Apunts d'Equacions diferncials ordinàries

Aleix Torres i Camps

Pau Martín (p.martin@gmail.com), Marcel Guardia i Rafael Ramírez

1 Tema 1: Introducció i definicions bàsiques

Definició 1. Una equació diferencial és una equació que involucra una funció incógnita i les seves derivades.

Exemple 1. Alguns exemples d'equacions diferencials:

1. $y(x), x \in \mathbf{R}$ amb $y''(x) - y(x) = 0$
2. $y''(x) = -sin(y(x))$
3. $y''(x) = -sin(y(x)) + cos(x)$
4. $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ on la incògnita és una funció de dues variables $z(x, y)$.

Definició 2. Una e.d.o. és una equació diferencial de la forma:

1. Forma implícita: $g(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ on la incògnita és una funció $y(x) = (y_1(x) \ldots y_m(x))^t$ d'una variable unidimensional x. Per tant, $g : U \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^m)^{n+1} \to \mathbf{R}^m$.
2. Forma explícita: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{n-1}(x))$. Ara $f : V \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^m)^n \to \mathbf{R}^m$

Nota 2. *A partir d'ara treballarem amb només la forma explícita. La qual abreviarem com* $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{n-1})$

Definició 3. Direm que $\phi : (a, b) \to \mathbf{R}^m$ és una solució si ϕ és n vegades derivable i:

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)), \forall x \in (a, b)$$

Implícitament demantarem que:

$$\{(x, \phi(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)) | x \in (a, b)\} \subset Domf$$

La solució general és el conjunt de totes les seves solucions.

Definició 4. Es diu que l'e.d.o. $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ on $y = (y_1 \cdots y_m)^t$ és un sistema d'e.d.o's de m components, d'ordre n.

Nota 3. *Sigui* $y = (y_1 \ \cdots y_m)$*, aleshores,* $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, t^{(n-1)})$ *és equivalent a un sistema de* $n \times m$ *e.d.o.'s d'ordre 1.*

Demostració. En efecte, sigui $z_1 = y$ (vector de m components), $z_2 = y', \cdots, z_n = y^{(n-1)}$. Per tant, a $z = (z_1, \cdots, z_n)^t$ hi ha un total de $n \times m$ components.

Com que $z_1' = (y)' = y' = z_2$ i, anar fent, $z_{n-1}' = (y^{n-2})' = y^{(n-1)} = z_n$ i $z_n' = (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = f(x, z_1, \ldots, z_n)$. Ens queda l'e.d.o. $z' = g(x, z)$ que realment acaba sent $(z_1' \ z_2' \ \cdots \ z_n')^t = (z_2 \ z_3 \ \cdots \ z_n \ f(x, z_1, \cdots, z_n))^t$. □

Exemple 4. $y'' = -sin(y)$. Aleshores, $z_1 = y$ i $z_2 = y'$. Podem prendre per sistema d'equacions $z_1' = z_2$ i $z_2' = -sin(z_1)$.

1.1 Sistemes autònoms i no autònoms

Definició 5. Direm que una e.d.o. és autònoma si és de la forma $y' = f(y)$ (equació que no depen de x). Direm que un sistema es no autònom si $y' = f(x, y)$.

Proposició 6. *Siguin $y' = f(y)$ una e.d.o autònoma i $\phi : (a, b) \to \mathbf{R}^n$ una solució. Llavors, $\forall x \in \mathbf{R}$ i $\phi_\alpha : (a + \alpha, b + \alpha) \to \mathbf{R}^n$ per $x \to \phi(x - \alpha)$ també és solució.*

Demostració. En efecte: $\phi'_\alpha(x) = \phi'(x - \alpha) = f(\phi(x - \alpha)) = f(\phi_\alpha(x))$.

Nota 5. *Podem transformar el sistema d'ordre 1 i n incògnites d'e.d.o's no autònom $y' = f(x, y)$, en un sistema d'e.d.o's autónom d'ordre 1 i $n + 1$ incògnites.*

Demostració. En efecte, fem $z_1 = x$ i $z_2 = y$. Aleshores, amb $z = (z_1\ z_2)^t$ compleix que $z' = (z_1'\ z_2')^t = (1\ f(x, y))^t = (1\ f(z))^t = F(z)$, que és un e.d.o. d'ordre 1 amb $n + 1$ incògnites. □

1.2 Problema de Cauchy o problema de valors inicials

Definició 7. Sigui $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ un obert i $f : U \to R^n$ una funció. Sigui $(x_0, y_0) \in U$. Anomenarem problema de Cauchy o problema de valor inicial (p.v.i) a trobar una solució de

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Exemple 6. Alguns exemples de problemes de Cauchy.

1. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(0) = 1$. Escollint $\phi(x) = e^x$ és una solució, ja que si derivem ens dona ella mateixa i si l'igualem a 0 dona 1.
2. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(x_0) = y_0$. Escollint $\phi(x) = y_0 e^{x - x_0}$ és solució, ja que si derivem dona ella mateixa i compleix el valor inicial.

   Pregunta: Les solucions que hem trobat són totes les possibles? N'hi ha més?
3. $yy' - x = 0$ i $y(0) = 0$. Solucions: $\phi_{+-}(x) = + - x$ en són solució, substituint es veu.
4. $yy' + x = 0$ i $y(0) = 0$. No té cap solució.

1.3 Interpretació geomètrica d'una e.d.o

Sigui $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $(x, y) \rightarrowtail f(x, y)$. $y' = f(x, y)$ i $\phi : (a, b) \to \mathbf{R}$ nés solució si $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$. El que diu és si existeix una funció ϕ, el pendent de la seva gràfica seguix $f(x, \phi)$.

1.4 Exemples importansts

Exemple 7. Equació d'una molla elàstica (oscil·lador harmònic):

$$my'' = -k^2 y$$

On y és el desplaçament respecte la posició d'equilibri.

Exemple 8. Pendol de longitud l sota un camp gravitatori constant el qual exerceig una força mg.

$$m\theta'' l = -mg \sin\theta \iff \theta'' = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

On θ és l'angle del pendol respecte la vertical.

Exemple 9. Model SIR. S és el nombre de persones subceptibles, I infectats i R persones que deixen de ser de la resta tant perquè es curen com perquè moren. $N = S + I + R$

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{\beta}{N}SI \\ I' &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

Exemple 10. n cossos a l'espai de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ submessos a la seva mutua atracció gravitatòria. q_i és la posició del cos i en un sistema de referència.

$$m_i q_i'' = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{||q_j - q_i||^3}(q_j - q_i)$$

Exemple 11. E.d.o's de famílies de corbes.

Considerem la següent família de corbes: $x^2 + y^2 = r^2$, per $r \in \mathbf{R}$. Tinc les solucions i m'interessa buscar la e.d.o. que la tingui per solució. Si $y = y(x)$, derivant respecte a x: $2x + 2yy' = 0$ o simplificant $y'y + x = 0$, o també $y' = -\frac{x}{y}$.

Família ortogonal. Té el pendent ortogonal, $y' = -\frac{1}{-\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$. Té per solució $y(x) = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercici: Trobeu l'e.d.o de la família de corbes $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$. I la família de corbes ortogonals.

Crec que:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x - \alpha}{y} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

2 Sistemes lineals d'e.d.o.'s

Definició 8. Direm que un sistema d'e.d.o's és lineal si és de la forma (de funció incògnita x):

$$x' = A(t)x + b(t), \; A(t) \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{R}) \; b(t) \in \mathbf{R}^n$$

Direm que el sistema és homogeni si $b(t) = 0$. El sistema homogeni associat és $x' = A(t)x$.

Direm que el sistema té coeficients constants si A no depèn de t.

2.1 Motivació

Suposem que tenim un sistema d'e.d.o.'s $x' = f(t, x)$, on f és $\mathscr{C}^1$ respecte de x. Suposem que $x_0(t)$ n'és solució. Volem estudiar el comportament de les solucions "properes".

$$f(t, x) = f(t, x_0(t)) + D_x f(t, x_0(t))(x - x_0(t)) + o(||x - x_0(t)||)$$

On D_x és la matriu diferencial.

Sigui $\tilde{x} = x - x_0(t)$, llavors, $\tilde{x}' = x' - x_0(t)' = f(t, x_0(t)) + D_x(t, x_0(t))\tilde{x} + o(||\tilde{x}||) - f(t, x_0(t)) = D_x f(t, x_0(t))\tilde{x} + o(||\tilde{x}||)$ el qual s'aproxima a un sistema lineal.

2.2 Propietats elementals

Proposició 9. *(Principi de superposició) Considerem el sistema lineal homogeni $x' = A(t)x$, on $A(t) \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$. La solució, generat del sistema és un espai vectorial, és a dir, si ϕ_1 i ϕ_2 són solució i $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), llavors $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$ és també solució.*

Demostració. Sabem que $\phi_i'(t) = A(t)\phi_i(t)$ per $i = 1, 2$. Donats $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, sigui $\tilde{\phi} = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$. Llavors, $\tilde{\phi}' = \lambda_1\phi_1' + \lambda_2\phi_2' = \lambda_1 A(t)\phi_1 + \lambda_2 A(t)\phi_2 = A(t)(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = A(t)\tilde{\phi}$. $\square$

Proposició 10. *Considerem el sistema lineal*

$$x' = A(t)x + b(t)$$

Sigui ϕ_p una solució del sistema ($\phi_p' = A(t)\phi_p + b(t)$). La solució general és

$$\{\phi | \phi' = A(t)\phi + b(t)\} = \{\phi = \phi_p + \phi_n | \phi_n = A(t)\phi_n\} = \{\phi_p\} + \{\phi_n | \phi_n \textit{ solució del sistema homogeni associat}\}$$

Demostració.
$\supseteq$ Sigui $\tilde{\phi} = \phi_p + \phi_n$, en $\phi_n' = A(t)\phi_n$. Llavors

$$\tilde{\phi}' = \phi_p' + \phi_n' = A(t)\phi_p + b(t) + A(t)\phi_n = A(t)(\phi_p + \phi_n) + b(t) = A(t)\tilde{\phi} + b(t)$$

$\subseteq$ Sigui $\hat{\phi}$ una solució ($\hat{\phi}' = A(t)\hat{\phi} + b(t)$), llavors: $\hat{\phi} = \phi_p + \hat{\phi} - \phi_p$ i cal veure que $\phi_n = \hat{\phi} - \phi_p$ és solució del sistema homogeni. Com que, $\phi_n' = \hat{\phi}' - \phi_p' = A(t)\hat{\phi} + b(t) - A(t)\phi_p - b(t) = A(t)(\hat{\phi} - \phi_p) = A(t)\phi_n$, per tant, ϕ_n és solució del sistema homogeni i hem acabat. $\square$

2.3 E.d.o's lineals unidimensionals

Consierem una e.d.o de la forma

$$x' = a(t)x + b(t),\ a(t) \in \mathbf{R}(\text{o } \mathbf{C}),\ x \in \mathbf{R}$$

Per resoldre-la:
1. Trobarem la solució general de $x' = a(t)x$.
2. Trobarem una solució particular de $x' = a(t)x + b(t)$.

Notació: En aquest tema $I \subset \mathbf{R}$ serà un interval obert.

Proposició 11. *Sigui $a : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció contínua. Sigui $t_0 \in I$. Llavors, la solució general de l'e.d.o. lineal homogenia $x' = a(t)x$ és*

$$\{\lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} | \lambda \in \mathbf{R}\}$$

Equivalentment, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}$, l'única solució de p.v.i.

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

és

$$\phi(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} x_0$$

Demostració.

$\subseteq$ Sigui $\phi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Tenim que

$$\phi(t)' = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)' = a(t)x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = a(t)\phi(t)$$

Amb això hem vist que és solució de l'equació. Ara anem a veure que és solució del p.v.i.

$$\phi(t_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} = x_0 e^0 = x_0$$

$\supseteq$ Observem que $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \neq 0,\ \forall t \in I$.

Sigui $\hat{\phi}$, una solució de $x' = a(t)x$, la podem escriure com $\hat{\phi}(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ amb $c(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\hat{\phi}(t)$ i c és una funció derivable a I.

Llavors, $c'(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = \hat{\phi}'(t) = a(t)\hat{\phi}(t) = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \iff c'(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = 0 \iff c'(t) = 0 \implies c = \lambda$. És a dir, com que la derivada de la c és 0, tenim que c és una constant. I hem acabat perquè hem vist que qualsevol solució és de la forma descrita. $\square$