Apunts d'Equacions diferncials ordinàries

ALEIX TORRES I CAMPS

PAU MARTÍN (P.MARTIN@GMAIL.COM), MARCEL GUARDIA I RAFAEL RAMÍREZ

1 Tema 1: Introducció i definicions bàsiques

Definició 1. Una equació diferencial és una equació que involucra una funció incógnita i les seves derivades.

Exemple 1. Alguns exemples d'equacions diferencials:

1. $y(x), x \in \mathbf{R}$ amb $y''(x) - y(x) = 0$

2. $y''(x) = -sin(y(x))$

3. $y''(x) = -sin(y(x)) + cos(x)$

4. $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ on la incògnita és una funció de dues variables $z(x, y)$.

Definició 2. Una e.d.o. és una equació diferencial de la forma:

1. Forma implícita: $g(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ on la incògnita és una funció $y(x) = (y_1(x) \ldots y_m(x))^t$ d'una variable unidimensional x. Per tant, $g : U \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^m)^{n+1} \to \mathbf{R}^m$.
2. Forma explícita: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{n-1}(x))$. Ara $f : V \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^m)^n \to \mathbf{R}^m$

Nota 2. *A partir d'ara treballarem amb només la forma explícita. La qual abreviarem com* $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{n-1})$

Definició 3. Direm que $\phi : (a, b) \to \mathbf{R}^m$ és una solució si ϕ és n vegades derivable i:

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)), \forall x \in (a, b)$$

Implícitament demantarem que:

$$\{(x, \phi(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)) | x \in (a, b)\} \subset Domf$$

La solució general és el conjunt de totes les seves solucions.

Definició 4. Es diu que l'e.d.o. $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ on $y = (y_1 \cdots y_m)^t$ és un sistema d'e.d.o's de m components, d'ordre n.

Nota 3. *Sigui* $y = (y_1 \ \cdots y_m)$*, aleshores,* $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, t^{(n-1)})$ *és equivalent a un sistema de* $n \times m$ *e.d.o.'s d'ordre 1.*

Demostració. En efecte, sigui $z_1 = y$ (vector de m components), $z_2 = y', \cdots, z_n = y^{(n-1)}$. Per tant, a $z = (z_1, \cdots, z_n)^t$ hi ha un total de $n \times m$ components.

Com que $z_1' = (y)' = y' = z_2$ i, anar fent, $z_{n-1}' = (y^{n-2})' = y^{(n-1)} = z_n$ i $z_n' = (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = f(x, z_1, \ldots, z_n)$. Ens queda l'e.d.o. $z' = g(x, z)$ que realment acaba sent $(z_1' \ z_2' \ \cdots \ z_n')^t = (z_2 \ z_3 \ \cdots \ z_n \ f(x, z_1, \cdots, z_n))^t$. ☐

Exemple 4. $y'' = -sin(y)$. Aleshores, $z_1 = y$ i $z_2 = y'$. Podem prendre per sistema d'equacions $z_1' = z_2$ i $z_2' = -sin(z_1)$.

1.1 Sistemes autònoms i no autònoms

Definició 5. Direm que una e.d.o. és autònoma si és de la forma $y' = f(y)$ (equació que no depen de x). Direm que un sistema es no autònom si $y' = f(x, y)$.

Proposició 6. *Siguin $y' = f(y)$ una e.d.o autònoma i $\phi : (a, b) \to \mathbf{R}^n$ una solució. Llavors, $\forall x \in \mathbf{R}$ i $\phi_\alpha : (a + \alpha, b + \alpha) \to \mathbf{R}^n$ per $x \to \phi(x - \alpha)$ també és solució.*

Demostració. En efecte: $\phi'_\alpha(x) = \phi'(x - \alpha) = f(\phi(x - \alpha)) = f(\phi_\alpha(x))$.

Nota 5. *Podem transformar el sistema d'ordre 1 i n incògnites d'e.d.o's no autònom $y' = f(x, y)$, en un sistema d'e.d.o's autónom d'ordre 1 i $n + 1$ incògnites.*

Demostració. En efecte, fem $z_1 = x$ i $z_2 = y$. Aleshores, amb $z = (z_1\ z_2)^t$ compleix que $z' = (z'_1\ z'_2)^t = (1\ f(x, y))^t = (1\ f(z))^t = F(z)$, que és un e.d.o. d'ordre 1 amb $n + 1$ incògnites. □

1.2 Problema de Cauchy o problema de valors inicials

Definició 7. Sigui $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ un obert i $f : U \to R^n$ una funció. Sigui $(x_0, y_0) \in U$. Anomenarem problema de Cauchy o problema de valor inicial (p.v.i) a trobar una solució de

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Exemple 6. Alguns exemples de problemes de Cauchy.

1. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(0) = 1$. Escollint $\phi(x) = e^x$ és una solució, ja que si derivem ens dona ella mateixa i si l'igualem a 0 dona 1.
2. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(x_0) = y_0$. Escollint $\phi(x) = y_0 e^{x - x_0}$ és solució, ja que si derivem dona ella mateixa i compleix el valor inicial.

   Pregunta: Les solucions que hem trobat són totes les possibles? N'hi ha més?
3. $yy' - x = 0$ i $y(0) = 0$. Solucions: $\phi_{+-}(x) = +-x$ en són solució, substituint es veu.
4. $yy' + x = 0$ i $y(0) = 0$. No té cap solució.

1.3 Interpretació geomètrica d'una e.d.o

Sigui $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $(x, y) \rightarrowtail f(x, y)$. $y' = f(x, y)$ i $\phi : (a, b) \to \mathbf{R}$ nés solució si $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$. El que diu és si existeix una funció ϕ, el pendent de la seva gràfica seguix $f(x, \phi)$.

1.4 Exemples importansts

Exemple 7. Equació d'una molla elàstica (oscil·lador harmònic):

$$my'' = -k^2 y$$

On y és el desplaçament respecte la posició d'equilibri.

Exemple 8. Pendol de longitud l sota un camp gravitatori constant el qual exerceig una força mg.

$$m\theta'' l = -mg \sin\theta \iff \theta'' = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

On θ és l'angle del pendol respecte la vertical.

Exemple 9. Model SIR. S és el nombre de persones subceptibles, I infectats i R persones que deixen de ser de la resta tant perquè es curen com perquè moren. $N = S + I + R$

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{\beta}{N} SI \\ I' &= \frac{\beta}{N} SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

Exemple 10. n cossos a l'espai de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ submessos a la seva mutua atracció gravitatòria. q_i és la posició del cos i en un sistema de referència.

$$m_i q_i'' = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{||q_j - q_i||^3} (q_j q_i)$$

Exemple 11. E.d.o's de famílies de corbes.

Considerem la següent família de corbes: $x^2 + y^2 = r^2$, per $r \in \mathbf{R}$. Tinc les solucions i m'interessa buscar la e.d.o. que la tingui per solució. Si $y = y(x)$, derivant respecte a x: $2x + 2yy' = 0$ o simplificant $y'y + x = 0$, o també $y' = -\frac{x}{y}$.

Família ortogonal. Té el pendent ortogonal, $y' = -\frac{1}{-\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$. Té per solució $y(x) = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercici: Trobeu l'e.d.o de la família de corbes $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$. I la família de corbes ortogonals.