|  |  |
| --- | --- |
| Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF |  |
| Fyzikální praktikum I |
|  | |
| Úloha č. 17 | |
| Název úlohy: Studium otáčení tuhého tělesa | |
| Jméno: David Němec Studijní skupina: FP-F1X.18´P | |
| Datum měření: 10.3.2025 Datum odevzdání: 17.3.2025 | |

Připomínky opravujícího:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Možný počet bodů | Udělený počet bodů |
| Teoretická část | 0–2 |  |
| Výsledky a zpracování měření | 0–9 |  |
| Diskuse výsledků | 0–4 |  |
| Závěr | 0–1 |  |
| Seznam použité literatury | 0–1 |  |
| Celkem | max. 17 |  |

Posuzoval: dne:

1 Pracovní úkol

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

2 Teorie

Torzní kmity

Upevníme-li těleso na tenký závěs, např. ocelový drát, a vychýlíme-li jej z rovnovážné polohy otočením o určitý úhel, začne těleso vykonávat torzní kmity, jejichž perioda závisí na momentu setrvačnosti zavěšeného tělesa vůči jeho ose otáčení. Tato osa prochází závěsem a kolem ní se vlastně studované těleso natáčí na jednu a na druhou stranu. Pokud se během kmitání nepřekročí mez úměrnosti materiálu závěsu, tedy pokud jsou výchylky menší než asi 90 °, jsou tyto torzní kmity harmonické a pro jejich periodu lze psát [1]

, (1)

kde je moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení a je direkční moment vlákna. Zavěsíme-li na stejné vlákno testovací těleso, jehož moment setrvačnosti známe, lze pro periodu torzních kmitů tohoto testovacího tělesa analogicky psát

, (2)

kde je známý moment setrvačnosti. Protože je testovací těleso zavěšené na stejném vlákně, direkční moment zůstane nezměněn. Kombinací vztahů (1) a (2) lze vyjádřit moment setrvačnosti studovaného tělesa jen pomocí obou period a známého momentu setrvačnosti jako

, (3)

není tedy nutné měřit direkční moment vlákna.

Moment setrvačnosti vůči libovolné ose

Pokud jsou známé hlavní momenty setrvačnosti tělesa (zjištěné např. metodou torzních kmitů jako výše), lze snadno vypočíst jeho moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející těžištěm (jejíž směr bude popisovat jednotkový vektor ) a to jako [1]

, (4)

kde , a jsou složky jednotkového vektoru v soustavě souřadnic, jejíž osy jsou totožné s hlavními osami setrvačnosti tělesa a , a jsou jeho hlavní momenty setrvačnosti vůči těmto osám.

Uvažujeme kvádr o hranách různé délky a označíme je , , tak, že platí . Jeho jednotlivé hlavní osy setrvačnosti jsou osy procházející těžištěm, které jsou rovnoběžné s těmito hranami různých délek. Volíme soustavu souřadnic s počátkem v těžišti kvádru takovou, že osa je rovnoběžná s hranou délky , osa s hranou délky a osa s hranou délky . Potom lze osu procházející těžištěm, která je rovnoběžná se stěnovou úhlopříčkou ležící v rovině , popsat pomocí vektoru , který spojuje středy protějších hran kolmých na rovinu . Jeho tři složky jsou

,

,

.

Tento vektor má směr zvolené osy, není však jednotkový, proto definujeme vektor , kde je velikost vektoru . Složky jednotkového vektoru , který má směr zvolené osy jsou

,

,

.

Moment setrvačnosti kvádru vůči této ose tedy je

, (5)

kde , a jsou jednotlivé hlavní momenty setrvačnosti rovnoběžné s hranami délky , a .

Steinerova věta

Známe-li vzdálenost určitého bodu tělesa od jeho těžiště a moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm, můžeme pomocí tzv. Steinerovy věty vypočítat moment setrvačnosti vůči ose procházející tímto bodem a rovnoběžné s tou osou v těžišti, vůči níž moment setrvačnosti známe. Steinerova věta má v matematické podobě tvar

, (6)

kde je moment setrvačnosti vůči ose procházející daným bodem, je známý moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm, je hmotnost tělesa a vzdálenost studovaného bodu od těžiště.

Zkombinováním se vztahem (4) pak lze vypočítat moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející libovolným bodem.

Alternativní metody měření momentu setrvačnosti

U symetrických (obzvláště radiálně symetrických) těles lze moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm snadno vypočítat jen ze známých rozměrů a hmotnosti daného tělesa. Např. pro homogenní válec lze pro moment setrvačnosti vůči jeho hlavní ose symetrie procházející těžištěm psát [1]

, (7)

kde je hmotnost homogenního válce, poloměr jeho podstavy a průměr podstavy.

Případně lze nechat těleso (např. tyč) kývat jako fyzické kyvadlo kolem bodu na jednom jeho konci, přičemž pro periodu tohoto pohybu lze psát [1]

, (8)

kde je moment setrvačnosti vůči ose otáčení, hmotnost tělesa, místní tíhové zrychlení a vzdálenost osy otáčení od těžiště.

Výpočet chyb

Chyba aritmetického průměru je [2]

, (9)

kde je aritmetický průměr naměřených hodnot , *, …,.* Vzorec pro výpočet chyby nepřímo měřené náhodné veličiny je podle [2]

, (10)

kde , *, …,* jsou jednotlivé nezávislé veličiny. Může se hodit znát konkrétní vztah pro přenos chyb při měření doby několika period místo jedné. Měříme-li dobu period, dostaneme dosazením funkce za ve vztahu (7) vzorec pro výpočet odchylky jedné periody jako

, (11)

kde je chyba určení doby period.

Ze statistické () a systematické () chyby určíme celkovou chybu () podle vztahu [2]

. (12)

2.1 Metoda měření

Nejprve byla studovaná tělesa zvážena na laboratorních vahách a manuálním i digitálním posuvným měřítkem byly zjištěny jejich rozměry.

Jednotlivé momenty setrvačnosti byly měřeny metodou torzních kmitů, kdy se studované těleso zavěsí na vlákno (např. ocelové), vychýlí se otočením o úhel ideálně menší než 90 ° a poté se nechá volně otáčet v důsledku torzních sil působících na vlákno. Měřením periody tohoto pohybu se dá podle vzorců (1), (2) a (3) vypočíst moment setrvačnosti studovaného tělesa vůči ose, kolem které se během kmitání otáčí, tedy vůči ose, která prochází napnutým vláknem.

Ocelové vlákno, na které se tělesa zavěšovala bylo na konci opatřené šroubem, který se našrouboval do připraveného otvoru v tělese.

Nejprve byla měřena perioda otáčení testovacího válce vůči jeho hlavní ose symetrie a poté byl na stejné vlákno zavěšen studovaný kvádr a změřeny periody kmitání vůči třem jeho hlavním osám setrvačnosti a jedné „obecné“ ose, která byla rovnoběžná s jednou stěnovou úhlopříčkou. Stejným způsobem byl pak změřen moment setrvačnosti tyče vůči jejímu těžišti. Tyč se pak nechala kývat kolem kovového břitu ve tvaru trojúhelníkového hranolu upevněného na jejím konci. Ze vztahu (8) se pak určil moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející jednou hranou kovového břitu a pomocí rovnice (6) byla ověřena platnost Steinerovy věty. Protože břity byly na tyči upevněny dva, a to v různých vzdálenostech od domnělého těžiště tyče (od místa jejího upevnění k ocelovému vláknu), byla provedena měření periody kývání pro břity na obou koncích tyče.

2.2 Měřící přístroje a jejich chyby

1. Manuální posuvné měřítko s nejmenším dílkem 0,05 mm:

Posuvným měřítkem byl změřen průměr válce a rozměry kvádru, chybu odhaduji na polovinu nejmenšího dílku, tedy 0,025 mm.

1. Digitální posuvné měřítko:

Tímto nástrojem byly změřeny vzdálenosti obou břitů od místa upevnění tyče k ocelovému vláku. Z přiložených specifikací byla určena chyba měření jako 0,03 mm.

1. Laboratorní váhy ScoutPro:

Váhy byly použity pro změření hmotnosti válce a tyče. Jejich chyba byla zjištěna z přiložených specifikací přístroje jako 0,1 g.

1. Digitální stopky ZPA Pragotron se snímkovací frekvencí 50 Hz:

Stopky s časovým rozlišením odpovídajícím frekvenci střídavého napětí v elektrické síti byly velmi přesné, do určení časových okamžiků se však silně projevila reakční doba člověka, kterou odhaduji na 0,2 s. Protože reakční doba ovlivňuje určení okamžiku začátku i konce studované chvíle, je celková chyba určení časových intervalů dvojnásobná, tedy 0,4 s.

1. Termohygrobarometr Commeter C4130:

Přístroj byl použit pro změření laboratorních podmínek (teploty, tlaku, vlhkosti) během experimentu. Chyby v jejich určení (viz tabulka 1) byly zjištěny z přiloženého návodu k použití tohoto přístroje.

3 Výsledky měření

Během experimentu byly určeny laboratorní podmínky, na jeho průběh a naměřené hodnoty však neměly vliv. Ovlivnit měření by mohly velké výkyvy teplot, při kterých by se mohl mezi jednotlivými měřeními měnit direkční moment vlákna, k takovým změnám ovšem v žádném případě nedošlo.

Tabulka 1: Laboratorní podmínky

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | naměřená hodnota | chyba |
| teplota okolí | 24,4 °C | 0,4 °C |
| tlak vzduchu | 971 hPa | 2 hPa |
| vlhkost vzduchu | 32,4 % | 2,5 % |

3.1 Měření rozměrů a hmotnosti těles

Hmotnost válce a tyče byly změřeny na laboratorních vahách ScoutPro. Z pěti naměřených hodnot byl vypočítán jejich průměr a jeho standardní odchylka (podle vztahu (9) s ). Hmotnost válce byla změřena jako , hmotnost tyče jako .

Rozměry těles byly určeny posuvnými měřítky – průměr válce a rozměry kvádru manuálním a vzdálenost břitů od těžiště tyče digitálním, protože na tyto rozměry již manuální posuvné měřítko nestačilo. Rozměry byly změřeny vždy pětkrát a z nich byl pak určen průměr a jeho odchylka (podle vztahu (9) s ). Tyto výsledné hodnoty shrnuje tabulka 2.

Tabulka 2: Rozměry studovaných těles

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| těleso | válec | tyč | | kvádr | | |
| rozměr tělesa | (průměr) | (břit A od těžiště) | (břit B od těžiště) | (nejkratší hrana) | (střední hrana) | (nejdelší hrana) |
| hodnota / cm |  |  |  |  |  |  |

3.2 Měření doby torzních kmitů těles na ocelovém vlákně

Nejprve byl na vlákno zavěšen testovací válec a byla změřena doba 10 period. Měření bylo pětkrát opakováno a z těchto hodnot byl vypočten průměr a jeho odchylka (statistická chyba). Podle vztahu (12) byla tato chyba zkombinována se systematickou chybou určení časového intervalu danou reakční dobou člověka (), která se projeví v určení času začátku i konce studovaného intervalu a činí tedy . Průměrnou dobu deseti i jedné periody ukazuje tabulka 3.

Tabulka 3: Doby torzních kmitů válce

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| interval několika period |  |  |
| délka intervalu |  |  |

Perioda torzních kmitů testovacího válce byla tedy změřena jako .

Stejným způsobem byly změřeny doby 10 period torzních kmitů kvádru kolem osy rovnoběžné s hranou , s hranou a se stěnovou úhlopříčkou . Pro kmitání kolem osy rovnoběžné s hranou byla změřena doba 20 period. Z těchto hodnot byl vypočten průměr a ze vztahu (9) s  (resp. u osy rovnoběžné s hranou ) byla vypočtena odchylka aritmetického průměru. Tato chyba několika period byla vztahem (12) zkombinována s chybou v určení časového intervalu a pomocí vztahu (11) (s , resp. ) byla dopočtena chyba jedné periody. Výsledné délky časových intervalů shrnuje tabulka 4.

Tabulka 4: Doby torzních kmitů kvádru kolem tří hlavních a jedné obecné osy

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| hrana | | hrana | | hrana | | úhlopříčka | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Důležitá je především hodnota .

Nakonec byla na ocelové vláno zavěšena tyč v jejím těžišti. Byla změřena doba 10 period a analogicky k předchozím tělesům byl spočítán průměr a jeho odchylka 10 period i jedné periody. Hodnoty ukazuje tabulka 5.

Tabulka 5: Doby torzních kmitů tyče

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| interval několika period |  |  |
| délka intervalu |  |  |

Perioda torzních kmitů tyče kolem jejího těžiště tedy byla určena jako .

3.2 Měření doby kmitu tyče jako fyzikálního kyvadla

Dále se tyč zavěsila za břit, byla drobně vychýlena (o méně než 5 °, aby byly splněné teoretické podmínky pro aproximace nutné pro platnost vztahu (8)). Pro oba břity byla změřena doba 10 period a měření bylo desetkrát opakováno. Z hodnot byl spočítán průměr a jeho odchylka (podle vztahu (9) s ), vypočtené hodnoty jsou v tabulce 6.

Tabulka 6: Doby kmitů tyče jako fyzikálního kyvadla

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| břit A ( cm) | | břit B ( cm) | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Pro jednotlivé břity se délky period drobně lišily, po zaokrouhlení na stejný řád jako chyba se však rozdíly smazaly, a proto budu uvažovat jen břit A.

3.4 Momenty setrvačnosti

Moment setrvačnosti homogenního válce byl vypočítán podle (7) a jeho odchylka dosazením tohoto vztahu za funkci v (10), konkrétně tedy jako

(13)

kde je chyba určení hmotnosti válce a chyba určení průměru. Moment setrvačnosti válce je tedy roven .

Momenty setrvačnosti kvádru vůči různým osám procházejícím těžištěm byly určeny porovnáním periody torzních kmitů kvádru kolem dané osy a periody kmitů válce podle vztahu (3). Jejich odchylka byla vypočtena podle (10) dosazením vztahu (3) za funkci , konkrétně jako

, (14)

kde je perioda kmitání kvádru kolem příslušné osy, je její chyba, je perioda kmitání testovacího válce a její chyba. Vypočtené hodnoty shrnuje tabulka 7.

Tabulka 7: Momenty setrvačnosti kvádru vůči různým osám procházejícím těžištěm

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Analogicky vypočteme i moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející jejím těžištěm a jeho chybu podle (10) jako

, (15)

kde je perioda torzních kmitů tyče kolem těžiště a její chyba. Moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející těžištěm je tedy .

Pro ověření teorie spočteme moment setrvačnosti kvádru vůči ose rovnoběžné se stěnovou úhlopříčkou podle vztahu (5). Využité složky jednotkového vektoru jsou a , chyby byly odhadnuty za základě přesnosti měření jednotlivých délek hran a . Moment setrvačnosti je tedy . Jeho chyba byla spočtena dosazením vzorce (5) za funkci do vztahu (10):   
. Momenty a se tedy v rámci chyby shodují.

Dále byl vypočten moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející břitem A ze vztahu (8), chyba byla určena jako ,   
kde je místní tíhové zrychlení pro Prahu [3]. Moment vůči ose procházející břitem je tedy . Ze Steinerovy věty (6) dopočteme moment setrvačnosti vůči těžišti , jeho chybu určíme dosazením vztahu pro za funkci ve vzorci (10), čímž dostaneme. a se tedy v rámci chyby shodují. Vypočtené a naměřené hodnoty shrnuje tabulka 8.

Tabulka 8: Vypočtené a naměřené hodnoty momentů setrvačnosti kvádru a tyče

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| těleso | naměřený | vypočtený |
| kvádr |  |  |
| tyč |  |  |

4 Diskuse

Měření posuvnými měřítky a vážení váhami bylo velmi přesné, největší nejistoty vneslo měření period jednotlivých pohybů v důsledku velké reakční doby člověka. Pokud by se místo měření stopkami pohyby studovaly např. pomocí sonaru nebo laserového paprsku, který by byl během kmitání pravidelně přerušován, přesnost naměřených hodnot by byla násobně větší. Přesto jsou relativní chyby určení period torzních kmitů v rámci desetin procent. Relativní chyba periody kmitání tyče jako fyzického kyvadla je vyšší (jednotky procent), kvůli krátké době kmitu. Proto je také vysoká relativní chyba momentu (dokonce 28,6 %). Hodnoty momentu setrvačnosti tyče vůči těžišti se však shodují i v rámci chyby torzně naměřeného , možná tedy byla chyba v určení délky časových intervalů nadhodnocena.

Systematické chyby mohou pocházet z nesprávných předpokladů na tělesa, tedy že jsou homogenní a symetrické. Tělesa se však na vlákno upevňovala našroubováním do připraveného otvoru, který určitě nebyl šroubem dokonale zaplněn. Tyto nepřesnosti jsou však pravděpodobně jen malé. Větší problém by mohl nastat, kdyby rohy „kvádru“ nebyly odsekané symetricky a těžiště se nenacházelo v jeho středu, případně kdyby břity na tyči nebyly rovnoběžné s osu závitu, kam se šroubovalo upevnění k vláknu. Pak by nemohla platit Steinerova věta, která předpokládá, že osy, vůči nimž měříme momenty setrvačnosti, jsou rovnoběžné. V rámci chyby jsou však naměřené hodnoty ve shodě s teorií, a tedy předpoklady byly nejspíš s určitou přesností splněny.

5 Závěr

Hlavní momenty setrvačnosti studovaného kvádru vůči jednotlivým hlavním osám setrvačnosti jsou

Složky jednotkového vektoru ve směru stěnové úhlopříčky, která je kolmá na hranu jsou

.

Moment setrvačnosti kvádru vůči ose procházející těžištěm ve směru tohoto vektoru změřený metodou torzních kmitů je . A jeho vypočtená hodnota na základě momentů a a vztahu (5) je , teoretická hodnota je tedy ve shodě s tou experimentálně určenou.

Moment setrvačnosti tyče vůči těžišti určený metodou torzních kmitů je   
. A ten samý moment ovšem vypočtený se Steinerovy věty a momentu setrvačnosti tyče vůči ose procházející břitem na jejím konci (zjištěným studiem kmitání tyče jako fyzikálního kyvadla) je . Steinerova věta tedy byla ověřena.

Literatura

[1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK: Studium otáčení tuhého tělesa [online]. [cit. 17.3.2025] https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\_media/zadani/texty/txt\_117.pdf

[2] J. Englich: Úvod do praktické fyziky I: Zpracování výsledků měření. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2006

[3] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Tíhové zrychlení [online]. c2024 [cit. 17. 03. 2025]. https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=T%C3%ADhov%C3%A9\_zrychlen%C3%AD&oldid=23885898