# Problemes de teoria de la probabilitat

Aleix Torres i Camps

Anna de Mier (anna.de.mier@upc.edu), Guillem Perearnau i Sonia Perez

## 1 Espais de probabilitat

**Problema 1.** *Siguin $\mathcal{A}, B$ dues $\sigma$-àlgebra sobre $\Omega$.*

a *Proveu que són tancades per interseccions numerables.*

b *Proveu que $\mathcal{A} \bigcap \mathcal{B}$ és una $\sigma$-àlgebra.*

c *Vegeu que $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$ no té perquè ser una $\sigma$-àlgebra.*

***Solució.***

1. Suposem $A_i \in \mathcal{A}$, per $i \geq 1$, volem veure que $\bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$, però com que els complementaris sí pertanyen a $\mathcal{A}$ i les unions numerables també, per les lleis de Morgan sabem que $(\bigcap_{i \geq 1} A_i)^c = \bigcup_{i \geq 1} A_i^c \in \mathcal{A}$.
2. A la intersecció hi ha el conjunt buit perquè els dos el contenen. Si tenim un element a la intersecció segur que hi ha el seu complementari perquè aquest element ha de pertanyer tant a $\mathcal{A}$ com a $\mathcal{B}$ i, com que son $\sigma$-àlgebres les dues contenen el seu complementari i, per tant, està a la intersecció.
3. Per exemple, siguin $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ i $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ dues $\sigma$-àlgebra del conjunt $\Omega = \{a, b, c\}$. (Està clar que són $\sigma$-àlgebres). Tot i així, la unió de les $\sigma$-àlgebres és el conjunt $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ que no és una $\sigma$-àlgebra perquè conté $\{a\}$ i $\{c\}$ però no conté $\{a, c\}$.

□

**Problema 2.** *Sigui $\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X$ o $\mathbb{R} \setminus X$ és finit$\}$. La família $\mathcal{A}$, és una àlgebra? i és una $\sigma$-àlgebra?*

***Solució.*** Anem a veure que és una àlgebra.

$\emptyset \in \mathcal{A}$ perquè $\emptyset$ és finit.

Suposem que $X \in \mathcal{A}$, aleshores, $X$ és finit o complementari d'un finit. Per tant, $X^c$ és el complementari d'un finit o finit, respectivament. Així que, $X^c \in \mathcal{A}$.

Suposem que $A_i \in \mathcal{A}$ per $1 \leq i \leq n$. Ara, recordem que $(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c$, llavors si totes les $A_i$ són finites, aleshores, la unió d'ells és finita i pertany a $\mathcal{A}$. Per altre banda, si hi ha algun $A_i$ que no sigui finit, el seu complementari ho ha de ser, per tant, a la intersecció com a molt, hi ha un nombre finit d'elements i, per tant, pertany a $\mathcal{A}$.

Ara, veurem un contraexemple per notar que no és una $\sigma$-àlgebra. Cada un dels naturals per separat pertanyen a $\mathcal{A}$ però la unió numerable no hi pertany perquè ni els naturals són finits ni el complementari dels naturals en els reals és finit. □

**Problema 3.** *Sigui $\mathcal{A}$ una $\sigma$-àlgebra i $B \in \mathcal{A}$. La família $\mathcal{B} = \{A \bigcap B : A \in \mathcal{A}\}$, és una $\sigma$-àlgebra?*

***Solució.*** Anem a veure que és una $\sigma$-àlgebra però del conjunt $B$.

El buit pertany a $\mathcal{B}$ perquè $\emptyset \in \mathcal{A}$ i $\emptyset \bigcap B = \emptyset$.

L'oposat d'un element $A \bigcap B$ respecte $B$ s'aconseguix amb $A^c \bigcap B$.

La unió numerable es compleix amb gràcies a les lleis de Morgan. $\bigcup(A_i \bigcap B) = (\bigcup A_i) \bigcap B$. $\square$

**Problema 4.** *Si $P(A) = 1/2$ i $P(B) = 2/3$, doneu fites superiors i infereios justes de $P(A \bigcap B)$ i de $P(A \bigcap B^c)$.*

***Solució.*** Utilitzarem que si un conjunt està inclós en una altre, el primer té una probabilitat menor o igual que el segon.

Per propietats de conjunts i de probabilitat tenim $P(A \bigcap B) = 1 - P(A^c \bigcup B^c)$. Aleshores busquem el mínim i el màxim de $P(A^c \bigcup B^c)$, el mínim es troba quan un està inclós en l'altra (prob. del gran 1/2) i el màxim quan són disjunts (prob. 1/2+1/3=5/6). Això correspon al 1 menys el màxim i al mínim de la probabilitat original. Per tant, $1/6 \leq P(A \bigcap B) \leq 1/2$.

Pel segon cas, fem el mateix però hem de fitar per sobre per 1. D'aquí: $\frac{1}{2} \leq P(A^c \bigcup B) \leq 1$. Llavors, com que $P(A \bigcap B^c) = 1 - P(A^c \bigcup)$, tenim $0 \leq P(A \bigcap B^c) \leq \frac{1}{2}$. $\square$

**Problema 5.** *En un curs hi ha quatre assignatures. El 70% dels estudiants aproven l'assignatura A, el 75% aproven l'assignatura B, el 80% aproven l'assignatura C i el 85% aproven l'assignatura D. Quin és el mínim percentatge d'estudiants que aproven les quatre assignatures?*

***Solució.*** Farem servir conceptes de probabilitat per calcular el percentatge que ens demanen. Sigui $X_A, X_B, X_C$ i $X_D$ els succesos d'aprovar les assignatures $A, B, C$ i $D$, respectivament. $P(X_A \bigcap X_B \bigcap X_C \bigcap X_D) = 1 - P((X_A \bigcap X_B \bigcap X_C \bigcap X_D)^C) = 1 - P(X_A^c \bigcup X_B^c \bigcap X_C^c \bigcap X_D^c)$. Ara, sabent que el màxim de la unió és la suma de probabilitats (i el mínim és el màxim de les probabilitats), el mínim de la probabilitat és $\min P(X_A \bigcap X_B \bigcap X_C \bigcap X_D) = 1 - \max P(X_A^c \bigcup X_B^c \bigcap X_C^c \bigcap X_D^c) = 1 - \sum_{i \in \{A,B,C,D\}} P(X_i) = 1 - 0.9 = 0.1$. $\square$

**Problema 6.** *(Problema de Chevalier de Méré, formulat a Blaise Pascal). Aquest és un dels problemes que inicià la teoria de la probabilitat. Empíricament, el Chevalier de Méré havia observat que és més probable obternir "almenys un 6"en 4 tirades d'un dau que obtenir "almenys un doble 6"en 24 tirades de dos daus. Comproveu que és efectivalemt així.*

***Solució.*** El primer cas, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0.5177....$ En el segon, $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{35}{36}^2 4 = 0.4914....$ Llavors, clarament el primer és més probable que el segon. $\square$

**Problema 7.** *(Una pregunta a De Moivre). Es tiren tres daus $n$ vegades. Calculeu la probabilitat $f(n)$ de que en alguna tirada hagin sortit tres sisos. Quin és el valor menor de $n$ pel qual és més probabli que hagin sortit tres sisos alguna de les $n$ tirades que el contrari?*

***Solució.*** Com sempre, fem el complementari perquè és més fàci. Que no hagin sortit 3 sisos té probabilitat $\frac{215}{216}$. Llavors, $f(n) = 1 - f(n)^c = 1 - \frac{215}{216}^n$ és la solució. $\square$

**Problema 8.** *Es reparteixen les 52 cartes d'una baralla entre quatre jugadors. Quina és la probabilitat que cada jugador tingui un as?*

***Solució.*** Ho anem a desgloçar de la següent manera: la forma en que es reparteixin les cartes és indiferent, així que primer repartirem al primer jugador, després al segon, després al tercer i, per últim, al quart. Formalment, sigui $A_i$, per $i = 1, 2, 3, 4$ el succés que el jugador $i$ tingui exactament un as. Llavors la probabilitat que ens demanen és (per la llei de probabilitats totals):

$$P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2, A_1)P(A_4|A_3, A_2, A_1)$$

Així que anem a calcular $P(A_1)$, hi ha 52 cartes en joc, en rep 13 i ha de tenir exactament un as (el 13 és per les maneres que hi ha de rebre l'as, és a dir, en cada una de les posicions):

$$P(A_1) = 13 \cdot \frac{4}{52} \frac{48}{51} \frac{47}{50} \cdots \frac{38}{41} \frac{37}{40} =$$

$$= 13 \frac{4 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$$

Ara, anem a calcular $P(A_2|A_1)$, queden 39 cartes en joc, en rep 13 i ha de tenir exactament un as dels 3 que queden:

$$P(A_2|A_1) = 13 \cdot \frac{3}{39}\frac{36}{38}\frac{35}{37} \cdots \frac{30}{28}\frac{29}{27} =$$

$$= 13 \cdot \frac{3 \cdot 30 \cdot 29}{\cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}$$

I, ara, calculem $P(A_3|A_2, A_1)$, quedem 26 cartes en joc, en rep 13 i ha de tenir exactament un as dels 2 que quede:

$$P(A_3|A_2, A_1) = 13 \cdot \frac{2}{26}\frac{24}{25}\frac{23}{24} \cdots \frac{14}{15}\frac{13}{14} =$$

$$= 13 \cdot \frac{2 \cdot 13}{30 \cdot 29}$$

I, per últim, tenim $P(A_4|A_3, A_2, A_1)$ que trivialment és 1, perquè queden 13 cartes amb un as. Llavors si els multpliquem tots ens queda:

$$= \frac{13^4 \cdot 24}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 0.105...$$

Que és la probabilitat que cada jugador tingui exactament un as. □

**Problema 9.** *Proveu que no és possible dos daus de forma que la suma de les seves cares superiors pugui prendre qualsevol valor de 2 a 12 amb igual probabilitat.*

***Solució.*** Sigui $X$ la suma dels dos daus, suposem que totes les sumes tenen igual probabilitat, és a dir, $P(X = 2) = P(X = 3) = \cdots = P(X = 11) = P(X = 12) = \frac{1}{11}$. Sigui $a_i$ el succés que en el primer dau sorti $i$, sigui $b_j$ el succés que en el primer dau sorti $j$. Aleshores, com $a_i$ i $b_j$ són successos independents, podem deduir que: $a_1b_1 = P(X = 2) = P(X = 12) = a_6b_6 = \frac{1}{11}$. Ara, fixem-nos que $P(X = 7) = a_1b_6 + a_6b_1 + \cdots = \frac{1}{11}$. Veiem que per passar de $a_1b_1$ a $a_1b_6$ fa falta multiplicar per $\frac{b_6}{b_1}$ i per passar de $a_6b_6$ a $a_6b_1$ fa falta multiplicar per l'invers. Aleshores, per algun dels dos es multiplica per un nombre més gran o igual que 1, mentre que l'altra és positiu. Per tant, $a_1b_6 + a_6b_1 > \frac{1}{11}$, així que $P(X = 7) > \frac{1}{11}$ i que contradiu la suposició que totes les sumes tenen igual probabilitat. □

**Problema 10.** *Proveu que si es llença dues vegades una moneda que té probabilitat de cara $p$ fins que surten dos resultats diferents, els dos possibles resultats ($C+$ i $+C$) són equiprobables.*

***Solució.*** La probabilitat que a la primera vegada que es llencen els daus surti $C+$ és $p(1 - p)$ i que surti $+C$ és $(1 - p)p$. Altrament, si surt $CC$ i $++$, es torna a tirar sense influenciar la següent tirada. Així que $P(C+ |\text{ tirades anteriors }) = P(C+)$ i similarment: $P(+C|\text{ tirades anteriors }) = P(+C)$. Per tant, els dos possibles resultats diferents són equiprovables. □

**Problema 11.** *En un grup de $n$ persones una d'elles s'assabenta d'una xafarderia. Tria una persona a l'atzar i la hi conta, aquesta en tria una a l'atzar diferent de qui li ha contat per explicar-la-hi, i així successivament: l'$r$-èssima persona en tria una a l'atzar diferent de qui li acaba de contar i la hi explica. Quina és la probabilitat que en $r$ rondes la xafarderia no hagi tornat a la persona que l'ha originada? quina és la probabilitat que en $r$ rondes la xafarderia hagi passat per $r + 1$ persones diferents?*

***Solució.*** Sigui $A_i$ el succés "a la ronda $i$ la xafardaria no torna a l'origen". Aleshores, volem saber la probabilitat: $P(A) = P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap \cdots \bigcap A_r) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_r|A_1 \cdots A_{r-1})$. En aquest cas, els succesos condicionats només ens donen informació que la xafardaria no ha tornat a l'origen i que, per tant, es mou entre els que no son el primer. Així doncs, tant $P(A_1)$ com $P(A_2|A_1)$, al no poder tornar a l'origen de cap manera, tenen probabilitat 1. Mentre que, tots els altres, tenen probabilitat $\frac{n-3}{n-2}$, perquè d'entre les $n - 2$ persones restants que els hi pot explicar, totes menys una són l'origen. Així doncs, $P(A) = (\frac{n-3}{n-2})^{r-2}$.

Sigui $B_i$ el succés "a la ronda $i$ la xafardaria no torna a una persona que ja la sabia". Aleshores, volem saber la probabilitat: $P(B) = P(B_1 \bigcap B_2 \bigcap \cdots \bigcap B_r) = P(B_1)P(B_2|B_1) \cdots P(B_r|B_1 \cdots B_{r-1})$. En aquest cas, els successos condicionats ens indiquen quantes persones saben la xafardaria. A més, com que en les dues primeres rondes no pot tornar a una persona que ja la sabia, les dues primeres probabilitats són 1. Mentre que $P(B_i|B_1 \cdots B_{i-1}) = \frac{n-i}{n-2}$, per $i \geq 2$, perquè de les $n-2$ persones a qui li pot explicar, només en queden $n-i$ que no ho sapiguen. Finalement, $P(B) = \frac{(n-3)\cdots(n-r)}{(n-2)^{r-2}}$. $\square$