

$$y_1 = 59$$

$$-5 \cdot 59 + 5 y_2 = -460$$

$$y_2 = -33$$

$$5 \cdot 59 + 2(-33) + 3 y_3 = 193$$

$$y_3 = -12$$

if ~~matrix~~ ~~matrix~~  $h^T x = y$

$$3 x_1 - 5 x_2 + 5 x_3 = 59$$

$$5 x_2 + 2 x_3 = -33$$

$$3 x_3 = -12$$

$$x_3 = -4, \quad x_2 = -5, \quad x_1 = 6$$



1. Привести систему уравнений к нормальной форме Тейлора:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

2. Привести расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{-2 \ -1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_4 = c$$

$$-2x_3 + 3c = 4$$

$$-2x_3 = 4 - 3c$$

$$x_3 = -\frac{4-3c}{2} = -2 + 1,5c$$



$$-x_2 + x_3 + 5x_4 = -2$$

$$x_3 + 5x_4 + 2 = x_2$$

$$-2 + 1,5c + 5c + 2 = 6,5c = x_2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 = -x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$x_1 = -6,5c - 2 + 1,5c + 2c = -3c - 2$$

Ansatz:  $x_1 = -3c - 2$ ;  $x_2 = 6,5c$ ;  $x_3 = 1,5c - 2$ ;  $x_4 = c$

$$-3c - 2 + 6,5c - 1,5c + 2 - 2c = 0$$

$$2(-3c - 2) + 6,5c - 1,5c - 2 + c =$$

$$= -6c - 4 + 6,5c - 1,5c - 2 + c = -2$$

$$-3c - 2 + 6,5c - 3(1,5c - 2) + c =$$

$$= -3c - 2 + 6,5c - 4,5c + 6 + c = 4$$



4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array} \right).$$

Найти соотношение между параметрами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при которых система является несовместной.

Решение:

Преобразуем матрицу  $\tilde{A}$  к ступенчатой форме.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b - 4a \\ 0 & -6 & -12 & c - 7a \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b - 4a \\ 0 & 0 & 0 & c + a - 2b \end{array} \right)$$

Если  $c + a - 2b \neq 0$ , то система является несовместной.



1. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = -4 + 6 = 2 \neq 0,$$

следовательно система совместна

$$\det_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$$

$$\det_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

$$x_1 = \frac{\det_1}{\det} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{\det_2}{\det} = \frac{4}{2} = 2$$



$$5) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1 + 12) + 1(1 + 6) + 5(4 - 2) =$$

$$= 26 + 7 + 10 = 43 \neq 0$$

$$\det_1 = 86$$

$$\det_2 = -43$$

$$\det_3 = 43$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

2. Найти  $L$  - матрицу  $L$  - разложения для матрицы коэффициентов:

$$a) \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & +2 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & 12 & 2 & & \\ 3 & 26 & 30 & & & \end{array} \right)$$

$$L = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & & & \\ 0 & 5 & 4 & +4 & & \\ 0 & 20 & 18 & & & \end{array} \right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & & & \\ 0 & 5 & 4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array} \right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



$$5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 39 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{+2} \quad \boxed{+3} \quad \boxed{+4} \\ \leftarrow \text{"} \\ \leftarrow \text{"} \\ \leftarrow \text{"} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 10 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{+5} \quad \boxed{+6} \\ \leftarrow \text{"} \\ \leftarrow \text{"} \end{array}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{+7} \\ \leftarrow \text{"} \end{array}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$



3. Решить систему линейных уравнений  
методом ЛУ - разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 5 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +7+8 \\ - \\ - \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} +7+8 \\ - \\ - \end{array} \rightarrow (x_2, x_1, x_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -16 \\ 0 & -7 & -20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +7 \\ - \\ - \end{array} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -16 \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решить систему

$$Ly = b$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 7y_1 + y_2 = -6 \\ 8y_1 + \frac{2}{3}y_2 + y_3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -13 \end{cases}$$

$$y_3 = -5 - 8y_1 - \frac{2}{3}y_2 = -13 + \frac{21}{3} = \frac{52}{3}$$



2. Menge Lösung  $V_x = y$

$$x_2 + 2x_1 + 3x_3 = 1$$

$$-3x_1 - 16x_3 = -13$$

$$\frac{52}{3}x_3 = \frac{52}{3}$$

$$x_3 = 1$$

$$-3x_1 - 16 = -13$$

$$-3x_1 = 3$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 1 - 2x_1 - 3x_3 = 1 - 2(-1) - 3 =$$

$$= 1 + 2 - 3 = 0$$

Ansatz:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$



4. Решить систему линейных уравнений методом Кривоного

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 - 45 x_2 + 45 x_3 = 531 \\ -45 x_1 + 50 x_2 - 15 x_3 = -460 \\ 45 x_1 - 15 x_2 + 38 x_3 = 193 \end{cases}$$

Произведем разложение на  $L L^T$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{81} = 9$$

$$l_{21} = \frac{-45}{9} = -5 = \frac{a_{21}}{l_{11}}$$

$$l_{31} = \frac{45}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} (a_{32} - l_{21} l_{31}) = \frac{1}{5} (-15 - (-5) \cdot 5) = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38 - 25 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

Получим матрицу:

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решим систему  $Ly = b$

$$\begin{cases} 9 y_1 = 531 \\ -5 y_1 + 5 y_2 = -460 \\ 5 y_1 + 2 y_2 + 3 y_3 = 193 \end{cases}$$