

VERSUCH V106

Gekoppelte Pendel

Jannis Vornholt
jannis.vornholt@tu-dortmund.de

Alfredo Manente
alfredo.manente@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.2020

Abgabe: 15.12.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Gleichsinnige Schwingung	3
2.2	Gegensinnige Schwingung	4
2.3	Gekoppelte Schwingung	4
3	Durchführung	6
4	Messwerte	7
5	Auswertung	8
5.1	Berechnung der Schwingungsfrequenzen durch die Messwerte	8
5.2	Berechnung der Schwingungsfrequenzen in Abhängigkeit der Länge l . . .	9
5.3	Berechnung von T_S durch T_+ und T_-	9
5.4	Berechnung der Kopplungskonstanten	10
5.5	Graphische Darstellung	10
5.6	Vergleich von Theorie- und Praxiswerten	12
6	Diskussion	13
	Literatur	14

1 Zielsetzung

Beim Versuch der gekoppelten Pendel werden zwei Stabpendel, gekoppelt mithilfe einer Feder, in gleichsinnige, gegensinnige und gekoppelte Schwingung gebracht. Um das Schwingverhalten der Pendel charakterisieren zu können, werden Schwingungs- und Schwebungsdauern der gekoppelten Pendel gemessen und die verschiedenen Schwingungsfrequenzen und die Federkonstante berechnet.

2 Theorie

Bei einem einzelnen Pendel wirkt die Gewichtskraft entgegen der Bewegung und führt zu einem Drehmoment, dass auf das Pendel ausgeübt wird. Mit einer Kleinwinkelnäherung für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage ($\sin \phi \approx \phi$) folgt eine Lösung der Bewegungsgleichung, welche eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1)$$

beschreibt, wobei $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ [1] die Gravitationsbeschleunigung und l die Länge des Pendels beschreibt. Damit ist die Schwingungsdauer eines Pendels bei kleinen Auslenkungen unabhängig von der Pendelmasse und dem Auslenkwinkel.

Werden zwei identische Pendel aneinander gekoppelt lässt sich die Bewegung des Systems als eine Überlagerung zweier Eigenschwingungen darstellen. Die Lösungen ergeben wieder harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_1, ω_2 und den Auslenkwinkeln α_1, α_2 . Je nach Anfangsbedingungen entstehen verschiedene Schwingungsformen.

2.1 Gleichsinnige Schwingung

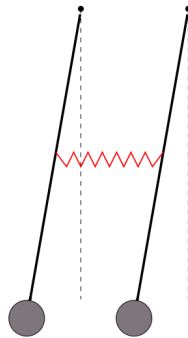


Abbildung 1: Gleiche Auslenkung $\alpha_1 = \alpha_2$ bei der gleichsinnigen Schwingung [S.2, 2].

Bei der gleichsinnigen Schwingung werden die identischen Pendel um den gleichen Auslenkwinkel $\alpha_1 = \alpha_2$ ausgelenkt. Die Feder übt keine Kraft aus und die rücktreibende

Kraft wird nur durch die Gravitation verursacht. Die Schwingungsfrequenz

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2)$$

entspricht der Schwingungsfrequenz eines einzelnen Pendels, weswegen sich die Schwingungsdauer ergibt zu

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

2.2 Gegensinnige Schwingung

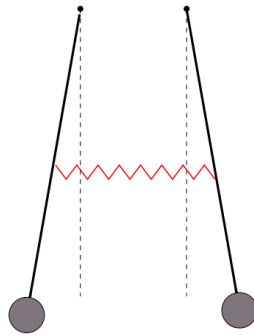


Abbildung 2: Entgegengesetzte Auslenkung $\alpha_1 = -\alpha_2$ bei der gegensinnigen Schwingung [S.2, 2].

Die gegensinnige Schwingung entsteht wenn die identischen Pendel um den entgegengesetzten Winkel $\alpha_1 = -\alpha_2$ ausgelenkt werden. Die Kopplungsfeder übt eine entgegengesetzte, gleichgroße Kraft auf die einzelnen Pendel aus, wodurch eine symmetrische Schwingung mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \quad (4)$$

und der Schwingungsdauer

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + 2K}} \quad (5)$$

beschrieben wird. Hierbei beschreibt K die Kopplungskonstante der Feder.

2.3 Gekoppelte Schwingung

Die gekoppelte Schwingung wird hervorgerufen wenn sich ein Pendel in Ruhelage $\alpha_1 = 0$ befindet, während das andere um den Winkel $\alpha_2 \neq 0$ ausgelenkt wird. Wird das zweite

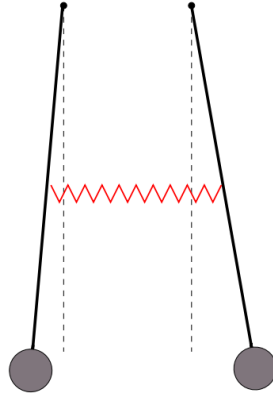


Abbildung 3: Bei der gekoppelten Schwingung passiert eine graduelle Energieübertragung [S.2, 2].

Pendel losgelassen, überträgt es einen Teil seiner Energie an das erste Pendel. Dieses fängt dann langsam an zu schwingen, wobei die Amplitude immer weiter zunimmt. Die Amplitude des ersten Pendels erreicht sein Maximum wenn das zweite Pendel aufhört zu schwingen. Dieser Vorgang der langsamen vollständigen Energieübertragung wiederholt sich immer wieder. Die Zeit zwischen den Stillständen eines Pendels heißt Schwebung. Die Schwebungsdauer und die Schwebungsfrequenz sind gegeben durch

$$T_s = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \qquad \omega_s = \omega_+ - \omega_- \quad (6)$$

Diese sind durch die Schwingungsdauern T_+ der gleichsinnigen und T_- der gegensinnigen Schwingung bestimmt. Die Kopplungskonstante einer gekoppelten Schwingung wird definiert als

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \quad (7)$$

3 Durchführung

In dem Versuch sollen die verschiedenen Schwingungsdauern verschiedener Schwingungsarten gemessen werden bei einer Länge l_1 . Für die Schwingungsdauern T_1 und T_2 der einzelnen Pendel, T_+ der gleichsinnigen Schwingung und T_- der gegensinnigen Schwingung werden pro Messung die Zeit für 5 Schwingungen gemessen. Diese 5 Schwingungen sollen 10 mal für jede dieser zu messenden Schwingungsdauern gemessen werden. Für T_1 und T_2 wird sinngemäß die Kopplungsfeder entfernt. Bei der gekoppelten Schwingung werden die Schwingungsdauer T an beiden Pendeln für 5 Schwingungen und die Schwebungsdauer T_S gemessen. Dieser Vorgang wird auch 10 mal durchgeführt. Allgemein werden all diese Messungen nochmals für einen anderen Abstand der Pendelmasse zur Aufhängung, also einer neuen Länge l_2 , wiederholt.

Abbildung 4 zeigt den hierfür verwendeten Versuchsaufbau.



Abbildung 4: Versuchsaufbau der gekoppelten Pendel

Der Versuchsaufbau besteht aus zwei Stabpendeln, welche durch eine reibungsarme Spitzenlagerung angebracht sind. Die Spitzen befinden sich in einer kegelförmigen Nut um eine reibungsfreie, harmonische Schwingung zu gewährleisten. Die scheibenförmigen Pendelmassen am Stab lassen sich verschieben, wodurch verschiedene Pendellängen einstellbar sind. Die Pendellängen werden vom Aufhängepunkt bis zum Mittelpunkt der Pendelmasse mit einem Maßband gemessen. Die Schwingungsdauern T werden mit Stoppuhren gemessen.

4 Messwerte

Tabelle 1: Messwerte des Versuchs V106 mit $l = 50\text{cm}$.

$T_1[\text{s}]$	$T_2[\text{s}]$	$T_+[\text{s}]$	$T_-[\text{s}]$	$T_{\text{links}}[\text{s}]$	$T_{\text{rechts}}[\text{s}]$	$T_S[\text{s}]$
7.83	7.47	7.40	7.13	7.23	7.18	38.78
7.28	7.34	7.40	6.97	7.15	7.29	38.28
7.34	7.38	7.28	7.00	7.01	7.15	38.25
7.44	7.42	7.41	6.91	7.07	7.18	36.91
7.31	7.31	7.28	6.84	7.12	7.21	39.28
7.31	7.28	7.28	6.87	7.13	7.36	39.63
7.21	7.31	7.25	7.00	7.09	7.87	39.44
7.44	7.18	7.28	6.81	7.09	7.35	39.13
7.37	7.41	7.25	6.94	7.09	7.32	37.18
7.25	7.29	7.18	6.78	7.29	7.20	37.21

Tabelle 2: Messwerte des Versuchs V106 mit $l = 63.5\text{cm}$.

$T_{1.2}[\text{s}]$	$T_{2.2}[\text{s}]$	$T_{+.2}[\text{s}]$	$T_{-.2}[\text{s}]$	$T_{\text{links}.2}[\text{s}]$	$T_{\text{rechts}.2}[\text{s}]$	$T_{S.2}[\text{s}]$
8.44	8.16	8.25	8.16	8.13	8.46	58.63
8.29	8.28	8.19	8.06	8.15	8.56	60.41
8.41	8.25	8.28	8.03	8.26	8.26	58.31
8.38	8.25	8.19	8.06	8.49	8.16	57.25
8.35	8.35	8.37	8.00	8.11	8.10	57.94
8.25	8.31	8.16	7.90	8.33	8.38	58.44
8.31	8.25	8.22	8.00	8.10	8.41	59.25
8.31	8.32	8.34	8.09	8.16	8.49	58.50
8.25	8.28	8.37	8.03	8.21	8.32	58.66
8.43	8.34	8.34	8.07	8.27	8.26	59.50

5 Auswertung

5.1 Berechnung der Schwingungsfrequenzen durch die Messwerte

Die allgemeine Schwingungsfrequenz wird berechnet, durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (8)$$

Um ω_+ , ω_- , ω_S , $\omega_{+,2}$, $\omega_{-,2}$ und $\omega_{S,2}$ berechnen zu können, werden T_+ , T_- , $T_{+,2}$, $T_{-,2}$, durch fünf geteilt, da die Werte für je fünf Schwingungen gemessen wurden. Anschließend werden die Mittelwerte der Ergebnisse und von T_S und $T_{S,2}$, wie folgt bestimmt [3]

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k. \quad (9)$$

Ebenso wie die zugehörigen Standardabweichungen [3]

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (10)$$

und damit der Fehler des Mittelwertes

$$\sigma = \frac{\Delta\bar{x}}{\sqrt{n}}. \quad (11)$$

Tabelle 3 zeigt die Mittelwerte mit Fehler.

Tabelle 3: Mittelwerte mit Fehlern

	Länge = 50cm			Länge = 63,5cm		
	$T_+[s]$	$T_-[s]$	$T_s[s]$	$T_{+,2}[s]$	$T_{-,2}[s]$	$T_{s,2}[s]$
Mittelwert:	1,46	1,39	38,41	1,65	1,61	58,69
Fehler:	$\pm 4,61 \cdot 10^{-3}$	$\pm 6,33 \cdot 10^{-3}$	$\pm 3,03 \cdot 10^{-1}$	$\pm 4,80 \cdot 10^{-3}$	$\pm 4,08 \cdot 10^{-3}$	$\pm 2,61 \cdot 10^{-1}$

Auf die Mittelwerte lässt sich nun Formel (8) anwenden. Die entsprechende Unsicherheit bleibt proportional zum Fehler der Schwingungsdauern. Es gilt [4]

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x}, \quad (12)$$

daraus folgt für diesen Fall

$$\Delta\omega = \frac{\Delta T}{T} \omega. \quad (13)$$

Tabelle 4 zeigt die dementsprechend berechneten Schwingungsfrequenzen mitsamt Unsicherheiten.

Tabelle 4: Gemessene Schwingungsfrequenzen mit Fehlern

	Länge = 50cm			Länge = 63,5cm		
	$\omega_+[1/s]$	$\omega_-[1/s]$	$\omega_s[1/s]$	$\omega_{+,2}[1/s]$	$\omega_{-,2}[1/s]$	$\omega_{s,2}[1/s]$
Mittelwert:	4,30	4,54	$1,64 \cdot 10^{-1}$	3,80	3,91	$1,07 \cdot 10^{-1}$
Fehler:	$\pm 1,36 \cdot 10^{-2}$	$\pm 2,07 \cdot 10^{-2}$	$\pm 1,29 \cdot 10^{-3}$	$\pm 1,10 \cdot 10^{-2}$	$\pm 9,91 \cdot 10^{-3}$	$\pm 4,76 \cdot 10^{-4}$

5.2 Berechnung der Schwingungsfrequenzen in Abhängigkeit der Länge l

Zudem sollen ω_+ , ω_- , ω_s , $\omega_{+,2}$, $\omega_{-,2}$ und $\omega_{s,2}$ nicht nur anhand der gemessenen Schwingungsdauern bestimmt werden, sondern auch in Abhängigkeit der Längen $l = 50cm$ und $l_2 = 63.5cm$. ω_+ und $\omega_{+,2}$ werden durch Formel (2) berechnet, ω_- und $\omega_{-,2}$ durch Formel (4) und ω_s , so wie $\omega_{s,2}$ mit Hilfe von Formel (6). Der Fehler für ω_- und $\omega_{-,2}$, der von k abhängt, wird durch Gleichung (15) bestimmt und ist gleich den Fehlern von ω_s und $\omega_{s,2}$. Die Ergebnisse zeigt Tabelle 5.

Tabelle 5: Schwingungsfrequenzen abhängig von l

	Länge = 50cm			Länge = 63,5cm		
	$\omega_+[1/s]$	$\omega_-[1/s]$	$\omega_s[1/s]$	$\omega_{+,2}[1/s]$	$\omega_{-,2}[1/s]$	$\omega_{s,2}[1/s]$
Mittelwert:	4,43	4,45	$-2,38 \cdot 10^{-2}$	3,93	3,94	$-1,13 \cdot 10^{-2}$
Fehler:		$\pm 2,49 \cdot 10^{-3}$	$\pm 2,49 \cdot 10^{-3}$		$\pm 1,54 \cdot 10^{-3}$	$\pm 1,54 \cdot 10^{-3}$

5.3 Berechnung von T_S durch T_+ und T_-

Die Schwingungsdauer T_S und $T_{S,2}$ werden durch Formel (6), in Abhängigkeit der von l abhängigen T_+ , $T_{+,2}$, T_- und $T_{-,2}$ berechnet. Die entsprechende Unsicherheit ergibt sich aus (15), für diesen Fall gilt

$$\Delta f = \sqrt{\frac{(T_-)^4}{(T_+ - T_-)^2} (\Delta T_+)^2 + \frac{\left((T_+)^2 - 2(T_+ T_-)\right)^2}{(T_+ - T_-)^4} (\Delta T_-)^4} \quad (14)$$

Tabelle 6 zeigt die gerade beschriebenen Werte, so wie die gemessenen Werte für T_S und $T_{S,2}$.

Tabelle 6: Berechnete und gemessene T_S und $T_{S,2}$

	Berechnete Werte		Gemessene Werte	
	$T_S[s]$	$T_{S,2}[s]$	$T_S[s]$	$T_{S,2}[s]$
Mittelwert:	$2,69 \cdot 10^1$	$5,76 \cdot 10^1$	$3,84 \cdot 10^1$	$5,87 \cdot 10^1$
Fehler:	$\pm 2,12$	$\pm 4,94$		

5.4 Berechnung der Kopplungskonstanten

Die Kopplungskonstante k ergibt sich durch Formel (7). Die Unsicherheit von k bestimmt sich hierbei durch die Fehlerfortpflanzung nach Gauß [3]

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2} \quad (15)$$

In diesem Fall

$$\begin{aligned} \Delta k &= \sqrt{\left(\frac{\partial k(\omega_-, \omega_+)}{\partial \omega_-}\right)^2 (\Delta \omega_-)^2 + \left(\frac{\partial k(\omega_-, \omega_+)}{\partial \omega_+}\right)^2 (\Delta \omega_+)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4\omega_- \omega_+^2}{(\omega_-^2 + \omega_+^2)^2}\right)^2 (\Delta \omega_-)^2 + \left(\frac{-4\omega_+ \omega_-^2}{(\omega_-^2 + \omega_+^2)^2}\right)^2 (\Delta \omega_+)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Daraus ergibt sich dann Tabelle 7.

Tabelle 7: Kopplungskonstante

	Länge = 50cm	Länge = 63,5cm
	k	k_2
Mittelwert:	$5,28 \cdot 10^{-2}$	$2,83 \cdot 10^{-2}$
Fehler:	$\pm 5,54 \cdot 10^{-3}$	$\pm 3,85 \cdot 10^{-3}$

5.5 Graphische Darstellung

Zur besseren Übersicht und Vergleichbarkeit zeigen Abbildung 5 und Abbildung 6 die berechneten Daten als Graphiken. Hierbei stellt Abbildung 5 die Daten von ω_+ , ω_- , $\omega_{+,2}$ und $\omega_{-,2}$ dar und Abbildung 6 die Daten von ω_S und $\omega_{S,2}$. Bei Abbildung 5 entsprechen die roten Punkte ω_+ bei $l = 0,5m$ und $\omega_{+,2}$ bei $l = 0,635m$, die blauen Punkte stellen entsprechend ω_- und $\omega_{-,2}$ dar. Alle vier Punkte zeigen zusätzlich den berechneten Fehler an. Die beiden durchgezogenen Graphen entsprechen den Theoriewerten abhängig von l , der Rote, dem von ω_+ , berechnet nach Formel (2) und der Blaue, dem von ω_- , berechnet nach Formel (4).

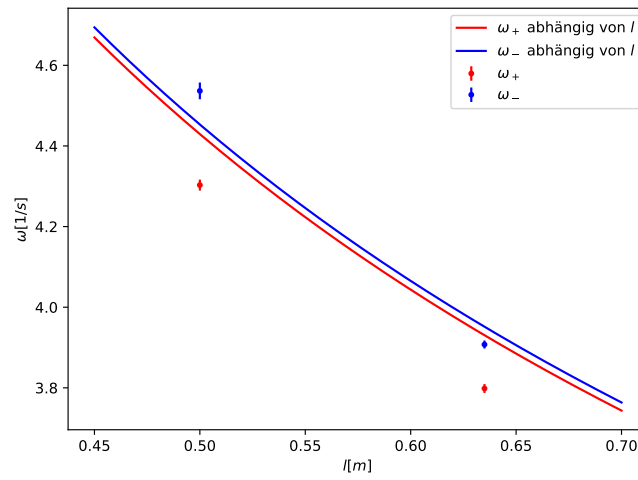


Abbildung 5: Graphische darstellung von ω_+ und ω_- .

Abbildung 6 zeigt äquivalent zu Abbildung 5 die Werte für ω_S , wobei der Theoriewert hier durch Formel (6) berechnet und dargestellt ist.

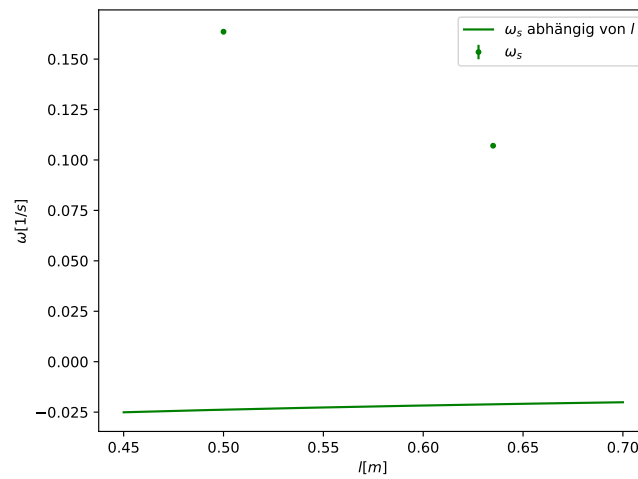


Abbildung 6: Graphische Darstellung von ω_S .

5.6 Vergleich von Theorie- und Praxiswerten

Für die bessere Vergleichbarkeit zeigen Tabelle 8 und 9, die prozentuale Abweichung, der gemessenen Werte, von den theorie Werten. Die Theoriewerte, der Schwingungsdauern, werden mit Formel (17) aus den Theoriewerten der Schwingungsfrequenzen bestimmt.

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega} \quad (17)$$

Tabelle 8: Vergleich von Theorie und Messwerten für $l = 50cm$

	T_+	T_-	T_S	ω_+	ω_-	ω_S
$\frac{Messwert}{Theoriewert}$	1,0282	0,9858	0,1455	0,9707	1,0202	-11,8841
Prozentuale Abweichung:	2,82%	1,42%	85,45%	2,93%	2,02%	1088,41%

Tabelle 9: Vergleich von Theorie und Messwerten für $l = 63,5cm$

	$T_{+.2}$	$T_{-.2}$	$T_{S.2}$	$\omega_{+.2}$	$\omega_{-.2}$	$\omega_{S.2}$
$\frac{Messwert}{Theoriewert}$	1,0313	1,0126	0,1056	0,9669	0,9924	9,4690
Prozentuale Abweichung:	3,13%	1,26%	89,44%	3,31%	0,76%	846,90%

6 Diskussion

Sowohl beim Vergleichen der tabellarischen Werte, als auch der graphisch dargestellten Werte, fällt auf, dass die Schwingungsfrequenzen der gleichsinnigen Schwingungen und der gegensinnigen Schwingungen, theoretisch und praktisch relativ nah aneinander sind, wohingegen die der gekoppelten Schwingungen, stark voneinander abweichen. Der theoretische und praktische Wert, der gleichsinnigen Schwingung für eine Pendellänge von 50cm und 63,5cm liegen lediglich 2,93% bzw. 3,31% auseinander. Bei beiden Werten ist der experimentell bestimmte, der kleinere Wert. Für die Schwingungsfrequenzen, der gegensinnigen Schwingungen gilt ähnliches. Der experimentell bestimmte Wert für das 50cm lange Pendel ist 2,02% größer, als der theoretisch bestimmte Wert. Die praktische Schwingungsfrequenz für das 63,5cm lange Pendel ist sogar nur 0,76% kleiner als die theoretisch berechnete.

Bei den Schwingungsfrequenz der gekoppelten Pendel sieht der Vergleich ganz anders aus. In beiden Fällen haben Theoriewert und Praxiswert unterschiedliche Vorzeichen, was zu vernachlässigen ist, da die Vorzeichen lediglich eine Phasenverschiebung um π signalisieren, was die eigentliche Frequenz nicht verändert. Daher betrachten wir beim Vergleich die Beträge der Schwingungsfrequenzen. Die praktisch gemessene Schwingungsfrequenz des 50cm langen, gekoppelten Pendels, beträgt ganze 1188,41% des theoretischen Wertes, die des 63,5cm langen Pendels, 946,90% des theoretischen Wertes. In beiden Fällen beträgt der Unterschied zwischen Theorie und Praxis fast eine ganze Größenordnung.

Der Vergleich der Schwingungsdauern zeigt ähnliche Muster. Die Messwerte für die Schwingungsdauern der gegensinnigen und gleichsinnigen Schwingungen liegen zwischen 1,42% und 3,13% von den Theoriewerten entfernt. Die gemessenen Schwingungsdauern der Gekoppeltenschwingungen, liegen dagegen 85,45%, für eine Pendellänge von 50cm und 89,44%, für eine Pendellänge von 63,5cm, von den Theoriewerten entfernt. Genau wie bei den Schwingungsfrequenz liegen die Schwingungsdauern der gekoppelten Schwingung etwa eine Größenordnung entfernt von den Theoriewerten.

Die Messreihe der gleichsinnigen und gegensinnigen Schwingungen, können aufgrund der nur kleinen Abweichungen, als vernünftig angenommen werden. Daher kann eine ungenaue Messung der Pendellängen, als Fehlerquelle für die schlechten Werte, der gekoppelten Pendel, ausgeschlossen werden, da dieses sich auch auf die anderen beiden Messreihen ausgewirkt hätte. Gleichmaßen kann eine mögliche fehlerhafte Bestimmung der Kopplungskonstante k , ausgeschlossen werden, da sowohl für die Theorie Werte, als auch für die praktischen Werte, der selbe Wert für k verwendet wurde.

Die letzte mögliche Fehlerquelle ist die Zeitkomponente. Fehlerhafte Stoppuhren können wieder durch die vernünftigen Messreihen ausgeschlossen werden, so bleibt lediglich eine ungenaue Messung der Schwebungsdauer als Ursache. Dies scheint sehr plausibel, wenn bedacht wird, dass die Schwebungsdauern jeweils zwar zehn mal gemessen wurden, allerdings immer nur eine Schwebungsdauer pro Messung. Nicht wie bei den anderen Schwingungsdauern, bei denen pro Messung je fünf Schwingungsdauern gemessen wurden, was die Genauigkeit offensichtlich enorm erhöht.

Abschließend lässt sich sagen, dass die Messreihe, mit Ausnahme der Schwebungsfrequenz, als erfolgreich bewertet werden kann und bei erneuter Durchführung, auch die

Schwebungsdauer für je fünf Schwebungen gemessen werden sollte, um für die Schwebungsfrequenz ebenfalls gute Werte zu erhalten.

Literatur

- [1] Wikipedia. *Schwerefeld*. 2020. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwerefeld> (besucht am 28.12.2020).
- [2] *Anleitung zu Versuch Nr. 106: Gekoppelte Pendel*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2020.
- [3] *Fehler Formeln*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2020.
- [4] *Proportionaler Fehler*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Fehlerfortpflanzung#Eine_fehlerbehaftete_Gr%C3%B6%C3%9Fe (besucht am 14.12.2020).