



# Fyzikální praktikum I

Úloha č. 17

Název úlohy: Studium otáčení tuhého tělesa

Jméno: David Němec

Studijní skupina: FP-F1X.18'P

Datum měření: 10.3.2025

Datum odevzdání: 17.3.2025

Připomínky opravujícího:

Pěkná práce.

Jen by to chtělo vylepšit diskusi. Tam byste se měl nad výsledky zamyslet a kvantitativně je zhodnotit. To zahrnuje nejen úvahy nad vlivem chyb, ale také například číselné porovnání výsledků získaných různými metodami nebo srovnání s tabulkovými hodnotami.

Také buďte pozornější při přenášení vzorců do excelu. Dobrý nápad byl přiložit váš excelový soubor k protokolu, takže jsem snadno našel, kde jste udělal chybu.

Komentáře k dalším drobným nedostatkům naleznete také v textu.

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	2
Výsledky a zpracování měření	0–9	9
Diskuse výsledků	0–4	3
Závěr	0–1	1
Seznam použité literatury	0–1	1
Celkem	max. 17	16

Posuzoval:

Ivo Křivka

dne:

18.3.2025

# 1 Pracovní úkol

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

## 2 Teorie

### Torzní kmity

Upevníme-li těleso na tenký závěs, např. ocelový drát, a vychýlíme-li jej z rovnovážné polohy otočením o určitý úhel, začne těleso vykonávat torzní kmity, jejichž perioda závisí na momentu setrvačnosti zavěšeného tělesa vůči jeho ose otáčení. Tato osa prochází závěsem a kolem ní se vlastně studované těleso natáčí na jednu a na druhou stranu. Pokud se během kmitání nepřekročí mez úměrnosti materiálu závěsu, tedy pokud jsou výchylky menší než asi  $90^\circ$ , jsou tyto torzní kmity harmonické a pro jejich periodu  $T$  lze psát [1]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}, \quad (1)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení a  $D$  je direkční moment vlákna. Zavěsíme-li na stejné vlákno testovací těleso, jehož moment setrvačnosti známe, lze pro periodu torzních kmitů  $T_{test}$  tohoto testovacího tělesa analogicky psát

$$T_{test} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{test}}{D}}, \quad (2)$$

kde  $J_{test}$  je známý moment setrvačnosti. Protože je testovací těleso zavěšené na stejném vlákne, direkční moment  $D$  zůstane nezměněn. Kombinací vztahů (1) a (2) lze vyjádřit moment setrvačnosti studovaného tělesa jen pomocí obou period a známého momentu setrvačnosti  $J_{test}$  jako

$$J = J_{test} \left( \frac{T}{T_{test}} \right)^2, \quad (3)$$

není tedy nutné měřit direkční moment vlákna.

### ***Moment setrvačnosti vůči libovolné ose***

Pokud jsou známy hlavní momenty setrvačnosti tělesa (zjištěné např. metodou torzních kmitů jako výše), lze snadno vypočítat jeho moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející těžištěm (jejíž směr bude popisovat jednotkový vektor  $\vec{v}$ ) a to jako [1]

$$J = v_x^2 J_x + v_y^2 J_y + v_z^2 J_z, \quad (4)$$

kde  $v_x$ ,  $v_y$  a  $v_z$  jsou složky jednotkového vektoru  $\vec{v}$  v soustavě souřadnic, jejíž osy jsou totožné s hlavními osami setrvačnosti tělesa a  $J_x$ ,  $J_y$  a  $J_z$  jsou jeho hlavní momenty setrvačnosti vůči těmto osám.

Uvažujeme kvádr o hranách různé délky a označíme je  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tak, že platí  $a < b < c$ . Jeho jednotlivé hlavní osy setrvačnosti jsou osy procházející těžištěm, které jsou rovnoběžné s těmito hranami různých délek. Volíme soustavu souřadnic s počátkem v těžišti kváдру takovou, že osa  $x$  je rovnoběžná s hranou délky  $a$ , osa  $y$  s hranou délky  $b$  a osa  $z$  s hranou délky  $c$ . Potom lze osu procházející těžištěm, která je rovnoběžná se stěnovou úhlopříčkou ležící v rovině  $yz$ , popsat pomocí vektoru  $\vec{u}$ , který spojuje středy protějších hran kolmých na rovinu  $yz$ . Jeho tři složky jsou

$$u_a = 0,$$

$$u_b = b,$$

$$u_c = c.$$

Tento vektor má směr zvolené osy, není však jednotkový, proto definujeme vektor  $\vec{v} := \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ , kde  $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_a^2 + u_b^2 + u_c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$  je velikost vektoru  $\vec{u}$ . Složky jednotkového vektoru  $\vec{v}$ , který má směr zvolené osy jsou

$$v_a = 0,$$

$$v_b = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

$$v_c = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Moment setrvačnosti kváдру  $J_u$  vůči této ose tedy je

$$J_u = v_a^2 J_a + v_b^2 J_b + v_c^2 J_c = \frac{b^2}{b^2 + c^2} J_b + \frac{c^2}{b^2 + c^2} J_c, \quad (5)$$

kde  $J_a$ ,  $J_b$  a  $J_c$  jsou jednotlivé hlavní momenty setrvačnosti rovnoběžné s hranami délky  $a$ ,  $b$ , a  $c$ .

### **Steinerova věta**

Známe-li vzdálenost určitého bodu tělesa od jeho těžiště a moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm, můžeme pomocí tzv. Steinerovy věty vypočítat moment setrvačnosti vůči ose procházející tímto bodem a rovnoběžné s tou osou v těžišti, vůči níž moment setrvačnosti známe. Steinerova věta má v matematické podobě tvar

$$J = J_0 + md^2, \quad \text{Steinerova věta by si také zasloužila odkaz na literaturu.} \quad (6)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti vůči ose procházející daným bodem,  $J_0$  je známý moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm,  $m$  je hmotnost tělesa a  $d$  vzdálenost studovaného bodu od těžiště.

Zkombinováním se vztahem (4) pak lze vypočítat moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející libovolným bodem.

### ***Alternativní metody měření momentu setrvačnosti***

U symetrických (obzvláště radiálně symetrických) těles lze moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm snadno vypočítat jen ze známých rozměrů a hmotnosti daného tělesa. Např. pro homogenní válec lze pro moment setrvačnosti vůči jeho hlavní ose symetrie procházející těžištěm psát [1]

$$J_{v,0} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{8}MD^2, \quad (7)$$

kde  $M$  je hmotnost homogenního válce,  $R$  poloměr jeho podstavy a  $D = 2R$  průměr podstavy.

Případně lze nechat těleso (např. tyč) kývat jako fyzické kyvadlo kolem bodu na jednom jeho konci, přičemž pro periodu tohoto pohybu lze psát [1]

$$T_t = 2\pi \sqrt{\frac{J_t}{mgl}}, \quad (8)$$

kde  $J_t$  je moment setrvačnosti vůči ose otáčení,  $m$  hmotnost tělesa,  $g$  místní tíhové zrychlení a  $l$  vzdálenost osy otáčení od těžiště.

**Výpočet chyb** [Raději se mnohoznačnému termínu „chyba“ vyhýbejte. Zde jde o nejistotu, případně o směrodatnou odchylku.](#)

Chyba aritmetického průměru je [2]

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu})^2}, \quad (9)$$

**Pozor! Toto není směrodatná odchylka aritmetického průměru. To je výběrová směrodatná odchylka.**

kde  $\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  je aritmetický průměr naměřených hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Vzorec pro výpočet chyby nepřímo měřené náhodné veličiny  $y = f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  je podle [2]

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \right)^2 \sigma_{\theta_i}^2}, \quad (10)$$

kde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  jsou jednotlivé nezávislé veličiny. Může se hodit znát konkrétní vztah pro přenos chyb při měření doby několika period místo jedné. Měříme-li dobu  $N$  period, dostaneme dosazením funkce  $T = \frac{1}{N}NT$  za  $f$  ve vztahu (7) vzorec pro výpočet odchylky jedné periody jako

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{NT}}{N}, \quad (11)$$

kde  $\sigma_{NT}$  je chyba určení doby  $N$  period.

Ze statistické ( $\sigma_{stat}$ ) a systematické ( $\sigma_{sys}$ ) chyby určíme celkovou chybu ( $\sigma_{celk}$ ) podle vztahu [2]

$$\sigma_{celk} = \sqrt{\sigma_{stat}^2 + \sigma_{sys}^2}. \quad (12)$$

**Zde máte pravděpodobně na mysli nejistotu typu B charakterizující přesnost měřidla. Ta ale většinou nemá výhradně systematický charakter, a právě proto se s ní zachází stejně jako se statistickou. Systematická chyba naopak vychyluje výsledek měření na jednu stranu (podívejte se dobře do [2]).**

## **2.1 Metoda měření**

Nejprve byla studovaná tělesa zvážena na laboratorních vahách a manuálním i digitálním posuvným měřítkem byly zjištěny jejich rozměry.

Jednotlivé momenty setrvačnosti byly měřeny metodou torzních kmitů, kdy se studované těleso zavěsí na vlákno (např. ocelové), vychýlí se otočením o úhel ideálně menší než  $90^\circ$  a poté se nechá volně otáčet v důsledku torzních sil působících na vlákno. Měřením periody tohoto pohybu se dá podle vzorců (1), (2) a (3) vypočíst moment setrvačnosti studovaného tělesa vůči ose, kolem které se během kmitání otáčí, tedy vůči ose, která prochází napnutým vláknem.

Ocelové vlákno, na které se tělesa zavěšovala bylo na konci opatřené šroubem, který se našrouboval do připraveného otvoru v tělese.

Nejprve byla měřena perioda otáčení testovacího válce vůči jeho hlavní ose symetrie a poté byl na stejné vlákno zavěšen studovaný kvádr a změřeny periody kmitání vůči třem jeho hlavním osám setrvačnosti a jedné „obecné“ ose, která byla rovnoběžná s jednou stěnovou úhlopříčkou. Stejným způsobem byl pak změřen moment setrvačnosti tyče vůči jejímu těžišti. Tyč se pak nechala kývat kolem kovového břitu ve tvaru trojúhelníkového hranolu upevněného na jejím konci. Ze vztahu (8) se pak určil moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející jednou hranou kovového břitu a pomocí rovnice (6) byla ověřena platnost Steinerovy věty. Protože břity byly na tyči upevněny dva, a to v různých vzdálenostech od domnělého těžiště tyče (od místa jejího upevnění k ocelovému vlákně), byla provedena měření periody kývání pro břity na obou koncích tyče.

## **2.2 Měřicí přístroje a jejich chyby**

1. Manuální posuvné měřítko s nejmenším dílkem 0,05 mm:

Posuvným měřítkem byl změřen průměr válce a rozměry kvádru, chybu odhaduji na polovinu nejmenšího dílku, tedy 0,025 mm.

2. Digitální posuvné měřítko:

Tímto nástrojem byly změřeny vzdálenosti obou břitů od místa upevnění tyče k ocelovému vláku. Z příložených specifikací byla určena chyba měření jako 0,03 mm.

3. Laboratorní váhy ScoutPro:

Váhy byly použity pro změření hmotnosti válce a tyče. Jejich chyba byla zjištěna z příložených specifikací přístroje jako 0,1 g.

4. Digitální stopky ZPA Pragotron se snímkovací frekvencí 50 Hz:

Stopky s časovým rozlišením odpovídajícím frekvenci střídavého napětí v elektrické síti byly velmi přesné, do určení časových okamžiků se však silně projevila reakční doba člověka, kterou odhaduji na 0,2 s. Protože reakční doba ovlivňuje určení

okamžiku začátku i konce studované chvíle, je celková chyba určení časových intervalů dvojnásobná, tedy 0,4 s.

5. Termohygrobarometr Commeter C4130:

Přístroj byl použit pro změření laboratorních podmínek (teploty, tlaku, vlhkosti) během experimentu. Chyby v jejich určení (viz tabulka 1) byly zjištěny z přiloženého návodu k použití tohoto přístroje.

### 3 Výsledky měření

Během experimentu byly určeny laboratorní podmínky, na jeho průběh a naměřené hodnoty však neměly vliv. Ovlivnit měření by mohly velké výkyvy teplot, při kterých by se mohl mezi jednotlivými měřeními měnit směrný moment vlákna, k takovým změnám ovšem v žádném případě nedošlo.

Tabulka 1: Laboratorní podmínky

	naměřená hodnota	chyba
teplota okolí	24,4 °C	0,4 °C
tlak vzduchu	971 hPa	2 hPa
vlhkost vzduchu	32,4 %	2,5 %

#### 3.1 Měření rozměrů a hmotnosti těles

Hmotnost válce a tyče byly změřeny na laboratorních vahách ScoutPro. Z pěti naměřených hodnot byl vypočítán jejich průměr a jeho standardní odchylka (podle vztahu (9) s  $n = 5$ ). Hmotnost válce byla změřena jako  $M = (903,4 \pm 0,1)$  g, hmotnost tyče jako  $m = (281,1 \pm 0,1)$  g. **Taková je nejistota vah. Uvážil jste také vliv výměny šroubů?**

Rozměry těles byly určeny posuvnými měřítky – průměr válce a rozměry kváдру manuálním a vzdálenost břitů od těžiště tyče digitálním, protože na tyto rozměry již manuální posuvné měřítko nestačilo. Rozměry byly změřeny vždy pětkrát a z nich byl pak určen průměr a jeho odchylka (podle vztahu (9) s  $n = 5$ ). Tyto výsledné hodnoty shrnuje tabulka 2.

Tabulka 2: Rozměry studovaných těles

těleso	válec	tyč		kvádr		
rozměr tělesa	$D$ (průměr)	$d_A$ (břit A od těžiště)	$d_B$ (břit B od těžiště)	$a$ (nejkratší hrana)	$b$ (střední hrana)	$c$ (nejdelší hrana)
hodnota / cm	$10,804 \pm 0,005$	$15,59 \pm 0,02$	$15,72 \pm 0,02$	$1,907 \pm 0,004$	$6,407 \pm 0,004$	$12,786 \pm 0,003$

### 3.2 Měření doby torzních kmitů těles na ocelovém vlákně

Nejprve byl na vlákno zavěšen testovací válec a byla změřena doba 10 period. Měření bylo pětkrát opakováno a z těchto hodnot byl vypočten průměr a jeho odchylka (statistická chyba). Podle vztahu (12) byla tato chyba zkombinována se systematickou chybou určení časového intervalu  $\sigma_{sys,T}$  danou reakční dobou člověka ( $t_{reac} = 0,2$  s), která se projeví v určení času začátku i konce studovaného intervalu a činí tedy  $\sigma_{sys,T} = 2t_{reac} = 0,4$  s. Průměrnou dobu deseti i jedné periody ukazuje tabulka 3.

Tabulka 3: Doby torzních kmitů válce

interval několika period	$10T_{v,0} / s$	$T_{v,0} / s$
délka intervalu	$82,0 \pm 0,4$	$8,20 \pm 0,04$

Perioda torzních kmitů testovacího válce byla tedy změřena jako  $T_{v,0} = (8,20 \pm 0,04)$  s.

Stejným způsobem byly změřeny doby 10 period torzních kmitů kvádrů kolem osy rovnoběžné s hranou  $a$ , s hranou  $b$  a se stěnovou úhlopříčkou  $u$ . Pro kmitání kolem osy rovnoběžné s hranou  $c$  byla změřena doba 20 period. Z těchto hodnot byl vypočten průměr a ze vztahu (9) s  $n = 10$  (resp.  $n = 20$  u osy rovnoběžné s hranou  $c$ ) byla vypočtena odchylka aritmetického průměru. Tato chyba několika period byla vztahem (12) zkombinována s chybou v určení časového intervalu a pomocí vztahu (11) (s  $N = 10$ , resp.  $N = 20$ ) byla dopočtena chyba jedné periody. Výsledné délky časových intervalů shrnuje tabulka 4.

Tabulka 4: Doby torzních kmitů kvádrů kolem tří hlavních a jedné obecné osy

hrana $a$		hrana $b$		hrana $c$		úhlopříčka $u$	
$10T_{k,a} / s$	$T_{k,a} / s$	$10T_{k,b} / s$	$T_{k,b} / s$	$20T_{k,c} / s$	$T_{k,c} / s$	$10T_{k,u} / s$	$T_{k,u} / s$
$87,8 \pm 0,4$	$8,78 \pm 0,04$	$78,7 \pm 0,4$	$7,87 \pm 0,04$	$86,2 \pm 0,4$	$8,62 \pm 0,04$	$52,6 \pm 0,4$	$5,26 \pm 0,04$

Důležitá je především hodnota  $T_{k,u} = (5,26 \pm 0,04)$  s. Tuto hodnotu jste ve skutečnosti nepoužil.

Nakonec byla na ocelové vlákno zavěšena tyč v jejím těžišti. Byla změřena doba 10 period a analogicky k předchozím tělesům byl spočítán průměr a jeho odchylka 10 period i jedné periody. Hodnoty ukazuje tabulka 5.

Tabulka 5: Doby torzních kmitů tyče

interval několika period	$10T_{t,0} / s$	$T_{t,0} / s$
délka intervalu	$119,3 \pm 0,4$	$11,93 \pm 0,04$

Perioda torzních kmitů tyče kolem jejího těžiště tedy byla určena jako  $T_{t,0} = (11,93 \pm 0,04)$  s.

### 3.2 Měření doby kmitu tyče jako fyzikálního kyvadla

Dále se tyč zavěsila za břít, byla drobně vychýlena (o méně než  $5^\circ$ , aby byly splněné teoretické podmínky pro aproximace nutné pro platnost vztahu (8)). Pro oba břity byla změřena doba 10 period a měření bylo desetkrát opakováno. Z hodnot byl spočítán průměr a jeho odchylka (podle vztahu (9) s  $n = 10$ ), vypočtené hodnoty jsou v tabulce 6.

Tabulka 6: Doby kmitů tyče jako fyzikálního kyvadla

břit A ( $d_A = 15,59 \pm 0,02$ cm)		břit B ( $d_B = 15,72 \pm 0,02$ cm)	
$10T_{t,A} / s$	$T_{t,A} / s$	$10T_{t,B} / s$	$T_{t,B} / s$
$9,4 \pm 0,4$	$0,94 \pm 0,04$	$9,4 \pm 0,4$	$0,94 \pm 0,04$

Pro jednotlivé břity se délky period drobně lišily, po zaokrouhlení na stejný řád jako chyba se však rozdíly smazaly, a proto budu uvažovat jen břit A.

### 3.4 Momenty setrvačnosti

Moment setrvačnosti homogenního válce byl vypočítán podle (7) a jeho odchylka dosazením tohoto vztahu za funkci  $f$  v (10), konkrétně tedy jako

$$\sigma_{J_{v,0}} = \frac{D}{8} \sqrt{D^2 \sigma_M^2 + 4M^2 \sigma_D^2} \quad (13)$$

kde  $\sigma_M = 0,1$  g je chyba určení hmotnosti válce a  $\sigma_D = 0,025$  mm chyba určení průměru. Moment setrvačnosti válce je tedy roven  $J_{v,0} = (5,273 \pm 0,001)$  g · m<sup>2</sup>.

Momenty setrvačnosti kvádru vůči různým osám procházejícím těžištěm byly určeny porovnáním periody torzních kmitů kvádru kolem dané osy a periody kmitů válce podle vztahu (3). Jejich odchylka byla vypočtena podle (10) dosazením vztahu (3) za funkci  $f$ , konkrétně jako Tento vzorec máte správně, ale do excelu jste ho přenesl špatně (koeficienty 4 tam máte ve druhé mocnině), takže výsledné nejistoty vám vyšly zhruba čtyřnásobné.

$$\sigma_{J_{k,i}} = \frac{T_{k,i}}{T_{v,0}^2} \sqrt{T_{k,i}^2 \sigma_{J_{v,0}}^2 + 4J_{v,0}^2 \sigma_{T_{k,i}}^2 + \frac{4T_{k,i}^2 J_{v,0}^2}{T_{v,0}^2} \sigma_{T_{v,0}}^2}, i \in \{a, b, c, u\} \quad (14)$$

kde  $T_{k,i}$  je perioda kmitání kvádru kolem příslušné osy,  $\sigma_{T_{k,i}}$  je její chyba,  $T_{v,0}$  je perioda kmitání testovacího válce a  $\sigma_{T_{v,0}}$  její chyba. Vypočtené hodnoty shrnuje tabulka 7.

Tabulka 7: Momenty setrvačnosti kvádru vůči různým osám procházejícím těžištěm

$J_{k,a} / \text{g} \cdot \text{m}^2$	$J_{k,b} / \text{g} \cdot \text{m}^2$	$J_{k,c} / \text{g} \cdot \text{m}^2$	$J_{k,u} / \text{g} \cdot \text{m}^2$
$1,51 \pm 0,04$	$1,21 \pm 0,04$	$0,36 \pm 0,01$	$0,54 \pm 0,02$

Analogicky vypočteme i moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející jejím těžištěm a jeho chybu podle (10) jako

$$\sigma_{J_{t,0}} = \frac{T_{t,0}}{T_{v,0}^2} \sqrt{T_{t,0}^2 \sigma_{J_{v,0}}^2 + 4J_{v,0}^2 \sigma_{T_{t,0}}^2 + \frac{4T_{t,0}^2 J_{v,0}^2}{T_{v,0}^2} \sigma_{T_{v,0}}^2}, \quad (15)$$

kde  $T_{t,0}$  je perioda torzních kmitů tyče kolem těžiště a  $\sigma_{T_{t,0}}$  její chyba. Moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející těžištěm je tedy  $J_{t,0} = (2,79 \pm 0,07)$  g · m<sup>2</sup>.

Pro ověření teorie spočteme moment setrvačnosti kvádru vůči ose rovnoběžné se stěnovou úhlopříčkou podle vztahu (5). Využité složky jednotkového vektoru jsou  $v_b = 0,4480 \pm 0,0003$  a  $v_c = 0,8940 \pm 0,0003$ , chyby byly odhadnuty za základě přesnosti měření jednotlivých délek hran  $b$  a  $c$ . Moment setrvačnosti je tedy  $J'_{k,u} = 0,53 \pm 0,01$  g · m<sup>2</sup>. Jeho chyba byla spočtena dosazením vzorce (5) za funkci  $f$  do vztahu (10):

Znamená to, že jste je nepočítal a proto zde nemáte uveden vzorec?



$\sigma_{J'_{k,u}} = \sqrt{(2v_b J_{k,b} \sigma_{v_b})^2 + (v_b^2 \sigma_{J_{k,b}})^2 + (2v_c J_{k,c} \sigma_{v_c})^2 + (v_c^2 \sigma_{J_{k,c}})^2}$ . Momenty  $J_{k,u}$  a  $J'_{k,u}$  se tedy v rámci chyby shodují.

Dále byl vypočten moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející břitem A ze vztahu (8), chyba byla určena jako  $\sigma_{J_t} = mgd_A \left(\frac{T_{t,A}}{2\pi}\right)^2 \sqrt{\left(2\frac{\sigma_{T_{t,A}}}{T_{t,A}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{d_A}}{d_A}\right)^2}$ , kde  $g = 9,81373(1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  je místní tíhové zrychlení pro Prahu [3]. Moment vůči ose procházející břitem je tedy  $J_t = (9,6 \pm 0,8) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ . Ze Steinerovy věty (6) dopočteme moment setrvačnosti vůči těžišti  $J'_{t,0} = (2,8 \pm 0,8) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ , jeho chybu určíme dosazením vztahu pro  $J'_{t,0}$  za funkci  $f$  ve vzorci (10), čímž dostaneme  $\sigma_{J'_{t,0}} = \sqrt{(\sigma_{J_t})^2 + (d_A^2 \sigma_m)^2 + (2d_A m \sigma_{d_A})^2}$ .  $J_{t,0}$  a  $J'_{t,0}$  se tedy v rámci chyby shodují. Vypočtené a naměřené hodnoty shrnuje tabulka 8.

Tabulka 8: Vypočtené a naměřené hodnoty momentů setrvačnosti kvádru a tyče

těleso	naměřený	vypočtený
kvádr	$J_{k,u} = (0,54 \pm 0,02) \text{ g} \cdot \text{m}^2$	$J'_{k,u} = (0,53 \pm 0,01) \text{ g} \cdot \text{m}^2$
tyč	$J_{t,0} = (2,79 \pm 0,07) \text{ g} \cdot \text{m}^2$	$J'_{t,0} = (2,8 \pm 0,8) \text{ g} \cdot \text{m}^2$

## 4 Diskuse

Měření posuvnými měřítky a vážení váhami bylo velmi přesné, největší nejistoty vneslo měření period jednotlivých pohybů v důsledku velké reakční doby člověka. Pokud by se místo měření stopkami pohyby studovaly např. pomocí sonaru nebo laserového paprsku, který by byl během kmitání pravidelně přerušován, přesnost naměřených hodnot by byla násobně větší. Přesto jsou relativní chyby určení period torzních kmitů v rámci desetin procent. Relativní chyba periody kmitání tyče jako fyzického kyvadla je vyšší (jednotky procent), kvůli krátké době kmitu. Proto je také vysoká relativní chyba momentu  $J'_{t,0}$  (dokonce 28,6 %). Hodnoty momentu setrvačnosti tyče vůči těžišti se však shodují i v rámci chyby torzně naměřeného  $J_{t,0}$ , možná tedy byla chyba v určení délky časových intervalů nadhodnocena.

Systematické chyby mohou pocházet z nesprávných předpokladů na tělesa, tedy že jsou homogenní a symetrické. Tělesa se však na vlákno upevňovala našroubováním do připraveného otvoru, který určitě nebyl šroubem dokonale zaplněn. Tyto nepřesnosti jsou však pravděpodobně jen malé. Větší problém by mohl nastat, kdyby rohy „kvádru“ nebyly odsekané symetricky a těžiště se nenacházelo v jeho středu, případně kdyby břity na tyči nebyly rovnoběžné s osu závitů, kam se šroubovalo upevnění k vláknu. Pak by nemohla platit Steinerova věta, která předpokládá, že osy, vůči nimž měříme momenty setrvačnosti,

Součástí diskuse by měl být kvantitativní rozbor výsledků. Nebojte se uvést číselné hodnoty a porovnat je. Ve vaší diskusi je jediný konkrétní číselný údaj.

jsou rovnoběžné. V rámci chyby jsou však naměřené hodnoty ve shodě s teorií, a tedy předpoklady byly nejspíš s určitou přesností splněny.

## 5 Závěr

Hlavní momenty setrvačnosti studovaného kvádru vůči jednotlivým hlavním osám setrvačnosti jsou

$$J_{k,a} = (1,51 \pm 0,04) \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{k,b} = (1,21 \pm 0,04) \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{k,c} = (0,36 \pm 0,01) \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{k,u} = (0,54 \pm 0,02) \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

Složky jednotkového vektoru ve směru stěnové úhlopříčky, která je kolmá na hranu  $a$  jsou

$$v_b = 0,4480 \pm 0,0003$$

$$v_c = 0,8940 \pm 0,0003.$$

Moment setrvačnosti kvádru vůči ose procházející těžištěm ve směru tohoto vektoru změřený metodou torzních kmitů je  $J_{k,u} = (0,54 \pm 0,02) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ . A jeho vypočtená hodnota na základě momentů  $J_{k,b}$  a  $J_{k,c}$  a vztahu (5) je  $J'_{k,u} = (0,53 \pm 0,01) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ , teoretická hodnota je tedy ve shodě s tou experimentálně určenou.

Moment setrvačnosti tyče vůči těžišti určený metodou torzních kmitů je  $J_{t,0} = (2,79 \pm 0,07) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ . A ten samý moment ovšem vypočtený se Steinerovy věty a momentu setrvačnosti tyče vůči ose procházející břitem na jejím konci (zjištěným studiem kmitání tyče jako fyzikálního kyvadla) je  $J'_{t,0} = (2,8 \pm 0,8) \text{ g} \cdot \text{m}^2$ . Steinerova věta tedy byla ověřena.

Tato hodnocení patří spíše do diskuse.

## Literatura

- [1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK: Studium otáčení tuhého tělesa [online]. [cit. 17.3.2025]  
[https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_117.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_117.pdf)
- [2] J. English: Úvod do praktické fyziky I: Zpracování výsledků měření. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2006
- [3] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Tíhové zrychlení [online]. c2024 [cit. 17. 03. 2025].  
[https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=T%C3%ADhov%C3%A9\\_zrychlen%C3%AD&oldid=23885898](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=T%C3%ADhov%C3%A9_zrychlen%C3%AD&oldid=23885898)