1. Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x + 1$,

$f_4(x) = x - e^x$

Решение.

Заметим, что $f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$, то есть вектор $f_4(x)$ - линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, из чего можно сделать вывод, что $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x + 1$ и $f_4(x) = x - e^x$ линейно зависимы.

2. Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$,

$f_4(x) = (x+1)^2$

Решение:

1). Представим выражение $f_4(x) = (x+1)^2$ в следующем виде:

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$,

тогда $f_4(x) = f_3(x) + 2f_2(x) + \frac{1}{2} f_1(x)$,

то есть вектор $f_4(x)$ - линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, из чего можно сделать вывод, что $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ и $f_4(x) = (x+1)^2$ линейно зависимы.

3. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in R^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$

$x = \frac{1}{2} b_1 + b_2 + 3 b_3$

$x (b_2, 3 b_3, \frac{1}{2} b_1)$

4. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in$

$\in R^3[x]$.

а) в базисе $1, x, x^2$

$\vec{x}(2, -2x, 3x^2)$

б) в базисе $x^2, x-1, 1$

$y_1(x) = x^2$

$y_2(x) = x - 1$

$y_3(x) = 1$

$a\,y_1(x) + b\,y_2(x) + c\,y_3(x) \Rightarrow$

$ax^2 + bx - b + c$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ -b + c = 2; \quad c = 0 \end{cases}$$

$\vec{x}(3x^2, -2(x-1), 0 \cdot 1)$

5. Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю.

В соответствии с условием мы имеем множество векторов вида $(0, a, b)$ и множество векторов вида $(c, 0, d)$.

Сложим 2 любых вектора из выбранных нами множеств:

$$(0 + c, a + 0, b + d) = (c, a, b + d)$$

Полученные векторы принадлежат новому виду множества, что указывает на то, что совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю, не является линейным подпространством.

б) Все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

В соответствии с условием мы имеем множество векторов вида

$$(\alpha u_1, \beta u_2, \ldots, \gamma u_n),$$

где $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = const$, а $\{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\} =$ $=$ variabilis.

$$(\alpha_1 u_1, \beta_1 u_2, \ldots, \gamma_1 u_n) + (\alpha_2 u_1, \beta_2 u_2, \ldots, \gamma_2 u_n) =$$
$$= ((\alpha_1 + \alpha_2) u_1, (\beta_1 + \beta_2) u_2, \ldots, (\gamma_1 + \gamma_2) u_n)$$

$$\delta(\alpha u_1, \beta u_2, \ldots, \gamma u_n) =$$

$$= (\delta\alpha u_1, \delta\beta u_2, \ldots, \delta\gamma u_n)$$

Полученные векторы также принадлежат указанному в задании множеству всех векторов вида $(\alpha u_1, \beta u_2, \ldots, \gamma u_n)$, т.е. данное множество является линейным пространством.

3 Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов.

Нет, так как скалярное произведение векторов определяется произведением длин этих векторов на косинус угла между ними.

б) удвоенное обычное скалярное произведение векторов.

Да, так как подобное условие подчиняется, выполненным для евклидова пространства, аксиомам.

Работа над ошибками

3 Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов

Допустим:

$x_1 = (6; 0) \Rightarrow |x_1| = 6$

$x_2 = (0; 8) \Rightarrow |x_2| = 8$

$y = (3; 4) \Rightarrow |y| = 5$

$x_1 + x_2 = (6; 8) \Rightarrow |x_1 + x_2| = 10$

$(x_1 + x_2, y) = 10 \cdot 5 = 50$

$(x_1, y) + (x_2, y) = 6 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 70$

$(x_1 + x_2, y) \neq (x_1, y) + (x_2, y) \Rightarrow$ не будет евклидовым

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов

3 является λ из аксиомы

$(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$. В этой связи все аксиомы евклидова пространства не нарушаются – тройка легко выносится за скобку.