

# Problemes de teoria de grafs

Aleix Torres i Camps

## 1 Nocions bàsiques

En aquest apartat apareixen problemes relacionats amb les nocions bàsiques de connexió i distància. A més, de problemes vinculats amb les formes matricials d'un graf.

**Problema 1:** El nombre de vèrtexs de grau senar en un graf  $G = (V, E)$  és parell.

**Problema 2:** Qualsevol graf amb  $n \geq 2$  vèrtexs, en té dos del mateix grau.

**Problema 3:** Quants grafs hi ha de 4 vèrtexs i 3 arestes? Quants n'hi ha no isomorfs?

**Problema 4:** Siguin  $a_n$  el nombre de grafs d'ordre  $n$  i  $b_n$  el nombre de grafs no isomorfs d'ordre  $n$ . Proveu que  $\log_2 a_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n)$  i  $\log_2 b_n = n^2/2 + \mathcal{O}(n \log n)$ . En particular,  $\log b_n \sim \log a_n$ , ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Problema 5:** El graf complementari  $\bar{G}$  de  $G = (V, E)$  és  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ .

- (a) Proveu que  $G \cong G'$  si i només si  $\bar{G} \cong \bar{G}'$ .
- (b) Un graf  $G$  és autocomplementari si és isomorf a  $\bar{G}$ . Proveu que el seu ordre és  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Comproveu que per a  $k = 4, 5$  hi ha grafs autocomplementaris.
- (c) Proveu que, si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , i  $G$  és un graf autocomplementari d'ordre  $n$ , aleshores té un nombre senar de vèrtexs de grau  $(n-1)/2$ .
- (d) Proveu que un graf autocomplementari té diàmetre 0, 2 o 3.

**Problema 6:** Considereu el graf d'ordre  $n > 2$  que té per vèrtexs  $V = \binom{[n]}{k}$ , per un  $k$  entre 1 (inclòs) i  $n/2$  (no inclòs), i té per arestes  $E = \{uv : u \cap v = \emptyset\}$ . Determineu l'ordre, la mida i el grau dels vèrtexs de  $G$ . Per a  $n = 5$ ,  $k = 2$  dibuixeu el graf que s'obté. Proveu que, per a  $k > n/3$ , el graf no té triangles.

**Problema 7:** Una seqüència  $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  d'enters és gràfica si hi ha un graf  $G$  amb  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $d_i = d(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Proveu que la seqüència

$$1 \leq k = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$$

és gràfica si i només si, la seqüència

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \dots, d_n$$

és gràfica.

**Problema 8:** Determineu quina de les seqüències és gràfica: (a)  $(3,3,2,2,2)$ ; (b)  $(4,4,3,2,1)$ ; (c)  $(4,3,2,2,2)$ ; (d)  $(3,3,3,2,2)$ ; (e)  $(3,3,3,3,2)$ ; (f)  $(5,3,2,2,2)$ .

**Problema 9:** Considerem el graf complet  $K_n$  amb conjunt de vèrtexs  $[n]$ . Calculeu el nombre de subgrafs de mida 5 que contenen exactament dos triangles.

**Problema 10:** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n \geq 1$  i mida  $m$  que no té triangles.

- (a) Demostreu que si  $u$  i  $v$  són vèrtexs de  $G$  adjacents, aleshores  $d(u) + d(v) \leq n$ .
- (b) Proveu que si  $n = 2k$ , aleshores  $m \leq k^2$ .
- (c) Proveu que  $m \leq n^2/4$ .

**Problema 11:** L'excentricitat d'un vèrtex  $v$  en un graf connex  $G$  és la màxima distància de  $v$  a un altre vèrtex de  $G$ . El radi  $r(G)$  de  $G$  és la mínima excentricitat dels seus vèrtexs. Proveu que  $r(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2r(G)$ . Proveu que les desigualtats són justes.

**Problema 12:** Sigui  $G$  un graf connex. Proveu que, si  $l$  és la llargada màxima d'un camí, dos camins de llargada  $l$  intersequen en algun vèrtex.

**Problema 13:** Doneu les matrius d'adjacència i d'incidència (amb una ordenació adequada dels vèrtexs i de les arestes) de cadascun dels següents grafs.

- (a) El graf complet  $K_4$ .
- (b) El camí  $P_5$ .
- (c) El cicle  $C_6$ .
- (d) El graf bipartit complet  $K_{3,3}$ .

**Problema 14:** Sigui  $G$  un graf amb conjunt de vèrtexs  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i sigui  $A$  la seva matriu d'adjacència, amb els vèrtexs ordenats segons els subíndexs. Demostreu les afirmacions següents.

- (a) Si  $J$  és la matriu quadrada d'ordre  $n$  amb totes les entrades iguals a 1,  $(AJ)_{i,i} = d(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- (b) La traça de  $A^2$  és el doble de la mida de  $G$ .
- (c) La traça de  $A^3$  és  $6t$ , on  $t$  és el nombre de triangles que hi ha a  $G$ .

## 2 Arbres

En aquest apartat apareixen problemes relacionats amb les propietats dels arbres, seqüències de Prüfer, arbres binaris, ...

**Problema 15:** Un graf acíclic és un bosc. Proveu que si  $F$  és un bosc, cada component connexa és un arbre, i si  $F$  té  $n$  vèrtexs i  $k$  components aleshores té  $n - k$  arestes.

**Problema 16:** Proveu que els boscos són els únics grafs tals que cada subgraf connex és un subgraf induït.

**Problema 17:** Sigui  $T$  un arbre de  $n$  vèrtexs.

(a) Proveu que el nombre de fulles és  $2 + \sum_{v:d(v) \geq 3} (d(v) - 2)$ .

(b) Proveu que el nombre de fulles és almenys  $\Delta(T)$ .

**Problema 18:** Proveu que un graf  $G$  amb grau mínim  $\delta = \delta(G)$  conté com a subgrafs tots els arbres de  $\delta + 1$  vèrtexs.

**Problema 19:** Proveu que el camí  $P_n$  és l'únic arbre amb dues fulles i l'estrella  $K_{1,n-1}$  és l'únic arbre amb  $n - 1$  fulles. Quants arbres no isomorfs hi ha amb tres fulles? I amb  $n - 2$  fulles?

**Problema 20:** Un vèrtex  $v$  d'un graf connex  $G$  és central si la seva excentricitat és el radi de  $G$ . Proveu que un arbre té un o dos vèrtexs centrals.

**Problema 21:** Sigui  $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  una seqüència d'enters. Proveu que existeix un arbre  $T$  amb  $V(T) = \{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $d(v_i) = d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  si i només si  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n - 1)$ .

**Problema 22:** Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents dels grafs següents.

(a) El cicle d'ordre  $n \geq 3$ .

(b) El graf bipartit complet  $K_{2,r}$ ,  $r \geq 1$ .

(c) El graf  $G = ([4], \{13, 14, 23, 24, 34\})$ .

(d) El graf  $G = ([5], \{12, 13, 23, 25, 34, 35, 45\})$ .

(e) El graf  $G = ([6], \{12, 13, 23, 34, 45, 46, 56\})$ .

**Problema 23:** Determineu la seqüència de Prüfer dels arbres següents.

(a)  $T = ([5], \{12, 13, 24, 35\})$ .

(b)  $T = ([6], \{12, 13, 14, 15, 56\})$ .

(c)  $T = ([8], \{12, 13, 14, 18, 25, 26, 27\})$ .

(d)  $T = ([15], \{12, 13, 23, 34, 45, 46, 56\})$ .

**Problema 24:** Determineu els arbres que tenen seqüència de Prüfer:

(a)  $(1, 2, 3, 4)$ .

(b)  $(2, 2, 4, 1, 3)$ .

(c)  $(4,5,1,4,1,5)$ .

(d)  $(11,7,11,9,5,5,2,2,1,1)$ .

**Problema 25:** Calculeu el nombre d'arbres diferents amb conjunt de vèrtexs  $V = [11]$  tals que tenen un vèrtex de grau 4, dos vèrtexs de grau 3, dos vèrtexs de grau 2 i sis vèrtexs de grau 1.

**Problema 26:** Sigui  $T$  un arbre binari, és a dir, té un vèrtex  $v$  arrelat i cada un dels vèrtexs té 0 o 2 fills. Un vèrtex d'un arbre binari és intern si té dos fills.

(a) Quantes fulles d'un arbre binari amb  $t$  vèrtexs interns.

(b) Quants arbres binaris (no ordenats) hi ha amb  $n$  vèrtexs.

(c) Quants arbres binaris ordenats hi ha amb  $n$  vèrtexs.

### 3 Cicles i circuits

*Problema 22:*

Solució:

## 4 Aparellaments

***Problema 22:***

**Solució:**

## 5 Coloració

*Problema 22:*

Solució:

*Problema 22:*

Solució:

*Problema 22:*

Solució:

*Problema 22:*

Solució:

*Problema 22:*

Solució:

*Problema 22:*

Solució: