Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 16. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надежностью 0,95, если выборочная средняя $M = 80$, а объем выборки $n = 256$.

$\bar{x} = 80$, $n = 256$, $\sigma = 16$.

Решение.

Найдем доверительный интервал для математического ожидания a с надежностью 0,95, используя формулу:

$$\bar{x} - z_{0,95/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z_{0,95/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z_{0,95/2} = \underbrace{\text{НОРМ.СТ.ОБР}\left(0,95 + \frac{0,05}{2}\right)}_{\text{Excel}} \approx 1,96$$

Получаем после подстановки известных данных:

$$80 - 1,96\frac{16}{\sqrt{256}} < a < 80 + 1,96\frac{16}{\sqrt{256}}$$

$$78,04 < a < 81,96$$

Ответ: $(78,04;\ 81,96)$

В результате 10 независимых измерений некоторой величины x, выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные:

6,9; 6,1; 6,2; 6,8; 7,5;

6,3; 6,4; 6,9; 6,7; 6,1

Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины x при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0,95.

Решение

Найдем числовые выборочные характеристики

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{10}\,65,9 = 6,59$ - выборочная средняя

$D_x = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10}\,1,829 \approx 0,183$ - выборочная дисперсия

$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,183} \approx 0,428$ - выборочное среднеквадратичное отклонение

Полагая, что x имеет нормальное распределение, найдем доверительный интервал для неизвестного математического ожидания генеральной совокупности. Степень надежности считаем равной $\alpha = 0,95$

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

где $z_{\alpha/2}$ определяется из таблицы распределения Стьюдента: СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х $(1-0,95;\ 10-1) \approx 2,262$.

Получаем после подстановки известных данных:

$$6{,}59 - 2{,}262 \cdot \frac{0{,}428}{\sqrt{10}} < a < 6{,}59 + 2{,}262 \cdot \frac{0{,}428}{\sqrt{10}}$$

$$6{,}284 < a < 6{,}896$$

Ответ: $(6{,}284;\ 6{,}896)$

Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 17 мм. Используя односторонний критерий с $\alpha = 0,05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n = 100$ шариков средний диаметр оказался равным 17,5 мм, а дисперсия известна и равна 4 мм.

Решение

Нулевая гипотеза: $H_0 : \mu = 17$

Альтернативная гипотеза (односторонняя): $H_1 : \mu > 17$

Вычисляем наблюдаемое значение критерия

$$V_{набл.} = Z_н = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{17,5 - 17}{\sqrt{4}} \sqrt{100} = 2,5$$

По таблице функции Лапласа найдем критическую точку для односторонней критической области (при гипотезе $H_1 : \mu > 17$) по уровню значимости $\alpha = 0,05$:

$$\Phi(V_{кр}) = Z = \frac{1 - 2 \cdot \alpha}{2} = 0,45, \text{ откуда}$$

$$Z \approx \text{НОРМ.СТ.ОБР}(0,95) \approx 1,645$$

Так как $Z_н > Z \Rightarrow 2,5 > 1,645$, то принимаем гипотезу H_1. Средний диаметр больше 17 мм.

Продавец утверждает, что средний вес пачки печенья составляет 200 г. Из партии извлечена выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки составляет:

202, 203, 199, 197, 195,

201, 200, 204, 194, 190.

Известно, что их веса распределены нормально.

Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99 %?

Решение:

Вычислим показатели выборки

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{10}\cdot 1985 = 198,5$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}\cdot 178 = 19,8(3)$$

$$\sigma = \sqrt{19,8(3)} \approx 4,453$$

Выдвигаем нулевую гипотезу $H_0: a = 200$ при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 200$.

$$z_n = \frac{\bar{x} - a}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{198,5 - 200}{4,453}\cdot\sqrt{10} \approx -1,065$$

По таблице критических точек Стьюдента найдем критическую точку по уровню значимости $\alpha = 1 - 0,99$ и числу степеней свободы $k = n - 1$, откуда $z \approx 3,25$

Так как $|z_n| = 1,065 < 3,25 = z$, то нулевую гипотезу о равенстве среднего веса 200 г. можно принять.