvi de base: $u_i = \sum_k a_i^k e_k$. I $B = (A^t)^{-1}$ més la matriu de canvi de base dual, $u^j = \sum_l b_l^j e^l$.

Pregunta: Quines son les coordenades de T en la base $u^I \otimes u_J = u^{i_1} \otimes \cdots \otimes u^{i_p} \otimes u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_q}$?

Fem un cas particular: $T \in \mathfrak{T}_1^1(E), I = \{i\}, J = \{j\}\{u^i \otimes u_j\}$ base de $\mathfrak{T}_1^1(E)$.

$$T_i^j = T(u_i, u^j) = T\left(\sum_k a_i^k e_k, \sum_l b_l^j e^l\right) = \sum_{k,l} a_i^k b_l^j T(e_k, e^l) = \sum_{k,l} a_i^k b_l^j T_k^l$$

En general:

$$T_I^J = \sum_{|K|=p, |L|=q} a_I^K B_L^J T_K^L$$

Observació 48. *A física i altres àrees, un tensor és vist com un objecte de la forma* $\{T_{i_1,\cdots,i_p}^{j_1,\cdots,j_q}\}$*, que canvia de la forma:*

$$\overline{T}_{i_1,\cdots,i_p}^{j_1,\cdots,j_q} = \sum a_{i_1}^{k_1} \cdots a_{i_p}^{k_p} b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_q}^{j_q} T_{k_1,\cdots,k_p}^{l_1,\cdots,l_q}$$

Observació 49. *Operacions amb tensors (transport i contraccions). El transport és el següent: prenem* $f : E \to F$ *una aplicació lineal. Tenim els factors* $\mathfrak{T}_p(E)$ *i* $\mathfrak{T}_p(F)$*. Si* $T \in \mathfrak{T}_p(F)$ *llavors* $T : F \times \cdots \times F \to \mathbf{k}$*. I* $f \times \cdots \times f : E \times \cdots \times E \to \mathbf{k}$*. Aleshores,* $T \circ (f \times \cdots \times f)$*, que és* $[T \circ (f \times \cdots \times)](v_1, \cdots, v_p) = T(f(v_1), \cdots, f(v_p))$ *que és una aplicació lineal de* $\mathfrak{T}_p(E)$*. Llavors, el transport o imatge recíproca (o pullback) és:*

$$\begin{aligned} f^* : \mathfrak{T}_p(F) &\to \mathfrak{T}_p(E) \\ T &\mapsto T \circ f \end{aligned}$$

Similarment tenim una cosa semblant pel dual, $f' : F^* \to E^*$*, fen la mateixa composició, tenim que* $T' \in \mathfrak{T}^q(E)$ *llavors* $T \circ f$ *és una aplicació lineal de* $\mathfrak{T}^q(F)$*. Aleshores tenim la imatge directe (o pushout):*

$$\begin{aligned} f_* : \mathfrak{T}^q(E) &\to \mathfrak{T}^q(F) \\ T' &\mapsto T' \circ f' \end{aligned}$$

1.5 Tensors simètrics i antisimètrics

Definició 50. $T \in \mathfrak{T}_p(E)$ (en aquest cas $q = 0$, però el mateix per $\mathfrak{T}^q(E)$).

1. T és simètric si $T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_p) = T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_p)\ \forall i, j$.
2. T és antisimètric si $T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_p) = -T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_p)\ \forall i, j$.

Exemple 13. $T = e^1 \otimes e^1$ és simètric perquè $T(u, v) = e^1(u)e^1(v) = u^1 v^1 = v^1 u^1 = T(v, u)$ on u^1 i v^1 són les primeres coordenades d'u i v respectivament (en la base $\{e_i\}$). El tensor $R = e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1$ és antisimètric. En $\mathbb{R}^n$ el determinant és un vector antisimètric.

Definició 51. Anomenarem $\mathcal{S}_p(E) = \{T \in \mathfrak{T}_p(E)$, simétrics $\}$. I anomenarem $\mathcal{A}_p(E) = \{T \in \mathfrak{T}_p(E)$, antisimétrics $\}$.

Lema 52. *$\mathcal{S}_p(E)$ i $\mathcal{A}_p(E)$ són subespais vectorials de $\mathfrak{T}_p(E)$.*

Objectiu: trobar les bases i la dimensió de $\mathcal{S}_p(E)$ i de $\mathcal{A}_p(E)$.

Observació 53. *(Si $k \neq 2$) Llavors T és antisimètric si, i només si, T amb dues entrades repetides és 0.*

Demostració. $\Longrightarrow$) $T(\cdots, v, \cdots, v, \cdots) = -T(\cdots, v, \cdots, v, \cdots)$, llavors $T(\cdots, v, \cdots, v, \cdots) = 0$.

$\Longleftarrow$) Utilitzem linealitat $0 = T(\cdots, v_i+v_j, \cdots, v_i+v_j, \cdots) = T(\cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots)+T(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots)+T(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) + T(\cdots, v_j, \cdots, vj, \cdots)$, llavors $T(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -T(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots)$ □

Definició 54. Acció del grup simètric. $\mathfrak{S}_p$ de p-elements:

$$\mathfrak{S}_p = \{\sigma : [p] \to [p] | bijectives\}$$

operació $\mathfrak{S}_p$: la composició.

Observació 55. *$\mathfrak{S}_p$ és un grup (té element neutre, invers i associativa).*

Aleshores té la següent conseqüència, sigui $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

$$\begin{aligned} \sigma : \mathfrak{S}_p &\to \mathfrak{S}_p \\ \eta &\mapsto \sigma\eta \end{aligned}$$

és un aplicació bijectiva (perquè σ té invers).

Definició 56. Una transposició és una element de $\mathfrak{S}_p$ tal que deixa tots els elements constants, excepte 2 que els intercanvia.

Observació 57. *Qualsevol $r \in \mathfrak{S}_p$ es pot escriure com a producte de transposicions. I dues factoritzacions en trasposicions comparteixen la paritat.*

Definició 58. Podem definir el signe d'un element del grup simètric com $e : \sigma_p \to \{+-1\}$, com $e(r) = (-1)^m$.

Definició 59. Siguin $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ i $T \in \mathfrak{T}_p(E)$.

$$(\sigma T)(v_1, \cdots, v_p) = T(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)})$$

Obtenim

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{T}_p(E) &\to \mathfrak{T}_p(E) \\ (\sigma, T) &\mapsto \sigma T \end{aligned}$$

Lema 60. *(1)* $(\mathrm{Id}) \cdot T = T$. *(2)* $(\sigma\eta)T = \sigma(\eta T)$.

Exemple 14. Siguin $T = e^1 \otimes e^2 \otimes e^3$ i $\sigma = (3, 1, 2)$. Llavors:

$$(\sigma T)(v_1, v_2, v_3) = T(v_{\sigma(v_1)}, v_{\sigma(v_2)}, v_{\sigma(v_3)}) = T(v_3, v_1, v_2) = (e^1 \otimes e^2 \otimes e^3)(v_3, v_1, v_2) =$$

$$e^1(v_3) \cdot e^2(v_2) \cdot e^3(v_2) = e^2(v_1)e^3(v_2)e^1(v_3) = (e^2 \otimes e^3 \otimes e^1)(v_1, v_2, v_3)$$

Per tant, quan una permutació s'aplica a un tensor, el que s'aplica és l'inversa d'aquesta, en el exemple:

$$\sigma(e^1 \otimes e^2 \otimes e^3) = e^2 \otimes e^3 \otimes e^1 = e^{\sigma^{-1}(1)} \otimes e^{\sigma^{-1}(2)} \otimes e^{\sigma^{-1}(3)}$$

Proposició 61. *Podem caracteritzar:*

1. *T simètric $\iff$ $\sigma T = T$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p$*
2. *T antisimètric $\iff$ $\sigma T = e(\sigma)T$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p$.*

Demostració. Farem només la segona demostració.

$\Longleftarrow$) $\sigma T = e(\sigma)T$, $\forall \sigma \implies \tau T = -T$, per τ trasposició, llavors T antisimètric.

$\Longrightarrow$) T antisimètric $\tau T = -T$, per τ trasposició.

$$\sigma T = (\tau_1 \cdots \tau_m)T = \tau_1(\tau_2(\cdots(\tau_n T))) = (-1)^m T = e(\sigma)T$$

□

Definició 62. Sigui $T \in \mathfrak{T}_p(E)$ (a $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$), aleshores

$$S_p(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p} \sigma T, \text{ simetritzat de } T$$
$$A_p(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p} e(\sigma)(\sigma T), \text{ antisimetritzat de } T$$

Proposició 63.

1. *$A, S : \mathfrak{T}_p(E) \to T_p(E)$ són lineals.*
2. *$S(T)$ simètric, $A(T)$ antisimètric $A : \mathfrak{T}_p(E) \to \mathcal{A}(E)$.*
3. *$A^2 = A$ i $S^2 = S$ (són projectors)*

Demostració.

1. Està clar.
2. $\sigma A(T) = \sigma(\frac{1}{p!}\sum_{\eta \in S_p} e(\eta)(\eta T) = \frac{1}{p!}\sum_{\eta \in S_p} e(\eta)(\sigma\eta T) = e(\sigma)\frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p} e(\sigma)e(\eta)(\sigma\eta T) = e(\sigma)A(T)$
3. Si T antisimètric $\iff A(T) = T$. Llavors $A^2(T) = A(A(T)) = A(T)$. Anem a veure que és cert.
   $\Longrightarrow$) $A(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p} e(\sigma)(\sigma T) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p} e(\sigma)e(\sigma)(T) = T$.
   $\Longleftarrow$) $T = A(T) \implies$ antisimètric per (2).

□

Conseqüència:

$$\{S(e^{e_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p})\} \text{ generen } \mathcal{S}_p(E)$$
$$\{A(e^{e_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p})\} \text{ generen } \mathcal{A}_p(E)$$

Observació 64. *Si $T \in \mathcal{A}_p(E)$ i $T \in \mathcal{A}_q$, llavors $T \otimes S \notin \mathcal{A}_{p+q}(E)$.*

Definició 65. $T \in \mathcal{A}_p(E)$, $S \in \mathcal{A}_q(E)$, llavors

$$T \wedge S = \frac{(p+q)!}{p!q!}A(T \otimes S)$$

Exemple 15. $e^1 \wedge e^2 = \frac{2!}{1!1!}A(e^1 \otimes e^2) = 2\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1)$.

Proposició 66. *Propietats de 1:*

1. *Distributiva:* $T \wedge (S_1 + S_2) = T \wedge S_1 + T \wedge S_2$
2. *Producte escalars:* $(\lambda T) \wedge S = \lambda(T \wedge S) = T \wedge (\lambda S)$
3. *Associativa:* $(T \wedge S) \wedge U = T \wedge (S \wedge U) = [T \wedge S \wedge U]$
4. *Anticommutatiu* $S \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge S$
5. *$f : E \to F$ lineal* $f^*(T \wedge S) = (f^*T) \wedge (f^*S)$

Demostració. Les dues primeres propietats vénen del fet que $\bigwedge : \mathfrak{T}_p(E) \times \mathfrak{T}_q(E) \to \mathcal{A}_{p+q}(E)$ és bilineal.

Pel tercer, probarem abans el següent lemma:

Lema 67.
$$A(A(T)\otimes S)=A(T\otimes S)=A(T\otimes A(S))$$

Demostració.
$$A(A(T)\otimes S)=A(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)(\sigma T\otimes S))=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)A(\sigma T\otimes S)=\frac{1}{p!}\sum_{\mathfrak{S}_p}\epsilon(\sigma)(\sum_{\eta\in\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\eta)\eta(\sigma T\otimes S)\frac{1}{(p+q)!})=$$
$$=\frac{1}{p!}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\mathfrak{S}_p,\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\eta\sigma)(\eta\sigma)(T\otimes S)=\frac{1}{p!}\frac{1}{(p+q)!}p!\sum_{\zeta\in\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\zeta)\zeta(T\otimes S)=A(T\otimes S)$$

$\square$

Ara, per la propietat 3. fem:
$$(T\wedge S)\wedge U=\frac{((p+q)+r)!}{(p+q)!r!}A((T\wedge S)\otimes U)=\frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}\frac{(p+q)!}{p!q!}A(T\otimes S\otimes U)=\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}A(T\otimes S\otimes U)$$

Per a la propietat 4. fem:
$$(S\wedge T)(v_1,\cdots,v_q,v_{q+1},\cdots,v_{p+q})=\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\sigma)\sigma(S\otimes T)(v_1,\cdots,v_{p+q})=$$
$$=\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum_{\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\sigma)(S\otimes T)(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(q)},v_{\sigma(q+1)},\cdots,v_{\sigma(p+q)})=$$
$$=\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum_{\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\sigma)S(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(q)})\otimes T(v_{\sigma(q+1)},\cdots,v_{\sigma(p+q)})=$$
$$=\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum_{\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\sigma)T(v_{\sigma(q+1)},\cdots,v_{\sigma(p+q)})\otimes S(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(q)})=$$

Sigui
$$\tau=\begin{pmatrix}1&\cdots&p&p+1&\cdots&0\\ q+1&\cdots&p+q&1&\cdots&q\end{pmatrix}$$

La qual podem veuer que $\epsilon(\tau)=(-1)^{p+q}$. Llavors, l'expressió anterior, utilitzant una $\eta=\tau\sigma$, la podem escriure com:
$$=\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum_{\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\epsilon(\tau)T(v_{\eta(q+1)},\cdots,v_{\eta(p+q)})\otimes S(v_{\eta(1)},\cdots,v_{\eta(q)})=\epsilon(\tau)T\wedge S=(-1)^{p+q}T\wedge S$$

Per a la propietat 5. fem:
$$f^*(T\wedge S)=f^*(\frac{(p+q)!}{p!q!}A(T\otimes S))=\frac{(p+q)!}{p!q!}f^*(A(T\otimes S))$$
$$f^*(A(T\otimes S))=f^*(\frac{1}{(p+q)!}\sum\epsilon(\sigma)\sigma(T\otimes S))=\frac{1}{(p+q)!}\sum\epsilon(\sigma)f^*(\sigma(T\otimes S))$$
$$f^*(\sigma(T\otimes S))(v_1,\cdots,v_{p+q})=\sigma(T\otimes S)(f(v_1),\cdots,f(v_{p+q}))=(T\otimes S)(f(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(p+q)}))$$

$\square$

Observació 68. *Una fàcil generalització de la propietat 3. és la següent:*
$$T_1\wedge\cdots\wedge T_s=\frac{(p_1+\cdots+p_s)!}{p_1!\cdots p_s!}A(T_1\otimes\cdots\otimes T_s)$$

Exemple 16. $w\in E^*=\mathfrak{T}_1(E)$, llavors $w\wedge w=(-1)^{1\cdot 1}w\wedge w=-w\wedge w\implies w\wedge w=0$. $w^1\wedge\cdots\wedge w^r=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\epsilon(\sigma)w^{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes w^{\sigma(r)}$ amb $w_i\in E^*$.

Proposició 69. *Tenim*

1. $(w^1 \wedge \cdots \wedge w^p)(u_1, \cdots, u_p) = \det(w^i(u_j))$
2. $w^1, \cdots, w^p \in E^*$ *són l.i.* $\iff w^1 \wedge \cdots \wedge w^p \neq 0.$

Demostració.

$$(w^1 \wedge \cdots \wedge w^p)(u_1, \cdots, u_p) = \sum \epsilon(\sigma)(w^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes w^{\sigma(p)})(u_1, \cdots, u_p) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) w^1(u_{\sigma(1)}) \cdots w^p(u_{\sigma(p+1)}) =: \det(w^i(u_j))$$

$\square$