1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(6-\lambda) - 2\cdot(-6) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 6x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

1). При $\lambda_1 = 2$

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2x_2$$

При $x_2 = -1$ $x_1 = 2$

2) При $\lambda_2 = 3$

$$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} x_2$$

$$X = \begin{pmatrix} -2a & -\frac{3}{2}a \\ a & a \end{pmatrix}$$

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Показать, что любой вектор является для него собственным.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) - 0 \cdot 0 = 0$$

$$(-1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Теперь найдем собственные вектора вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = -x_1 \\ 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Из этого следует, что данной системе удовлетворяют координаты любого вектора и как ещё одно следствие любой вектор для оператора из условия является для него собственным.

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение:

Предположим, что вектор x является собственным вектором заданного линейного оператора, тогда должно существовать некоторое вещественное число λ, при котором

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = 1\lambda \\ -1 + 3 = 1\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2.$$

Таким образом, вектор $x = (1, 1)$ является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей A.

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$ Установить, является ли

вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Такая система не имеет смысла, следовательно вектор $x = (3, -3, -4)$ не является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей A.