

1. Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц:

a) A - матрица 4×2 , B - матрица 4×2

Данные матрицы нельзя перемножить, т. к. количество столбцов одной будет не совпадать с количеством строк другой.

б) A - матрица 2×5 , B - матрица 5×3

$A \times B = C$ - матрица 2×3

в) A - матрица 8×3 , B - матрица 3×8

$A \times B = C$ - матрица 8×8

$B \times A = D$ - матрица 3×3

г) A - квадратная матрица 4×4 ,

B - квадратная матрица 4×4 .

$A \times B = C$ - матрица 4×4

$B \times A = D$ - матрица 4×4

2. Найми $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2-1 \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 0 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Из линейных комбинаций столбцов и элементов матрицы на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислите линейную комбинацию

$$3A - 2B + 4C \quad \text{для матриц}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

4. Dava mampua $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Berhitung

$$AA^T \text{ u } A^T A.$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

1. Determinante esquisito:

$$a) \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - (-\cos x) \cos x =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$b) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot 0) = 9 \cdot 20 = 180$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -7 \\ 4 & 5 & 6 & & \\ 7 & 8 & 9 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ 0 & -3 & -6 & -2 & \\ 0 & -6 & -12 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ 0 & -3 & -6 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{vmatrix} = 0$$

2. Eigenwerte von A sind 4. Hinweis:

$$a) \det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A =$$

$$= 4 \cdot 4 = 16$$

$$b) \det(A^T) = \det A = 4$$

$$c) \det(2A) = 2 \cdot n \cdot 4 = 8n, \text{ weil } n -$$

Zeilen von A (einmal 2) \rightarrow $2 \cdot n$ \rightarrow $2 \cdot n \cdot 4 = 8n$.

3. Показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix} \text{ вырожденная}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 & 3 \\ 4 & -14 & 6 & \leftarrow \\ -3 & 7 & 13 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ -2 & 7 & -3 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

4. Найти ранг матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{-1 \cdot 2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ранг матрицы равен 2, так как в ней есть минор 2-го порядка, отличный от нуля, а миноры более высокого порядка отсутствуют.

$$b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \text{является суммой 1-ой и 2-ой строк.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \boxed{-1} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ранг матрицы равен 3, так как в ней есть минор 3-го порядка, отличный от нуля, а миноры более высокого порядка отсутствуют.