Problemes d'Àlgebra Multilineal i Geometria

Aleix Torres i Camps

Pere Pascual i Enric Ventura

1 Àlgebra Multilineal

1.1 La forma de Jordan

Problema 1. *Trobeu els polinomis característic i mínim dels endomorfismes de matriu.*

$$\begin{pmatrix} 2 &&&&&& \\ 1 & 2 &&&&& \\ & 1 & 2 &&&& \\ &&& 2 &&& \\ &&& 1 & 2 && \\ &&&&& 2 & \\ &&&&& 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 &&&&&& \\ 1 & 2 &&&&& \\ & 1 & 2 &&&& \\ &&& 3 &&& \\ &&& 1 & 3 && \\ &&&&& 4 & \\ &&&&&& 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Per a la primera matriu, està clar que $P_A(x) = (x-2)^7$ i, com que el bloc més gran que té aquesta matriu és 3, elevant a 3 segur que queda la matriu 0, però elevant a 2 no. Per tant, $m_A(x) = (x-2)^3$.

Per a la segona matriu, $P_A(x) = (x-2)^3(x-3)^2(x-4)^2$ i, com que s'ha de cancel·lar un bloc d'alçada 3 de vap 2, un bloc d'alçada 2 de vap 3 i dos blocs d'alçada 1 de vap 4, aleshores ens quedem amb les alçades i, per tant, el polinomi mínim és $m_A(x) = (x-2)^3(x-3)^2(x-4)$. □

Problema 2. *Trobeu els polinomis característic i mínim d'un endomorfisme $f \in End(\mathbf{R}^{13})$ tal que*

$$\dim\ker(f - 2\,\mathrm{Id}) = 4,\ \dim\ker(f - 2\,\mathrm{Id})^2 = 7,\ \dim\ker(f - 2\,\mathrm{Id})^3 = 10,$$

$$\dim\ker(f - 2\,\mathrm{Id})^4 = 12,\ \dim\ker(f - 2\,\mathrm{Id})^5 = 13.$$

Solució. Com que qualsevol polinomi anul·lador és multiple del polinomi mínim i $(x - 2\,\mathrm{Id})^5$ és anul·lador, el polinomi mínim és un divisor seu, però per enunciat, cap divisor seu és anul·lador. Llavors $m_A(x) = (x-2)^2$.

Com que el polinomi característic és múltiple del mínim, conté els mateixos divisors i la dimensió de l'espai és 13, el polinomi característic és $P(x) = (x-2)^1 3$.

Per últim, la matriu de Jordan corresponent és:

$$\begin{pmatrix} J_2^5 &&& \\ & J_2^4 && \\ && J_2^3 & \\ &&& J_2^1 \end{pmatrix}$$

□

Problema 3. *Calculeu la forma de Jordan dels endomorfismes definits per les matrius següents:*

$$(a)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix} 9 & 15 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad (d)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (f)\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -12 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (g)\begin{pmatrix} 3 & -3 & 26 \\ -1 & 3 & -15 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (h)\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$