LaTeX beamer theme Inspira Crea Transforma

UNIVERSIDAD EAFIT®

Inspira Crea Transforma

UNIVERSIDAD EAFIT

Solución de ecuaciones diferenciales no lineales con retardo mediante el método de wavelets de Legendre optimizado con NSGA-II

Alfonso Fierro, Jerónimo Osorio

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias aplicadas e Ingenieria
Ingeniería matemática
Jerom & Aleph

Contenido

Introducción

Planteamiento del problema

Metodología

Resultados

Conclusiones

Bibliografía

Introducción

Esta presentación se centra en la solución de ecuaciones diferenciales con retardos aplicadas en modelos de sistemas complejos en areas tales como la mecánica de fluidos, epidemiología, fisiología, inmunología,etc.

Las estrategia de solución se vale de las wavelets de Legendre y los algoritmos genéticos como herramientas efectivas para abordar este tipo de ecuaciones. Se pretende mejorar las aproximaciones discretas a ecuaciones que entregan el comportamiento de sistemas dinámicos en diversas áreas de estudio.

Ecuaciones con retardo

Dada una ecuación diferencial con retardo:

$$F(t, y(t), y(t-\tau), y'(t), y'(t-\tau), \ldots, y^{(n)}(t), y^{(n)}(t-\tau)) = 0,$$

con $y(t)$ como la función desconocida, $y(t-\tau)$ como la función retrasada por un tiempo τ, y $y^{(n)}(t)$ como la derivada de orden n de $y(t)$.

Las condiciones iniciales para resolver el problema de valor inicial son:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n)}(t_0) = y_0^{(n)},$$

donde y_0, y_0', ..., $y_0^{(n)}$ son valores conocidos.
El objetivo es encontrar una función $y(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial con retardo y las condiciones iniciales en el intervalo $t \geq t_0$.
La solución de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial con retardo puede requerir métodos numéricos o técnicas especiales debido a la presencia de términos retardados.

Planteamiento del problema

Aproximar numéricamente ecuaciones diferenciales con retardo mediante el método de wavelets de Legendre con coeficientes optimizados mediante NSGA-II.

Objetivos

- Implementar el método de wavelets de Legendre
- Lograr aproximar correctamente el método
- Usar NSGA-II para calcular los coeficientes del método
- Evaluar la efectividad de NSGA-II
- Comparar NSGA-II con un solver propio de Matlab(fsolve)

Wavelets

Las ondículas son utilizadas como una herramienta para aproximar datos y funciones al analizar su escala. La escala se refiere a la longitud o ventana en la que se ajusta la ondícula, lo que proporciona una idea de la resolución de los resultados. Esto significa que es posible obtener una aproximación detallada de una función en un dominio estrecho, o una aproximación difusa en un dominio amplio.

El uso de ondículas permite adaptarse a diferentes características y patrones de los datos, brindando flexibilidad en el análisis y la aproximación de información compleja.

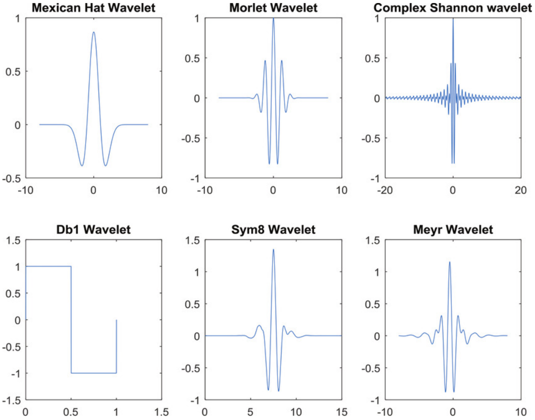

Figura: Wavelets generatrices

La definición de una ondícula se realiza a partir de alguna otra función compleja (*ondícula madre*) ψ que debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \qquad (1) \qquad\qquad c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} dt < \infty \qquad (2)$$

Wavelets de Legendre

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{m+\frac{1}{2}}2^{(k+1)/2}P_m(2^k t-(2n+1)) & \frac{n}{2^k} \leq t \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3}$$

en donde los polinomios de Legendre $P_m(t)$ de orden m están definidos en el intervalo $[-1,1]$ como

$$\begin{aligned} &P_0(t) = 1, \quad p_1(t) = t \\ &P_{m+1}(t) = \left(\frac{2m+1}{m+1}\right) tP_m(t) - \left(\frac{m}{m+1}\right) P_{m-1}(t), \quad m = 1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Planteamiento de la EDR

$$\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{J} P_{ij}(t)y^{(i)}(t-\tau_{ij}(t)) + \sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{P} R_{pq}(t)y^{(p)}(\alpha_{pq}t)y^{(q)}(\beta_{qt}t) = g(t), \quad J \leq 6 \quad (5)$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$y^{(i)}(0) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \ldots, 5 \quad (6)$$

donde $P_{ij}(t), R_{pq}(t), g(t)$, y las variables de retardo τ_{ij} son funciones continuas dadas en el intervalo $0 \leq t \leq 1, \alpha_{pq}$ y β_{bq} son constantes dadas para expresar retardos proporcionales.

Aproximación de funciones

Una función $f(t)$ definida en $[0,1)$ puede ser expandida como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}\psi_{mn}(t) \Rightarrow f(t) \approx \sum_{n=0}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{mn}(t) = C^T\psi(t) \tag{7}$$

tal que

$$C = [c_{10}, c_{11}, \dots c_{1M-1}, c_{20}, \dots c_{2M-1}, \dots c_{2^{k-1}0}, \dots c_{2^{k-1}M-1}]^T \tag{8}$$

$$\psi = [\psi_{10}, \psi_{11}, \dots \psi_{1M-1}, \psi_{20}, \dots \psi_{2M-1}, \dots \psi_{2^{k-1}0}, \dots \psi_{2^{k-1}M-1}]^T \tag{9}$$

donde C es un vector a determinar.

Matriz operacional de diferenciación

La i-ésima derivada del vector $\psi(t)$, puede ser obtenida mediante

$$\frac{d^i}{dt^i}\psi(t) = D^i\psi(t), \quad i = 1, \ldots, 6 \tag{10}$$

donde D^i es la i-ésima potencia de la matriz operacional D de orden $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$, dada por

$$D = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{F} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \mathbf{F} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$F = 2^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}\sqrt{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{7}\sqrt{5} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{9}\sqrt{7} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{2M+1} & 0 & \sqrt{2M+1}\sqrt{5} & 0 & \dots & \sqrt{2M+1}\sqrt{2M+1} & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

si M es impar.

$$
F = 2^{k+1} \cdot \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \sqrt{5}\sqrt{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\sqrt{7} & 0 & \sqrt{7}\sqrt{5} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \sqrt{9}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{9}\sqrt{7} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \sqrt{2M+1}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2M+1}\sqrt{7} & \cdots & \sqrt{2M+1}\sqrt{2M+1} & 0
\end{pmatrix} \tag{13}
$$

si M es par.

Solución de las EDR's

1. $y(t) = \sum_{k=0}^{2^k-1} \sum_{k=0}^{M} C_{nm}\psi_{nm}(t) = C^T\psi(t)$
2. $y^{(i)}(t) = A^T D^i \psi(t), \quad i = 1, \ldots, 6$
3. Evaluar los dos pasos anteriores en $t - \tau_{ij}(t), \alpha_{pq}t$ y $\beta_{pq}t$ en lugar de t, en la EDR original.
4. Formar el sistema de ecuaciones para C_{nm} usando las condiciones iniciales, y obteniendo las ecuaciones restantes sustituyendo las raíces de los polinomios de Legendre en la EDR, para finalmente tener $(2^k(M+1))$ ecuaciones.
5. Solucionar el sistema con fsolve y con NSGA-II.

NSGA-II

Proponemos que es posible establecer una aproximación a los coeficientes de escala que acompañan a la función $\psi(t)$ a partir de la información obtenida en el sistema de ecuaciones que se forman por las condiciones iniciales del problema y por los puntos de colocación con los polinomios de legendre.
De manera formal, se busca un vector de coeficientes reales A^T que sirva para aproximar $y(t)$ de la mejor manera posible.

UNIVERSIDAD EAFIT

$$y(x) - A^t\psi(x) = 0 \tag{14}$$

$$y^{(i)}(x) - A^T D^i \psi(x) = 0 \tag{15}$$

La información que otorga el lado izquierdo en 16 y 17 corresponde directamente con la definición del residuo de la aproximación.

Para aproximar los valores del vector A, se deben resolver simultáneamente los problemas de optimización que involucra cada ecuación especificada por las condiciones iniciales y los puntos de colocación.

$$\min_{A} \quad (y(0) - A^t \psi(0))^2 \tag{16}$$

$$\min_{A} \quad (y^{(i)}(x) - A^T D^i \psi(x))^2 \tag{17}$$

Para diferenciar el desempeño de los individuos generados en cada población se debe introducir una función adicional al problema. Esta función calcula el residuo cuadrático total y resulta de sumar todas las funciones que quieren minimizarse.

$$\min_{A} \quad (y(0) - A^t\psi(0))^2 + \sum_{x}(y^{(i)}(x) - A^T D^i \psi(x))^2 \quad i = 1, 2, ..., 6 \tag{18}$$

En el contexto, las variables de decisión son los elementos del vector A y no x, que son puntos en el tiempo.

El algoritmo debe inicializar su población dentro del polígono $[0,1]^{2^k(M+1)}$, debe tener un tamaño $N = 200$ y se debe observar su evolución durante $G = 400$ generaciones.

Después de que se calcula a la población en el frente de Pareto, se debe escoger al vector A_p que tiene un valor mínimo en la expresión 18.

Primer ejemplo

Solucionar el siguiente problema con variable de retraso t^2

$$\begin{cases} y'(t) + ty(t - t^2) + ty^2(t) = 1 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

dado que $k = 0, M = 1$.

Gráfica primer ejemplo

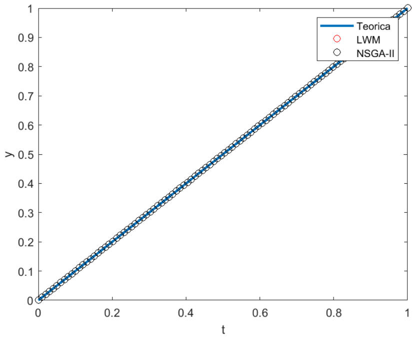

Figura: Solución teorica y aproximada por LWM y NSGA-II

Tabla de error primer ejemplo

	M=1
t=0	4.336e-19
t=0.05	-5.696e-13
t=0.1	8.268e-14
t=0.2	4.318e-13
t=0.4	9.646e-14
t=0.8	1.194e-13
t=1	4.336e-19

Cuadro: Errores absolutos de fsolve para $M = 1$

	M=1
t=0	0
t=0.05	0
t=0.1	0
t=0.2	0
t=0.4	0
t=0.8	0
t=1	0

Cuadro: Errores absolutos de NSGA-II para $M = 1$

	M=1
t=0	4.336e-19
t=0.05	-5.696e-13
t=0.1	8.270e-14
t=0.2	-4.318e-13
t=0.4	-9.646 -14
t=0.8	1.194e-13
t=1	4.336 e-19

Cuadro: Diferencia de errores (fsolve - NSGA-II)

Segundo ejemplo

Considere la siguiente ecuación diferencial no lineal de segundo orden, con varios retardos, t^2 y $-\frac{t}{2}$,

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t - t^2) - t^2 y(t + \frac{t}{2}) + (y'(t))^2 - y'(t)y(t) = e^t + e^{t-t^2} - t^2 e^{3t/2} \\ y(0) = y'(0) = 1, \quad t \in [0, 1] \end{cases} \tag{20}$$

Gráficas para $M = 2, 3$

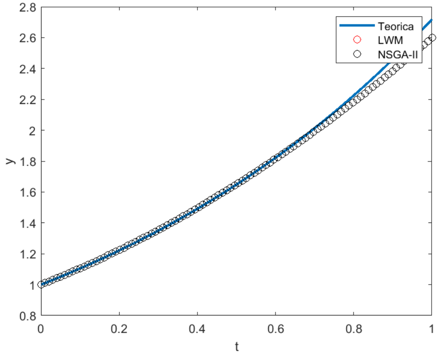

Figura: Solución teórica y aproximada para M=2

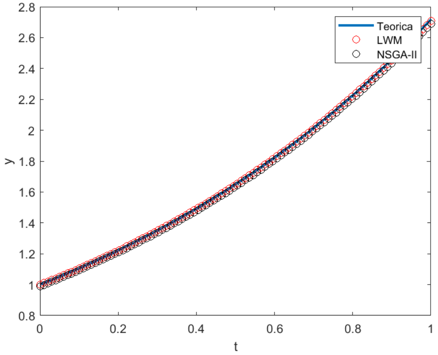

Figura: Solución teórica y aproximada para M=3

UNIVERSIDAD EAFIT

Gráfica para $M = 5$

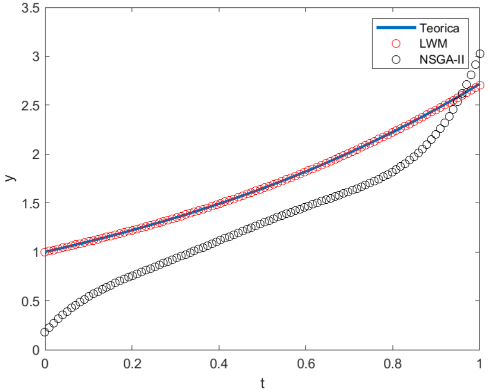

Figura: Solución teórica y aproximada para M=2

Tablas de error

	$M = 2$	$M = 3$	$M = 5$
t=0	0	-1.819e-12	0
t=0.05	0.0001498	4.037e-5	3.859e-7
t=0.1	0.0006884	0.0001757	3.873e-6
t=0.2	0.002406	0.0005718	1.555e-5
t=0.4	0.004078	0.001117	3.43e-5
t=0.8	0.04166	0.002677	4.353e-5
t=1	0.1193	0.01073	7.74e-5

Cuadro: Errores absolutos fsolve para $M = 2, 3, 5$

Tablas de error

	M=2	M=3	M=5
t=0	0	0.012	0.8208
t=0.05	0.01216	4.037e-5	0.6868
t=0.1	0.01243	0.0001757	0.5784
t=0.2	0.01312	0.0005718	0.4719
t=0.4	0.01442	0.001117	0.3808
t=0.8	0.01923	0.002677	0.4049
t=1	0.0304	0.01073	0.3053

Cuadro: Error absoluto NSGA-II

Tercer ejemplo

Considere la ecuación diferencial con variable de retraso $t - t^3/8$ dada por

$$\begin{cases} y''(t) + 2y(t) - y^2(t) + y(t^3/8) = \sin t - \sin^2 t + sin(t^3/8), & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \tag{21}$$

Gráficas para $M = 5, 6$

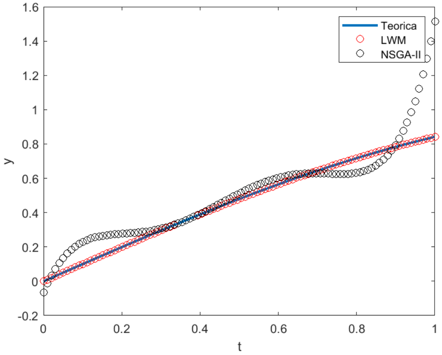

Figura: Solución teórica y aproximada para M=5

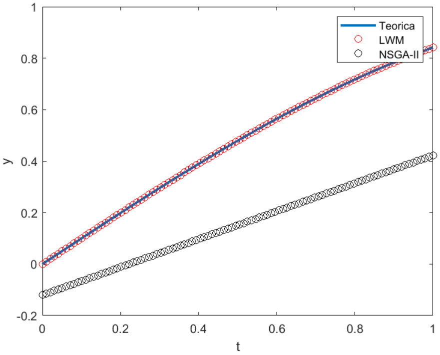

Figura: Solución teórica y aproximada para M=6

Conclusiones

- En general usar el método NSGA-II para encontrar los coeficientes de las wavelets, no constituye una alternativa efectiva y útil para la gran mayoria de casos.
- El método LWM por sí mismo es una herramienta viable y capaz de aproximar la solución analítica.
- El método LWM es capaz de encontrar la solución analítica cuando esta es un polinomio.
- Se pueden obtener aproximaciones bastante precisas usando valores pequeños de M, lo que constituye una gran ventaja computacional.

Bibliografía

[1] Mohammad Abbasi y S. Balaji. “The Legendre wavelet method for solving the steady flow of a third-grade fluid in a porous half space”. En: *Mathematical Problems in Engineering* 2019 (2019), pág. 7864251. DOI: 10.1155/2019/7864251.

[2] M. Ghayoumi y M. Dehghan. “The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu-type”. En: *Applied Mathematics and Computation* 274 (2016), págs. 1-14. DOI: 10.1016/j.amc.2015.10.044.

[3] Sevin Gümgüm, Demet Ozdek y Gökçe Özaltun. “Legendre Wavelet Solution of High Order Nonlinear Ordinary Delay Differential Equations”. En: *Turkish Journal of Mathematics* (mar. de 2019). DOI: 10.3906/mat-1901-109.

[4] Arnold N. Lowan, Norman Davids y Arthur Levenson. “Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss’ mechanical quadrature formula”. En: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 29 (1942), págs. 97-104. DOI: 10.6028/jres.029.011.

[5] Aravind Seshadri. *Aravind Seshadri (2023). NSGA - II: A multi-objective optimization algorithm*. 2009. URL: https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10429-nsga-ii-a-multi-objective-optimization-algorithm?requestedDomain=.

[6] S.G. Venkatesh, S.K. Ayyaswamy y S. Raja Balachandar. “The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu-type”. En: *Computers Mathematics with Applications* 63.8 (2012), págs. 1287-1295. ISSN: 0898-1221. DOI: https:\/\/doi.org\/10.1016\/j.camwa.2011.12.069. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122111011400.

Gracias