Математическая логика

Проверить любым способом, является ли данная логическая формула тавтологией:

1. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee \overline{A})$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$B \vee \overline{A}$	$(A \vee B) \rightarrow (B \vee \overline{A})$
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Высказывание истинно при любых значениях входящих в него простых высказываний называется тавтологией. Следовательно данное выражение таковым не является (2 строка таблицы истинности).

2. $A \rightarrow (A \vee (\overline{B} \cap A))$

$A \rightarrow A$

A	$A \rightarrow A$
1	1
0	1

Данное выражение является тавтологией.

Сформулируйте словесно высказывания:

3. $(\overline{A} \cup B) \to \overline{C}$

A: сегодня светит солнце;

B: сегодня сыро,

C: я поеду на дачу

Если сегодня пасмурно или сыро, то я не поеду на дачу.

4. $C \to (A \cup \overline{B})$

Я поехал на дачу, так как сегодня солнечно или не сыро.

Пользуясь правилом построения противополож-ного высказывания, записать утверждения, противоположные следующим:

5. На любом курсе каждого факультета есть студенты, сдающие все экзамены на „отлично."

Есть курс на каком-либо факультете, где ~~все~~ нет студентов сдающих какой-либо экзамен на „отлично."

6. Каждый студент философского факультета имеет друга, который умеет решать все логические задачи

На философском факультете есть студент у которого нет друга умеющего решать какие-либо логические задачи.

7. В любом самолете на рейсе Вашингтон-Москва присутствует хотя бы один сотрудник силовых органов, в каждой пуговице одежды которого вмонтирован микрофон.

Существует самолет на рейсе Вашингтон-Москва, где все сотрудники силовых органов в какой-либо пуговице одежды не имеют вмонтированного микрофона.

Множества. Предел последовательности

Представьте в виде несократимой рациональной дроби:

8. $0.(216)$

$a = 0.(216)$

$1000a = 216.(216)$

$1000a = 216 + 0,(216)$

$1000a = 216 + a$

$999a = 216$

$a = \frac{216}{999} = \frac{72}{333} = \frac{24}{111} = \frac{8}{37}$

9. $1.0(01)$

$a = 1.0(01)$

$10a = 10.(01)$

$10a = 10 + 0,(01)$

$10a = 10 + \frac{1}{99}$

$10a = \frac{991}{99}$

$a = \frac{991}{990}$

$b = 0.(01)$

$100b = 1.(01)$

$100b = 1 + 0.(01)$

$100b = 1 + b$

$99b = 1$

$b = \frac{1}{99}$

1 0. Представьте 1 в виде суммы трех рациональных дробей с разными знаменателями и числителем равным 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

1 2. Найдите значение предела:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)\ n} \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2 - n} = 0$$

Представьте 1 в виде суммы шести рациональных дробей с разными знаменателями и числителем равным 1.

Формула для разложения

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2\cdot(2+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6+1} + \frac{1}{6(6+1)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4(4+1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$$

Решение

Пусть $\forall \varepsilon > 0$. Тогда

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \le \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}} +$$

$$+ \ldots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1/2^{n+1}}{1-(1/2)} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

при $n > \log_2 \varepsilon$ и всех натуральных p.