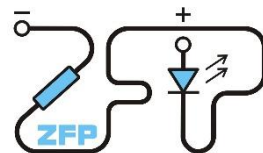


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF



# Fyzikální praktikum I

Úloha č. 21

Název úlohy: Měření tíhového zrychlení

Jméno: David Němec

Studijní skupina: FP-F1X.18'P

Datum měření: 7.4.2025

Datum odevzdání: 14.4.2025

Připomínky opravujícího:

|                              | Možný počet bodů | Udělený počet bodů |
|------------------------------|------------------|--------------------|
| Teoretická část              | 0–2              |                    |
| Výsledky a zpracování měření | 0–9              |                    |
| Diskuse výsledků             | 0–4              |                    |
| Závěr                        | 0–1              |                    |
| Seznam použité literatury    | 0–1              |                    |
| Celkem                       | max. 17          |                    |

Posuzoval:

dne:

# 1 Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení  $g$  metodou matematického kyvadla.
2. Změřte závislost doby kmitu fyzického kyvadla na poloze čochy. Měření proveďte pro obě osy otáčení. Graficky znázorněte.
3. Změřte místní tíhové zrychlení  $g$  metodou reverzního kyvadla.
4. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického. Srovnajte moment setrvačnosti reálného kyvadla s jeho matematickou idealizací.
5. Vypočítejte vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení a porovnejte s délkou matematického kyvadla.

## 2 Teorie

### *Měření pomocí doby kmitu matematického kyvadla*

Těleso libovolného tvaru necháme v důsledku tíhové síly kývat kolem osy neprocházející těžištěm. Z pohybových rovnic tělesa pak lze pro periodu toho pohybu odvodit relativně přesný vztah [1]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right), \quad (1)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení,  $m$  hmotnost tělesa,  $g$  místní tíhové zrychlení,  $d$  vzdálenost těžiště tělesa od osy otáčení a  $\alpha$  maximální výchylka těžiště během kývavého pohybu.

V idealizovaném případě tzv. matematického kyvadla těleso nahradíme hmotným bodem o hmotnosti  $m$  zavěšeným na jednom konci nehmotného závěsu délky  $L$  a necháme jej volně a kývat kolem osy na druhém konci závěsu. Pro moment setrvačnosti matematického kyvadla platí [1]

$$J_M = mL^2. \quad (2)$$

Bude-li se matematické kyvadlo kývat jen s malými výchylkami  $\alpha \ll 1$ , lze člen s touto výchylkou ve vztahu (1) zanedbat, a s využitím (2) tak lze pro periodu matematického kyvadla  $T_M$  psát jednoduše

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (3)$$

Odtud lze místní tíhové zrychlení  $g$  vyjádřit jako

$$g = \frac{4\pi^2}{T_M^2} L. \quad (4)$$

Pro odhad, zda byla aproximace matematickým kyvadlem oprávněná, je nutné spočítat skutečný moment setrvačnosti reálného tělesa a vzdálenost těžiště od osy otáčení. Kuličku zavěšenou na provázku tak nahradíme koulí o průměru  $D$  s momentem setrvačnosti vůči těžišti [1]

$$J_k = \frac{1}{10} m_k D^2, \quad (5)$$

kde  $m_k$  je hmotnost kuličky. Místo provázku budeme uvažovat tenkou tyč o délce  $l$  s momentem setrvačnosti vůči ose v těžišti kolmé na délku, který má velikost [1]

$$J_t = \frac{1}{12} m_t l^2, \quad (6)$$

kde  $m_t$  je hmotnost tyče (provázku).

K výpočtu momentu setrvačnosti  $J'$  vůči libovolné ose, která neprochází těžištěm tělesa, slouží Steinerova věta [1]

$$J' = J_0 + Ma^2, \quad (7)$$

kde  $J_0$  je moment setrvačnosti vůči ose v těžišti, která je rovnoběžná s danou studovanou osou,  $M$  je hmotnost tělesa a  $a$  je vzdálenost této osy od osy procházející těžištěm.

Poloha těžiště soustavy  $N$  těles o hmotnostech  $m_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$  se spočte jako [2]

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (8)$$

kde  $\vec{r}_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$  jsou polohové vektory těžišť jednotlivých těles.

### ***Měření doby kmitu reverzního kyvadla***

Fyzické kyvadlo kmitá kolem dvou rovnoběžných os procházejících rovinou, ve které leží i těžiště kyvadla, se stejnou periodou, pokud se těžiště nachází přesně uprostřed mezi osami, nebo pokud jsou osy od sebe vzdálené o tzv. redukovanou délku kyvadla. Perioda kývání kolem těchto os je pak daná vztahem [1]

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}, \quad (9)$$

kde  $l_r$  je redukovaná délka kyvadla.

Tato redukovaná délka je závislá na momentu setrvačnosti kyvadla vůči těžišti. Může-li tedy kyvadlo kývat kolem rovnoběžných os vzdálených o pevnou vzdálenost, lze změnou momentu setrvačnosti docílit toho, že kyvadlo se bude kolem těchto os kývat se stejnou periodou. Pak je vzdálenost těchto os rovna redukované délce kyvadla.

### ***Výpočet nejistot měření***

Výběrová směrodatná odchylka je [3]

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu})^2}, \quad (10)$$

kde  $\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  je aritmetický průměr naměřených hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Vzorec pro výpočet odchylky nepřímo měřené náhodné veličiny  $y = f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  je podle [3]

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \right)^2 \sigma_{\theta_i}^2}, \quad (11)$$

kde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  jsou jednotlivé nezávislé veličiny.

Ze statistické nejistoty měření (nejistota typu A,  $\sigma_A$ ) a nejistoty měřidla (nejistota typu B,  $\sigma_B$ ) určíme celkovou nejistotu měření ( $\sigma_{celk}$ ) podle vztahu [3]

$$\sigma_{celk} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}. \quad (12)$$

## 2.1 Metoda měření

Nejprve bylo provedeno měření tíhového zrychlení pomocí periody matematického kyvadla. Baterkou byl osvětlen fotodetektor připojený k digitálnímu čítači. Při průchodu kyvadla mezi detektorem a baterkou byl detektor kyvadlem na okamžik zastíněn, čímž se dal přesně určit okamžik průchodu kyvadla rovnovážnou polohou, a tím s velkou přesností změřit periodu kyvadla. Matematické kyvadlo bylo realizováno pomocí kovové kuličky s háčkem, která byla provázkem navázána na pevnou konstrukci tak, aby v rovnovážné poloze její střed přesně zakrýval fotodetektor. Přebývajících konce provázku byly zastříhány, aby nepřispívaly do momentu setrvačnosti kyvadla ani k případnému tření např. o vzduch. Po provedení několika měření doby několika period byla kulička odvázána a byla změřena hmotnost kuličky i hmotnost pohybující se části provázku. Část, kterou byl provázek připevněn ke konstrukci, totiž nepřispívala do momentu setrvačnosti kyvadla.

Při měření tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla byla vždy změřena doba několika period kývání, a to pro obě polohy kyvadla – kývání kolem osy procházející břitem blíže k těžké čočce (čočka nahoře) a kolem osy procházející břitem dál od čočky (čočka dole). Vždy byla posuvným měřítkem určena vzdálenost šroubu přiléhajícího k čočce od bližšího břitu. Změřené periody vůči oběma osám v závislosti na této vzdálenosti byly průběžně vynášeny do grafu. Metodou lineární interpolace byla stanovena přibližná poloha čočky, při které se měly obě periody rovnat, a v okolí této polohy byla provedena další měření pro určení co nejpřesnější periody reverzního kyvadla.

## 2.2 Měřicí přístroje a jejich chyby

1. Svinovací metr s nejmenším dílkem 1 mm:

Metr byl použit na měření délky závěsu matematického kyvadla a vzdálenosti břítů reverzního kyvadla. Odhadovaná nejistota těchto vzdáleností se v obou případech liší (viz. kap. 3.1 a 3.3), řádově však odpovídá jednotkám milimetrů.

2. Posuvné měřítko s nejmenším dílkem 0,02 mm:

Posuvným měřítkem byla měřena vzdálenost břitu reverzního kyvadla od šroubu dotýkajícího se čočky. Chybu odhaduji jako polovinu nejmenšího dílku, tedy 0,01 mm.

3. Laboratorní váhy ExplorerPro:

Váhy byly použity pro měření hmotnosti kuličky a provázku. Jejich nejistota byla zjištěna z přiložených specifikací přístroje jako 0,1 mg.

4. Digitální čítač Ealing:

Čítačem byla měřena doba několika kmitů obou kyvadel. Jeho nejistotu odhaduji jako řád poslední zobrazované číslice, tedy 0,1 ms.

5. Termohygrobarmetr Commeter C4130:

Přístroj byl použit pro změření laboratorních podmínek (teploty, tlaku, vlhkosti) během experimentu. Nejistoty v jejich určení (viz tabulka 1) byly zjištěny z přiloženého návodu k použití tohoto přístroje.

### 3 Výsledky měření

Během experimentu byly určeny laboratorní podmínky (viz tab. 1), na jeho průběh však kromě teploty neměly vliv. Teplota mohla v důsledku délkové teplotní roztažnosti ovlivnit rozměry kyvadla (především toho reverzního, protože je kovové a má větší součinitel délkové roztažnosti. V průběhu experimentu se však teplota výrazně neměnila, proto lze případnou změnu rozměrů zanedbat a výsledky experimentu považovat za správné.

Tabulka 1: Laboratorní podmínky

|                 | naměřená hodnota | nejistota |
|-----------------|------------------|-----------|
| teplota okolí   | 22,9 °C          | 0,4 °C    |
| tlak vzduchu    | 996 hPa          | 2 hPa     |
| vlhkost vzduchu | 24,4 %           | 2,5 %     |

#### 3.1 Měření tíhového zrychlení pomocí matematického kyvadla

Hmotnost kuličky byla pětikrát změřena na laboratorních vahách ExplorerPro, z naměřených hodnot byl vypočten aritmetický průměr a jeho odchylka podle (10 s  $n = 5$ ), zkombinovaná podle (12) s nejistotou vah. Hmotnost kuličky tedy byla určena jako  $m_k = (62,2567 \pm 0,0002)$  g. Posuvným měřítkem byla pětikrát změřena výška háčku na kuličce a analogicky spočten průměr a jeho odchylka zkombinovaná podle (12) s nejistotou posuvného měřítka. Výška háčku je  $h = (6,77 \pm 0,09)$  mm. Stejným způsobem byl změřen průměr kuličky jako  $D = (26,18 \pm 0,03)$  mm.

Na laboratorních vahách byla určena hmotnost provázku jako  $m_t = (0,5162 \pm 0,0002)$  g. Odchylka byla spočtena analogicky jako v případě hmotnosti kuličky. Délka provázku (od uchycení na konstrukci po háček na kuličce) byla změřena svinovacím metrem jako  $l = 99 \pm 0,2$  cm. Nejistota hodnoty byla odhadnuta jako 0,2 cm, kvůli náročnému měření. Bylo těžké udržet začátek stupnice na vzdáleném konci provázku a zároveň zajistit, aby se provázek během měření nijak nenatáhnul nebo neohnul.

Délka matematického závěsu byla vypočtena na základě použité aproximace, kdy byla kulička nahrazena hmotným bodem umístěným v jejím středu. Vzdálenost tohoto hmotného bodu od osy otáčení se tedy spočítá jako

$$L = l + h + \frac{D}{2}. \quad (13)$$

Po dosazení vyjde  $L = (101,0 \pm 0,2)$  cm. Odchylka hodnoty byla vzata jako odchylka délky provázku, protože nejistoty určení výšky háčku a průměru kuličky jsou o dva řády nižší, a tedy zanedbatelné.

Následně byla dvacetkrát změřena doba deseti period matematického kyvadla. Změřené hodnoty shrnuje tabulka 2. Nejistota všech těchto hodnot je 0,0001 s.

Tabulka 2: Doby deseti period kývání matematického kyvadla

| číslo měření | $10T_M / s$ | číslo měření | $10T_M / s$ | číslo měření | $10T_M / s$ | číslo měření | $10T_M / s$ |
|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| 1            | 20,0588     | 6            | 20,0577     | 11           | 20,0533     | 16           | 20,0544     |
| 2            | 20,0593     | 7            | 20,0516     | 12           | 20,0446     | 17           | 20,0621     |
| 3            | 20,0506     | 8            | 20,0597     | 13           | 20,0555     | 18           | 20,0592     |
| 4            | 20,0482     | 9            | 20,055      | 14           | 20,0602     | 19           | 20,0574     |
| 5            | 20,0515     | 10           | 20,0577     | 15           | 20,0565     | 20           | 20,0495     |

Ze změřených hodnot byl vypočten aritmetický průměr a podle ( $10 \text{ s } n = 20$ ) jeho odchylka. Nejistota měřidla (digitálního čítače) je vůči statistické nejistotě zanedbatelná. Z tohoto průměru deseti period byla vypočtena délka jedné periody jako  $T_M = (2,0055 \pm 0,0005)$  s. Nejistota jedné periody byla z nejistoty deseti period vypočtena z (11) dosazením vztahu  $T_M = \frac{1}{10} 10T_M$  za funkci  $f$ , konkrétně jako  $\sigma_{T_M} = \frac{\sigma_{10T_M}}{10}$ .

Tíhové zrychlení bylo spočteno podle (4) jako  $g_M = (9,91 \pm 0,02) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Nejistota byla určena dosazením (4) do (11) za funkci  $f$ , konkrétně jako

$$\sigma_{g_M} = g_M \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_{T_M}}{T_M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}. \quad (14)$$

### 3.2 Ověření správnosti použité aproximace matematického kyvadla

Pro ověření, zda byla aproximace kuličky na provázku jako matematického kyvadla oprávněná, vypočteme moment setrvačnosti soustavy dvou těles (kuličky a provázku). Ze vztahů (5), (6) a Steinerovy věty (7) dostaneme pro celkový moment setrvačnosti kuličky na provázku vůči ose procházející druhým koncem provázku vztah

$$J_{celk} = \frac{1}{3} m_t l^2 + m_k \left[ \frac{1}{10} D^2 + \left( l + h + \frac{D}{2} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Po dosazení vyjde  $J_{celk} = (63,7 \pm 0,3) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ . Odchylka byla vypočtena z (11) dosazením vztahu (15) za funkci  $f$ , konkrétně jako<sup>1</sup>

<sup>1</sup> text musel být kvůli formátování rovnic velmi zmenšen

$$\sigma_{J_{celk}} = \sqrt{\sigma_{m_t}^2 \left(\frac{1}{3}l^2\right)^2 + \sigma_l^2 \left[\frac{2}{3}m_t l + 2m_k \left(l + h + \frac{D}{2}\right)\right]^2 + \sigma_{m_k}^2 \left[\frac{1}{10}D^2 + \left(l + h + \frac{D}{2}\right)^2\right] + \sigma_D^2 \left[\frac{1}{5}m_k D + 2m_k \left(l + h + \frac{D}{2}\right)\right]^2 + \sigma_h^2 \left[2m_k \left(l + h + \frac{D}{2}\right)\right]^2} \quad (16)$$

Pro porovnání, moment setrvačnosti matematického kyvadla je (ze rovnice (2))  $J_M = (63,5 \pm 0,3) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ . Jehož odchylka byla spočtena jako

$$\sigma_{J_M} = J_M \sqrt{\left(\frac{\sigma_{m_k}}{m_k}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_L}{L}\right)^2}. \quad (17)$$

Oba momenty setrvačnosti jsou tedy velmi podobné, dokonce se v rámci chyby shodují.

Dále určíme vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení. Těžiště kuličky na lehkém provázku se bude nacházet uvnitř kuličky v ose procházející provázkem a pro jeho vzdálenost  $d'$  od druhého konce provázku bude z (9) platit

$$d' = \frac{\frac{l}{2}m_t + m_k L}{m_t + m_k}. \quad (18)$$

Po dosazení vyjde  $d' = (100,6 \pm 0,2) \text{ cm}$ . Odchylka byla určena ze vztahu (11) dosazením (18) za funkci  $f$ , konkrétně jako

$$\sigma_{d'} = \sqrt{\sigma_{m_t}^2 \left[\frac{m_k \left(\frac{l}{2} - L\right)}{(m_t + m_k)^2}\right]^2 + \sigma_{m_k}^2 \left[\frac{m_t \left(L - \frac{l}{2}\right)}{(m_t + m_k)^2}\right]^2 + l^2 \left(\frac{\frac{m_t}{2}}{m_t + m_k}\right)^2 + \sigma_L^2 \left(\frac{m_k}{m_t + m_k}\right)^2}. \quad (19)$$

Pro srovnání, vzdálenost těžiště matematického kyvadla od osy otáčení je přímo délka závěsu matematického kyvadla  $L = (101,0 \pm 0,2) \text{ cm}$ . Ani tato hodnota se tedy příliš neliší.

Nakonec ze vztahu (1) pro periodu reálného kyvadla, ve kterém zanedbáme vliv velikosti maximální výchylky, vypočteme odpovídající tíhové zrychlení. To vyjde jako  $g' = (9,90 \pm 0,04) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Kde odchylka byla spočtena podle vztahu (11) jako

$$\sigma_{g'} = g' \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_{T_M}}{T_M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{J_{celk}}}{J_{celk}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\sigma_{m_t}^2 + \sigma_k^2}}{m_t + m_k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{d'}}{d'}\right)^2}. \quad (20)$$

I tato hodnota se v rámci chyby shoduje s tou vypočtenou na základě aproximace matematickým kyvadlem.

### 3.3 Měření tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla

Vzdálenost břitů reverzního kyvadla byla změřena svinovacím metrem jako  $l_r = (99,4 \pm 0,1) \text{ cm}$ . Nejistotu odhaduji jako velikost nejmenšího dílku metru místo poloviny dílku, protože při měření dlouhých vzdáleností je těžké zajistit, aby se metr nijak neprohýbal.

Nejprve byla vždy určena pozice čočky na kyvadle. Ta byla měřena posuvným měřítkem jako vzdálenost šroubu, ke kterému čočka přiléhala, od bližšího břitu. Tato vzdálenost se však ve výpočtu tíhového zrychlení nikde nevyskytuje. Slouží jen pro nalezení optimální pozice čočky, ve které se periody kývání reverzního kyvadla kolem obou břitů rovnají.

Pro obě polohy kyvadla (čočka nahoře i čočka dole) byla změřena doba 10 period v závislosti na pozici čочки vzhledem k bližšímu břitu, hodnoty byly průběžně vynášeny do grafu. Metodou interpolace byl určen průsečík obou závislostí a v jeho okolí bylo provedeno další měření. Naměřené hodnoty shrnuje tabulka 3. Nejistota vzdálenosti  $\lambda$  je 0,01 mm, nejistoty určení doby deseti period  $10T_r$  jsou 0,0001 s.

Tabulka 3: Doba deseti period kýmání reverzního kyvadla pro obě pozice čочки v závislosti na vzdálenosti šroubu přiléhajícího k čočce a bližšího břitu  $\lambda$

| vzdálenost čочки | čočka nahoře | čočka dole  |
|------------------|--------------|-------------|
| $\lambda$ / mm   | $10T_r$ / s  | $10T_r$ / s |
| 66,38            | 20,1648      | 20,0698     |
| 75,04            | 20,5958      | 20,1354     |
| 26,34            | 18,4574      | 19,7519     |
| 30,86            | 18,6073      | 19,7850     |
| 35,64            | 18,7978      | 19,8257     |
| 38,94            | 18,9291      | 19,8499     |
| 47,18            | 19,2669      | 19,9140     |
| 55,02            | 19,6136      | 19,9760     |
| 63,42            | 20,00        | 20,0438     |
| 61,66            | 19,9327      | 20,0349     |
| 61,32            | 19,8557      | 20,0183     |
| 57,14            | 19,7181      | 19,9948     |
| 64,02            | 20,0313      | 20,0474     |
| 64,84            | 20,0886      | 20,055      |
| 64,48            | 20,0718      | 20,0565     |
| 64,28            | 20,0573      | 20,0546     |
| 64,18            | 20,0425      | 20,0489     |
| 64,06            | 20,0322      | 20,0475     |
| 64,24            | 20,0569      | 20,0541     |

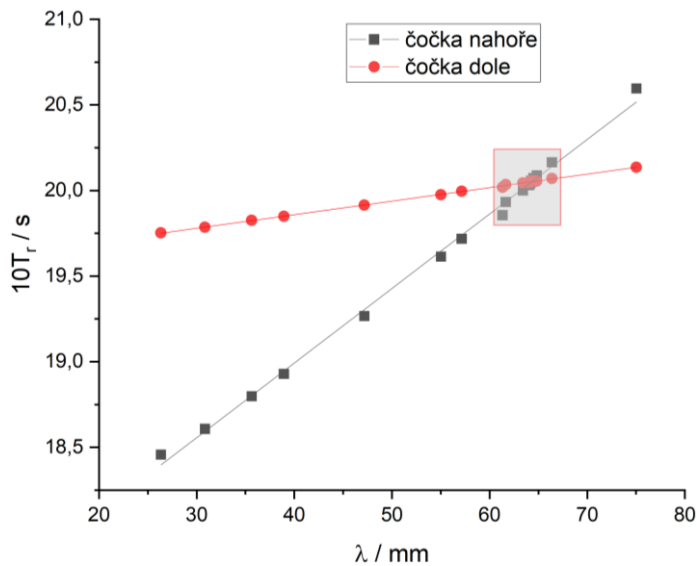
Lineární závislosti period reverzního kyvadla přehledně ukazuje graf 1, výřez v okolí optimální polohy čочки (při které se periody pro obě polohy kyvadla téměř rovnají) je pak na grafu 2. Chybové úsečky nebyly kvůli své malé velikosti vykresleny.

Koeficienty lineární závislosti periody na vzdálenosti čочки  $10T_r = a\lambda + b$  byly určeny metodou lineární regrese v programu Origin. Jejich hodnoty jsou shrnuty v tabulce 4. Jednotky jsou uvedeny jen pro úplnost, koeficienty nemají žádný fyzikální význam.

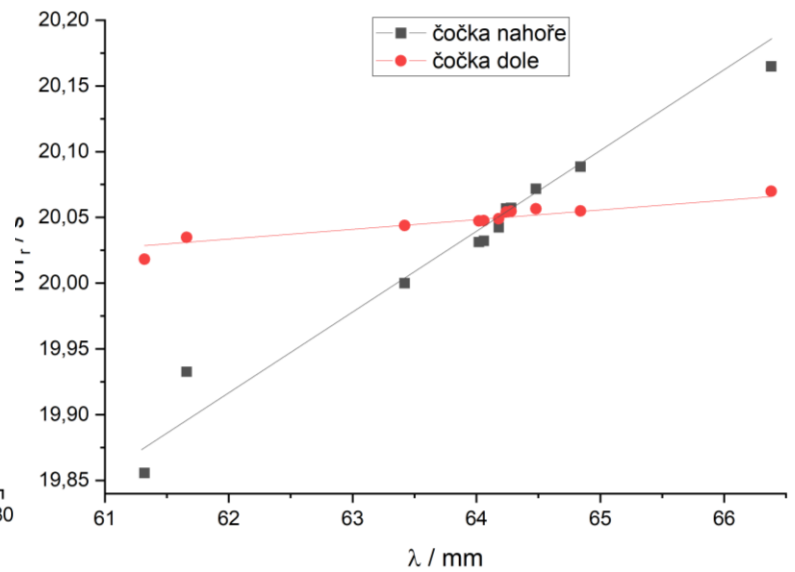
Tabulka 4: Koeficienty lineární závislosti periody reverzního kyvadla na vzdálenosti čочки od břitu pro obě polohy kyvadla (čočka nahoře a čočka dole)

| pozice kyvadla | $a$ / s · m <sup>-1</sup> | $b$ / s        |
|----------------|---------------------------|----------------|
| čočka nahoře   | 43,6 ± 0,5                | 17,25 ± 0,03   |
| čočka dole     | 7,92 ± 0,05               | 19,542 ± 0,003 |





Graf 1: Závislost periody reverzního kyvadla na vzdálenosti šroubu u čočky od bližšího břitu



Graf 2: Závislost periody reverzního kyvadla na vzdálenosti čočky od břitu – výřez v okolí optimální polohy

Průsečík obou závislostí byl určen jako  $\lambda_0 = \frac{b_{dole} - b_{nahore}}{a_{nahore} - a_{dole}} = (64,32 \pm 0,03) \text{ mm}$  a  $10T_{r,0} = a_{dole}\lambda_0 + b_{dole} = (20,051 \pm 0,004) \text{ s}$ . Odchytky hodnot  $\lambda_0$  a  $10T_{r,0}$  byly určeny ze vztahu (11), přesný vzorec již neuvádím.

Perioda reverzního kyvadla byla odtud určena jako  $T_r = (2,0051 \pm 0,0004) \text{ s}$ . Odchylka  $T_r$  byla určena jako desetina odchytky  $10T_r$ .

Ze vztahu (9) bylo určeno tíhové zrychlení jako  $g_r = (9,760 \pm 0,011) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Odchylka byla spočtena podle (11) dosazením vztahu pro tíhové zrychlení za funkci  $f$ , konkrétně jako

$$\sigma_{g_r} = g_r \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_{T_r}}{T_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{l_r}}{l_r}\right)^2}. \quad (21)$$

## 4 Diskuse

Místní tíhové zrychlení bylo pomocí měření periody matematického kyvadla určeno jako  $g_M = (9,91 \pm 0,02) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  s relativní odchytkou 0,2 %. Ta je daná téměř pouze odchytkou určení délky závěsu. Nejistota určení jedné periody je díky přesnému digitálnímu čítači řádově menší a na hodnotě odchytky tíhového zrychlení se téměř neprojeví, i přesto, že je ve vztahu ve druhé mocnině.

Za uvážení reálného tvaru kyvadla jako kuličky na hmotném provázku a výpočtu tíhového zrychlení podle přesnějšího vztahu dostaneme hodnotu  $g' = (9,90 \pm 0,04) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  s relativní odchytkou 0,4 %. Největší nejistoty vneslo do hodnoty určení celkového momentu setrvačnosti kyvadla (relativní nejistota 0,4 %) a vzdálenosti těžiště od osy otáčení (0,2 %). Do těch se opět nejvíce promítlo určení délky provázku, nejistoty ostatních veličin byly dokonce o dva a více řádů nižší. Reálná vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení  $d' = (100,6 \pm 0,2) \text{ cm}$  je o něco kratší než délka závěsu matematického kyvadla  $L = (101,0 \pm 0,2) \text{ cm}$ . To je způsobeno

nenulovou hmotností provázku, který těžiště celého kyvadla posouvá nahoru, blíže k ose otáčení. Moment setrvačnosti reálného kyvadla  $J_{celk} = (63,7 \pm 0,3) \text{ g} \cdot \text{m}^2$  je opět díky provázku lehce odlišný od momentu matematického kyvadla  $J_M = (63,5 \pm 0,3) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ , tentokrát však provázek jeho hodnotu zvětšuje.

Všechny srovnávané hodnoty jsou velmi blízké, některé se dokonce v rámci chyby shodují, použitá aproximace matematickým kyvadlem je tedy oprávněná neboli chyba této aproximace od reálné situace je zanedbatelná. Tabulková hodnota tíhového zrychlení pro Prahu je [4]  $g_0 = (9,81033 \pm 0,00001) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , naměřená hodnota se od ní tedy celkem liší. To může být způsobeno zanedbáním vlivu maximální výchylky kyvadla na výslednou periodu, případně nepřesným změřením délky provázku (je možné, že její nejistota byla stále ještě podhodnocena). Naopak zanedbání uzlů a krátkých přebývajících konců provázku určitě vliv na měření nemělo, jak je vidět z nepatrného rozdílu hodnot zrychlení při zanedbání celého provázku. S největší pravděpodobností tkví rozdíl v odlišné nadmořské výšce místa, kde byla změřena tabulková hodnota a místem tohoto experimentu. Významný vliv na hodnotu tíhového zrychlení má i konkrétní rozložení hmoty v okolí místa měření. Výsledky měření tedy můžeme považovat za správné.

Tíhové zrychlení bylo za pomoci doby kmitu reverzního kyvadla určeno jako  $g_r = (9,760 \pm 0,011) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , s relativní nejistotou 0,1 %. Prakticky celou nejistotu do hodnoty vneslo měření vzdálenosti břitů, tedy redukované délky kyvadla. Délka jedné periody, i přesto, že se ve vztahu pro tíhové zrychlení vyskytuje ve druhé mocnině, tak velkou nejistotu nepřináší. To především díky přesnosti digitálního čítače. Větší nejistotu do hodnoty periody  $T_{r,0}$ , která vyšla jako průsečík dvou závislostí periody na pozici čocky pro dvě polohy kyvadla, vnesla strmější závislost, tedy ta pro polohu kyvadla s čockou nahoře. To je pravděpodobně dané tím, že kyvadlo má v této poloze menší moment setrvačnosti vůči ose otáčení a jevy jako tření tak mají větší vliv na pohyb kyvadla a tím i na naměřenou hodnotu periody.

Změřená hodnota tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla je relativně přesná, neshoduje se však s tabulkovou hodnotou. To opět může být vlivem nadmořské výška a okolní hmoty a nevyvrací správnost experimentu. Hodnoty tíhového zrychlení měřené pomocí matematického a reverzního kyvadla se však významně liší, a to byly změřené na stejném místě a přibližně ve stejném čase. Měření tedy nejspíše byla ovlivněna systematickou chybou. Chyba může být v nepřesně změřené vzdálenosti břitů (případně mohla být podhodnocena její chyba). Dále nemusel být splněn předpoklad rovnoběžných os otáčení reverzního kyvadla, tedy, že břity nebyly přesně rovnoběžné. Kývání reverzního kyvadla mohlo být ovlivněno třením, čímž by systematicky vycházela jiná perioda kmitů, a tím by se i závislosti period na vzdálenosti čocky od břitu protnuly v jiném bodě, na jiné hodnotě periody  $T_{r,0}$ .

Bylo však ověřeno (viz graf 1 a graf 2), že závislosti period kmitání reverzního kyvadla na vzdálenosti čocky od bližšího břitu jsou v dobrém přiblížení lineární, a to pro obě polohy

kyvadla (čočka nahoře a čočka dole). Skutečná závislost bude komplexnější (změnou pozice čočky se mění moment setrvačnosti, který ovlivňuje hodnotu redukované délky kyvadla a ta pak určuje periodu), na malém rozsahu vzdáleností se však dá nahradit obecnou přímkou.

## 5 Závěr

Délka závěsu matematického kyvadla byla změřena jako  $L = (101,0 \pm 0,2)$  cm, přičemž vzdálenost skutečného těžiště fyzického kyvadla byla vypočtena jako  $d' = (100,6 \pm 0,2)$  cm.

Moment setrvačnosti matematického kyvadla byl určen jako  $J_M = (63,5 \pm 0,3)$  g · m<sup>2</sup> zatímco skutečný celkový moment setrvačnosti kuličky na hmotném provázku činil  $J_{celk} = (63,7 \pm 0,3)$  g · m<sup>2</sup>.

Tíhové zrychlení při studiu kývání matematického kyvadla bylo změřeno jako  $g_M = (9,91 \pm 0,02)$  m · s<sup>-2</sup>. S uvažováním reálného fyzického kyvadla s netriviálním momentem setrvačnosti byla hodnota upravena na  $g' = (9,90 \pm 0,04)$  m · s<sup>-2</sup>. Chyba daná aproximací reálného kyvadla matematickým kyvadlem je tedy v tomto případě zanedbatelná.

Závislost doby kmitu reverzního kyvadla na vzdálenosti čočky od břitu je přibližně lineární pro obě pozice kyvadla. Z průsečíku těchto závislostí bylo určeno místní tíhové zrychlení jako  $g_r = (9,760 \pm 0,011)$  m · s<sup>-2</sup>.

## Literatura

- [1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK: Měření tíhového zrychlení [online]. [cit. 14.4.2025], dostupné z [https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/txt\\_121.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/txt_121.pdf)
- [2] Karel Jelínek a kolektiv: Základní kurz fyziky pro distanční studium na MFF UK (elektronická skripta) [online]. [cit. 14.4.2025] dostupné z [https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz\\_fyziky\\_pro\\_DS/display.php/mechanika/5\\_1](https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/mechanika/5_1)
- [3] J. English: Úvod do praktické fyziky I: Zpracování výsledků měření. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2006
- [4] J. Mikulčák a kolektiv: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, 9. vyd, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1979