

Diferencias Finitas

MMCCD 2021

Profesor: Héctor Benítez Pérez

Profesora: Nora Pérez Quezadas

Ayudante: Rubén Sánchez Duque

Alfonso Barajas Cervantes

Ciencia de Datos, IIMAS

Keywords: Método numérico, Serie de Taylor, Ecuaciones Diferenciales, Discretización, Temperatura.

Abstract

La aproximación por el método de diferencias finitas para derivadas son uno de los simples y antiguos métodos para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Ya se conocía por Leonhard Euler (1707 – 1783) en una dimensión de espacio y fue probablemente extendido a dos dimensiones por C. Runge(1856 – 1927) en 1908. La aparición de este método de diferencias finitas en aplicaciones numéricas empezó cerca de los años de 1950's gracias al avance de la tecnología y disponibilidad de cálculo para soluciones de problemas complejos. Bases teóricas se han desarrollado para la exactitud, estabilidad y convergencia del método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales.

1 Introducción: Problema a resolver

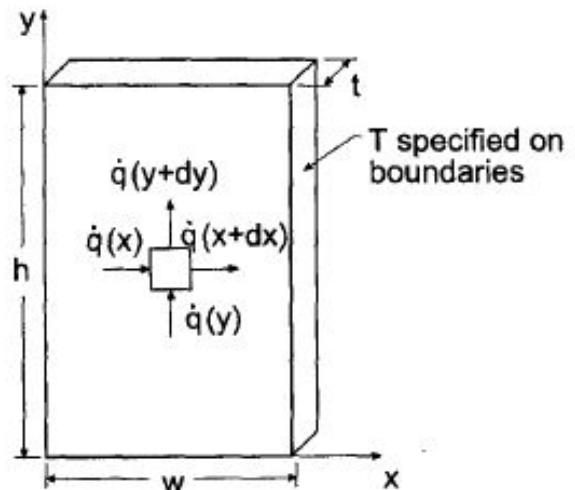
El método de Diferencias finitas lo usaremos para la resolución de ecuaciones elípticas diferenciales parciales. En este caso, lo aplicaremos a la aplicación en específica de problemas de la difusión del calor, donde hay un cuerpo en el que tiene ciertas temperaturas en su alrededor que transferirán el calor, por lo que tendremos el movimiento del calor de lugares calientes hacia los cuerpos frios. En este caso trabajaremos en una placa rectangular $S \in \mathbb{R}^2$ donde internamente no tiene una fuente interna que genere calor, sino que son condiciones externas a éste rectángulo en su frontera.

Por lo tanto, tenemos que si $T(x, y)$ es la distribución interna de la temperatura dentro de la placa rectangular, como se observa en la siguiente imagen cuando $t = 0$ es decir que estamos en \mathbb{R}^2 . Y si tenemos que \dot{q} es la razón de proporción de calor de su alrededor, tenemos que la distribución de la temperatura de la placa rectangular está descrita por la Ecuación de Laplace en dos dimensiones:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \quad (1)$$

la cual, está sujeto a condiciones específicas de la frontera de los cuatro lados de la placa.

A continuación, se presenta la imagen del problema a resolver sobre la difusión del calor. En este caso, notamos que estamos



$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad T(x, y) = ?$$

Figure 1. Placa rectangular en \mathbb{R}^2 para conocer distribución de calor dada las temperaturas en su frontera ($t = 0$)

resolviendo la ecuación de Laplace homogénea, en el caso en que se conozca la constante de proporción que se distribuye el calor, entonces tendríamos que se modelaría con la ecuación de Poisson dos dimensiones:

$$T_{xx} + T_{yy} = -\frac{\dot{Q}}{k} \quad (2)$$

donde tenemos que k es la conductividad térmica del conductor de calor, mientras que \dot{Q} es la razón de calor volumétrico medido en $(\frac{\text{J}}{\text{cm}^3 \text{s}})$ **Nota:** Numerosas ecuaciones diferenciales parciales elípticas surgen en la modelación de comportamientos en la ciencia y en la ingeniería que aplica para problemas de la difusión de masa, de la difusión de calor (conducción), de la difusión de neutrones, electrostática, flujo de fluidos,

etc... De hecho, la ecuación de Laplace describe perfectamente bastantes fenómenos físicos en donde la razón de flujo de una particular propiedad física es proporcional al gradiente de un potencial.

Entonces, de una manera más formal o matemáticamente, lo que estamos tratando de resolver son dos tipos de ecuaciones de Laplace:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad (3)$$

$$f_{xx} + f_{yy} = F(x, y) \quad (4)$$

Donde sus solución de las ecuaciones 3 y 4 es una función $f(x, y)$. Donde la función $f(x, y)$ debe de satisfacer un conjunto de condiciones frontera en la frontera de las soluciones del dominio cerrado. Este tipo de condiciones deben de ser del tipo:

- *Tipo Dirichlet*: Específicos valores de f
- *Tipo Neumann*: Específicos valores de la derivada de f
- *Tipo variado*: Una específica combinación de f y su derivada

2 Método Númerico: Diferencias Finitas

El *método de diferencias finitas* es un procedimiento numérico en el cual da solución a ecuaciones diferenciales parciales al discretizar el dominio físico en una cuadrícula discreta y finita, aproximando cada nodo de manera individual su respectiva derivada parcial para obtener una aproximación algebraica de las ecuaciones de diferencias para la variable dependiente.

De manera más general, esto se puede usar para distintas dimensiones, pero lo aplicaremos para R^2 . Tenemos el dominio $D(x, y)$ cuya frontera es cerrada y además tiene condiciones de frontera como observamos en la siguiente imagen.

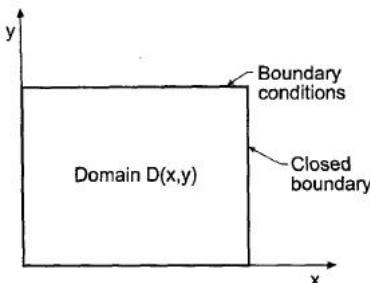


Figure 2. Características generales de Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

2.1 Cuadrícula de Diferencias Finitas

Tenemos que el dominio cerrado $D(x, y)$ lo que haremos es cubrirlo con líneas paralelas a los ejes x, y para que obtenga una cuadrícula de diferencias finitas. Las intersecciones entre las líneas mencionadas se llaman puntos de la cuadrícula en donde obtendremos la solución de la diferencia finita para la

ecuación diferencial parcial . Tenemos que punto a punto, presentan un espacio en el eje x de Δx y en el eje y de un espacio de Δy . Por lo que se obtendrá una cuadrícula del siguiente estilo: Para que sea más sencillo de manejar, mencionaremos a

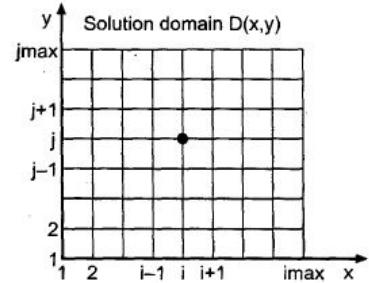


Figure 3. Dominio solución $D(x, y)$ y la cuadrícula discreta de diferencias finitas.

la pareja (i, j) de puntos que corresponden a las coordenadas (x_i, y_j) de la cuadrícula de la solución del dominio $D(x, y)$. Además denotemos a la función $f(x, y)$ en el punto (i, j) se denotará de la siguiente manera:

$$f(x_i, y_i) = f_{i,j} \quad (5)$$

Por lo que de manera similar, tenemos que sus derivadas parciales se denotaran de la siguiente manera:

$$\frac{\delta f(x_i, y_i)}{\delta x} = \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = f_x|_{i,j} \quad y \quad \frac{\delta^2 f(x_i, y_i)}{\delta x^2} = \left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_{i,j} = f_{xx}|_{i,j} \quad (6)$$

2.2 Aproximaciones Diferencias Finitas

Dado que ya tenemos la cuadrícula especificada, ahora podemos desarrollar las individuales nodos de la cuadrícula evaluadas en su solución de la derivada parcial. Y esto se obtiene escribiendo las *Series de Taylor* para la variable dependiente usando los puntos de la cuadrícula (i, j) para encontrar la solución de la deseada derivada parcial.

Dada la Serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = a$

$$f_{(x)} = f_{(a)} + f'_{(a)}(x-a) + f''_{(a)} \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}_{(a)} \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (7)$$

Luego, obteniendo las diferencias con las respectivas Δx en la cuadrícula y haciendo $x = x_0$, tenemos lo siguiente:

$$1. f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\delta f(x_0)}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta^2 f(x_0)}{\delta x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

$$2. f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \frac{\delta f(x_0)}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta^2 f(x_0)}{\delta x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

Luego tenemos que sumando 1) y 2), tenemos:

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + 2 \frac{\delta^2 f(x_0)}{\delta x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} \rightarrow$$

$$\frac{\delta^2 f(x_0)}{\delta x^2} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (8)$$

De manera análoga, tenemos lo siguiente:

$$\frac{\delta^2 f(y_0)}{\delta y^2} = \frac{f(y_0 + \Delta y) - 2f(y_0) + f(y_0 - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (9)$$

Tenemos que entonces, que reescribiéndolo con la notación que hemos descrito sobre la cuadrícula de diferencia finita, tenemos que las ecuaciones 8 y 9 se pueden reescribir :

$$f_{xx}|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (10)$$

$$f_{yy}|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (11)$$

De la Ecuación de Laplace 3, con $\beta \approx \frac{\Delta x}{\Delta y}$ tenemos:

$$f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + \beta^2 f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + \beta^2 f_{i,j-1}}{2(1 + \beta^2)} \quad (12)$$

Por lo que si hacemos que $\beta = 1 \Rightarrow \Delta x = \Delta y$, tendriamos la siguiente ecuación:

$$f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}}{4} \quad (13)$$

Lo que podemos notar, entonces es justo que el nodo central depende de los que estén a su alrededor, por lo que para cada nodo incógnita, tendremos en términos de los que están a su alrededor. Por lo que se planteará un sistema con la cantidad de particiones que haremos, es decir, si hacemos una cuadrícula de 9 nodos, tendriamos una matriz de $M_{9 \times 9}(R)$. De manera general, tendremos:

$$Ax = b$$

Donde $A \in M_{n \times n}(R)$, y es de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -4 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Donde el sistema de ecuaciones expresado de forma matricial se puede resolver con los métodos vistos en clase directos como la Eliminación de Gauss, o la factorización de Cholesky, mientras que con los métodos iterativos también se puede resolver como lo serían el método de Jacobi y método de Gauss-Seidel, los cuales veremos a continuación los resultados.

3 Resultados de Ejercicio Propuesto

El ejercicio propuesto fue el siguiente: Determinar la distribución de la temperatura en una sección rectangular del plano sujeta a la ecuación de Laplace 3 y las condiciones frontera dadas mediante el método de diferencias finitas:

$$x = 0, T = 100y;$$

$$x = 3, T = 250y;$$

$$y = 0, T = 0;$$

$$y = 2, T = 200 + (100/3)x^2;$$

3.1 Planteación algebraica

A continuación plantearemos el sistema de ecuaciones discretizadas para una malla pequeña de 5×5 . Entonces, si lo que hacemos es una malla a nivel matricial, colocando las incógnitas respectivas con $T_{i,j}$, donde para $\Delta x = 0.75$ y $\Delta y = 0.5$.

$$\begin{bmatrix} 200 & 218.75 & 275 & 368.75 & 500 \\ 150 & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & 375 \\ 100 & T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} & 250 \\ 50 & T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

1. $-4T_{1,1} + 50 + T_{2,1} + T_{1,2} + 0 = 0$
2. $-4T_{1,2} + T_{1,1} + T_{2,2} + T_{1,3} + 0 = 0$
3. $-4T_{1,3} + T_{1,2} + T_{2,3} + 125 + 0 = 0$
4. $-4T_{2,1} + 100 + T_{3,1} + T_{2,2} + T_{1,1} = 0$
5. $-4T_{2,2} + T_{2,1} + T_{3,2} + T_{2,3} + T_{1,2} = 0$
6. $-4T_{2,3} + T_{2,2} + T_{3,3} + 250 + T_{1,3} = 0$
7. $-4T_{3,1} + 150 + 218.75 + T_{3,2} + T_{2,1} = 0$
8. $-4T_{3,2} + T_{3,1} + 275 + T_{3,3} + T_{2,2} = 0$
9. $-4T_{3,3} + T_{3,2} + 368.75 + 375 + T_{2,3} = 0$

Por lo que tendremos, que el sistema matricial del sistema de las ecuaciones anteriores $Ax = b$, es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(x)^T = (T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}, T_{2,1}, T_{2,2}, T_{2,3}, T_{3,1}, T_{3,2}, T_{3,3})$$

$$(b)^T = (-50, 0, -125, -100, 0, -250, -368.75, -275, -743.75)$$

Por lo que como podemos notar, la numeración de los nodos de la cuadrícula o del mallado, es empezando desde abajo y finalizando arriba para las filas, mientras que las columnas son justo empezando de izquierda y finalizando en la derecha, como se observa en la numeración del mallado en 14

3.2 Solución con Método Directo: Eliminación de Gauss

Se propone este método en comparación a los demás métodos vistos en clase, en contraste a la factorización de Cholesky, o factorización QR, es por la facilidad de manejar la matriz A que tiene en su mayoría ceros, luego siguen 1, -4. Por lo que, computacionalmente se harán menos operaciones y por ello se eligió el *método de eliminación de Gauss*.

A continuación, se presenta el mallado en forma matricial con la solución correcta obtenida con el programa desarrollado para el método de Eliminación de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 200 & 218.75 & 275 & 368.75 & 500 \\ 150 & 180.3 & 226.7 & 292.8 & 375 \\ 100 & 125.8 & 158.6 & 200.8 & 250 \\ 50 & 64.2 & 81.1 & 101.7 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Además, presentamos la proyección en el plano XY , donde podemos percibir las diferentes temperaturas. Y se muestra

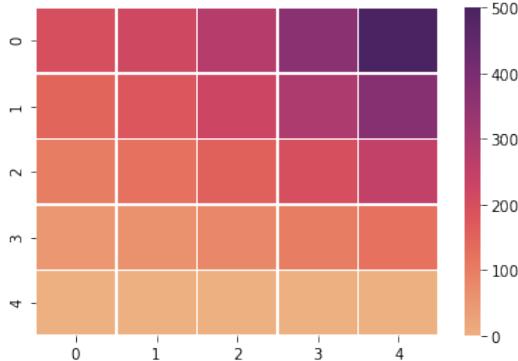


Figure 4. Proyección $X - Y$, temperaturas de malla de 5×5

aemás la gráfica en 3-D donde (X, Y) es el conjunto de puntos de la malla, mientras que $F(x, y) = T(x, y)$, es decir, graficamos con la temperatura. A continuación se detallarán

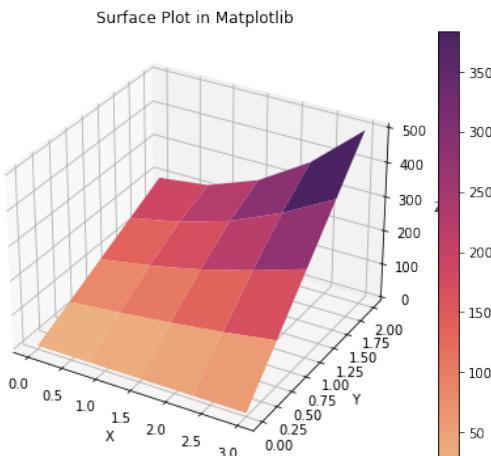


Figure 5. Gráfica en 3-D, temperaturas de malla de 5×5

cuando $\Delta x \neq \Delta y$ y además $\Delta x = \Delta y$, así conforme van ten-

diendo a cero, en próximas secciones. Estos resultados fueron con el método directo, mientras que vamos ahora a compararlo con el método iterativo.

3.3 Solución con Método Iterativo: Gauss-Seidel

Se eligió el método de Gauss Seidel debido a su rapidez de convergencia con experiencia previa, así como diversos fallos que no se pudieron encontrar una correcta solución. Que se anexará en el documento.

- Iteraciones = 19 con un error menor de 1×10^{-10}
- $\Delta x = 0.75, \Delta y = 0.5$

A continuación, se mostrarán los resultados obtenidos:

$$\begin{bmatrix} 200 & 218.75 & 275 & 368.75 & 500 \\ 150 & 180.3 & 226.7 & 292.8 & 375 \\ 100 & 125.8 & 158.6 & 200.8 & 250 \\ 50 & 64.2 & 81.1 & 101.7 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Que como podemos notar, es exactamente la solución que se obtuvo en la parte de la del método Directo. Se hicieron más experimentos, y se llegó a la conclusión de que dan los mismos datos conforme obtenemos una malla con una discretización relativamente pequeña. Pero digamos, que si le llegamos a aumentar 2 puntos más a la malla, entonces ya comenzamos a notar una diferencia de $+/- 2$ grados Centígrados. Colocamos, para que se vea diferente la relación de los colores. Mientras,

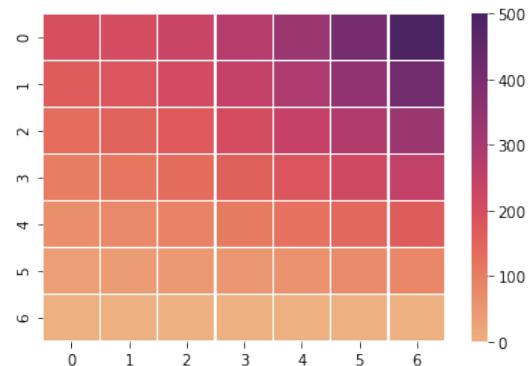


Figure 6. Proyección $X - Y$, temperaturas de malla de 7×7

que podemos notar ahora con el método iterativo cuando lo graficamos en 3 – D

Surface Plot in Matplotlib

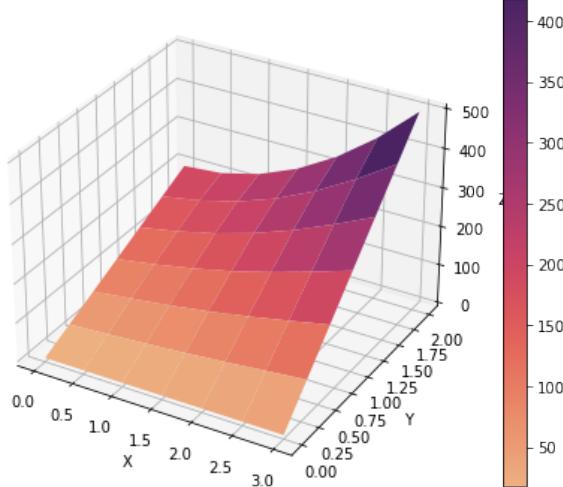


Figure 7. Caption

3.4 Análisis de $\beta = 1$

Se presentará un análisis bastante profundo con respecto a las $\Delta x = \Delta y$, para un refinamiento de $(n, n_0) = \{(15, 10), (24, 16), (30, 20)\}$, donde n será el número que se dividirá en el eje x , mientras que n_0 será lo el total de divisiones para el eje y .

3.5 $\Delta x = 0.2 = \Delta y$

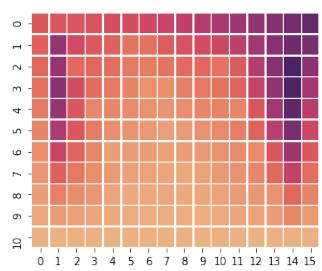


Figure 8. Heatmap para $\Delta x = 0.2 = \Delta y$

Surface Plot in Matplotlib

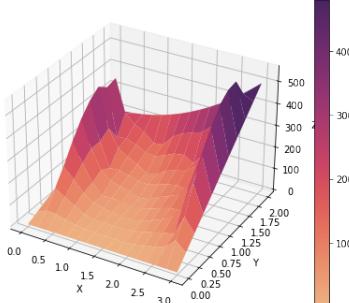


Figure 9. Grafica en R^3 para $\Delta x = 0.2 = \Delta y$

3.6 $\Delta x = 0.125 = \Delta y$

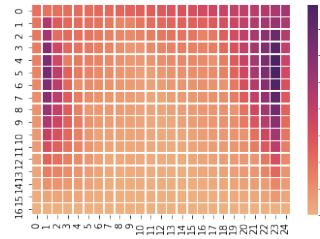


Figure 10. Heatmap para $\Delta x = 0.125 = \Delta y$

Surface Plot in Matplotlib

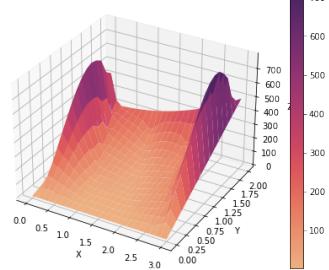


Figure 11. Grafica en R^3 para $\Delta x = 0.2 = \Delta y$

3.7 $\Delta x = 0.1 = \Delta y$

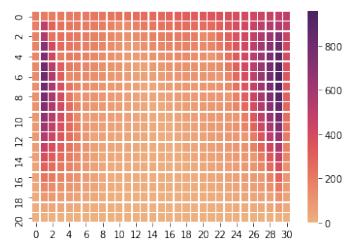


Figure 12. Heatmap para $\Delta x = 0.1 = \Delta y$

Surface Plot in Matplotlib

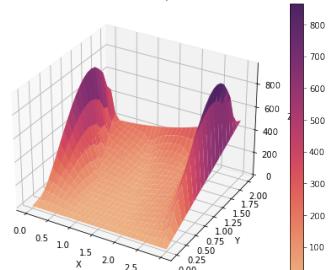


Figure 13. Grafica en R^3 para $\Delta x = 0.1 = \Delta y$

La conclusión que podemos llegar, es que justamente como tenemos que $\beta = 1$, se comporta de una manera en la que es distinta a la que uno pensaría, en la que aparecen dos fuentes de

calor que están en dos extremos distintos. Se repitió bastante este procedimiento, y se llegó a esa conclusión. Cuando tienen igual distanciamiento.

3.8 Análisis de $\beta \neq 1$

Se presentará un análisis bastante profundo con respecto a las $\Delta x \neq \Delta y$, para un refinamiento de $(n, n_0) = \{(10, 10), (16, 16), (21, 21)\}$, donde n será el número que se dividirá en el eje x , mientras que n_0 será lo el total de divisiones para el eje y .

3.9 $\Delta x = 0.3, \Delta y = 0.2$

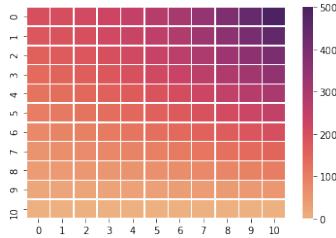


Figure 14. Heatmap para $\Delta x = 0.3, \Delta y = 0.2$

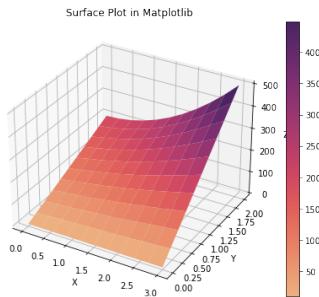


Figure 15. Grafica en R^3 para $\Delta x = 0.1875, \Delta y = 0.125$

3.10 $\Delta x = 0.1875, \Delta y = 0.125$

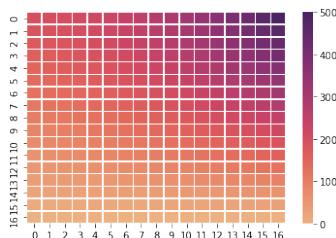


Figure 16. Heatmap para $\Delta x = 0.1875, \Delta y = 0.125$

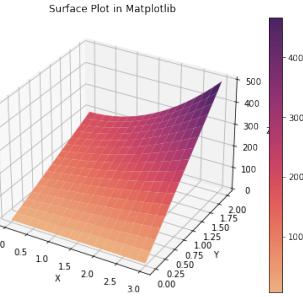


Figure 17. Grafica en R^3 para $\Delta x = 0.1875, \Delta y = 0.125$

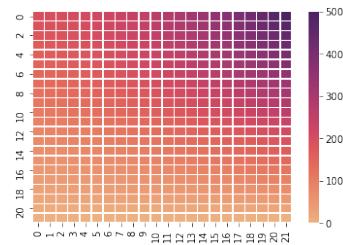


Figure 18. Heatmap para $\Delta x = 0.1428, \Delta y = 0.0952$

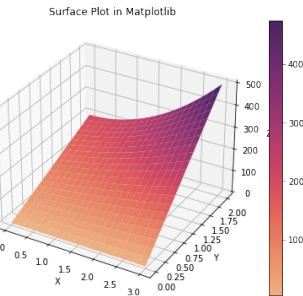


Figure 19. Grafica en R^3 para $\Delta x = 0.1428, \Delta y = 0.0952$

3.11 Análisis $\Delta x = 0.1428, \Delta y = 0.0952$

Podemos notar, que el programa es bastante certero a lo que uno pensaría pero cuando $\beta \neq 1$, contradiciendo nuestra intuición o parece ser que hay algo de trasfondo en este análisis que no se este viendo. Sin embargo, los resultados fueron bastante contundentes al mostrarnos estas diferencias entre el distanciamiento y al refinar la malla.

3.12 Análisis del Error: Gauss-Seidel

A continuación mostramos un mallado de 3×3 , comparando los resultados que se obtuvieron pero ahora considerando iteraciones cada vez más pequeñas, tales como la iteración 6 con respecto a la 7.

A continuación presentamos mallado de 3×3 con la iteración

6ta.

$$\begin{pmatrix} 200 & 218.78 & 275 & 368.75 & 500 \\ 150 & 178.8 & 225.1 & 292 & 375 \\ 100 & 122.7 & 155.5 & 199.2 & 250 \\ 50 & 61.2 & 78.1 & 100.2 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, mostramos a continuación con el mismo mallado, pero ahora en la 7-ma iteración.

$$\begin{pmatrix} 200 & 218.78 & 275 & 368.75 & 500 \\ 150 & 179.5 & 225.9 & 292.4 & 375 \\ 100 & 124.2 & 157.1 & 200 & 250 \\ 50 & 62.7 & 79.6 & 101 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que notamos que si hubo bastante diferencia entre uno y otra iteración. Notamos que llegan a variar entre $+/-1.5$ entre cada uno. Pero se cree que es debido a que se tuvo un mallado chico y además de unas iteraciones bastante cortas a lo que uno se espera para obtener mayor precisión.

3.12.1 2do Experimento

A continuación, agregaremos el mallado de 6×6 comparando los resultados que obtuvimos numéricamente con el vector inmediato anterior a el último que arroja el método iterativo. El resultado nos arrojó en la iteración 20. Por lo tanto, compararemos el análisis que hay entre estos dos vectores. Vemos que $\Delta x = 0.5$, mientras que $\Delta y = 0.33$. A continuación se presenta el experimento de comparar los dos mallados con sus respectivas temperaturas, de la iteración 20 con respecto el de la iteración 19, es decir el anterior.

Iteraciones 20

$$\begin{pmatrix} 200 & 212 & 248 & 308 & 392 & 500 \\ 160 & 182.8 & 216.5 & 264.5 & 326.8 & 400 \\ 120 & 142.7 & 170.7 & 206.8 & 250.7 & 300 \\ 80 & 97.2 & 117.1 & 141.1 & 169.2 & 200 \\ 40 & 49.1 & 59.4 & 71.4 & 85.2 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y a continuación, mostramos el de 19 iteraciones

$$\begin{pmatrix} 200 & 212 & 248 & 308 & 392 & 500 \\ 160 & 182.8 & 216.5 & 264.5 & 326.8 & 400 \\ 120 & 142.7 & 170.8 & 206.8 & 250.7 & 300 \\ 80 & 97.2 & 117.1 & 141.1 & 169.3 & 200 \\ 40 & 49.1 & 59.4 & 71.4 & 85.2 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que solamente dos nodos de la matriz, son distintos y sólo por un error de $+/-0.1$ grados Centigrados. Por lo que podemos notar, sin duda alguna que conforme vamos aumentando de iteraciones y del refinamiento de la malla tenemos una mejor aproximación y minimizando el error, como se puede comprobar experimentalmente. Además, notamos de manera experimental que conforme refinamos la malla se observa una mejor precisión al resultado.

4 Análisis con respecto Consistencia, Orden y Convergencia

Muy bien, ahora procederemos a expresar el análisis obtenido con respecto al método iterativo y los tres conceptos fundamentales de cualquier método numérico que tenemos cierta aproximación.

- **Consistencia:** Una ecuación en diferencias finitas es consistente con una ecuación diferencial parcial si la diferencia entre el FDE y el PDE (es decir, el error de truncamiento) desaparece a medida que los tamaños de los espacios de la cuadrícula van a cero de forma independiente.

Esto se pudo notar de manera experimental, que al hacer un refinamiento cada vez más pequeño, se obtenía un error cada vez más grande alrededor de $+/-1.5$, pero al incrementar el refinamiento de la malla se hizo más pequeño, vimos que había solamente dos puntos cuya diferencia sólo era entre $+/-0.1$ de diferencia. Por lo que se pudo notar experimentalmente este aspecto fundamental de un método que se aproxima.

- **Orden:** El orden de una aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial es la velocidad a la que se acerca el error de la solución en diferencias finitas zero ya que los tamaños de los espacios de la cuadrícula se acercan a cero.

Se pudo obtener de manera experimental un buen aspecto de orden con respecto al método iterativo, debido a que se aumentaba la velocidad de cambio conforme aumentábamos el refinamiento, y justo conforme lo hacíamos tender a cero la distancia que hay entre un punto y otro obtenemos, justamente que el error iba disminuyendo a cero. Por lo que se pudo comprobar que la velocidad incrementa para que disminuya bastante rápido al tener a cero las distancias.

- **Convergencia:** Un método de diferencia finita es convergente si la solución de la diferencia finita ecuación se approxima a la solución exacta de la ecuación diferencial parcial como los tamaños de los espacios de la cuadrícula van a cero.

No podemos compararlo de manera exacta, es decir la solución exacta, pero si podemos compararlo con el resultado que obtenemos de la iteración anterior, que como podemos notar, conforme realizamos un discretizado bastante fino y las iteraciones lo vamos haciendo cada vez más en cantidad, tendremos lo que sería una convergencia realmente buena y aceptable con respecto a las epsilon que deja. Pudimos notar experimentalmente que el método iterativo de Gauss-Seidel, deja realmente una buena convergencia al método se refiere. Y se nota aún más la importancia de realizar un finado muy chico para poder obtener una correcta convergencia.

5 Conclusiones

Con el análisis respectivo que se realizó en éste examen, se pudo notar la importancia de poder aproximar de una manera diferente en vez de realizar las definidas de una forma exacta. Este método tanto iterativo y el directo dieron bastantes aproximaciones bastante similares entre una y otra conforme aumentábamos el refinamiento de la malla. Además, se llegó a notar que la diferencia entre el mallado que es aquél igual $\beta = 1 \Rightarrow \Delta x = \Delta y$, y aquél en dónde es diferente, que llega a ser bastante conforme el distanciamiento o el refinamiento de la malla tiende a cero. Lo cual parece sorprendente, a lo mejor se necesita probar mejor esos casos con el programa en unos futuros trabajos y desarrollos con este tipo de método.

Adeás, se llegó a la conclusión de que el método iterativo tiene una mejor precisión al calcular de manera aproximada la respectiva temperatura, que justo con el método cumple bastante bien con el refinamiento de la malla. Dejando de lado la precisión, tiene las tres características fundamentales para un método approximativo, y tenemos la certeza de que al ocuparlo servirá bastante bien en donde se utilicé en futuras aproximaciones.

6 Referencias

- Hoffman Joe D.,(1992) ,Numerical Methods for Engineers and Scientists, 2nd Edition, Revised and Expanded, McGraw-Hill. New York.