Apunts d'Equacions diferencials ordinàries

Aleix Torres i Camps

Pau Martín (p.martin@gmail.com), Marcel Guardia i Rafael Ramírez

Índex

1 Tema 1: Introducció i definicions bàsiques

Definició 1. Una equació diferencial és una equació que involucra una funció incógnita i les seves derivades.

Exemple 1. Alguns exemples d'equacions diferencials:

1. $y(x), x \in \mathbb{R}$ amb $y''(x) - y(x) = 0$

2. $y''(x) = -sin(y(x))$

3. $y''(x) = -sin(y(x)) + cos(x)$

4. $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ on la incògnita és una funció de dues variables $z(x, y)$.

Definició 2. Una e.d.o. és una equació diferencial de la forma:

1. Forma implícita: $g(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ on la incògnita és una funció $y(x) = (y_1(x) \dots y_m(x))^t$ d'una variable unidimensional x. Per tant, $g : U \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \to \mathbb{R}^m$.
2. Forma explícita: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{n-1}(x))$. Ara $f : V \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m$

Nota 2. *A partir d'ara treballarem amb només la forma explícita. La qual abreviarem com* $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{n-1})$

Definició 3. Direm que $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ és una solució si φ és n vegades derivable i:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)), \forall x \in (a, b)$$

Implícitament demantarem que:

$$\{(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)) | x \in (a, b)\} \subset Domf$$

La solució general és el conjunt de totes les seves solucions.

Definició 4. Es diu que l'e.d.o. $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ on $y = (y_1 \cdots y_m)^t$ és un sistema d'e.d.o's de m components, d'ordre n.

Nota 3. *Sigui* $y = (y_1 \ \cdots y_m)$, *aleshores,* $y^{(n)} = f(x, y, \dots, t^{(n-1)})$ *és equivalent a un sistema de* $n \times m$ *e.d.o.'s d'ordre 1.*

Demostració. En efecte, sigui $z_1 = y$ (vector de m components), $z_2 = y', \cdots, z_n = y^{(n-1)}$. Per tant, a $z = (z_1, \cdots, z_n)^t$ hi ha un total de $n \times m$ components.

Com que $z_1' = (y)' = y' = z_2$ i, anar fent, $z_{n-1}' = (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = z_n$ i $z_n' = (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = f(x, z_1, \dots, z_n)$. Ens queda l'e.d.o. $z' = g(x, z)$ que realment acaba sent $(z_1' \ z_2' \ \cdots \ z_n')^t = (z_2 \ z_3 \ \cdots \ z_n \ f(x, z_1, \cdots, z_n))^t$. □

Exemple 4. $y'' = -sin(y)$. Aleshores, $z_1 = y$ i $z_2 = y'$. Podem prendre per sistema d'equacions $z_1' = z_2$ i $z_2' = -sin(z_1)$.

1.1 Sistemes autònoms i no autònoms

Definició 5. Direm que una e.d.o. és autònoma si és de la forma $y' = f(y)$ (equació que no depen de x). Direm que un sistema es no autònom si $y' = f(x, y)$.

Proposició 6. *Siguin $y' = f(y)$ una e.d.o autònoma i $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ una solució. Llavors, $\forall x \in \mathbb{R}$ i $\varphi_\alpha : (a+\alpha, b+\alpha) \to \mathbb{R}^n$ per $x \mapsto \varphi_\alpha(x) = \varphi(x-\alpha)$ també és solució.*

Demostració. En efecte: $\varphi'_\alpha(x) = \varphi'(x-\alpha) = f(\varphi(x-\alpha)) = f(\varphi_\alpha(x))$.

Nota 5. *Podem transformar el sistema d'ordre 1 i n incògnites d'e.d.o's no autònom $y' = f(x,y)$, en un sistema d'e.d.o's autónom d'ordre 1 i $n+1$ incògnites.*

Demostració. En efecte, fem $z_1 = x$ i $z_2 = y$. Aleshores, amb $z = (z_1\ z_2)^t$ compleix que $z' = (z_1'\ z_2')^t = (1\ f(x,y))^t = (1\ f(z))^t = F(z)$, que és un e.d.o. d'ordre 1 amb $n+1$ incògnites. □

1.2 Problema de Cauchy o problema de valors inicials

Definició 7. Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció. Sigui $(x_0, y_0) \in U$. Anomenarem problema de Cauchy o problema de valor inicial (p.v.i) a trobar una solució de

$$y' = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Exemple 6. Alguns exemples de problemes de Cauchy.

1. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(0) = 1$. Escollint $\varphi(x) = e^x$ és una solució, ja que si derivem ens dona ella mateixa i si l'igualem a 0 dona 1.
2. Volem trobar una funció que compleixi que: $y' = y$ i $y(x_0) = y_0$. Escollint $\varphi(x) = y_0 e^{x-x_0}$ és solució, ja que si derivem dona ella mateixa i compleix el valor inicial.

   Pregunta: Les solucions que hem trobat són totes les possibles? N'hi ha més?
3. $yy' - x = 0$ i $y(0) = 0$. Solucions: $\varphi_{+-}(x) = +-x$ en són solució, substituint es veu.
4. $yy' + x = 0$ i $y(0) = 0$. No té cap solució. Una manera de veure-ho és veient que per $x \neq 0$ ni y ni y' poden ser 0. Llavors fixant-nos en $x > 0$ i suposant que $y > 0$, ens queda que $y' < 0$. Per tant, cal una funció contínua que és positiva per x postiva i que decreixi. Sigui $a = y(1)$, llavors $y(x) > a$ per tota x entre 0 i 1, aleshores, com que en 0 ha de ser 0 i és contínua, hem arribat a contradicció i no pot tenir solució.

1.3 Interpretació geomètrica d'una e.d.o

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto f(x,y)$. $y' = f(x,y)$ i $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ n'és solució si $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. El que diu és si existeix una funció φ, el pendent de la seva gràfica segueix $f(x,\varphi)$.

1.4 Exemples importants

Exemple 7. Equació d'una molla elàstica (oscil·lador harmònic):

$$my'' = -k^2 y$$

On y és el desplaçament respecte la posició d'equilibri.

Exemple 8. Pèndol de longitud l sota un camp gravitatori constant el qual exerceix una força mg.

$$m\theta'' l = -mg \sin\theta \iff \theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

On θ és l'angle del pèndol respecte la vertical.

Exemple 9. Model SIR. S és el nombre de persones subceptibles, I infectats i R persones que deixen de ser de la resta tant perquè es curen com perquè moren. $N = S + I + R$

$$S' = -\frac{\beta}{N} SI$$
$$I' = \frac{\beta}{N} SI - \gamma I$$
$$R' = \gamma I$$

Exemple 10. n cossos a l'espai de masses $m_1, m_2, \dots, m_n$ submessos a la seva mutua atracció gravitatòria. q_i és la posició del cos i en un sistema de referència.

$$m_i q_i'' = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{||q_j - q_i||^3} (q_j - q_i)$$

Exemple 11. E.d.o's de famílies de corbes.

Considerem la següent família de corbes: $x^2 + y^2 = r^2$, per $r \in \mathbb{R}$. Tinc les solucions i m'interessa buscar la e.d.o. que la tingui per solució. Si $y = y(x)$, derivant respecte a x: $2x + 2yy' = 0$ o simplificant $y'y + x = 0$, o també $y' = -\frac{x}{y}$.

Família ortogonal. Té el pendent ortogonal, $y' = -\frac{1}{-\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$. Té per solució $y(x) = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercici: Trobeu l'e.d.o de la família de corbes $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$. I la família de corbes ortogonals.

Crec que:

$$y' = -\frac{x - \alpha}{y}$$
$$y(0) = 0$$

2 Sistemes lineals d'e.d.o.'s

Definició 8. Direm que un sistema d'e.d.o's és lineal si és de la forma (de funció incògnita x):

$$x' = A(t)x + b(t),\ A(t) \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{R})\ b(t) \in \mathbb{R}^n$$

Direm que el sistema és homogeni si $b(t) = 0$. El sistema homogeni associat és $x' = A(t)x$.

Direm que el sistema té coeficients constants si A no depèn de t.

2.1 Motivació

Suposem que tenim un sistema d'e.d.o.'s $x' = f(t, x)$, on f és $\mathscr{C}^1$ respecte de x. Suposem que $x_0(t)$ n'és solució. Volem estudiar el comportament de les solucions "properes".

$$f(t, x) = f(t, x_0(t)) + D_x f(t, x_0(t))(x - x_0(t)) + o(||x - x_0(t)||)$$

On D_x és la matriu diferencial.

Sigui $\tilde{x} = x - x_0(t)$, llavors, $\tilde{x}' = x' - x_0(t)' = f(t, x_0(t)) + D_x(t, x_0(t))\tilde{x} + o(||\tilde{x}||) - f(t, x_0(t)) = D_x f(t, x_0(t))\tilde{x} + o(||\tilde{x}||)$ el qual s'aproxima a un sistema lineal.

2.2 Propietats elementals

Proposició 9. *(Principi de superposició) Considerem el sistema lineal homogeni $x' = A(t)x$, on $A(t) \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. La solució, generat del sistema és un espai vectorial, és a dir, si φ_1 i φ_2 són solució i $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), llavors $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ és també solució.*

Demostració. Sabem que $\varphi_i'(t) = A(t)\varphi_i(t)$ per $i = 1, 2$. Donats $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, sigui $\tilde{\varphi} = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$. Llavors, $\tilde{\varphi}' = \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' = \lambda_1 A(t)\varphi_1 + \lambda_2 A(t)\varphi_2 = A(t)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = A(t)\tilde{\varphi}$. □

Proposició 10. *Considerem el sistema lineal*

$$x' = A(t)x + b(t)$$

Sigui φ_p una solució del sistema ($\varphi_p' = A(t)\varphi_p + b(t)$). La solució general és

$$\{\varphi | \varphi' = A(t)\varphi + b(t)\} = \{\varphi = \varphi_p + \varphi_n | \varphi_n = A(t)\varphi_n\} = \{\varphi_p\} + \{\varphi_n | \varphi_n \text{ solució del sistema homogeni associat}\}$$

Demostració.
$\supseteq$ Sigui $\tilde{\varphi} = \varphi_p + \varphi_n$, on $\varphi_n' = A(t)\varphi_n$. Llavors

$$\tilde{\varphi}' = \varphi_p' + \varphi_n' = A(t)\varphi_p + b(t) + A(t)\varphi_n = A(t)(\varphi_p + \varphi_n) + b(t) = A(t)\tilde{\varphi} + b(t)$$

$\subseteq$ Sigui $\hat{\varphi}$ una solució ($\hat{\varphi}' = A(t)\hat{\varphi} + b(t)$), llavors: $\hat{\varphi} = \varphi_p + \hat{\varphi} - \varphi_p$ i cal veure que $\varphi_n = \hat{\varphi} - \varphi_p$ és solució del sistema homogeni. Com que, $\varphi_n' = \hat{\varphi}' - \varphi_p' = A(t)\hat{\varphi} + b(t) - A(t)\varphi_p - b(t) = A(t)(\hat{\varphi} - \varphi_p) = A(t)\varphi_n$, per tant, φ_n és solució del sistema homogeni i hem acabat. □

2.3 E.d.o's lineals unidimensionals

Consierem una e.d.o de la forma

$$x' = a(t)x + b(t),\ a(t) \in \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C}),\ x \in \mathbb{R}$$

Per resoldre-la:
1. Trobarem la solució general de $x' = a(t)x$.
2. Trobarem una solució particular de $x' = a(t)x + b(t)$.

Notació: En aquest tema $I \subset \mathbb{R}$ serà un interval obert.

Proposició 11. *Sigui $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Sigui $t_0 \in I$. Llavors, la solució general de l'e.d.o. lineal homogenia $x' = a(t)x$ és*

$$\{\lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Equivalentment, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, l'única solució de p.v.i.

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

és

$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

Demostració.

$\subseteq$ Sigui $\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Tenim que

$$\varphi(t)' = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)' = a(t)x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = a(t)\varphi(t)$$

Amb això hem vist que és solució de l'equació. Ara anem a veure que és solució del p.v.i.

$$\varphi(t_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} = x_0 e^0 = x_0$$

$\supseteq$ Observem que $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \neq 0,\ \forall t \in I$.

Sigui $\hat{\varphi}$, una solució de $x' = a(t)x$, la podem escriure com $\hat{\varphi}(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ amb $c(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}\hat{\varphi}(t)$, clarament c és una funció derivable a I.

Llavors, $c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = \hat{\varphi}'(t) = a(t)\hat{\varphi}(t) = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \iff c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = 0 \iff c'(t) = 0 \implies c = \lambda$. És a dir, com que la derivada de la c és 0, tenim que c és una constant. I hem acabat perquè hem vist que qualsevol solució és de la forma descrita. $\square$

Nota 12. *Què va fer que escollissim $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ com a candidat de solució?*

Estem buscant solució de $x'(t) = a(t)x(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$. Ara, podem veure la equació com $\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t) \iff \int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{x(t)}dt = \int_{t_0}^t a(s)ds$ que és el mateix que $\ln(x(t) - \ln(x(t_0))) = \int_{t_0}^t a(s)ds \iff \ln(x) = \ln(x_0) + \int_{t_0}^t a(s)ds \iff x(t) = e^{\ln x_0}e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

Proposició 12. *La solució general de $x' = a(t)x + b(t)$; $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínues és:*

$$\{x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}[\lambda + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds], \lambda \in \mathbb{R}\}$$

I, per tant, la solució que satisfà $x(t_0) = x_0$ és:

$$\varphi(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds) = x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma}\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds =$$

$$= x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma}b(s)ds$$

Demostració. Per començar, veure que x de la forma descrita son solució és un càlcul. Ara, per veure que tota solució és d'aquella forma fem servir el mètode de variacions de les constants.

Semblant a la proposició del cas homogeni busquem la $c(t)$ tal que $x_p(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$, $(\forall t)$. Substituint a l'equació original tenim:

$$c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = x_p'(t) = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + b(t) \iff c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = b(t)$$

$$\implies c'(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}b(t) \implies c(t) - x_0 = \int_{t_0}^t c'(s)ds = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds$$

I, per tant,

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}b(s)ds$$

$\square$

Exemple 13. Posem per cas que volem resoldre l'equació $x' = tx + \frac{1}{t}$ (coeficients continus, o bé a $(-\infty, 0)$, o bé a $(0, \infty)$).

Solució. 1. Busquem l'equació homogènia. $x' = tx \implies \frac{x'}{x} = t$, integrant entre t_0 i t, tenim

$$\ln x - \ln x_0 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 \implies x(t) = x_0e^{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2} = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2}e^{\frac{1}{2}t^2}$$

Per tant, la solució general homogenia:

$$\{x(t) = \lambda e^{\frac{1}{2}t^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

.

2. Trobem la solució de l'e.d.o. completa que en t_0 val x_0:

$x_p(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ i substituim a l'e.d.o:

$$c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}t = x_p'(t) = tc(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{t}$$

Que aleshores queda:

$$c'(t) = \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{2}t^2} \implies c(t) = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

Perquè $c'(t_0) = x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2}$, finalment, la solució és:

$$x_p(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}[x_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds]$$

□

2.4 Sistemes lineals de dimensió qualsevol (finita)

2.4.1 Sistemes homogenis

Sigui la e.d.o $x' = A(t)x$, per $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$, és a dir, A és una matriu $n \times n$ amb coeficients continus a $I \subset R$.

Proposició 13. *Sigui el sistema $x' = A(t)x$, amb $A \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Llavors, si φ n'és una solució definida a $I \implies \varphi \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}^n)$.*

Demostració. Provem-ho per inducció:

Pel cas base $k = 0$. Si φ és solució $\implies \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \implies \varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Suposem que A és de classe $\mathscr{C}^k$ i φ és solució de $x' = A(t)x$ de classe $\mathscr{C}^k$: llavors $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \implies A, \varphi' \in \mathscr{C}^k \implies \varphi \in \mathscr{C}^{k+1}$. □

Exemple 14. Comproveu que el mateix argument s'aplica a $x' = f(t, x)$, si f és de classe $\mathscr{C}^k$ respecte a (t, x).

Teorema 14. *(És el teorema 2.8 dels apunts) Siguin $I \subset \mathbb{R}$, interval de $\mathbb{R}$, $A \in \mathscr{C}(I, M_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Sigui $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, qualsevol. llavors el p.v.i*

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

té una solució $\mathscr{C}$, definida a I. Una solució és única en el sentit següent: si $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \subset I \to \mathbb{R}$ n'és una altra solució $\implies \tilde{\varphi}_{|\tilde{I}} = \varphi_{|\tilde{I}}$

Demostració. És un corol·lari del Teorema de Picard. □

Nota 15. *No sabem calcular φ. El teorema ens permet deduir l'aplicació: $\varphi : I \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ amb $(t, t_0, x_0) \to \varphi(t, t_0, x_0)$, on $\varphi(t, t_0, x_0)$ és la solució del p.v.i. en l'instant t. A aquesta aplicació l'anomenarem flux del p.v.i.*

Exercici: Fent servir el teorema 2.8. i el fet que la sol·lució general de $x' = A(t)x$ és un espai vectorial, proveu que, fixats $t, t_0 \in I$, l'aplicació de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, que envia x_0 a $\varphi(t, t_0, x_0)$ és una aplicació lineal.

$$\varphi(t, t_0, \lambda_0x_0 + \lambda_1x_1) = \lambda_0\varphi(t, t_0, x_0) + \lambda_1\varphi(t, t_0, x_1)$$

Teorema 15. *Sigui $A \in \mathscr{C}(I, M_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Llavors, la solució general de $x' = A(t)x$ (sistema lineal i homogeni) és un espai vectorial de dimensió n.*

Demostració. Veurem (1) que hi ha n solucions de $x' = A(t)x$ linealment independents ($\implies$ dimensió de la solució general $\geq n$). (2) que aquestes solucions en són base.

Per (1). Sigui $t_0 \in I$. Sigui e_i, l'i-éssim vector de la base canònica a $\mathbb{R}^n$. Pel teorema 2.8, sigui φ_i la solució del p.v.i:

$$\begin{aligned} x' =& A(t)x \\ x(t_0) =& e_i \end{aligned}$$

Afirmem que $\{\varphi_i\}_{i=1,\cdots,n}$ són l.i. Hem de veure que si $\lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t) = 0$ $(\forall t \in I) \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Suposem que tenim uns $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que compleixen la condició anterior. En particular, si $t = t_0$, $\lambda_1\varphi_1(t_0) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t_0) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, llavors com els vectors canònics són l.i. llavors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Per (2). Sigui $\tilde{\varphi} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una solució qualsevol de $x' = A(t)x$. Siguin $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tals que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \tilde{\varphi(t_0)}$. Veiem que $\tilde{\varphi}(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t)$ $(\forall t \in I)$.

Per a veure-ho, comproveu que són solució del mateix p.v.i i apliquem el Teorema 2.8. Tant $\tilde{\varphi}$ com $\lambda_1\varphi + \cdots + \lambda_n\varphi_n$ són solució de $x' = A(t)x$. Com que $\lambda_1\varphi_1(t_0) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t_0) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \tilde{\varphi}(t_0)$ coincideixen en $t = t_0$ llavors, com la solució del p.v.i. és única, coincideixen en tot I. □

Definició 16. Sigui $A \in (I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Anomenarem *sistema fonamental de solucions* de $x' = A(t)x$ a qualsevol base de la solució general del sistema. El teorema anterior ens diu que un s.f.s té exactament n funcions.

Definició 17. Sigui $A \in (I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Direm que una matriu $M(t)$ (per $t \in I$) és una matriu fonamental del sistema $x' = A(t)x$ si les seves columnes són un s.f.s. del sistema. És a dir, si $M(t) = (m_1(t), \cdots, m_n(t))$, llavors $m_i' = A(t)m_i$. Podem escriure $M(t)' = A(t)M(t)$ i que $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n}$ generant l'espai de solucions.

Exercici: Considerem el problema següent: Donada una matriu $C \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, busquem Φ tal que

$$\begin{aligned} \Phi'(t) =& A(t)\Phi(t) \\ \Phi(t_0) =& C \end{aligned}$$

On $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ i $t_0 \in I$. Proveu que $\exists!$ solució $\Phi(t)$ definida en I.

Exemple 16. Trobem una m.f. de

$$\begin{aligned} x' =& \frac{1}{t}x + y \\ y' =& \frac{1}{t}y \end{aligned}$$

La qual és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comencem resolent (2). $y' = \frac{1}{t}y \implies \frac{y'}{y} = \frac{1}{t} \implies \ln y = c + \ln t$ llavors $y(t) = \beta t$. Substituïm a (1):

$$x' = \frac{1}{t}x + \beta t$$

Les solucions de $x' = \frac{1}{t}x$ són $x_n(t) = \alpha t$. Variació de les constants: $x(t) = c(t)t$. $c'(t)t + c(t) = \frac{1}{t}c(t)t + \beta t \implies c'(t) = \beta \implies c(t) = \alpha + \beta t$, llavors $x(t) = (\alpha + \beta t)t = \alpha t + \beta t^2$ i $y(t) = \beta t$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Exercici: Raoneu que φ_1 i φ_2 són base de la solució general del sitema. Llavors una m.f n'és:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Proposició 18. *Considrem el sistema d'e.d.o homogeni de dimensió finita ($x' = A(t)x$ amb $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$). Aleshores,*

1. *Si $M(t)$ n'és una m.f. $\implies$ det$(M(t)) \neq 0$ $\forall t \in I$.*
2. *$M(t)$ n'és m.f $\iff$ $M'(t) = A(t)M(t)$ i $\exists t_0 \in I$ tal que det$(M(t_0)) \neq 0$.*
3. *Sigui $M(t)$ una m.f. llavors $N(t)$ és m.f. $\iff$ $\exists C \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ constant amb det $C \neq 0$, tal que $N(t) = M(t)C$.*
4. *Sigui $M(t)$ una m.f. La solució del p.v.i. és $\varphi(t, t_0, x_0) = M(t)M(t_0)^{-1}x_0$.*

Demostració.

1. Suposem que en un punt t_0 el determinant de la matriu és 0 (det$M(t_0) = 0$). Aleshores, el rang$M(t_0) < n \implies \neq \mathbb{R}^n \implies x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \notin \text{Im } M(t_0)$. És a dir, el sistema $M(t_0)\lambda = x_0$ no té solució.

   Ara, considerem el p.v.i. $x' = A(t)x$ i $x(t_0) = x_0$ té una única solució $\varphi_0(t)$, però $x_0 = \varphi_0(t_0) \neq M(t_0)\lambda$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$. Llavors φ_0 no està generada per les columnes de $M(t)$, per tant, les columnes no son base, contradicció amb el fet que $M(t)$ és m.f.

2. $\implies$ Immediata per 1, perquè si el determinant és diferent de 0 arreu, aleshores ho és per tot punt de l'interval i en particular podem trobar un punt.

   $\impliedby$ **Exercici:** És refer la demostració del fet que la solució general de $x' = A(t)x$ és un espai vectorial de dimensió n. INDICACIÓ: $M'(t) = A(t)M(t)$ i det$M(t_0) \neq 0$. Anomenarem v_i a la columna i de $M(t_0)$ llavors $\implies \{v_1, \cdots, v_n\}$ són base de $\mathbb{R}^n$. Llavors la columna i de $M(t)$ és l'única solució del p.v.i. $x' = A(t)x$ i $x(t_0) = v_i$.

3. $\impliedby$ Sigui C una matriu constant amb det $C \neq 0$. Sigui $N(t) = M(t)C$, per una banda, $\det N(t) = \det M(t) \det C$, llavors el determinant de la matriu $N(t)$ és diferent de 0 per tot t. Per altra banda, $N'(t) = (M(t)C)' = M'(t)C = A(t)M(t)C = A(t)N(t)$. Llavors $N(t)$ és una matriu fonamental.

   $\implies$ Sigui $t_0 \in I$ un punt qualsevol i sigui $C = M(t_0)^{-1}N(t_0)$. Veurem que $N(t) = M(t)C$, per $\forall t \in I$. Per veure que són iguals, com que les dues són solució del sistema $x' = A(t)x$. Només cal veure que ambdues coincideixen en el punt t_0, ja que $N(t_0) = M(t_0)M(t_0)^{-1}N(t_0)$. Llavors per unicitat de les solucions del p.v.i. $N(t)$ i $M(t)C$ son la mateixa matriu.

   A més, la C és única. (FALTA PROOF)

4. Hem de veure que $M(t)M(t_0)^{-1}x_0$ són solució del p.v.i. Està clar que en t_0 les matrius es cancelen i només queda x_0. I a més, si derivem l'expressió les constants no són importants i compleix l'equació.

□

Exemple 17. L'aplicació del argument d'existencia i unicitat de solucions per a provar coses no trivials.

considerem el sistema d'e.d.o's: (1) $x' = f(x, t)$, amb $f : \mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $f(t + T, x) = f(t, x)$ $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times U$.

Suposem que $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$, el p.v.i. (2) $x' = f(t, x)$ i $x(t_0) = x_0$. Suposem que $\varphi(t)$ és solució de (1) (definida en l'interval de longitud T). Llavors φ és T-periòdica ($\varphi(t + T) = \varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$) $\iff$ $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$.

$\impliedby$ Considerem $\varphi(t)$ solució $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ i $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + T)$. En $t = t_0$, $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + T) = \tilde{\varphi}(t_0)$. Només ens cal comprovar que ambdues són solució de l'e.d.o.

$$\tilde{\varphi}'(t) = \varphi(t + T)' = f(t + T, \varphi(t + T)) = f(t, \varphi(t + T)) = f(t, \tilde{\varphi}(t))$$

Teorema 19. *Sigui Φ una matriu $n \times n$ tal que $\Phi' = A(t)\Phi(t)$, on $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}(\mathbb{R}))$. Llavors, (en funció de t):*

$$(\det \Phi(t))' = trA(t) \det \Phi(t)$$

Demostració. Sigui φ_i, la columna i de la matriu Φ. Com que $\det \Phi = \det(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, derivant respecte a t:

$$(\det \Phi(t))' = \det(\varphi_1', \varphi_2, \cdots, \varphi_n) + \det(\varphi_1, \varphi_2', \cdots, \varphi_n) + \cdots + \det(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n')$$

Com que $\varphi_i' = A(t)\varphi$, ens queda:

$$= \det(A\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) + \det(\varphi_1, A\varphi_2, \cdots, \varphi_n) + \cdots + \det(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, A\varphi_n)$$

Si definim, fixat t, per a $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $f(v_1, \cdots, v_n) = \det(Av_1, \cdots, v_n) + \cdots, \det(v_1, \cdots, Av_n)$. Aleshores f satisfà: (1) $f(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n) = -f(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_n)$. (2)$f(\lambda v_1, \cdots, v_n) = \cdots = f(v_1, \cdots, \lambda v_n) = \lambda f(v_1, \cdots, v_n)$. Llavors, f és una aplicació n lineal alternades.

L'espai d'aplicacions n-lineals alternades a $\mathbb{R}^n$ té dimensió 1. Llavors $f(v_1, \cdots, v_n) = a \det(v_1, \cdots, v_n)$, anem a determinar la constant a evaluant f en els vectors $\{e_i\}_{i=1\cdots n}$ de la base canónica:

$$f(e_1, \cdots, e_n) = a \det(e_1, \cdots, e_n) = a$$

$$f(e_1, \cdots, e_n) = \det(Ae_1, e_2, \cdots, e_n) + \det(e_1, Ae_2, \cdots, e_n) + \cdots + \det(e_1, e_2, \cdots, Ae_n) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{tr}A$$

Per tant, $\det \Phi(t)' = \mathrm{tr}A(t) \det \Phi(t)$. □

Corol·lari 20. *(Formula de Liouville). Sigui Φ una matriu $n \times n$ tal que $\Phi' = A(t)\Phi(t)$, on $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}(\mathbb{R}))$. Llavors:*

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$$

Demostració. Pel teorema anterior, el determinant és solució del sistema de p.v.i. $d' = \mathrm{tr}A(t)d$ i $d(t_0) = \det \Phi(t_0)$, la solució de la qual ja l'haviem vista anteriorment. □

Exercici: (d'aplicació de la fórmula de Liouville) Considerem el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= tx + e^{t^2} y \\ y' &= \cos(t)x - ty \end{aligned}$$

Sigui $\varphi(t, t_0, (x_0, y_0))$ el seu flux. És a dir, l'única solució del p.v.i.

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_0, (x_0, y_0))' &= A(t)\varphi(t, t_0, (x_0, y_0)) \\ \varphi(t, t_0, (x_0, y_0)) &= (x_0 \ y_0)^t \end{aligned}$$

Proveu que, per a qualsevol conjunt mesurable $D \subset \mathbb{R}^2$, i qualsevol $t, t_0 \in \mathbb{R}$ fixats,

$$\text{àrea}(D) = \text{àrea}(\varphi(t, t_0, D))$$

Indicacions: àrea$(D) = \int_D 1dxdy$. I, el teorema de canvi de variable, ens diu que si $\Psi : D \to \Psi(D)$ que envia $(u, v) \mapsto \Psi(u, v)$ és un canvi de variables, llavors

$$\int_{\Psi(D)} f(x, y)dxdy = \int_D f(\Psi(u, v))|\det D\Psi(u, v)|dudv$$

2.4.2 Sistemes no homogenis

Considerem el sistema (1): $x' = A(t)x + b(t)$.
on $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ i $b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

Suposem que $M(t)$ és una m.f. del sistema homogeni (2): $M(t)' = A(t)M(t)$ i $\det M(t) \neq 0$ per tot $t \in I$. Busquem les solucions de la forma $x(t) = M(t)y(t)$ (on $y(t) = M(t)^{-1}x(t)$ que és derivable perquè les dues parts ho son ja que són solució i el determinant de $M(t) \neq 0.$).

Derivem respecte a t, per (1) i per (2)$A(t)x(t)+b(t) = x'(t) = M(t)'y(t)+M(t)y'(t)$, que a banda i banda és igual a $A(t)M(t)y(t)+b(t) = A(t)M(t)y(t)+M(t)y'(t)$. Ens queda que $y(t)$ ha de satisfer (3): $M(t)y'(t) = b(t)$, per tant, $y'(t) = M(x)^{-1}b(t)$. Fixem $t_0 \in I$, la funció y solució de (3) tal que $y(t_0) = 0$ és

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}b(s)ds$$

per tant, una solució de (1) és (satisfà $x_p(t_0) = 0$):

$$x_p(t) = M(t)\int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}b(s)ds$$

La solució del p.v.i. $x' = A(t)x+b(t)$ i $x(t_0) = x_0$ és $\varphi(t, t_0, x_0) = M(t)M(t_0)'x_0+M(t)\int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}b(s)ds = M(t)\left[M(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}b(s)ds\right]$.

2.4.3 Sistemes lineals amb coeficients constants

Definició 21. Anomenarem sistema d'e.d.o. lineal amb coeficients constants a un sistema de la forma:

$$x' = Ax + b(t), A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

amb b una funció definida a I (o $\mathbb{R}$).

Volem resoldre la part homogenia: $x' = Ax$, trobem-ne una matriu fonamental.

Definició 22. Sigui $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. La seva exponencial és

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$$

Observació 23. *Escollim una norma a $\mathbb{R}^n$, $||\cdot||$. Llavors, la norma matricial associada és*

$$||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Aquest compleix que $||Ax|| \leq ||A||||x||$, a més, $||AB|| \leq ||A||||B||$.

Llavors, anem a veure que l'exponencial d'una matriu està ben definida:

$$||e^A|| = ||\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}||A^j|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}||A||^j = e^{||A||}$$

Lema 24. *Siguin $A, B \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tals que $AB = BA$. Llavors*

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Demostració. Tenim que $e^{A+B} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A + B)^j$.

Per altra banda $e^A e^B = (\sum_{n\geq 0} \frac{1}{k!}A^k)(\sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!}B^l) = \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0} \frac{1}{k!l!}A^k B^l$. Ara, fent un canvu de índexos $(j = k + l)$; $= \sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!(j-k)!}A^k B^{j-k} = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^j B^{j-k}$ que pel binomi de Newton (ja que AB commuten) és igual a l'expressió de e^{A+B}. ☐

Lema 25. *Sigui $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ llavors*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

Demostració. Per definició de derivada tenim:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{tA+hA}-e^{tA}}{h} =$$

Ara, com que tA i hA commuten podem utilitzar el lemma anterior:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{hA}e^{tA}-e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(e^{hA}-\mathrm{Id})e^{tA}}{h}$$

Ara, com que e^{tA} és una constant, només fa falta provar que la resta del límit és igual a A.

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{hA}-\mathrm{Id}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}(hA)^j - \mathrm{Id}\right] = [A^0 = \mathrm{Id}] = \lim_{h\to 0}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j!}h^{j-1}A^j = A$$

□

Proposició 26. *Considerem el sistema (*) $x' = Ax$, amb $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sigui $\Phi(t)$ la matriu fonamental de (*) tal que $\Phi(0) = \mathrm{Id}$. Llavors*

1. $\Phi(t) = e^{tA}$
2. $e^{(t+s)A}\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) = e^{tA}e^{sA}$
3. $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$
4. *Si $M(t)$ és una matriu fonamental qualsevol de (*), llavors $e^{tA} = M(t)M(0)^{-1}$.*

Demostració.

1. Pel lemma anterior, e^{tA} satisfà que $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, i en $t = 0$, $e^{0A} = \mathrm{Id}$ (llavors el det $A \neq 0$), pel teorema d'existencia i unicitat de solucions, tenim $\Phi(t) = e^{tA}$.
2. Fent servir el que acabem de demostrar i que tA i sA commuten surt automàticament.
3. Si prenem $s = -t$ a (2): $\mathrm{Id} = \Phi(t-t) = \Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(-t) = e^{tA}e^{-tA}$. Llavors, $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$.
4. Per ser $M(t)$ matriu fonamental, $M(0)$ té determinant diferent de 0 i, per tant, la inversa existeix. Llavors $M(t)M(0)^{-1}$ per una propietat anterior que vam veure, és matriu fonamental. Però com que compleix la mateixa condició incial en 0 que e^{tA}, $M(0)M(0)^{-1} = \mathrm{Id}$, son solució del mateix p.v.i. i, per tant, son la mateixa matriu ($e^{tA} = M(t)M(0)^{-1}$).

□

Corol·lari 27. *La solució del p.v.i. $x' = Ax$ i $x(t_0) = x_0$ és (el flux) $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t-t_0, 0, x_0) = e^{tA}e^{-t_0A}x_0 = e^{(t-t_0)A}x_0$. Perquè en $t = t_0$, $e^{t_0A}e^{-t_0A}x_0 = Ix_0 = x_0$.*

Exemple 18. Suposem que

$$A = \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

equivalentment:

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1 \\ &\vdots \\ x_n' &= \lambda_n x_n \end{aligned}$$

Primer mètode: Calculem e^{tA}: com que

$$A^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^j \end{pmatrix}$$

Llavors

$$e^{tA}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}t^jA^j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}t^j\begin{pmatrix}\lambda_1^j & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n^j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}t^j\lambda_1^j & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}t^j\lambda_n^j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}$$

Per tant, la solució general és:

$$x(t)=\begin{pmatrix}c_1e^{t\lambda_1}\\ \vdots\\ c_ne^{t\lambda_n}\end{pmatrix}$$

on

$$x(0)=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

Segon mètode: Resolem el sistema, com que cada component és $x_j'=\lambda_jx_j$ la solució és $x_j(t)=c_je^{\lambda_jt}$, perquè cada equació és independent de les anteriors.

Exercici: Sigui $v\in\ker(A-\lambda\,\mathrm{Id})^k$ llavors,

$$e^{tA}v=e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}t^j(A-\lambda\,\mathrm{Id})^jv$$

$e^{tA}v$ és la solució del p.v.i. $x'=Ax$ i $x(0)=v$.

Corol·lari 28. *Donada una matriu A, $n\times n$, amb el polinomi característic*

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$$

Llavors

$$\mathbb{R}^n=\ker(A-\lambda_1\,\mathrm{Id})^{n_1}\oplus\cdots\oplus\ker(A-\lambda_k\,\mathrm{Id})^{n_k}$$

Podem treure base conjunta $\{v_i\}_{i=1,\cdots,n}$, a partir de una base de cada un dels subespais invariants. Llavors $\{e^{tA}v_i\}_{i=1,\cdots,n}$ és també base de $\mathbb{R}^n$ perquè la matriu $\{e^{tA}\}$. Per tant, $M(t)=\{\cdots e^{tA}v_1\cdots\}$ serà una m.f. de $x'=Ax$.

Proposició 29. *Considerem el sistema $x'=Ax$, $A\in\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sigui $C\in\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\det C\neq 0$. Sigui $x=C\tilde{x}$, llavors $\tilde{x}$ satisfà*

$$\tilde{x}'=c^{-1}AC\tilde{x}$$

Conseqüentment

$$e^{tC^{-1}AC}=C^{-1}e^{tA}C$$

Demostració. De $x=C\tilde{x}$, derivant,

$$AC\tilde{x}=Ax=x'=C\tilde{x}'\implies\tilde{x}'=C^{-1}AC\tilde{x}\ (*)$$

I, $e^{tC^{-1}AC}$ és la matriu fonamental de (*) que en $t=0$ és I. Per altra banda.

$$(C^{-1}e^{tA}C)_{|t=0}=C^{-1}IC=I.$$

Recordant que $(e^{tA})'=Ae^{tA}$, llavors $(C^{-1}e^{tA}C)'=C^{-1}Ae^{tA}C=(C^{-1}AC)(C^{-1}e^{tA}C)$ llavors $C^{-1}e^{tA}C$ és una m.f. de (*), llavors $e^{tC^{-1}AC}=C^{-1}e^{tA}C$. □

Corol·lari 30. *Si $\exists C$ tal que $C^{-1}AC=D$ on D és diagonal, llavors*

$$C^{-1}e^{tA}C=e^{tC^{-1}AC}=e^{tD}=\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}\implies e^{tA}=C\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}C^{-1}$$

Nota 19. *Si M és una matriu fonamental de $x' = Ax$, llavors $M\tilde{C}$ també ho és. On $\tilde{C}$ és una matriu constant amb determinant diferent de 0. Llavors, en el corol·lari, tenim que:*

$$C\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

ja és una matriu fonamental (sense necessitat de calcular la inversa).

2.4.4 Càlcul de la matriu exponencial

Considerem el sistema

$$(*)x' = Ax, \ A \in \mathscr{A}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Buscarem un canvi lineal de variables $x = C\tilde{x}$ que transformen (*) en

$$\tilde{x}' = C^{-1}AC\tilde{x}$$

de manera que $C^{-1}AC$ sigui el més simple possible. En el nostre contexte serà la forma canònica de Jordan.

Proposició 31. *(Forma canònica de Jordan) Sigui $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\exists C$ tal que $J = C^{-1}AC$ té la forma diagonal per blocs*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

on cada block J_j és una matriu $n_j \times n_j$ amb $n_j \geq 1$.

$$n_1 + \cdots + n_k = n$$

de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Els nombres λ_j són els vaps d'A. Si descomponen en vaps reals, tant J com C són reals.

Si la matriu A és real, una forma canònica de Jordan real és tal que si $\lambda_j = a + bi$ (amb $b \neq 0$) els corresponents:

$$J_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_j & a_j & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_j & -b_j & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_j & a_j & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_j & -b_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b_j & a_j & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_j & -b_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_j & a_j \end{pmatrix}$$

2.4.5 Càlcula de la matriu exponencial

Volem calcular explícitament e^{tA}, on $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sabem que $e^{tC^{-1}AC} = C^{-1}e^{tA}C$, llavors escollim C tal que $C^{-1}AC = J$ on J és de la forma de Jordan.

Lema 32. *Suposem que J és diagonal per blocs, llavors*

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{tJ_n} \end{pmatrix}$$

Demostració. És immediat a partir de J^l és fer potencia dels blocs i la definició de e^{tJ}. $\square$

Per a qualsevol $A \in (\mathbb{R})$ sabem que existeix C tal que $\mathbb{C}$ compleix que

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}$$

on

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Proposició 33. *Sigui J un bloc de Jordan $k \times k$, on $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.*

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t^2 \frac{1}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{k-1} \frac{1}{(l-1)!} & t^{k-2} \frac{1}{(l-2)!} & t^{k-3} \frac{1}{(l-3)!} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Demostració. Tenim que $J = \lambda \operatorname{Id} + N$, on

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera observació és que $\lambda \operatorname{Id} N = N \lambda \operatorname{Id}$. Ara, per inducció es veu clarament que:

$$N^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

que només té uns a la j-éssima diagonal per sota de la diagonal. En particular, $N^k = 0$. Llavors,

$$e^{tJ} = e^{t(\lambda \operatorname{Id} + N)} = e^{t\lambda \operatorname{Id} + tN} = e^{t\lambda \operatorname{Id}} e^{tN} = e^{\lambda t} \operatorname{Id} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} t^j N^j = e^{\lambda \operatorname{Id}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} t^j N^j$$

Que és suma de matrius de la forma descrita anteriorment amb el factor $\frac{1}{j!} t^j$ multiplicant. Llavors, el resultat és la matriu descrita.

$\square$

Si la matriu original $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ té una "forma de Jordan"real de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} C & \mathrm{Id} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C & \mathrm{Id} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C \end{pmatrix}$$

on (amb $a, b \in \mathbb{N}$)

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anomenarem

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{Id} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\Lambda = \begin{pmatrix} C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C \end{pmatrix}$$

Es compleix que $\Lambda\tilde{N} = \tilde{N}\Lambda$.

$$e^{tJ} = e^{t(\Lambda+\tilde{N})} = e^{t\Lambda}e^{t\tilde{N}}$$

Definim $C = a\,\mathrm{Id} + bD$, on

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

llavors $\Lambda = a\,\mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b\tilde{D}$, on

$$\begin{pmatrix} D & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D \end{pmatrix}$$

Aleshores, $e^{t\Lambda} = e^{t(a\,\mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b\tilde{D})} = e^{ta\,\mathrm{Id}_{2k\times 2k}}e^{tb\tilde{D}} = e^{at}e^{tb\tilde{D}}$. Calculem $e^{tb\tilde{D}} = \sum_{j\geq 0} \frac{t^j b^j}{j!}\tilde{D}^j$. Observem que

1. $D^2 = DD = -\mathrm{Id}_{2\times 2}$
2. $D^3 = DD^2 = -D$
3. $D^4 = DD^3 = \mathrm{Id}_{2\times 2}$
4. $D^5 = DD^4 = D$

Tenim que $e^{tbD} = \sum_{j\geq 0} \frac{b^j t^j}{j!} D^j$, si escrivim

$$D^j = \begin{pmatrix} d_{1,j} & d_{2,j} \\ d_{3,j} & d_{4,j} \end{pmatrix}$$

Llavors, $e^{tbD} =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j\geq 0} \frac{b^j t^j}{j!} d_{1,j} & \sum_{j\geq 0} \frac{b^j t^j}{j!} d_{2,j} \\ \sum_{j\geq 0} \frac{b^j t^j}{j!} d_{3,j} & \sum_{j\geq 0} \frac{b^j t^j}{j!} d_{4,j} \end{pmatrix}$$

Que, al seu temps, tenim que:

1. $d_{1,j} = 0$ si $j = 2l+1$ o $d_{1,j} = (-1)^l$ si $j = 2l$
2. $d_{2,j} = 0$ si $j = 2l$ o $d_{2,j} = (-1)^{l+1}$ si $j = 2l+1$

3. $d_{3,j} = 0$ si $j = 2l$ o $d_{3,j} = (-1)^{2l+1}$ si $j = 2l + 1$

4. $d_{4,j} = 0$ si $j = 2l + 1$ o $d_{4,j} = (-1)^l$ si $j = 2l$

Així que, respectivament tindrem:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(bt)^{2l}}{(2l)!}(-1)^l = \cos bt$$
$$-\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(bt)^{2l+1}}{(2l+1)!}(-1)^l = -\sin bt$$
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(bt)^{2l+1}}{(2l+1)!}(-1)^l = \sin bt$$
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(bt)^{2l}}{(2l)!}(-1)^l = \cos bt$$

Per tant, ens queda:

$$e^{tbD} = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

que ha de ser la m.f. (que en $t = 0$ és la Id) de:

$$x' = bDx = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} x$$

Així que ho podem comprovar derivant: $(e^{tbD})' = D(e^{tbD})$, que a banda i banda és:

$$\begin{pmatrix} -b\sin bt & -b\cos bt \\ b\cos bt & -b\sin bt \end{pmatrix}$$

En resum, si $J = a\,\mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b\tilde{D} + \tilde{N}$

$$e^{tJ} = e^{at} \begin{pmatrix} e^{tbD} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{tbD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \cdots & \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!}\,\mathrm{Id} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

Corol·lari 34. *El sistema $x' = Ax$ amb $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ té solucions periòdiques $\iff$ A té un vap de la forma $\lambda = ib$.*

Exercici: *$x' = Ax$ amb A real, $v \ker(A - \lambda\,\mathrm{Id})$, $v \neq 0$, $\lambda = a + bi$, amb $b \neq 0$. Sabem que $e^{\lambda t}v$ n'és una solució complexa.*

1. $e^{\lambda t}v + e^{\overline{\lambda} t}\overline{v}$, $i(e^{\lambda t}v - e^{\overline{\lambda} t}\overline{v}$ són dues solucions de $x' = Ax$ reals l.i.

2. $\Re e^{\lambda t}v$ i $\Im e^{\lambda t}v$ són dues solucions de $x' = Ax$ reals l.i.

Exercici: *Trobeu e^{tA} on*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici: *Suposem que $\lambda = a + bi$ $b \neq 0$ és vap doble d'$A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i que $\dim\ker(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 1$. Trobeu expressions de 4 solucions l.i. reals.*