# T2.3 Probabilidad, regla de Bayes y distribuciones

**Índice**

# 1 Introducción (opcional)

## 1.1 ¿Qué es probabilidad?

**Frecuentista:** frecuencia (asintótica) de eventos repetitivos

**Bayesiana:** modelo de **incertidumbre** sobre eventos

## 1.2 Tipos de incertidumbre

**Epistémica:** incertidumbre sobre el modelo

**Aleatórica:** incertidumbre de los datos

# 1.3 Probabilidad como extensión de la lógica

## 1.3.1 Probabilidad de un evento

**Evento:** variable binaria $A$

**Probabilidad de que el evento $A$ sea cierto:** $\Pr(A)$

**Restricción de probabilidad:** $0 \leq \Pr(A) \leq 1$

**Evento imposible:** $\Pr(A) = 0$ significa que es **imposible** que $A$ ocurra (falso)

**Evento seguro:** $\Pr(A) = 1$ significa que es **seguro** que $A$ ocurra (cierto)

**Probabilidad de que el evento $A$ no ocurra:** $\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A)$

## 1.3.2 Probabilidad de una conjunción de dos eventos

**Probabilidad conjunta de que $A$ y $B$ ocurran:** $\Pr(A \wedge B) = \Pr(A, B)$

**Probabilidad conjunta de eventos independientes:** si $A$ y $B$ son independientes, entonces $\Pr(A, B) = \Pr(A)\Pr(B)$

**Ejemplo:** si $X$ e $Y$ se escogen uniformente al azar de $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A$ es el evento $X \in \{1, 2\}$ y $B$ el evento $Y \in \{3\}$; entonces $A$ y $B$ son independientes (pues $X$ e $Y$ se escogen independientemente) y $\Pr(A, B) = \Pr(A)\Pr(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

## 1.3.3 Probabilidad de una unión de dos eventos

**Probabilidad de que el evento $A$ o $B$ ocurran (uno solo o los dos):**
$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \wedge B)$$

**Caso $A$ y $B$ mútuamente excluyentes (no pueden darse a la vez):** $\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

**Ejemplo:** Si $X$ se escoge uniformente al azar de $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A$ es el evento $X \in \{1, 2\}$ y $B$ el evento $X \in \{3\}$; entonces $\Pr(A \vee B) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$

## 1.3.4 Probabilidad condicional de un evento dado otro

**Probabilidad condicional de que un evento $B$ ocurra sabiendo que otro evento dado, $A$, ha ocurrido:**
$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A, B)}{\Pr(A)}$$

**Nota:** no está definida si $\Pr(A) = 0$ pues no tiene sentido condicionar sobre la base de un evento imposible

## 1.3.5 Independencia de eventos

**Eventos independientes:** $A$ y $B$ son **independientes** sii $\Pr(A, B) = \Pr(A)\Pr(B)$

**Notación:** $A \perp B$ o $A \perp\!\!\!\perp B$

## 1.3.6 Independencia condicional de eventos

**Eventos condicionalmente independientes:** $A$ y $B$ son **condicionalmente independientes** dado $C$ sii $\Pr(A, B \mid C) = \Pr(A \mid C)\Pr(B \mid C)$

**Notación:** $A \perp B \mid C$ o $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$

# 1.4 Variables aleatorias

**Variable aleatoria:** valor desconocido de interés $X$

**Espacio muestral:** conjunto de valores posibles $\mathcal{X}$

**Evento:** subconjunto de valores en $\mathcal{X}$

**Ejemplo:** variable aleatoria $X =$"valor obtenido al lanzar un dado" definida sobre el espacio muestral $\mathcal{X} = \{1, \ldots, 6\}$

- Evento $X = 1 \rightarrow$ "sale 1"
- Evento $X \in \{1, 3, 5\} \rightarrow$ "sale valor impar"
- Evento $1 \leq X \leq 3 \rightarrow$ "sale entre 1 y 3"

## 1.4.1 Variables aleatorias discretas

**Variable aleatoria discreta:** $\mathcal{X}$ discreto, finito o infinito contable

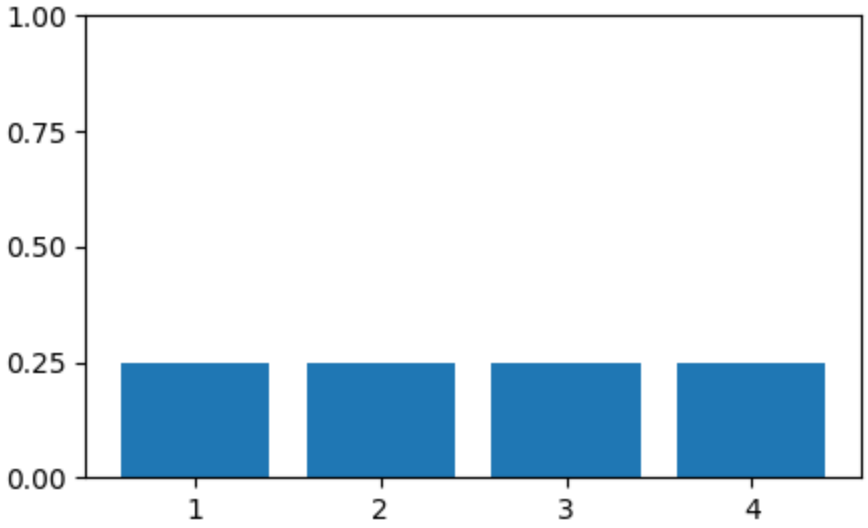
**Probabilidad del evento "$X$ toma el valor $x$":** $\Pr(X = x)$

**Función de masa de probabilidad (pmf):** $p(x) = \Pr(X = x)$

**Condiciones de una pmf:** $0 \leq p(x) \leq 1$ y $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$

**Ejemplo:** distribución uniforme en $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, $p(x) = 1/4$

In [1]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
X = np.arange(1, 5); pmf = np.repeat(1.0/len(X), len(X))
fig = plt.subplots(figsize=(5,3)); plt.xticks(X);
plt.yticks(np.linspace(0, 1, 5)); plt.ylim((0, 1)); plt.bar(X, pmf, align='center');
```



## 1.4.2 Variables aleatorias continuas

**Variable aleatoria continua:** $\mathcal{X}$ es $\mathbb{R}$

**Necesidad de particionar $\mathcal{X}$ en un número discreto de intervalos:**

- No podemos asociar $X$ a un número discreto de valores distintos
- Sí podemos asociar $X$ a un número discreto de **intervalos** que particionen $\mathcal{X}$
- Asociando eventos con que $X$ pertenezca a cada uno de los intervalos, razonamos con ellos como si fueran valores del caso discreto
- La probabilidad de que $X$ tome un valor específico se aproxima tomando un intervalo de talla infinitesimal

### 1.4.2.1 Función de distribución acumulada (cdf)

**Función de distribución acumulada (cdf) de una v.a. $X$:** $P(x) = \Pr(X \leq x)$

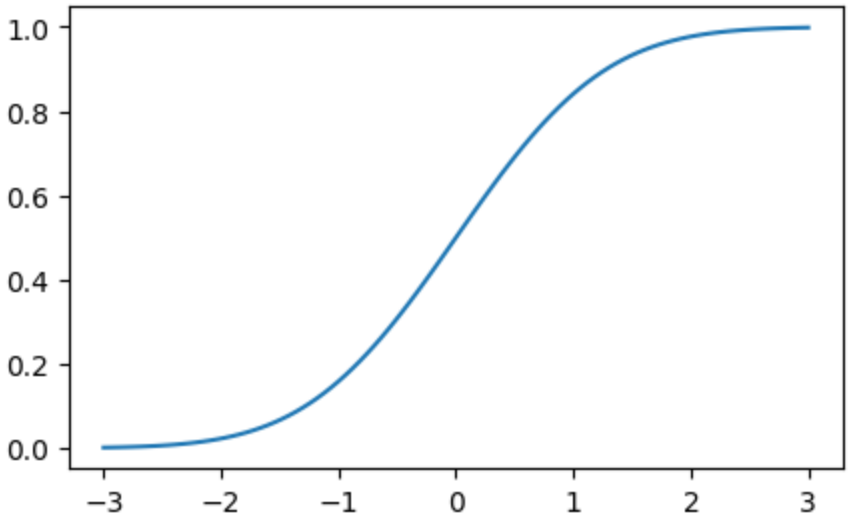
**Probabilidad de que $X$ se encuentre en un semi-abierto $C = (a < X \leq b)$, con $a < b$:**

- Sean $A = (X \leq a)$ y $B = (X \leq b)$
- Dado que $B = A \vee C$ y que $A$ y $C$ son mútuamente excluyentes, $\Pr(B) = \Pr(A) + \Pr(C)$
- Por tanto, $\Pr(C) = \Pr(B) - \Pr(A) = P(b) - P(a)$

**Monotonicidad:** las cdfs son funciones monótonas no decrecientes

**Ejemplo:** cdf de la normal estándard

In [2]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import norm
X = np.linspace(-3, 3, 100); fig = plt.subplots(figsize=(5,3)); plt.plot(X, norm.cdf(X));
```



### 1.4.2.2 Función de densidad de probabilidad (pdf)

**Función de densidad de probabilidad (pdf):** derivada de la cdf (donde existe), $p(x) = \frac{d}{dx}P(x)$

**Probabilidad de que $X$ se encuentre en un semi-abierto $C = (a < X \leq b)$, con $a < b$:**

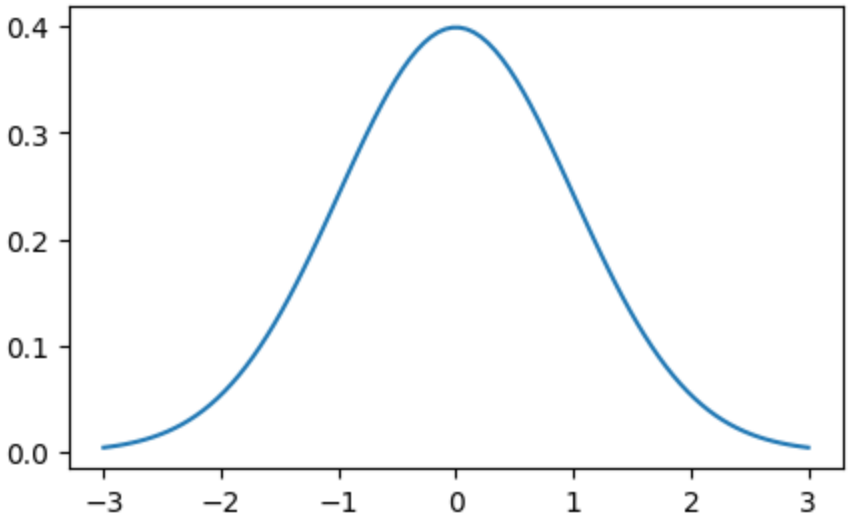
$$\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b p(x)\,dx = P(b) - P(a)$$

**Aproximación a la probabilidad de que $X$ tome un valor específico $x$:** la probabilidad de que $X$ "caiga" en un pequeño intervalo alrededor de $x$ es aproximadamente igual a la densidad en $x$ por la amplitud del intervalo

$$\Pr(x < X \leq x + dx) \approx p(x)\,dx$$

**Ejemplo:** pdf de la normal estándar

In [3]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import norm
X = np.linspace(-3, 3, 100); fig = plt.subplots(figsize=(5,3)); plt.plot(X, norm.pdf(X));
```



### 1.4.2.3 Cuantiles

**Cdf inversa o función cuantil de una cdf $P$:** para todo $q \in (0,1)$

$$\begin{aligned} P^{-1}(q) &= \{x : P(x) = q\} && \text{si } P \text{ es monótona estricta} \\ P^{-1}(q) &= \inf\{x : P(x) \geq q\} && \text{si } P \text{ no es monótona estricta (con saltos o llanos)} \end{aligned}$$

**Cuantil $q$ de $P$:** $x_q = P^{-1}(q)$ tal que $\Pr(X \leq x_q) = q$

**Mediana de $P$:** $P^{-1}(0.5)$

**Cuartiles inferior y superior de $P$:** $P^{-1}(0.25)$ y $P^{-1}(0.75)$

**Ejemplo:** si $\Phi$ es la cdf de la normal estándard y $\Phi^{-1}$ su inversa, el intervalo centrado en el origen con un $95\%$ de probabilidad es

$$(\Phi^{-1}(0.025), \Phi^{-1}(0.975)) = (-1.96, 1.96)$$

## 1.4.3 Conjuntos de variables aleatorias relacionadas

**Distribución conjunta de dos variables aleatorias $X$ e $Y$:** $p(x, y) = p(X = x, Y = y)$

**Caso finito:** si $X$ e $Y$ son finitas, su distribución conjunta puede representarse en una tabla 2d cuyas entradas suman uno en total

**Ejemplo:**

| $p(X, Y)$ | $Y = 0$ | $Y = 1$ |
|---|---|---|
| $X = 0$ | $0.2$ | $0.3$ |
| $X = 1$ | $0.3$ | $0.2$ |

**Distribución marginal de una variable aleatoria:** también llamada **regla suma o de la probabilidad total**

$$p(X = x) = \sum_y p(X = x, Y = y)$$
$$p(Y = y) = \sum_x p(X = x, Y = y)$$

**Ejemplo (cont.):** marginales en los **márgenes** de la tabla

| $p(X, Y)$ | $Y = 0$ | $Y = 1$ | $p(X)$ |
|---|---|---|---|
| $X = 0$ | $0.2$ | $0.3$ | $0.5$ |
| $X = 1$ | $0.3$ | $0.2$ | $0.5$ |
| $p(Y)$ | $0.5$ | $0.5$ | |

**Distribución condicional de $Y$ dada $X$:** $p(Y = y \mid X = x) = \dfrac{p(X = x, Y = y)}{p(X = x)}$

**Ejemplo (cont.):**

| $p(Y \mid X)$ | $Y = 0$ | $Y = 1$ |
|---|---|---|
| $X = 0$ | $0.4$ | $0.6$ |
| $X = 1$ | $0.6$ | $0.4$ |

**Regla producto:** reordenando factores, $p(X = x, Y = y) = p(X = x)p(Y = y \mid X = x)$

**Regla de la cadena:** extiende la regla producto a $D$ variables

$$p(\boldsymbol{x}_{1:D}) = p(x_1)\, p(x_2 \mid x_1)\, p(x_3 \mid x_1, x_2) \cdots p(x_D \mid \boldsymbol{x}_{1:D-1})$$

## 1.4.4 Independencia e independencia condicional

**Independencia (incondicional o marginal) de dos variables:** $X \perp Y \Leftrightarrow P(X,Y) = P(X)\,P(Y)$

**Independencia (mútua) de múltiples variables:** $X_1, \ldots, X_n$ **independientes** si, para todo $\{X_1, \ldots, X_m\} \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$,

$$P(X_1, \ldots, X_m) = \prod_{i=1}^{m} P(X_i)$$

**Independencia condicional de dos variables:** $X$ e $Y$ son **condicionalmente independientes** dada $Z$ sii su conjunta condicional puede expresarse como el producto de sus marginales condicionales

$$X \perp Y \mid Z \Leftrightarrow P(X,Y \mid Z) = P(X \mid Z)\,P(Y \mid Z)$$

## 1.4.5 Momentos de una distribución

### 1.4.5.1 Media de una distribución

**Media o valor esperado:**

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x\, p(x) \qquad \text{para variables discretas (ordenadas)}$$

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{X}} x\, p(x)\, dx \qquad \text{para variables continuas}$$

**Linealidad de la esperanza:** $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$

**Esperanza de la suma de $n$ variables aleatorias:** $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$

**Esperanza del producto de $n$ variables aleatorias independientes:** $\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$

### 1.4.5.2 Varianza de una distribución

**Varianza:** $\sigma^2 = \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$

$$\sigma^2 = \mathbb{V}[X] = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) \qquad \text{para variables discretas (ordenadas)}$$

$$\sigma^2 = \mathbb{V}[X] = \int (x-\mu)^2 p(x)\, dx \qquad \text{para variables continuas}$$

**Propiedad:** "media del cuadrado menos cuadrado de la media"

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\end{aligned}$$

**Resultado útil:** $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$

**Desviación típica:** $\sigma = \mathrm{std}[X] = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$

**Varianza de una variable aleatoria escalada y desplazada:** $\mathbb{V}[aX+b] = a^2\mathbb{V}[X]$

**Varianza de la suma de $n$ variables aleatorias independientes:** $\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i]$

**Varianza del producto de $n$ variables aleatorias independientes:**

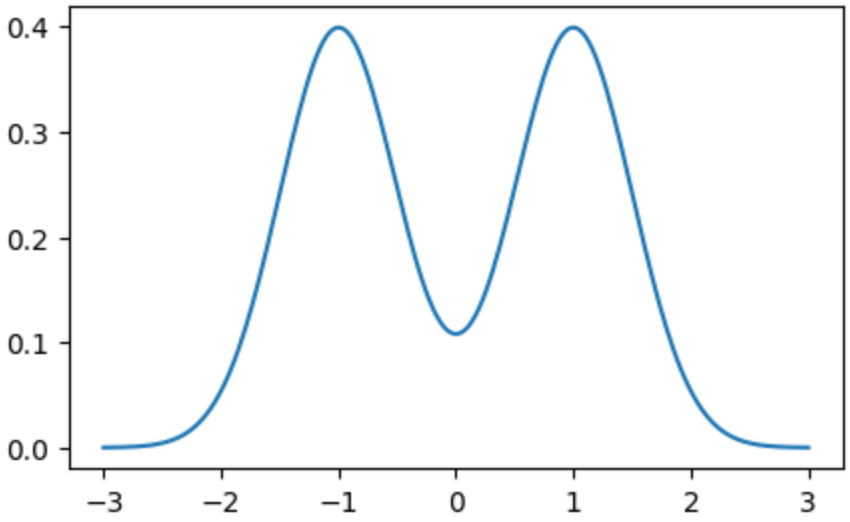
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\prod_i X_i\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\prod_i X_i\right]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_i X_i^2\right] - \left(\prod_i \mathbb{E}[X_i]\right)^2 \\
&= \prod_i \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \prod_i \left(\mathbb{E}[X_i]\right)^2 \\
&= \prod_i \left(\mathbb{V}[X_i] + \left(\mathbb{E}[X_i]\right)^2\right) - \prod_i \left(\mathbb{E}[X_i]\right)^2 \\
&= \prod_{i=1}^{n} (\sigma_i^2 + \mu_i^2) - \prod_{i=1}^{n} \mu_i^2
\end{aligned}$$

### 1.4.5.3 Moda de una distribución

**Moda:** valor de máxima (densidad de) probabilidad, $\boldsymbol{x}^* = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmax}}\, p(\boldsymbol{x})$

**No unicidad de la moda:** si la distribución es multimodal; por ejemplo

In [4]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import norm
X = np.linspace(-3, 3, 200); pdf = .5 * norm.pdf(X, loc=-1, scale=.5) + .5 * norm.pdf(X, loc=1, scale=.5)
fig = plt.subplots(figsize=(5,3)); plt.plot(X, pdf);
```



### 1.4.5.4 Momentos condicionales

**Ley de la esperanza total o esperanzas iteradas:** $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}[X \mid Y]]$

$$\mathbb{E}_Y[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \sum_y \left[\sum_x x\, p(X = x \mid Y = y)\right] p(Y = y) = \sum_{x,y} x\, p(X = x, Y = y) = \sum_x x \sum_y p(X = x, Y = y)$$

**Ejemplo:** $X =$"vida de una bombilla en horas", $Y \in \{1, 2\}$ es la fábrica

- Fábrica $1$ : produce el $60\%$ de las bombillas y duran $5000$ horas de media
- Fábrica $2$ : produce el $40\%$ de las bombillas y duran $4000$ horas de media

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid Y = 1]\, p(Y = 1) + \mathbb{E}[X \mid Y = 2]\, p(Y = 2) = 5000 \cdot 0.6 + 4000 \cdot 0.4 = 4600$$

**Ley de la varianza total o fórmula de la varianza condicional:** $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}_Y[\mathbb{V}[X \mid Y]] + \mathbb{V}_Y[\mathbb{E}[X \mid Y]]$

*Demo:* dados $\mu_{X|Y} = \mathbb{E}[X \mid Y]$, $s_{X|Y} = \mathbb{E}[X^2 \mid Y]$ y $\sigma^2_{X|Y} = \mathbb{V}[X \mid Y] = s_{X|Y} - \mu^2_{X|Y}$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}_Y[s_{X|Y}] - (\mathbb{E}_Y[\mu_{X|Y}])^2 = \mathbb{E}_Y[\sigma^2_{X|Y}] + \mathbb{E}_Y[\mu^2_{X|Y}] - (\mathbb{E}_Y[\mu_{X|Y}])^2 = \mathbb{E}_Y[\mathbb{V}[X \mid Y]] + \mathbb{V}$$

**Ejemplo:** $X = \pi_1 \mathcal{N}(X \mid \mu_1, \sigma_1) + \pi_2 \mathcal{N}(X \mid \mu_2, \sigma_2)$, con $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$; $Y \in \{1, 2\}$ es una variable oculta que indica la componente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Y[\mathbb{V}[X \mid Y]] &= \pi_1\sigma_1^2 + \pi_2\sigma_2^2 = 0.25 \\
\mathbb{V}_Y[\mathbb{E}[X \mid Y]] &= \pi_1(\mu_1 - \bar{\mu})^2 + \pi_2(\mu_2 - \bar{\mu})^2 = 0.5(0-1)^2 + 0.5(2-1)^2 = 0.5 + 0.5 = 1 \\
\mathbb{V}[X] &= 0.25 + 1 = 1.25
\end{aligned}$$

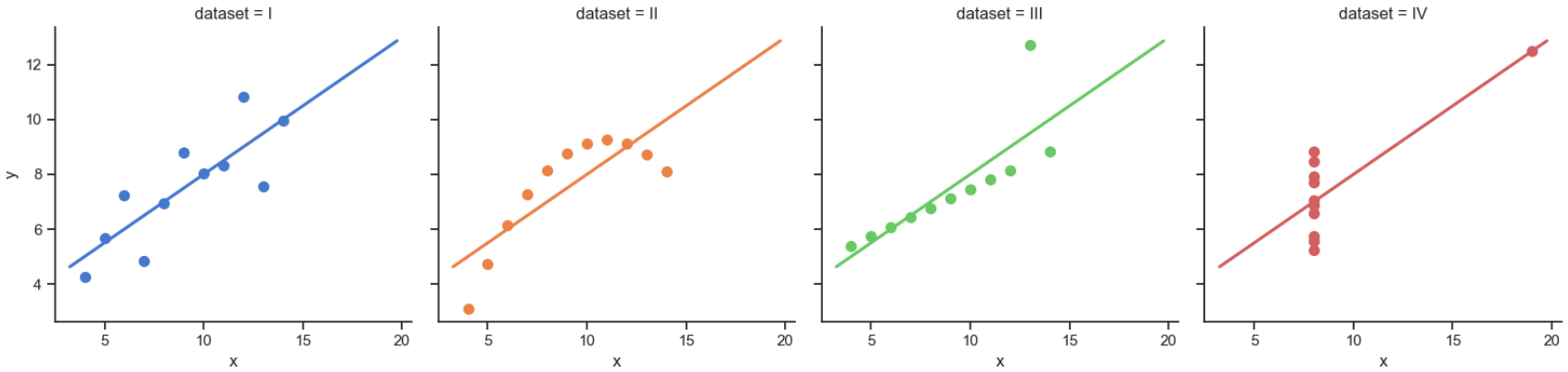
## 1.4.6 Limitaciones de la estadística descriptiva

**Limitaciones de la estadística descriptiva:** resumir una distribución con estadísticos simples (media y varianza) supone gran pérdida de información

**Ejemplo:** conjuntos de datos con mismas medias y varianzas

In [5]:
```
import warnings; warnings.filterwarnings('ignore'); import seaborn as sns
sns.set_theme(style="ticks"); df = sns.load_dataset("anscombe")
g = sns.lmplot(x="x", y="y", col="dataset", hue="dataset", data=df, col_wrap=4, ci=None, palette="muted",
               height=4, scatter_kws={"s": 50, "alpha": 1}, truncate=False); g.set(xlim=(2.5, 20.5))
for d in ['I', 'II', 'III', 'IV']:
    y = df[df['dataset'] == d]['y'].to_numpy()
    print(f'{d} {y.mean():.2f} {y.var():.2f}')
```

```
I 7.50 3.75
II 7.50 3.75
III 7.50 3.75
IV 7.50 3.75
```



# 2 Regla de Bayes

**Variables:** información desconocida u oculta (hidden) $H$ y datos observados $Y$

**Distribución a priori:** $p(H)$ es nuestra creencia sobre $H$ antes de observar datos

**Distribución de observaciones:** $p(Y \mid H = h)$ es la distribución sobre los posibles valores de $Y$ que esperamos ver si $H = h$

**Verosimilitud:** $p(Y = y \mid H = h)$ es la evaluación de $p(Y \mid H = h)$ con las observaciones reales $y$

**Distribución conjunta:** $p(H = h, Y = y) = p(H = h)\, p(Y = y \mid H = h)$

**Verosimilitud marginal:** $p(Y = y)$ se obtiene marginalizando la conjunta

**Distribución a posteriori o regla de Bayes:** actualiza nuestra creencia sobre $H$ tras observar datos

$$p(H = h|Y = y) = \frac{p(H = h, Y = y)}{p(Y = y)} = p(H = h)\, \frac{p(Y = y \mid H = h)}{p(Y = y)}$$

# 2.1 Ejemplo: Test de COVID-19

**Variable oculta:** $H = 1$ infección positiva; $H = 0$ infección negativa

**Datos observados:** $Y = 1$ test positivo; $Y = 0$ test negativo

**Distribución a priori:** $p(H = 1) = 1\%$ prevalencia de la infección

**Verosimilitud:**

| $p(Y \mid H)$ | $Y = 0$ | $Y = 1$ |
|---|---|---|
| $H = 0$ | $0.975$ | $0.025$ |
| $H = 1$ | $0.125$ | $0.875$ |

| $p(Y \mid H)$ | $Y = 0$ | $Y = 1$ |
|---|---|---|
| $H = 0$ | $\text{True negative rate (TNR)}$ | $\text{False positive rate (FPR)}$ |
| $H = 1$ | $\text{False negative rate (FNR)}$ | $\text{True positive rate (TPR)}$ |

**Probabilidad de estar infectado si el test es positivo:**

$$p(H = 1 \mid Y = 1) = p(H = 1)\,\frac{p(Y = 1 \mid H = 1)}{p(Y = 1)} = 0.01\,\frac{0.875}{0.0335} = 26\%$$

# 2.2 Ejemplo: El problema de Monty Hall

**Problema de Monty Hall:** se basa en el concurso televisivo *Let's Make a Deal* (1963--) presentado por Monty Hall durante 30 años

1. El concursante elige una puerta de tres
2. El presentador abre otra y aparece una cabra; en las dos que siguen cerradas hay un coche y otra cabra
3. El concursante puede cambiar de puerta: **¿cambia de puerta?**

**Variable oculta:** $H = i$ indica que el coche está en la puerta $i$

**Distribución a priori:** $P(H = 1) = P(H = 2) = P(H = 3) = \frac{1}{3}$

**Datos observados:** $Y = j, j \in \{2, 3\}$ es la puerta que escoge el presentador tras escoger la 1 el concursante

**Distribución de observaciones:**

| $H$ | $P(Y = 2 \mid H)$ | $P(Y = 3 \mid H)$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1/2$ | $1/2$ |
| $2$ | $0$ | $1$ |
| $3$ | $1$ | $0$ |

**Distribución conjunta y verosimilitud marginal:**

| $H$ | $P(H, Y = 2)$ | $P(H, Y = 3)$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1/6$ | $1/6$ |
| $2$ | $0$ | $1/3$ |
| $3$ | $1/3$ | $0$ |
| $P(Y)$ | $1/2$ | $1/2$ |

**Distribución a posteriori o regla de Bayes:**

| $H$ | $P(H \mid Y = 2)$ | $P(H \mid Y = 3)$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1/3$ | $1/3$ |
| $2$ | $0$ | $2/3$ |
| $3$ | $2/3$ | $0$ |

**Conclusión:** conviene cambiar ya que encontraremos el coche con probabilidad $2/3$

# 2.3 Problemas inversos

**Teoría de la probabilidad:** predicción de salidas $y$ a partir de conocimiento o asunciones sobre el estado de la naturaleza, $h$

**Teoría de la probabilidad inversa:** predicción de estados de la naturaleza $h$ a partir de observaciones sobre la salida, $y$

**Ejemplos:** inferir una forma 3d a partir de una imagen 2d en **comprensión de escenas visuales,** o la intención $h$ de un locutor a partir de lo que dice en **comprensión del lenguaje natural**

**Problemas inversos:** usamos la regla de Bayes para calcular la posterior, $p(h|y)$, mediante un **modelo hacia adelante** $p(y|h)$ y un prior $p(h)$ que descarte estados de la naturaleza no plausibles

# 3 Distribuciones discretas

## 3.1 Distribución de Bernoulli

**Distribución de Bernoulli:** $Y \sim \mathrm{Ber}(\theta)$, $\theta \in [0,1]$, si su pmf $p : \{0,1\} \to [0,1]$ es

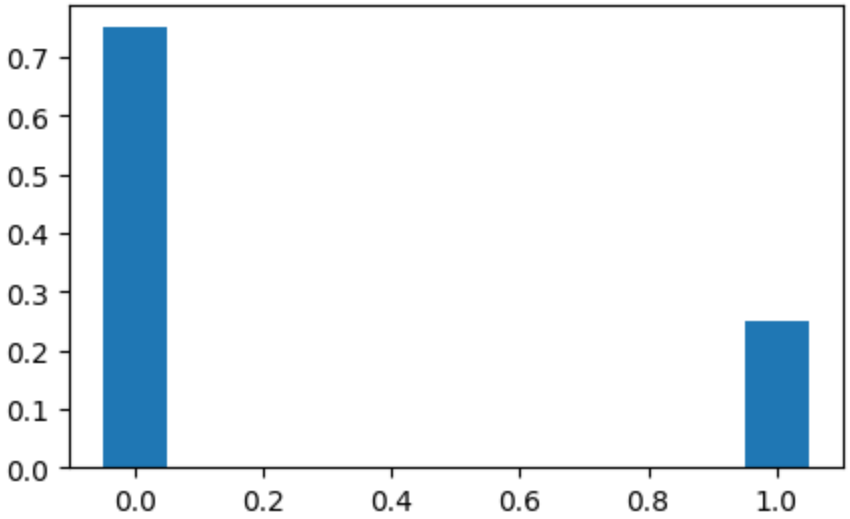
$$p(y \mid \theta) = \begin{cases} 1-\theta & \text{si } y = 0 \\ \theta & \text{si } y = 1 \end{cases} = \theta\, y + (1-\theta)(1-y) = \theta^{y}(1-\theta)^{1-y} \qquad (0^0 = 1,\ 0 \log 0 = 0)$$

**Interpretación:** $Y$ es el resultado de un **experimento** con probabilidad de **éxito** ($Y = 1$) $\theta$ y probabilidad de **fracaso** ($Y = 0$) $1 - \theta$

**Ejemplo:** $\theta = 0.25$

In [1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import bernoulli
t = 0.25; Y = bernoulli(t); print(Y.rvs(10)); y = [0, 1]
fig = plt.subplots(figsize=(5,3)); plt.bar(y, Y.pmf(y), width=0.1);
```

```
[0 0 0 1 0 1 0 0 0 0]
```




**Media:** $\mathbb{E}[Y] = 0\,p(0 \mid \theta) + 1\,p(1 \mid \theta) = 0\,(1-\theta) + 1\,\theta = \theta$

**Media del cuadrado de una Bernoulli:** $\mathbb{E}[Y^2] = 0^2\,p(0 \mid \theta) + 1^2\,p(1 \mid \theta) = \theta$

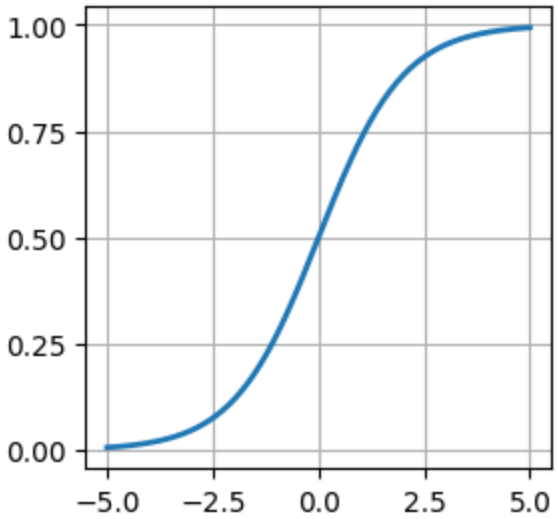
**Varianza de una Bernoulli:** $\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1-\theta)$

# 3.2 Función logística o sigmoide

## 3.2.1 Función logística o sigmoide

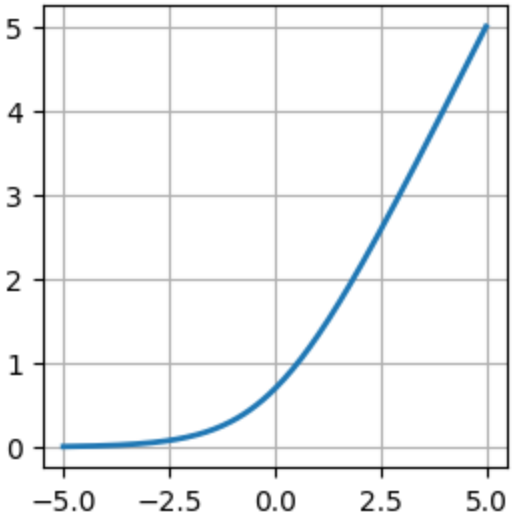
**Función logística o sigmoide:** función $\sigma : \mathbb{R} \to [0, 1]$ con forma de S, $\sigma(a) = \frac{1}{1 + e^{-a}} = \frac{e^a}{1 + e^a}$

In [1]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
def sigmoid(a):
        return 1 / (1 + np.exp(-a))
fig = plt.subplots(figsize=(3,3)); plt.grid(); plt.yticks(np.arange(0, 1.1, step=0.25))
a = np.linspace(-5, 5, 200); plt.plot(a, sigmoid(a), linewidth=2);
```



**Función softplus:** $\sigma_+(a) = \log(1 + e^a)$

In [2]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
def softplus(a):
        return np.log1p(np.exp(a))
fig = plt.subplots(figsize=(3,3)); plt.grid();
a = np.linspace(-5, 5, 200); plt.plot(a, softplus(a), linewidth=2);
```



## 3.2.2 Función logit

**Función logit:** función $\text{logit} : [0,1] \to \mathbb{R}$ inversa de la sigmoide, $\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$

**Interpretación:** si $p$ es la probabilidad de que un cierto evento ocurra, su logit es la log-posibilidad (log-odds) de que el evento ocurra frente a que no ocurra, por lo que tenemos tres casos

1. Más posibilidades de ocurrir que de no: odds mayor que $1$ y log-odds positiva
2. Igual posibilidades de ocurrir que de no: odds $1$ y log-odds nula
3. Menos posibilidades de ocurrir que de no: odds menor que $1$ y log-odds negativa

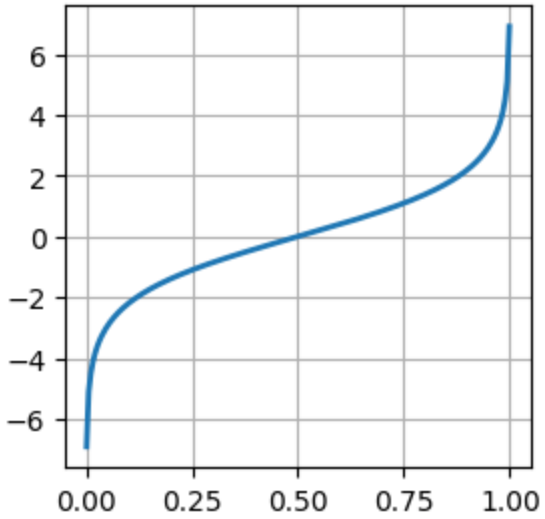
**Inversa de la sigmoide:**

$$\sigma(a) = \frac{1}{1+e^{-a}} = \frac{e^a}{1+e^a}$$

$$1-\sigma(a) = 1 - \frac{1}{1+e^{-a}} = \frac{e^{-a}}{1+e^{-a}} = \frac{1}{1+e^a} = \sigma(-a)$$

$$\text{logit}(\sigma(a)) = \log\left(\frac{\sigma(a)}{1-\sigma(a)}\right) = \log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\frac{1+e^a}{1}\right) = \log(e^a) = a$$

In [3]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
def logit(p):
        return np.log(p / (1 - p))
fig = plt.subplots(figsize=(3,3)); plt.grid(); plt.xticks(np.arange(0, 1.1, step=0.25))
p = np.linspace(.001, .999, 200); plt.plot(p, logit(p), linewidth=2);
```




**Recordatorio: la sigmoide transforma log-odds en probabilidad y la logit probabilidad en log-odds**

# 3.3 Codificación one-hot y distribución categórica

**Propósito:** generalizar la Bernoulli a $C > 2$ clases, esto es, una distribución sobre un conjunto finito de etiquetas $\mathcal{C} = \{1, \dots, C\}$

**Codificación one-hot:** de una variable categórica $y \in \{1, \dots, C\}$

$$\text{one-hot}(y) = \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}(y = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{I}(y = C) \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^C \quad \text{con} \quad \sum_c y_c = 1$$

**Distribución categórica:** $Y \sim \text{Cat}(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^C$, $\sum_c \theta_c = 1$, si su pmf $p : \mathcal{C} \to [0, 1]$ es

$$p(y \mid \theta) = \prod_{c=1}^{C} \theta_c^{\mathbb{I}(y=c)} \qquad \text{o, en notación one-hot,} \qquad p(\boldsymbol{y} \mid \theta) = \prod_{c=1}^{C} \theta_c^{y_c}$$

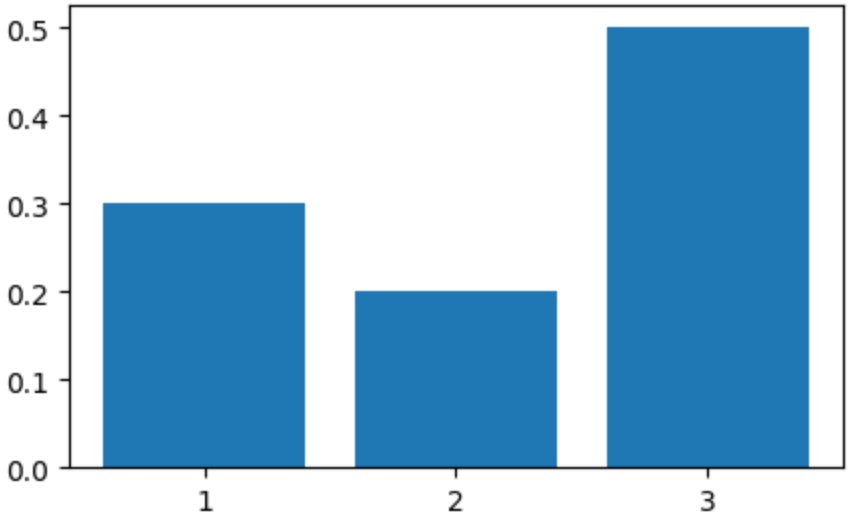
**Interpretación:** $\theta_c$ es la probabilidad de que $y$ valga $c$, $p(y = c \mid \boldsymbol{\theta}) = \theta_c$

**Sobre-parametrización:** solo tenemos $C - 1$ parámetros libres por las restricciones sobre $\boldsymbol{\theta}$

**Ejemplo:** $C = 3, \boldsymbol{\theta}^t = (0.3, 0.2, 0.5)$

In [1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import multinomial
t = [0.3, 0.2, 0.5]; Y = multinomial(1, t); print(Y.p, Y.rvs(3))
fig = plt.subplots(figsize=(5,3)); plt.xticks(range(1, 4)); plt.bar(range(1, 4), Y.p);
```

```
[0.3 0.2 0.5] [[0 0 1]
 [1 0 0]
 [1 0 0]]
```




**Convención:** $0^0 = 1$ i $0 \log 0 = 0$; por ejemplo, con $\boldsymbol{\theta} = (0.5, 0.5, 0)^t$, $\text{Cat}(\boldsymbol{y} = (1, 0, 0)^t \mid \boldsymbol{\theta}) = 0.5^1 0.5^0 0^0 = 0.5$

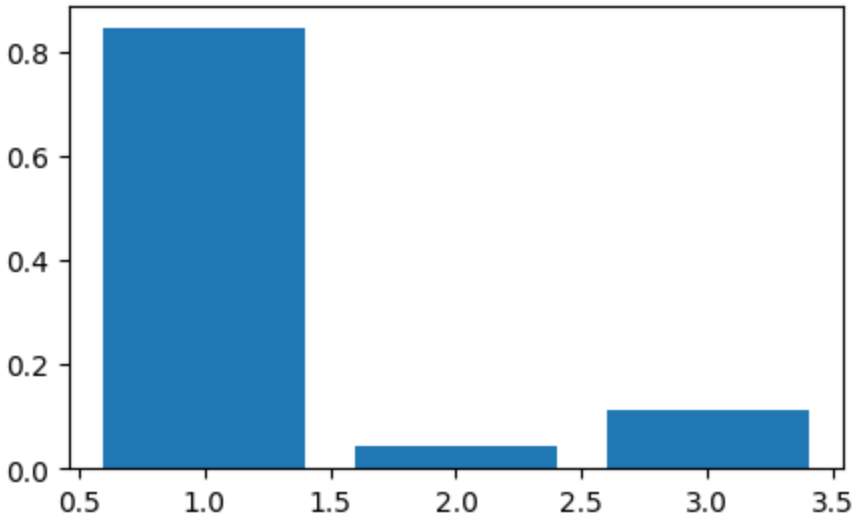
# 3.4 La función softmax

**Función softmax:** transforma logits $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^C$ en un vector de probabilidades $[0,1]^C$

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) = \left( \frac{e^{a_1}}{\sum_{\tilde{c}} e^{a_{\tilde{c}}}}, \ldots, \frac{e^{a_C}}{\sum_{\tilde{c}} e^{a_{\tilde{c}}}} \right)^t \qquad \text{cumpliéndose} \qquad 0 \leq \mathcal{S}(\boldsymbol{a})_c \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{c=1}^{C} \mathcal{S}(\boldsymbol{a})_c = 1$$

**Ejemplo:** $\boldsymbol{a} = (3,0,1)^t$, $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) = \left( \frac{e^3}{e^3+1+e}, \frac{1}{e^3+1+e}, \frac{e}{e^3+1+e} \right)^t = (0.8438, 0.0420, 0.1142)^t$

In [1]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
def softmax(a):
        e = np.exp((1.0 * np.array(a))); return e / np.sum(e)
a = np.array([3, 0, 1]); fig = plt.subplots(figsize=(5,3));
plt.bar(np.arange(1, a.size+1), softmax(a));
```

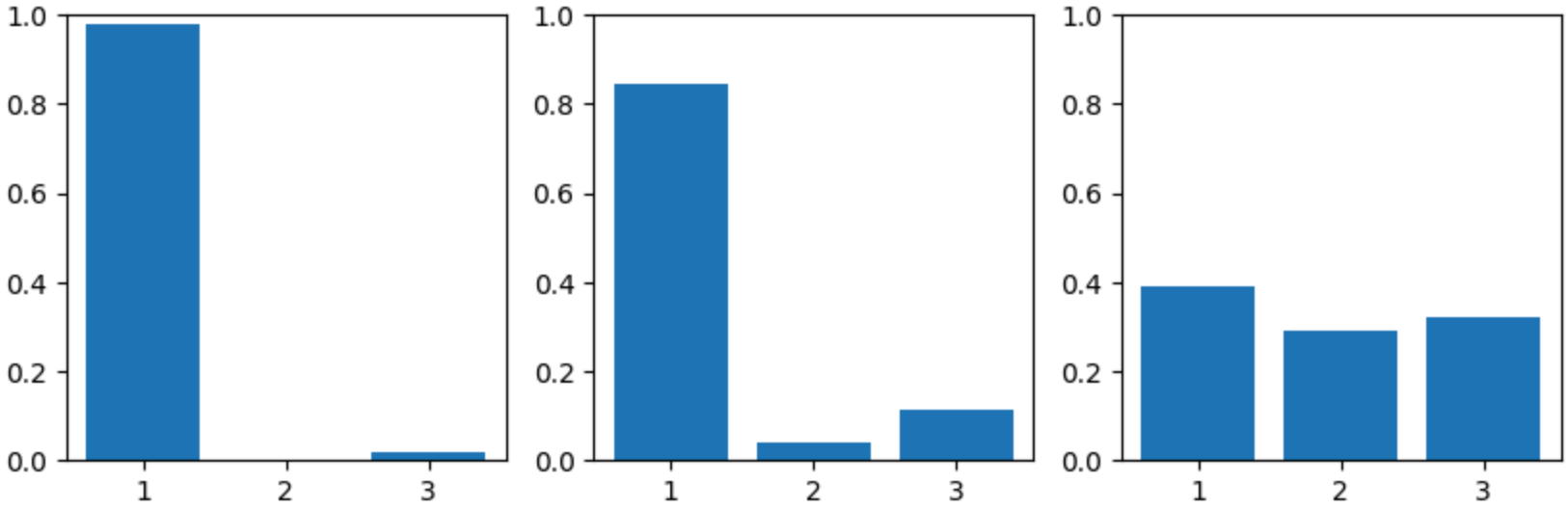


**Softmax atemperada:** normaliza logits mediante división por una constante de **temperatura** $T > 0$

- **Bajas temperaturas:** tiende a la argmax, $\lim_{T \to 0^+} \mathcal{S}(\boldsymbol{a}/T)_c = \mathbb{I}(c = \text{argmax}_{c'} a_{c'})$
- **Altas temperaturas:** tiende a la uniforme, $\lim_{T \to \infty} \mathcal{S}(\boldsymbol{a}/T)_c = 1/C$

**Ejemplo:** $\boldsymbol{a} = (3, 0, 1)^t$, $T \in \{0.5, 1, 10\}$

In [2]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
def softmax(a):
        e = np.exp((1.0 * np.array(a))); return e / np.sum(e)
a = np.array([3, 0, 1]); fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(10,3));
for i, T in enumerate((0.5, 1, 10)):
        axs[i].set_ylim((0, 1)); axs[i].bar(np.arange(1, a.size+1), softmax(a/T));
```



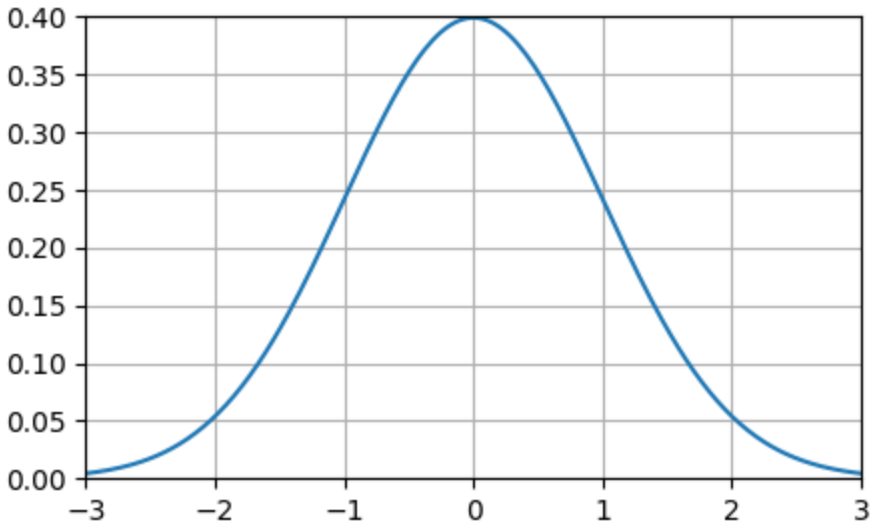
# 4 Distribuciones continuas

## 4.1 Gaussiana univariada

**Función de densidad de probabilidad (pdf) Gaussiana:**

$$Y \sim \mathcal{N}(y \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)$$

In [1]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import norm
Y = norm(0, 1); y = np.linspace(-3, 3, 200); fig = plt.subplots(figsize=(5,3))
plt.grid(); plt.xlim(-3, 3); plt.ylim(0, .4); plt.plot(y, Y.pdf(y));
```



# 4.2 Covarianza

**Covarianza entre dos variables aleatorias $X$ e $Y$:**

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

**Interpretación de la covarianza:** mide hasta qué grado $X$ e $Y$ están (linealmente) relacionadas

**Matriz de covarianzas de un vector aleatorio $D$-dimensional $\boldsymbol{x}$:** matriz **simétrica** y **semi-definida positiva**

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Cov}[\boldsymbol{x}] = \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{x}-\mathbb{E}[\boldsymbol{x}])(\boldsymbol{x}-\mathbb{E}[\boldsymbol{x}])^t\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1,X_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_1,X_D] \\ \mathrm{Cov}[X_2,X_1] & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_2,X_D] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[X_D,X_1] & \mathrm{Cov}[X_D,X_2] & \cdots & \mathbb{V}[X_D] \end{pmatrix}$$

**Resultado importante:** $\mathbb{E}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^t] = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^t$

**Covarianza de una transformación lineal:** $\mathrm{Cov}[\mathbf{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}] = \mathbf{A}\,\mathrm{Cov}[\boldsymbol{x}]\mathbf{A}^t$

**Covarianza cruzada entre dos vectores aleatorios:** $\mathrm{Cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = \mathbb{E}[(\boldsymbol{x}-\mathbb{E}[\boldsymbol{x}])(\boldsymbol{y}-\mathbb{E}[\boldsymbol{y}])^t]$

# 4.3 Gaussiana multivariada

## 4.3.1 Definición

**Gaussiana multivariada:** $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^D$, **media** $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\boldsymbol{x}] \in \mathbb{R}^D$ y **matriz de covarianzas** $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Cov}[\boldsymbol{x}] \in \mathbb{R}^{D \times D}$

$$p(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

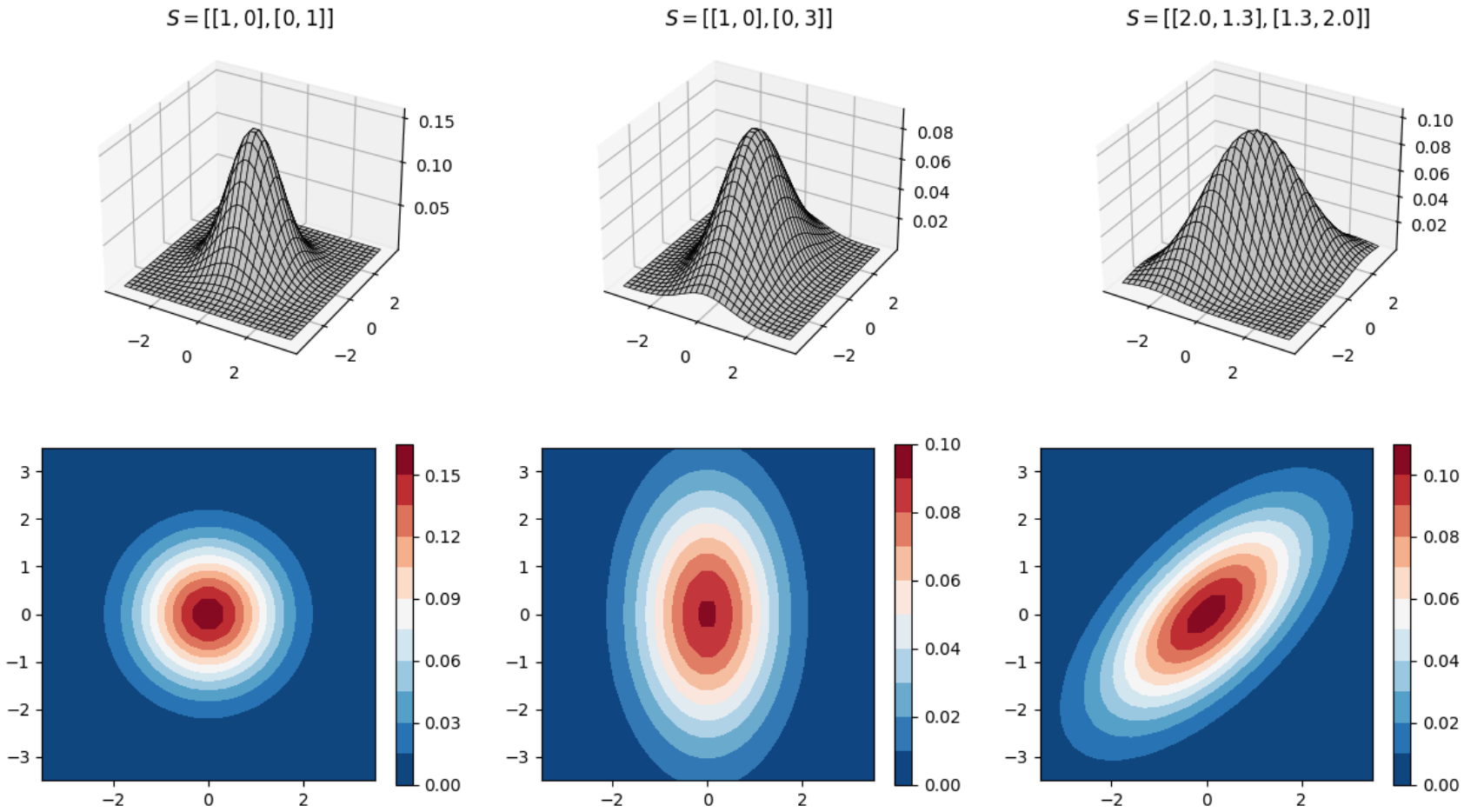
**Gaussiana bivariada:** $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ con $\rho = \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1\sigma_2}$

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\,\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\,\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2}\right]\right)$$

**Tipos de Gaussianas según estructura de $\boldsymbol{\Sigma}$:**

- **Esférica:** $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$, con un único parámetro y curvas de iso-densidad hiper-esféricas
- **Diagonal:** $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_D^2)$, con $D$ parámetros y curvas de iso-densidad hiper-elipsoidales de semiejes paralelos a la base
- **General:** $\boldsymbol{\Sigma}$ no diagonal, con $D(D+1)/2$ parámetros y curvas de iso-densidad hiper-elipsoidales de semiejes oblicuos a la base

In [1]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import multivariate_normal
R = np.linspace(-3.5, 3.5, 30); x, y = np.meshgrid(R, R); me, Se = [0, 0], [[1, 0], [0, 1]]
md, Sd = [0, 0], [[1, 0], [0, 3]]; mg, Sg = [0, 0], [[2., 1.3], [1.3, 2.]]
fig = plt.figure(figsize=(15, 8)); fig.tight_layout()
for i, (m, S) in enumerate(zip((me, md, mg), (Se, Sd, Sg)), start=1):
    z = multivariate_normal(m, S).pdf(np.dstack((x, y)))
    ax = fig.add_subplot(2, 3, i, projection='3d'); ax.set_title(f'$S={S}$'.format(S))
    ax.plot_surface(x, y, z, color='white', edgecolor="black", lw=.5)
    ax = fig.add_subplot(2, 3, i+3, aspect='equal')
    cp = ax.contourf(x, y, z, 10, cmap='RdBu_r'); plt.colorbar(cp, ax=ax);
```



## 4.3.2 Simulación

**Gaussiana general como afinidad de la estándar:**

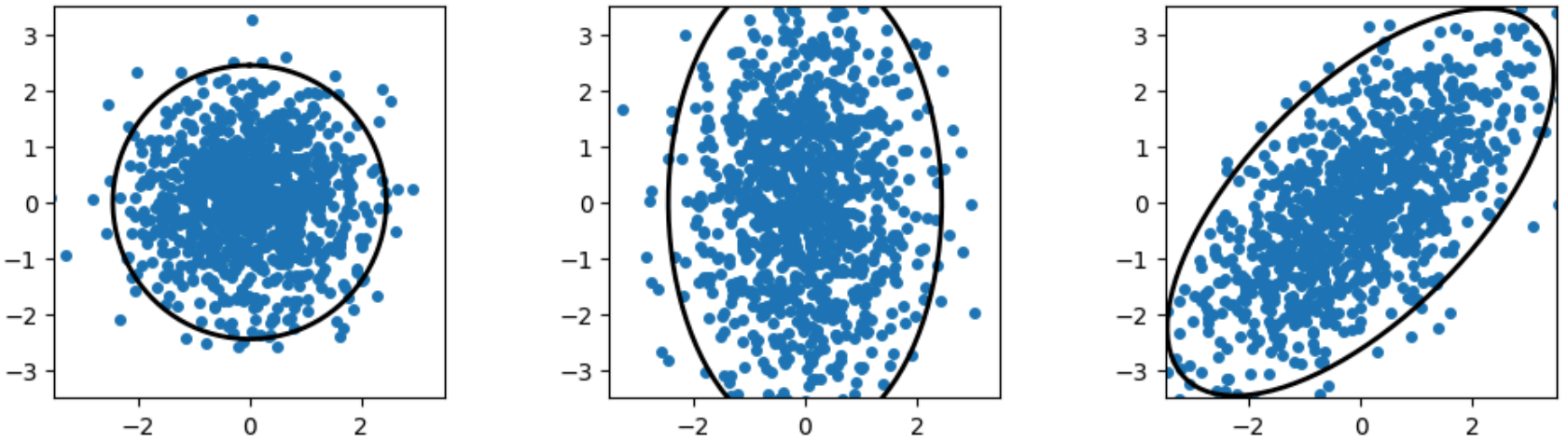
$$\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}_D(\mathbf{0}.\mathbf{I}), \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) &= p_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}))\,|\det(\mathbf{W}^{-1})| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\det(\mathbf{W})|}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})^t\mathbf{W}^{-t}\mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right] \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{W}\mathbf{W}^t \end{aligned}$$

**Bola Gaussiana estándar de masa $p$:** $P(\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \leq r) = P(\chi_D^2 \leq r) = p$

**Bola Gaussiana estándar 2d de masa $p$:** $r = \sqrt{-2\log(1-p)} \qquad p = 1 - e^{-r^2/2}$

In [2]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import multivariate_normal
me, Se = [0, 0], [[1, 0], [0, 1]]; md, Sd = [0, 0], [[1, 0], [0, 3]]; mg, Sg = [0, 0], [[2., 1.3], [1.3, 2
p = .95; r = np.sqrt(-2.0*np.log(1.0-p)); t = np.linspace(0, 2.0*np.pi, 100);
C = np.array([np.cos(t), np.sin(t)]) * r; fig = plt.figure(figsize=(15, 4)); fig.tight_layout()
for i, (m, S) in enumerate(zip((me, md, mg), (Se, Sd, Sg)), start=1):
    ax = fig.add_subplot(1, 3, i, aspect='equal'); ax.set_xlim(-3.5, 3.5); ax.set_ylim(-3.5, 3.5)
    X = multivariate_normal(m, S).rvs(1000); ax.scatter(*X.T, s=16)
    La, U = np.linalg.eigh(S); k = La.argsort()[::-1]; La = La[k]; U = U[:,k]; W = U @ np.diag(np.sqrt(La)
    Y = W @ C; ax.plot(*Y, lw=2, color='black')
```



# 4.4 Distancia de Mahalanobis

**Distancia de Mahalanobis entre $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{\mu}$ con respecto a $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$:**

$$\Delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) = \sqrt{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})}$$

**Gaussiana multivariada en términos de Mahalanobis (al cuadrado):**

$$p(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left[ -\frac{1}{2} \Delta^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right]$$

**Mahalanobis como afinidad de la Euclídea (al origen):**

$\boldsymbol{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{W}\mathbf{W}^t, \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}$

$$\Delta^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{W}\boldsymbol{x})^t \mathbf{W}^{-t} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W}\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 = r^2$$

In [1]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy.stats import multivariate_normal
me, Se = [0, 0], [[1, 0], [0, 1]]; md, Sd = [0, 0], [[1, 0], [0, 3]]; mg, Sg = [0, 0], [[2., 1.3], [1.3, 2
p = .8; r = np.sqrt(-2.0*np.log(1.0-p)); t = np.linspace(0, 2.0*np.pi, 100);
C = np.array([np.cos(t), np.sin(t)]) * r; fig = plt.figure(figsize=(15, 4)); fig.tight_layout()
for i, (m, S) in enumerate(zip((me, md, mg), (Se, Sd, Sg)), start=1):
    ax = fig.add_subplot(1, 3, i, aspect='equal'); ax.set_xlim(-3.5, 3.5); ax.set_ylim(-3.5, 3.5); ax.grid
    La, U = np.linalg.eigh(S); k = La.argsort()[::-1]; La = La[k]; U = U[:,k]; W = U @ np.diag(np.sqrt(La)
    Y = W @ C; ax.plot(*Y, lw=2, color='black'); ax.set_title(f'$S={S}\quad r={r:.2f}$')
    ax.arrow(0, 0, *r*W[:, 0], width=.05, length_includes_head=True)
    ax.arrow(0, 0, *r*W[:, 1], width=.05, length_includes_head=True)
```