1. Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц:

а) A - матрица 4 × 2, B - матрица 4 × 2

Данные матрицы нельзя перемножить, т. к. количество столбцов одной всегда будет не совпадать с количеством строк другой.

б) A - матрица 2 × 5, B - матрица 5 × 3

A × B = C - матрица 2 × 3

в) A - матрица 8 × 3, B - матрица 3 × 8

A × B = C - матрица 8 × 8

B × A = D - матрица 3 × 3

г) A - квадратная матрица 4 × 4,

B - квадратная матрица 4 × 4.

A × B = C - матрица 4 × 4

B × A = D - матрица 4 × 4

2. Найти сумму и произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2-1 \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 2\cdot 0 & 1\cdot(-1) - 2\cdot 5 \\ 3\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 0\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 - 1\cdot 3 & 4\cdot(-2) - 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 3 & 0\cdot(-2) + 5\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию

$3A - 2B + 4C$ для матриц

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$3\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить

AA^T и A^TA.

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4\cdot4+1\cdot1 & 4\cdot5-1\cdot2 & 4\cdot2+1\cdot3 \\ 5\cdot4-2\cdot1 & 5\cdot5+2\cdot2 & 5\cdot2-2\cdot3 \\ 2\cdot4+3\cdot1 & 2\cdot5-3\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4\cdot4+5\cdot5+2\cdot2 & 4\cdot1-5\cdot2+2\cdot3 \\ 1\cdot4-2\cdot5+3\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - (-\cos x)\cos x =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 9 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot 0) = 9 \cdot 20 = 180$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \boxed{-4}\ \boxed{-7} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \boxed{-2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

2. Определитель матрицы A равен 4. Найти:

а) $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = 4 \cdot 4 = 16$

б) $\det(A^T) = \det A = 4$

в) $\det(2A) = 2 \cdot n \cdot 4 = 8n$, где n – количество строк (столбцов) в матрице A.

Работа над ошибками

2. Определитель матрицы A равен 4. Найти:

в) $\det(2A)$

Умножение строки или столбца матрицы на число λ приведет к умножению определителя матрицы на то же число. Следовательно:

$\det(2A) = 2^n \cdot 4$, где n – количество строк (столбцов) в матрице A.

3. Доказать, что матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$ вырожденная

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} \boxed{3} = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ -2 & 7 & -3 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

4. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{\cdot(-1)}\ \boxed{\cdot(-2)} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

ранг матрицы равен 2, так как в ней есть минор 2-го порядка, отличный от нуля, а миноры более высокого порядка отсутствуют.

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ - является суммой 1-ой и 2-ой строки.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-1} \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

ранг матрицы равен 3, так как в ней есть минор 3-го порядка, отличный от нуля, а миноры более высокого порядка отсутствуют.