Problemes d'Estructures algebraiques

Aleix Torres i Camps

Jordi Guardia (jordi.guardia-rubies@upc.edu), Anna Rio i Santi Molina
(Martí Oller)

Problema 1. Sigui $d \in \mathbb{Z}$ un enter $d \cong 1 \pmod 4$. Sigui $w = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d}) \in \mathbb{C}$. Demostreu que el conjunt $\mathbb{Z}[w] = \{a + bw : a, b \in \mathbb{Z}\}$ és un subanell de $\mathbb{C}$.

Solució. Per demostrar el que ens demanen cal comprovar tres propietats. Veure que conté $1_{\mathbf{C}}$ i que és tancat per la resta surt de la PC, PA i PD. Per comprovar que és tancat per la multiplicació, veiem que $w^2 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{d})^2 = [d = 4k + 1] = k + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4k + 1}) = k + w$. Llavors quan multipliquem dos elements de $\mathbb{Z}[w]$ ens queda una part entera i un enter multiplicat per w, així que acaba sent un element de $\mathbb{Z}[w]$. $\square$

Problema 2. Sigui $\zeta = e^{2\pi i/5}$ i considereu el conjunt $\mathbb{Z}[\zeta] = \{a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 : a_i \in \mathbb{Z}\}$. Demostreu que és un subanell de $\mathbb{C}$.

Solució. Està clar que $1_{\mathbb{C}}$ pertany a $\mathbb{Z}[\zeta]$ i que és tancat per la suma. Ara, per veure que és tancat per la suma només cal notar que $\zeta^5 = 1_{\mathbb{C}}$, aleshores quan es multipliquin tots per tots, la màxima potència que surt és 4. $\square$

Problema 3. Demostreu que, donat $\alpha \in \mathbb{Q}$, el conjunt de polinomis que s'anul·len en α és un ideal de $\mathbb{Q}[x]$.

Solució. Sigui A aquest conjunt que volem veure que és un ideal. Els seus elements són multiples de $(x - \alpha)$ o, el que és el mateix, $(x - \alpha)$ els divideix.

Ara, $\forall u, v \in A$ i $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$, tenim que $\alpha u + \beta v$ és divisible per $(x - \alpha)$ perquè tant u com v ho són i tant α com β no afecten. $\square$

Problema 4. Sigui $\mathfrak{a}$ un ideal de l'anell A. Demostreu que $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) = \{a \in A : ax = 0 \forall x \in \mathfrak{a}\}$ és un ideal d'A. S'anomena *anul·lador* d'$\mathfrak{a}$.

Solució. Ara, $\forall u, v \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ i $\forall \alpha, \beta \in A$, tenim que $\alpha u + \beta v$ quan el multipliquem per qualsevol element de $\mathfrak{a}$, com que la multiplicació és distributiva i commutativa quan fem au i av ens donarà 0_A perquè s'anul·len. Així que la combinació lineal també s'anul·len. $\square$

Problema 5. Un element a d'un anell s'anomena nilpotent si $a^n = 0$ per algun $n \geq 1$. Demostreu que el conjunt de tots els elements nilpotents d'una anell és un ideal. S'anomena *radical* de l'anell.

Solució. Siguin $u, v \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ i $\alpha \in A$. Tenim que $(\alpha u)^n = \alpha^n\ u^n = 0$, per n que fa $u^n = 0$. Ara, si m és l'enter que fa $v^m = 0$, anem a comprovar que $(u + v)^{n+m} = 0$. En efecte:

$$(u+v)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} u^i v^{n+m-i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n+m}{i} u^i v^{n+m-i} + \sum_{i=m}^{m+n} \binom{n+m}{i} u^i v^{n+m-i} =$$

$$= v^m (\sum_{i=0}^{n} \binom{n+m}{i} u^i v^{n-i}) + u^n \sum_{i=n+1}^{m+n} \binom{n+m}{i} u^{i-n} v^{n+m-i} = 0 + 0 = 0$$

$\square$

Problema 6. Demostreu que la suma d'un element nilpotent i una unitat d'una anell és una altra unitat.

Solució. Sigui n l'element nilpotent i k el primer enter positiu tal que $n^k = 0$ i sigui $\square$

Problema 7. Siguin $\zeta = e^{2\pi i/5}$ i $k \in \mathbb{Z}$. Considereu l'apliacació:

$$f : \mathbb{Z}[\zeta] \to \mathbb{Z}[\zeta]$$
$$f(\sum_i (a_i\zeta^i)) = \sum_i a_i\zeta^{ki}$$

Demostreu que és un morfisme d'anells.
Solució. Clarament envia 1 a 1, perquè no té potencies (de fet envia qualsevol enter a ell mateix).

La suma es comprova amb fàcilment agrupant i separant termes amb la propietat distributiva, associativa i commutativa.

Pel producte, fem la multiplicacio i factoritzem. $\square$

Problema 8. Siguin K un cos i $\alpha \in K$. Considereu l'aplicació:

$$\varphi_\alpha : K[x] \to K$$
$$f \to \varphi_\alpha(f) = f(\alpha)$$

és un morfisme exhaustiu d'anells. Concloeu que $K[x]/(x-\alpha)$ és isomorf a K.

Solució. Que el φ_α envia 1 a 1 està clar. La suma i producte està clar perquè l'evaliació de suma i producte de polinomis és, per definició, el producte i suma de les evaluacions.

L'exhaustivitat es fàcilment comprovable perquè $\forall a \in K$, el polinomi constant $p(x) = a$ està en la seva antiimatge.

Pel primer teorema d'isomorfisme, tenim que $K[x]/\ker f \cong K$, llavors voolem demostrar que $\ker f = (x-\alpha) = \{p(x)(x-\alpha)\}$. Clarament, l'ideal està dins del nucli perquè evaluant a α dona 0. I tot element del nucli, al ser evaluat a α dona 0, per tant, $p(x)$ té un factor α i llavors es divisible per $(x-\alpha)$ i $p(x)$ estarà en l'ideal de $(x-\alpha)$.

Alternativament, i millor, aquesta última inclusió es pot veure definint $q(x) = q(x+\alpha)$ veien que $q(0) = 0$ i, per tant, que no té coeficient constant, treient-lo per factor comú i tornant a p amb $p(x) = q(x-\alpha)$. $\square$

Problema 9. Volem veure que es pot racionalitzar totes les fraccions de la forma

$$\frac{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}{c + d\sqrt[3]{2} + e\sqrt[3]{4}},\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$$

1. Demostreu que l'ideal de $\mathbb{Q}[x]$ generat pel polinomi $x^3 - 2$ és maximal.
2. Definiu un epimorfisme entre $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.
3. Concloeu que $\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}$ és un cos.

Solució.

1. Si volem veure que (x^3-2) és maximal, cal veure que no existeix un polinomi p tal que $(x^3-2) \subsetneq (p) \subsetneq \mathbb{Q}[x]$, perquè tots els ideals de l'anell de polinomis són generats per un element (perquè és principal). Ara bé, com que $(x^3-2) \subsetneq (p)$ implica que $p | x^3 - 2$ perquè (p) ha de contenir $x^3 - 2$. Però com que $x^3 - 2$ és irreductible això és impossible i hem acabat. En general, en els anells principals, els ideals generats per elements irreductibles són maximals.

2. Primer cal veure que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ és un anell, està clar perquè és tancat per suma (fent factor comú), per la multiplicació (perquè a partir de terceres potències torna a 2). I després que el morfisme φ que agafa un polinimi $p(x)$ de $\mathbb{Q}[x]$ i l'evalua a $\sqrt[3]{2}$ és realment un morfisme (perquè l'1 va a l'1, la suma i el producte es comporten bé). I és exhaustiu perquè amb els polinomis $a + bx + cx^2$ en fem prou. El nucli de φ és $\ker \varphi = (x^3 - 2)$, perquè el polinomi més petit que conté l'arrel $\sqrt[3]{2}$ és aquest.

3. Pel primer teorema d'isomorfisme, tenim que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}/(x^3 - 2)$, i com que $(x^3 - 2)$ és maximal implica que el quocient és un cos.

$\square$

Problema 10. *Teorema xinès dels residus.* Dos ideals I, J d'un anell $\mathbb{A}$ es diuen *coprimers* (o *comaximals*) si $I + J = \mathbb{A}$. Sigui $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/I \times \mathbb{A}/J$ el morfisme que té per components les projeccions canòniques: $\varphi(x) = ([x]_I, [x]_J)$. Demostreu que:

1. Si I i J són coprimers aleshores $IJ{=}I \bigcap J$;

   INDICACIÓ: Existeixen $u \in I$ i $v \in J$ amb $u + v = 1$.

2. Si I i J són coprimers aleshores per a tot parell d'elements $a, b \in \mathbb{A}$ existeix un element $x \in \mathbb{A}$ tal que $x \equiv a \pmod{I}$ i $x \equiv b \pmod{J}$, i la classe d'aquest element mòdil IJ queda unívocament determinada.

3. φ és exhaustiu si, i només si, I i J són coprimers.

4. Si I i J són coprimers aleshores $\mathbb{A}/IJ \simeq \mathbb{A}/I \times \mathbb{A}/J$.

Solució.

1. $\subset$ Si tenim una combinació del producte $\sum u_i v_j$ com que, les u_i pertanyen a I, llavors $u_i v_j$ segueix en I i fent la suma segueix en I. Simétricament també pertany a J.

   $\supset$ Primer veiem que $\exists u \in I, v \in J$ tal que $u + v = 1$, que vé del fet que són coprimers. De fet, és un sí i només sí. Sigui $x \in I \bigcap J$, llavors $x = x(u + v) = xu + xv$, per pertanyenses d'aquests elements, tenim que $xu, xv \in I \cdot J$, llavors la suma pertany al producte.

2. $x = a + \alpha = b + \beta$, on $\alpha \in I$ i $\beta \in J$, llavors volem $a - b = \beta - \alpha$ que és la resta d'un element de J i un de I, que al ser I i J coprimers es pot fer. Més concretament, utilitzant u i v d'abans. $a - b = (a - b)u + (a - b)v$, per tant, $x = a - (a - b)u = b + (a - b)v$.

   Sigui x' un altre element amb les mateixes congruencies que x, llavors, $x - x' \in I, J$ i, per tant, $x - x' \in I \bigcap J = IJ$, alehsores tenen el mateix módul.

3. a

4. a

$\square$

Problema 11. Demostreu que un ideal $\mathfrak{p}$ és primer si, i només si, $IJ \subseteq \mathfrak{p} \iff I$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$, per a tot parell d'ideals I, J.

Solució. Suposem $\mathfrak{p}$ és primer.
$\Longleftarrow$) Si $I \subset \mathfrak{p} \implies IJ \subset \mathfrak{p}$, amb J igual.

$\Longrightarrow$) Suposem que $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ i suposem que ni I ni J estan dintre de $\mathfrak{p}$. Llavors existeix $a \in I \setminus \mathfrak{p}$ i $b \in I \setminus \mathfrak{p}$. Però llavors, $ab \in IJ \subseteq \mathfrak{p}$, però per $\mathfrak{p}$ primer tenim que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$, que contradiu la primera suposició, per tant, o $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $j \subseteq \mathfrak{p}$. $\square$

Problema 12. Sigui $I \subset \mathbb{A}$ un ideal d'una anell $\mathbb{A}$.

1. Comproveu que $I[X] = \{\sum a_i X^i : a_i \in I\}$ és un ideal de l'anell de polinomis $\mathbb{A}[X]$.

2. Demostreu que I és primer si, i només si, $I[X]$ també ho és, però que tant si I és maximal com si no, $I[X]$ no ho és mai.
3. Demostreu que $\mathbb{A}[X]/I[X] \simeq (\mathbb{A}/I)[X]$.

Solució.

1. Com sempre, tancat per la suma i multiplicació i tot plegat.
2. Es pot fer a partir de l'apartat 3, per tant, suposem que l'apartat 3 està demostrat. Ara, per $(x) + I[x]$.
3. Ens definim $\varphi : A[x] \to (A/I)[x]$, que envia $\sum_n a_n X^n$ a $\sum_n \bar{a_n} X^n$. Clarament és exhaustiu perquè recull totes les classes. Ara $\ker\varphi = I[x]$, perquè és la classe del 0. I, pel primer teorema d'isomorfisme, $\frac{A[x]}{I[x]} \simeq (A/I)[x]$.

$\square$

Problema 13. Un anell *local* és un anell que té un únic ideal maximal. Sigui $I \subseteq \mathbb{A}$ un ideal propi. Demostreu que:

1. Si $\mathbb{A} \setminus I \subseteq \mathbb{A}^*$ aleshores $\mathbb{A}$ és local i I és el seu ideal maximal.
2. Si I és maximal i $1 + I = \{1 + x : x \in I\} \subseteq \mathbb{A}^*$ aleshores $\mathbb{A}$ és local.

Solució.

1. Anem a veure que I és maximal. Suposem que existeix J tal que $\mathbb{A} \subsetneq J \subsetneq I$, llavors existeix $x \in J \smallsetminus I \subseteq \mathbb{A} \smallsetminus I \subset \mathbb{A}^*$. Llavors x és ínvertible i per tant, $J = \mathbb{A}$ perquè al multiplicar pel seu invers donaria 1 i a partir de 1, genera tot l'anell.

   Anem a veure que $\mathbb{A}$ és local. Sigui J un altre ideal maximal. Per tant, $x \in J \smallsetminus I \subset \mathbb{A} \smallsetminus I \subset \mathbb{A}^*$ i,igual que abans, $J = \mathbb{A}$, per tant no és maximal sino el total.
2. Suposem I maximal i que $1 + I \subset \mathbb{A}^*$, anem a veure que $\mathbb{A}$ és local fent servir l'apartat anterior. Sigui $x \in \mathbb{A} \smallsetminus I$, llavors l'ideal $I + (x)$ és el total, perquè inclou sense igualtat a I però aquest és maximal. Llavors, qualsevol element d'$\mathbb{A}$ es pot posar com a suma d'un element de I i un de (x), com $1 = v + ux$ llavors, $xu = 1 - v \in 1 + I \subset A^*$, llavors x és invertible i, per tant $A \smallsetminus I \subset \mathbb{A}^*$ i per l'apartat anterior, $\mathbb{A}$ és local.

$\square$

Problema 14. Demostreu que tot domini d'integritat finit és un cos. Deduïu que en un anell finit tot ideal primer és maximal.

Problema 15. Sigui $\mathbb{A}$ un anell factorial. Siguin $u, v \in \mathbb{A}$ amb $\gcd(u, v)$=1. Demostreu que si $uv = a^n$ amb $a \in \mathbb{A}$ aleshores existeixen $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ tals que $u \sim \alpha^n$, $v \sim \beta^n$ i $\alpha^n\beta^n = a^n$.

Problema 16. Sigui d un enter lliure de quadrats amb $d \equiv 2, 3 \pmod 4$. Demostreu que l'anell $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ no és factorial.

Indicació: Demostreu que 2 és irreductible però no és primer.

Problema 17. Demostreu que els anells següents són euclidians amb les normes donades:

1. Els enters $\mathbb{Z}$, on $\delta(n)$ és el nombre de dígits en la representació en base 2 de $|n|$ (per exemple, $\delta(-6) = 3$ ja que 6 és 110 en base binària).
2. L'anell $\mathbb{Q}[X]$, on $\delta(f) = 2^{\deg f}$.
3. L'anell $\mathbb{Q}[[X]]$, on $\delta(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i)$ és el i més petit tal que $a_i \neq 0$.

Problema 18. *Enters de Gauss.* Comproveu que l'anell $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ és euclidià amb la norma definida com $N(a + bi) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Problema 19. Siguin $p \equiv 3 \pmod 4$ un nombre primer. Demostreu que existeix un enter de Gauss de norma p.

Problema 20. Sigui $p \equiv 1 \pmod 4$ un nombre primer. Demostreu que existeix un enter de Gauss de norma p.

INDICACIO: Sigui $u \in \mathbb{Z}$ un enter tal que $u^2 \equiv -1 \pmod p$ (per què existeix?). Agafeu tots els enters de la forma $a + bu$ amb $0 \leq a, b < \sqrt{p}$, demostreu que n'hi ha dos que són congruents mòdul p i considereu la seva diferència.

Alternativa: amb el mateix u d'abans considereu $\gcd(u + i, p)$ a $\mathbb{Z}[i]$.

Problema 21. Comproveu que els elements de $\mathbb{Z}[i]$ següents són primers:

1. $\pi_2 = 1 + i$ és un primer de norma 2.
2. Per a cada primer enter $p \equiv 1 \pmod 4$ hi ha dos primers diferents (no associats) conjugats: $\pi_p = a + bi$ i $\bar{\pi_p} = a - bi$, que tenen norma p;
3. Tot primer enter $q \equiv 1 \pmod 4$ és també un primer a $\mathbb{Z}[i]$, de norma q^2,

i que tot primer de $\mathbb{Z}[i]$ és associat d'algun d'ells.

Problema 22. Trobeu la factorització en primers de $2067 + 312i$ a $\mathbb{Z}[i]$.

Problemes complementaris

Problema 23. Comproveu que el conjunt $\mathcal{P}(X)$ de les parts d'un conjunt X, amb la "suma"definida com la *diferència simètrica* $A + B := A \triangle B = (A \bigcup B)$ i el "producte"definit com la intersecció $A \cdot B = A \bigcap B$ és un anell commutatiu.

Problema 24. Siguin I, J dos ideals d'un anell A. Demostreu que els conjunts:

$$I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$$
$$IJ = A\langle ab : a \in I, b \in J\rangle$$

són ideals d'A. Doneu un exemple en el qual $I \bigcup J$ no sigui un ideal.

Problema 25. Els ideals $I_1, \cdots, I_k$ d'un anell $\mathbb{A}$ es diuen coprimers si $\sum I_i = \mathbb{A}$ i coprimers dos a dos si $I_i + I_j = \mathbb{A}$ per a tot $i \neq j$. Sigui $\varphi : \mathbb{A} \to \prod \mathbb{A}/I_i$ l'homeomorfisme que té per components les proheccions canòniques. Demostreu que:

1. si $I_1, \ldots, I_k$ són coprimers dos a dos aleshores cada I_i és coprimer amb $\prod_{j \neq i} I_j$;
2. si $I_1, \ldots, I_k$ són coprimers dos a dos aleshores $\prod I_i = \bigcap I_i$;
3. si els I_i són coprimers dos a dos alehsores, donats elements $a_i \in \mathbb{A}$ existeix un element $x \in \mathbb{A}$ tal que $x \equiv a_i \pmod{I_i}$ per a tot i, i aquest element queda unívocament determinat llevat elements de $\prod I_i$.
4. φ és exhaustiu si, i només si, els I_i són coprimers dos a dos;
5. si els I_i són coprimers dos a dos aleshores $\mathbb{A}/\prod I_i \simeq \prod \mathbb{A}/I_i$.

Enuncieu i demostreu un resultat anàleg al del punt 2 que valgui per a ideals I_i, arbitraris.

Problema 26. *Teorema xinès a* $\mathbb{Z}$. Siguin $n_1, \cdots, n_k$ enteres positius coprimers dos a dos; o sigui $\gcd(n_1, n_2)$=1 per a tot $i \neq j$. Donats k enters $a_1, \cdots, a_k$, demostreu que existeix un enter $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \equiv a_i \pmod{n_i}$ per a tot i, i que aquest enter està unívocament determinat mòdul el producte $n_1 n_2 \cdots n_k$. Proveu que aquest x es pot expressar com

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i M_i N_i$$

on $N_i = N/n_i$ i M_i és un enter tal que $M_i N_i + m_i n_i = 1$, amb $m_i \in \mathbb{Z}$.

Problema 27. Determineu les unitats de l'anell $K[[x]]$ de sèries de potències amb coeficients en un cos K. Descriviu el cos de fraccions d'aquest anell.

Problema 28. Sigui $\mathbb{A}$ un anell commutatiu. Un element $e \in \mathbb{A}$ es *idempotent* si $e^2 = e$. Dos idempotents e_1, e_2 es diuen *ortogonals* si $e_1 e_2 = 0$.

1. Demostreu que si e és un idempotent aleshores $1 - e$ també ho ésm i tots dos són ortogonals.
2. Sigui e un idempotent. Demostreu que l'ideal principal $\langle e \rangle = e\mathbb{A}$ és un anell amb les mateixes operacions de $\mathbb{A}$ està generat per algun idempotent.
3. Demostreu que tot ideal principal de $\mathbb{A}$ que sigui també un anell amb les operacions de $\mathbb{A}$ està generat per algun idempotent.
4. Comproveu que, al producte cartesià $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ de dos anells, els elements (1,0) i (0,1) són idempotents ortogonals.
5. Demostreu que dos idempotents e_1, e_2 amb $e_1 + e_2 = 1$ indueixen un isomorfisme d'anells $\mathbb{A} \simeq e_1\mathbb{A} \times e_2\mathbb{A}$.
6. Trobeu tots els idempotents de $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ i doneu totes les descomposicions d'aquest anell com a producte cartesià de dos anells, llevat d'isomorfisme.
7. Enunciеu un resultat que relacioni les descomposicipns $\simeq \mathbb{A}_1 \times \cdots \times \mathbb{A}_n$ d'un anell com a producte cartesià d'anells amb idempotents ortogonals de l'anell.

Problema 29. Demostreu que el radical d'un anell és la intersecció de tots els ideals primers de l'anell.

Problema 30. *Radical d'un ideal.* Sigui $I \subseteq \mathbb{A}$ un ideal. El seu radical es defineix com

$$\mathrm{Rad}(I) = \{a \in \mathbb{A} : \exists n \geq 1, a^n \in I\}$$

1. Comproveu que $\mathrm{Rad}(I)$ és un ideal.
2. Calculeu $\mathrm{Rad}(n\mathbb{Z})$ a l'anell $\mathbb{Z}$.
3. Demostreu que:
   (a) $I \subseteq R(I)$;
   (b) Rad(Rad(I))=Rad(I);
   (c) $\mathrm{Rad}(I \bigcap J) = \mathrm{Rad}(I) \bigcap \mathrm{Rad}(J)$;
   (d) $\mathrm{Rad}(I + J) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(I) + \mathrm{Rad}(J))$;
   (e) $\mathrm{Rad}(I^n) = \mathrm{Rad}(I)$;
   (f) $\mathrm{Rad}(I) = \mathbb{A} \iff I = \mathbb{A}$;
   (g) si $\mathfrak{p}$ és primer, $\mathrm{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

Problema 31. Sigui $\mathbb{A}$ un anell íntegre i $\mathbb{K}$ el seu cos de fraccions. Sigui $\mathfrak{p} \subset \mathbb{A}$ un ideal primer.
Demostreu que:

1. $\mathbb{A}_\mathfrak{p} := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{A}, b \notin \mathfrak{p}\} \subseteq K$ és un subanell de $\mathbb{K}$ que conté a $\mathbb{A}$;
2. $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{A}_\mathfrak{p} : a \in \mathfrak{p}\} \subseteq \mathbb{A}_\mathfrak{p}$ és l'ideal maximal de $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$;
3. $\mathbb{A} = \bigcap_\mathfrak{m} \mathbb{A}_\mathfrak{m}$ on la intersecció es fa sobre tots els ideals maximals $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{A}$.