

Solución de ecuaciones diferenciales no lineales con retardo mediante el método de wavelets de Legendre optimizado con NSGA-II

Jerónimo Osorio Muñoz & Alfonso Fierro López

Primer semestre 2023

1. Introducción

Son muy comunes los sistemas físicos en los que su estado presente es dependiente de estados anteriores, es para modelar este comportamiento reminiscente que se utilizan las ecuaciones diferenciales con retardos. Las ecuaciones diferenciales con retardos se utilizan en la modelización de sistemas biológicos, como la dinámica de poblaciones, la propagación de enfermedades y la interacción neuronal. Además, son fundamentales en la ingeniería de control y la teoría de retroalimentación, donde se emplean para analizar y diseñar sistemas con retardos inherentes, como sistemas de comunicación, procesos industriales y sistemas de estabilidad en circuitos eléctricos. El estudio de estas ecuaciones ha permitido comprender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos complejos, brindando una base matemática sólida para abordar problemas del mundo real en diversas áreas de investigación.

Las wavelets de Legendre son propuestas por [3] para resolver ecuaciones diferenciales con retardos debido a sus propiedades matemáticas que permiten descomponer el problema en distintas escalas temporales, lo que facilita el análisis de los efectos del pasado reciente en la evolución del sistema. Al aplicar esta técnica de descomposición multi-escala, se logra una aproximación y solución numérica eficiente de las ecuaciones diferenciales con retardos.

Además de las wavelets de Legendre, este trabajo plantea que la implementación de algoritmos genéticos puede ser una estrategia alternativa a la utilización métodos iterativos para aproximar los coeficientes de las funciones en el contexto. Este enfoque híbrido permite explorar y ajustar los parámetros de las funciones aproximadas, mejorando en así la capacidad de predicción y comprensión de los sistemas dinámicos.

2. Planteamiento del problema

El principal objetivo del presente trabajo es usar el metodo de wavelets de Legendre para solucionar el problema de valor inicial de la forma

$$\sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^J P_{ij}(t) y^{(i)}(t - \tau_{ij}(t)) + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^P R_{pq}(t) y^{(p)}(\alpha_{pq}t) y^{(q)}(\beta_{qt}t) = g(t), \quad J \leq 6 \quad (1)$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$y^{(i)}(0) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, 5 \quad (2)$$

donde $P_{ij}(t)$, $R_{pq}(t)$, $g(t)$, y las variables de retardo τ_{ij} son funciones continuas dadas en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, α_{pq} y β_{bq} son constantes dadas para expresar retardos proporcionales.

3. Marco teórico

3.1. Wavelets

Las wavelets son una herramienta matemática utilizada para analizar señales y datos en diferentes componentes de frecuencia. Fueron introducidas por primera vez por Joseph Fourier en 1807, pero no fue hasta la década de 1930 que se desarrollaron como un concepto propio. La Transformada de Fourier y la Transformada de Fourier de tiempo corto se utilizan comúnmente para analizar señales, pero las wavelets ofrecen un enfoque más flexible y eficiente. El uso de wavelets como herramienta en la aproximación de datos y funciones se fundamenta sobre un análisis en la escala de éstos. La escala se refiere a la longitud o ventada del espacio (temporal o

geométrico) sobre el que se pretende ajustar las wavelets, esta característica proporciona una intuición sobre la *resolución* de los resultados y es posible tener una aproximación muy detallada de una función en un dominio angosto o una aproximación difusa en un dominio amplio.

La definición de una wavelet se realiza a partir de alguna otra función compleja (*wavelet madre*) ψ que debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (3) \quad c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (4)$$

La condición (3) establece que la función madre debe poseer una energía finita y la condición (4), llamada condición de factibilidad, establece que si la transformada de Fourier Ψ de la función ψ es suave, debe cumplir que $\Psi(0) = 0$.

3.1.1. Transformada de wavelet continua

Si ψ es una función que cumple con (3) y (4) entonces, para una señal real $s(t)$ se puede formular su transformada de wavelet con respecto a ψ de la siguiente manera:

$$S(\beta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi' \left(\frac{t - \beta}{\alpha} \right) s(t) dt \quad (5)$$

donde ψ' representa el conjugado complejo de la función ψ . Si se establece la siguiente transformación para la wavelet madre:

$$\psi_{\alpha, \beta} = |\alpha|^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{t - \beta}{\alpha} \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad (6)$$

Es posible reescribir la igualdad (5) de tal manera que se simplifica la notación.

$$S(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'(t) s(t) dt \quad (7)$$

Con esto es posible establecer la transformada inversa de una señal, dado que se cumpla la condición (4), de la siguiente manera

$$s(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} S(\beta, \alpha) \Psi_{\alpha, \beta}(t) d\alpha d\beta \quad (8)$$

4. Método de optimización de wavelets Legendre

4.1. Wavelets de Legendre

Si los parámetros α y β están restringidos como parámetros discretos dados por $\alpha = \alpha_0^{-k}$ y $\beta = nb_0 \alpha_0^{-k}$, con $\alpha_0 > 1, b_0 > 0$ y además n, k son enteros positivos, entonces tenemos la siguiente familia de wavelets discretas

$$\psi_{k,n}(t) = |\alpha|^{-\frac{1}{2}} \psi(a_0^k t - nb_0) \quad (9)$$

de manera que $\psi_{k,n}(t)$ forma una base de $L^2(\mathbb{R})$. En particular cuando $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$ entonces forma una base ortonormal. Las wavelets de Legendre $\psi_{nm}(t) = \psi(k, \hat{n}, m, t)$ tienen cuatro argumentos $\eta = 2n - 1, n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$, donde k puede ser cualquier entero positivo, además m es el orden del polinomio de Legendre y t es el tiempo normalizado. Estas wavelets están definidas en el intervalo $[0, 1)$ como sigue

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{(k+1)/2} P_m(2^k t - (2n + 1)) & \frac{n}{2^k} \leq t \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (10)$$

para $m = 0, 1, \dots, M - 1$, donde M es un entero positivo, El coeficiente $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ es para la ortonormalidad. Los polinomios de Legendre $P_m(t)$ de orden m están definidos en el intervalo $[-1, 1]$, y pueden ser descritos por las formulas de recurrencia, [3]

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \quad p_1(t) = t \\ P_{m+1}(t) &= \left(\frac{2m+1}{m+1} \right) t P_m(t) - \left(\frac{m}{m+1} \right) P_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

4.2. Aproximación de funciones

Una función $f(t)$ definida en $[0, 1)$ puede ser expandida como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{mn}(t) \quad (12)$$

donde $c_{nm} = f(t) \cdot \psi_{mt}(t)$. Si la serie infinita se trunca, entonces 12 se puede expresar como

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{mn}(t) = C^T \psi(t) \quad (13)$$

donde C y $\psi(t)$ son matrices $2^k(M+1) \times M$ dadas por

$$C = [C_{00}, C_{01}, \dots, C_{0M}, C_{10}, \dots, C_{1M-1}, \dots, C_{2^{k-1}0}, \dots, C_{2^{k-1}M}]^T \quad (14)$$

$$\psi = [\psi_{00}, \psi_{01}, \dots, \psi_{0M}, \psi_{10}, \dots, \psi_{1M-1}, \dots, \psi_{2^{k-1}0}, \dots, \psi_{2^{k-1}M}]^T \quad (15)$$

$$^T \quad (16)$$

4.3. Matriz operacional de diferenciación

Siguiendo la definición dada en [3] La i -ésima derivada del vector $\psi(t)$, definida arriba, puede ser obtenida mediante

$$\frac{d^i}{dt^i} \psi(t) = D^i \psi(t), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (17)$$

donde D^i es la i -ésima potencia de la matriz operacional D de orden $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$, dada por

$$D = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{F} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (18)$$

y \mathbf{F} es una matriz $(M+1) \times (M+1)$ de la forma

$$2^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}\sqrt{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{7}\sqrt{5} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{9}\sqrt{7} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{2M+1} & 0 & \sqrt{2M+1}\sqrt{5} & 0 & \dots & \sqrt{2M+1}\sqrt{2M+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

si M es impar, y

$$2^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}\sqrt{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{7}\sqrt{5} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{9}\sqrt{7} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \sqrt{2M+1}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2M+1}\sqrt{7} & \dots & \sqrt{2M+1}\sqrt{2M+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

si M es par.

4.4. Aplicación de la matriz de diferenciación operacional

Para solucionar la ecuación dada en la ecuación 1 y 2, primeramente aproximamos la solución con la serie truncada dada en la ecuación 13, usando las wavelets de Legendre como

$$y(t) = \sum_{k=0}^{2^k-1} \sum_{n=0}^M C_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \psi(t) \quad (21)$$

donde C_{nm} son coeficientes desconocidos a determinar.

Entonces, usamos la ecuación 17 y la matriz operacional dada en 18 para aproximar las derivadas de $y(t)$ como sigue

$$y^{(i)}(t) = A^T D^i \psi(t), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (22)$$

la ecuación diferencial dada en 1 puede ser rescrita mediante la sustitución $t - \tau_{ij}(t)$, $\alpha_{pq}t$ y $\beta_{pq}t$ en lugar de t en la ecuación 22 como

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^J P_{ij}(t) A^T D^{(i)} \psi(t - \tau_{ij}(t)) \\ & + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p R_{pq}(t) \left(A^T D^{(p)} \psi(t) (\alpha_{pq}t) \right) \left(A^T D^{(q)} \psi(t) (\beta_{qt}t) \right) = g(t), \quad J \leq 6 \end{aligned} \quad (23)$$

Para encontrar los coeficientes C_{nm} del vector C , necesitamos $2^k(M+1)$ ecuaciones. Las primeras 6 las obtenemos de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= A^T \psi(0) \\ y^{(i)}(0) &= A^T D^i \psi(0) \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (24)$$

y las otras $(2^k(M+1)) - 6$ ecuaciones son obtenidas sustituyendo las primeras $(2^k(M+1)) - 6$ raíces de los polinomios de Legendre $P_{(2^k(M+1))}(t)$, éstas son tomadas de [4]. El sistema resultante se resuelve para los coeficientes C_{nm} , y la solución aproximada de 21 es calculada.

5. Aproximación de coeficientes mediante algoritmos genéticos

Proponemos que es posible establecer una aproximación a los coeficientes de escala que acompañan a la función $\psi(t)$ a partir de la información obtenida en el sistema de ecuaciones que se forman por las condiciones iniciales del problema y por los puntos de colocación con los polinomios de Legendre.

De manera formal, se busca un vector de coeficientes reales A^T que resuelva el sistema planteado en 24. Es de notar que siendo x un punto de colocación para la función que se quiere aproximar, siempre se pueden plantear las ecuaciones homogéneas

$$y(x) - A^T \psi(x) = 0 \quad (25)$$

$$y^{(i)}(x) - A^T D^i \psi(x) = 0 \quad (26)$$

La información que otorga el lado izquierdo 27 y 28 corresponde directamente con la definición del residuo de la aproximación. En el caso que A pueda ser determinado la igualdad permanece estricta, de lo contrario, el propósito del método debería ser acotarla a un valor muy próximo a cero. Para garantizar que la minimización de esta brecha no arroje valores infinitamente menores que 0, proponemos un razonamiento muy similar a aquel de mínimos cuadrados.

Para aproximar los valores del vector A , se deben resolver simultáneamente los problemas de optimización que involucra cada ecuación especificada en 24

$$\min_A (y(0) - A^T \psi(0))^2 \quad (27)$$

$$\min_A (y^{(i)}(x) - A^T D^i \psi(x))^2 \quad (28)$$

Para diferenciar el desempeño de los individuos generados en cada población se debe introducir una función adicional al problema. Esta función calcula el residuo cuadrático total y resulta de sumar todas las funciones que quieren minimizarse.

$$\min_A (y(0) - A^T \psi(0))^2 + \sum_x (y^{(i)}(x) - A^T D^i \psi(x))^2 \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (29)$$

Para este trabajo fue adaptado el algoritmo NSGA-II implementado en matlab por Aravind Seshadri [5].

En el contexto, las variables de decisión son los elementos del vector A y no x , que son puntos en el tiempo. El algoritmo debe inicializar su población dentro del polígono $[0, 1]^{2^k(M+1)}$, debe tener un tamaño $N = 200$ y se debe observar su evolución durante $G = 400$ generaciones. Después de que se calcula a la población en el frente de Pareto, se debe escoger al vector A_p que tiene un valor mínimo en la expresión 29.

6. Resultados

6.1. Primera aplicación

Considere la ecuación diferencial no lineal de primer orden con la variable de retardo t^2

$$\begin{cases} y'(t) + ty(t - t^2) + ty^2(t) = 1 + t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

La solución analítica a este problema es $y(t) = t$. Cuando esta función es desconocida, es posible aproximarla mediante la ecuación 21, y tomando $k = 0$, y $M = 1$ como

$$y(t) = A^T \psi(t) = [C_{00} \quad C_{01}] \begin{bmatrix} \psi_{00}(t) \\ \psi_{01}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

donde C_{00}, C_{01} son los coeficientes a determinar, $\psi_{00}(t) = 1$, y $\psi_{01}(t) = \sqrt{3}(2t - 1)$. Entonces $y(t)$ y $y(t - t^2)$ puede ser rescrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= C_{00} + C_{01}\sqrt{3}(2t - 1) \\ y(t - t^2) &= C_{00} + C_{01}\sqrt{3}(2(t - t^2) - 1) \end{aligned} \quad (32)$$

La primera derivada $y'(t)$ se aproxima como

$$y'(t) = C^t D \psi(t) = [C_{00} \quad C_{01}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t - 1) \end{bmatrix} = C_{01}2\sqrt{3} \quad (33)$$

sustituyendo todas estas aproximaciones en 30 obtenemos que

$$C_{01}2\sqrt{3} + t(C_{00} + C_{01}\sqrt{3}(2(t - t^2) - 1)) + t(C_{00} + C_{01}\sqrt{3}(2t - 1))^2 = 1 + t^2 \quad (34)$$

Como hay dos coeficientes desconocidos, necesitamos dos ecuaciones, para ello usamos la condición inicial $y(0) = 0$ en 32, tal que

$$y(0) = C_{00} + C_{01}(-\sqrt{3}) = 0 \quad (35)$$

la segunda ecuación la obtenemos de reemplazar $t = 0,211$, la cual es la raíz del polinomio de Legendre de segundo orden en la ecuación 34

$$C_{01}2\sqrt{3} + 0,211(C_{00} + C_{01}\sqrt{3}(2(0,211 - 0,211^2) - 1)) + 0,211(C_{00} + C_{01}\sqrt{3}(2(0,211) - 1))^2 = 1 + 0,211^2 \quad (36)$$

solucionamos este sistema mediante fsolve de MATLAB y NSGA-II, con matlab obtenemos

$$C^T = [C_{00} \quad C_{01}] = [0,5 \quad 0,2887] \quad (37)$$

luego

$$y(t) = A^T \psi(t) = [0,5 \quad 0,2887] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t - 1) \end{bmatrix} = t \quad (38)$$

quien como sabemos es la solución exacta. Lo que demuestra que el método implementado es simple y eficiente.

Ahora veamos la implementación del problema

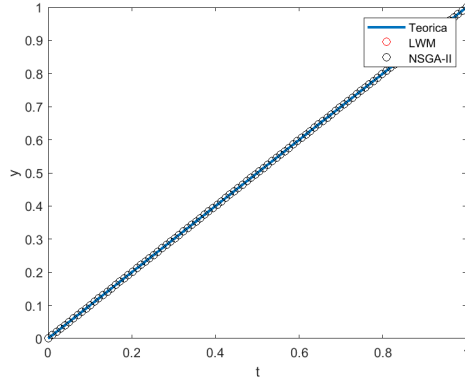


Figura 1: Solución teórica y aproximada

	M=1
t=0	4.336e-19
t=0.05	-5.696e-13
t=0.1	8.268e-14
t=0.2	4.318e-13
t=0.4	9.646e-14
t=0.8	1.194e-13
t=1	4.336e-19

Cuadro 1: Errores absolutos de fsolve para $M = 1$

	M=1
t=0	0
t=0.05	0
t=0.1	0
t=0.2	0
t=0.4	0
t=0.8	0
t=1	0

Cuadro 2: Errores absolutos de NSGA-II para $M = 1$

	M=1
t=0	4.336e-19
t=0.05	-5.696e-13
t=0.1	8.270e-14
t=0.2	-4.318e-13
t=0.4	-9.646e-14
t=0.8	1.194e-13
t=1	4.336e-19

Cuadro 3: Diferencia de errores (fsolve - NSGA-II)

de donde vemos que ambos métodos son efectivos a la hora de aproximar la solución al problema original, sin embargo cuando se observa la tabla 3 vemos que en realidad no hay un favorito.

6.2. Segunda aplicación

Considere la siguiente ecuación diferencial no lineal de segundo orden, con varios retardos, t^2 y $-\frac{t}{2}$,

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t - t^2) - t^2 y(t + \frac{t}{2}) + (y'(t))^2 - y'(t)y(t) = e^t + e^{t-t^2} - t^2 e^{3t/2} \\ y(0) = y'(0) = 1, \quad t \in [0, 1] \end{cases} \quad (39)$$

La solución analítica para este problema es $y(t) = e^t$. Solucionaremos el problema para varios valores de $M = 2, 3, 5$ y para $k = 0$ fijo.

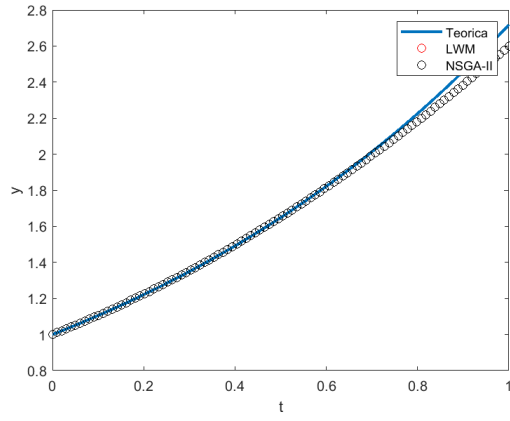


Figura 2: Solución teórica y aproximada para $M=2$

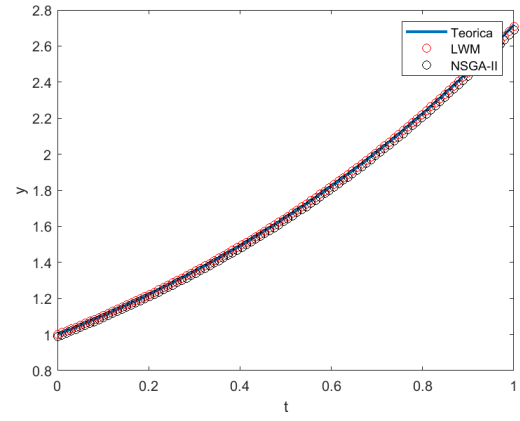


Figura 3: Solución teórica y aproximada para $M=3$

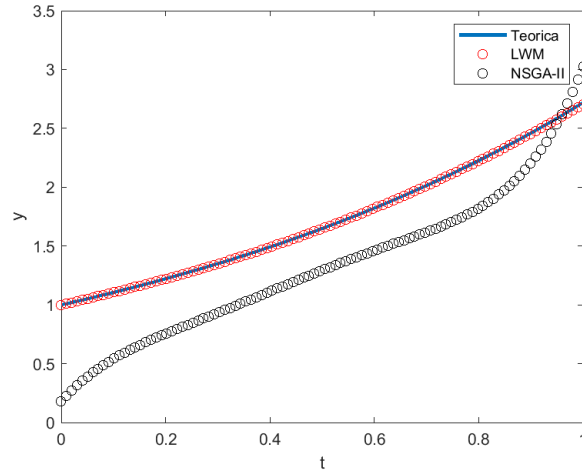


Figura 4: Solución teórica y aproximada para $M=5$

	$M = 2$	$M = 3$	$M = 5$
$t=0$	0	-1.819e-12	0
$t=0.05$	0.0001498	4.037e-5	3.859e-7
$t=0.1$	0.0006884	0.0001757	3.873e-6
$t=0.2$	0.002406	0.0005718	1.555e-5
$t=0.4$	0.004078	0.001117	3.43e-5
$t=0.8$	0.04166	0.002677	4.353e-5
$t=1$	0.1193	0.01073	7.74e-5

Cuadro 4: Errores absolutos fsolve para $M = 2, 3, 5$

	$M=2$	$M=3$	$M=5$
$t=0$	0	0.012	0.8208
$t=0.05$	0.01216	4.037e-5	0.6868
$t=0.1$	0.01243	0.0001757	0.5784
$t=0.2$	0.01312	0.0005718	0.4719
$t=0.4$	0.01442	0.001117	0.3808
$t=0.8$	0.01923	0.002677	0.4049
$t=1$	0.0304	0.01073	0.3053

Cuadro 5: Error absoluto NSGA-II

	$M=2$	$M=3$	$M=5$
$t=0$	0	-1.1999 e-2	-8.2082 e-1
$t=0.05$	3.6380 e-12	-1.2115 e-2	-6.8678 e-1
$t=0.1$	1.4552 e-11	-1.2257 e-2	-5.7842 e-1
$t=0.2$	6.6393 e-11	-1.2549 e-2	-4.7190 e-1
$t=0.4$	2.8740 e-10	-1.3299 e-2	-3.8078 e-1
$t=0.8$	-1.1796 e-9	-1.6550 e-2	-4.0482 e-1
$t=1$	-1.8554 e-9	-1.9666 e-2	-3.0519 e-1

Cuadro 6: Diferencia de errores (fsolve - NSGA-II)

Figura 5: Rendimiento general

Mirando tanto las tablas como las gráficas, podemos ver que el algoritmo NSGA-II, tiene un rendimiento mucho mas pobre a la hora de resolver el sistema de ecuaciones no lineales para encontrar los coeficientes, lo que resulta en una peor aproximación al problema inicial.

6.3. Tercera aplicación

Considere la ecuación diferencial con variable de retraso $t - t^3/8$ dada por

$$\begin{cases} y''(t) + 2y(t) - y^2(t) + y(t^3/8) = \sin t - \sin^2 t + \sin(t^3/8), & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \quad (40)$$

resolviendo el problema por el método tradicional obtenemos lo siguiente

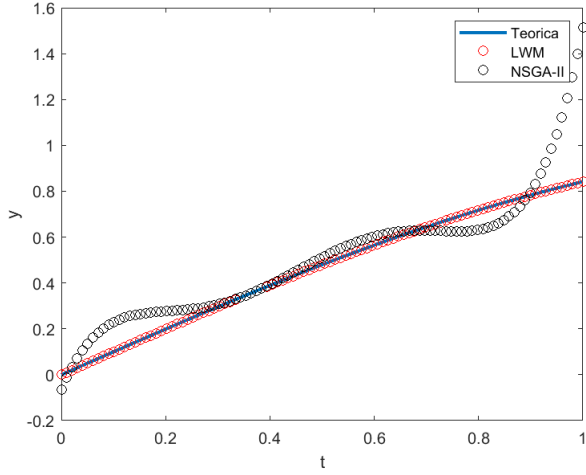


Figura 6: Solución teórica y aproximada para M=5

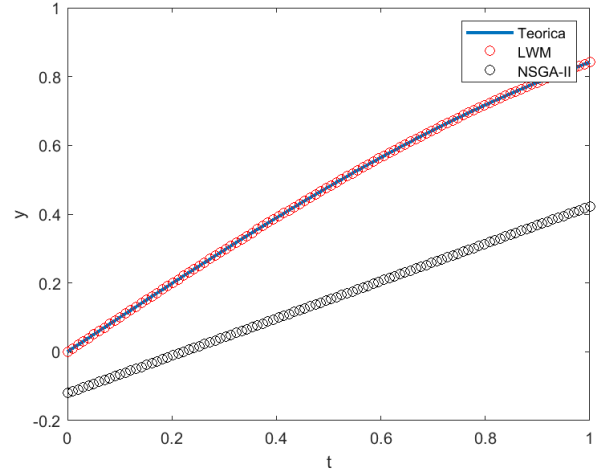


Figura 7: Solución teórica y aproximada para M=6

	M=5	M=6
t=0	0	9.095e-13
t=0.05	2.855e-7	2.855e-7
t=0.1	5.663e-7	5.663e-7
t=0.2	8.597e-7	8.597e-7
t=0.4	1.256e-6	1.256e-6
t=0.8	2.264e-6	2.264e-6
t=1	2.343e-5	2.343e-5

Cuadro 7: Errores absolutos fsolve para $M = 5, 6$

	M=5	M=6
t=0	0.06606	0.1206
t=0.05	0.06546	0.139
t=0.1	0.1264	0.0.162
t=0.2	0.08434	0.2071
t=0.4	0.002364	0.2904
t=0.8	0.08488	0.4031
t=1	0.671	0.4189

Cuadro 8: Error absoluto NSGA-II

	M=5	M=6
t=0	-0.066	-0.120
t=0.05	-0.065	-0.13
t=0.1	-0.126	-0.162
t=0.2	-0.084	-0.207
t=0.4	-0.0023	-0.290
t=0.8	-0.084	-0.403
t=1	-0.671	-0.419

Cuadro 9: Diferencia de errores (fsolve - NSGA-II)

Figura 8: Rendimiento general

El comportamiento generado por los coeficientes aproximados mediante el algoritmo genético es, en última instancia, inconsistente. A pesar de la estabilidad que se presenta en el intervalo $[0, 4, 0, 6]$ cuando $M = 5$, no hay

una relación de similaridad cuando $M = 6$. No hay, para esta instancia del problema, una ventaja al utilizar un algoritmo genético para aproximar los coeficientes de escala en, en particular, la precisión de la aproximación se ve en desmedro con respecto al uso de un método iterativo.

7. Conclusión

En general, se ha determinado que el uso del método NSGA-II para encontrar los coeficientes de las wavelets no es una alternativa efectiva y útil en la mayoría de los casos. Sin embargo, el método LWM por sí mismo ha demostrado ser una herramienta viable y capaz de aproximar la solución analítica. Además, se ha observado que el método LWM es especialmente eficaz cuando la solución analítica es un polinomio. Un aspecto destacado es que se pueden obtener aproximaciones bastante precisas utilizando valores pequeños de M , lo que representa una ventaja significativa desde el punto de vista computacional. En resumen, el método LWM se presenta como una opción prometedora para el análisis de wavelets, ofreciendo resultados precisos y eficientes en una amplia gama de escenarios.

Referencias

- [1] Mohammad Abbasi y S. Balaji. “Legendre wavelet operational matrix method for solution of Riccati differential equation”. En: *Mathematical Problems in Engineering* 2018 (2018), pág. 304745. DOI: 10.1155/2018/304745.
- [2] Mohammad Abbasi y S. Balaji. “The Legendre wavelet method for solving the steady flow of a third-grade fluid in a porous half space”. En: *Mathematical Problems in Engineering* 2019 (2019), pág. 7864251. DOI: 10.1155/2019/7864251.
- [3] Sevin Gümgüm, Demet Ozdek y Gökçe Öztun. “Legendre Wavelet Solution of High Order Nonlinear Ordinary Delay Differential Equations”. En: *Turkish Journal of Mathematics* (mar. de 2019). DOI: 10.3906/mat-1901-109.
- [4] Arnold N. Lowan, Norman Davids y Arthur Levenson. “Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss’ mechanical quadrature formula”. En: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 29 (1942), págs. 97-104. DOI: 10.6028/jres.029.011.
- [5] Aravind Seshadri. *Aravind Seshadri (2023). NSGA - II: A multi-objective optimization algorithm*. 2009. URL: <https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10429-nsga-ii-a-multi-objective-optimization-algorithm?requestedDomain=>.
- [6] S.G. Venkatesh, S.K. Ayyaswamy y S. Raja Balachandar. “The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu-type”. En: *Computers Mathematics with Applications* 63.8 (2012), págs. 1287-1295. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.069>.