Modelos Ocultos de Markov

Daniel Otero Fadul

Departamento de Ciencias
Escuela de Ingeniería y Ciencias

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

Asumamos que vemos el mundo de una forma discreta: "tomamos fotos" de la realidad cada cierto tiempo T_m, conocido también como *tiempo de muestreo*, y observamos lo que queda registrado en esta fotos; algunas cosas se pueden observar mientras otras permanecen ocultas.

Sea $t_k = kT_m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Sea X_k el *estado del sistema* en el tiempo t_k, el cual es un conjunto de variables que no son observables, y sea E_k la evidencia en este mismo tiempo t_k, la cual es el conjunto de variables que sí podemos observar.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación: $X_{m:n} = X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n$, $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $m < n$.

Cuando incluimos el tiempo en nuestros modelos se acostumbra a decir que la distribución de probabilidad del estado actual X_k dada la información de los estados anteriores $X_{0:k-1}$ es igual a

$$P(X_k|X_{0:k-1}).$$

Esto se conoce como el *modelo de transición*.

Nótese que en la expresión anterior se dice que el estado actual X_k depende de todos los estados anteriores $X_{0:k-1}$. Un supuesto muy común es decir que el estado actual X_k solo depende de un número finitos de sus estados anteriores. A esto se le llama el *supuesto de Markov*. Todos los sistemas que cumplan con esta propiedad se les llama **procesos de Markov**. Por ejemplo, la versión más simple del supuesto de Markov sería la siguiente:

$$P(X_k|X_{0:k-1}) = P(X_k|X_{k-1}).$$

Esta variante se conoce como un *proceso de Markov de primer orden*.

Otro supuesto importante es que la forma de la distribución de probabilidad no cambia para cada tiempo t_k, sino que es la misma siempre. Un proceso estocástico que cumple esta propiedad se le llama un **proceso estacionario**.

En cuanto a la evidencia E_k, la cual está relacionada con el *modelo del sensor*, tenemos el siguiente *supuesto de Markov del sensor*:

$$P(E_k|X_{0:k}, E_{1:k-1}) = P(E_k|X_k).$$

El término $P(E_k|X_k)$ se le conoce como el *modelo del sensor*. Nótese que se asume que no hay evidencia para el tiempo t_0.

Por otro lado, la distribución de probabilidad del estado inicial se denota como $P(X_0)$. Teniendo en cuenta lo anterior, la distribución de probabilidad conjunta de los estados $X_{0:k}$ y las evidencias $E_{1:k}$ es igual a

$$P(X_{0:k}, E_{1:k}) = P(X_0) \prod_{i=1}^{k} P(X_i|X_{i-1}) P(E_i|X_i). \tag{1}$$

Los tres términos de la expresión de la derecha se les conoce como el modelo del estado inicial $P(X_0)$, el modelo de transición $P(X_i|X_{i-1})$ y el modelo del sensor $P(E_i|X_i)$.

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

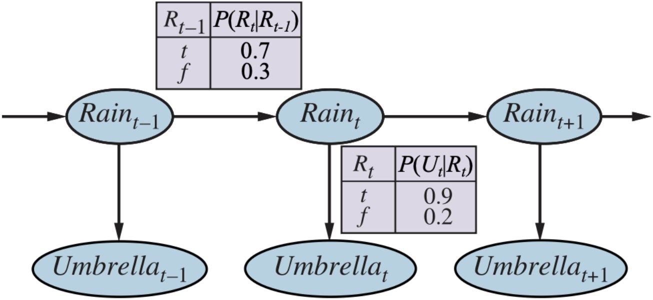

Figura: Estructura de la red Bayesiana y de las distribuciones de probabilidad condicional del ejemplo de la sombrilla. El modelo de transición es $P(\text{Rain}_k|\text{Rain}_{k-1})$ y el modelo del sensor es $P(\text{Umbrella}_k|\text{Rain}_k)$. Imagen tomada de [1].

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

Dado un modelo genérico temporal, hay cuatro tipos de inferencias básicas que podemos realizar:

- **Filtrado:** Este tipo de inferencia se le conoce como *estimación de estado*. En términos matemáticos, esto es equivalente a obtener la distribución de probabilidad de $P(X_k|E_{1:k} = e_{1:k})$.
- **Predicción:** El objetivo de esta inferencia es calcular la distribución de probabilidad posterior de un futuro estado dada toda la evidencia recopilada: $P(X_{k+j}|E_{1:k} = e_{1:k})$, $j > 0$.
- **"Smoothing":** En este caso, se desea calcular la distribución de probabilidad de un estado pasado X_j dada toda la evidencia: $P(X_j|E_{1:k} = e_{1:k})$ para algún j tal que $0 \leq j \leq k$.
- **Explicación más probable:** Dada una sequencia de observaciones, queremos obtener la más probable secuencia de estados que haya generado estas observaciones:
$$\max_{x_{1:k}} P(x_{1:k}|E_{1:k} = e_{1:k}).$$

Consideremos por un momento el ejemplo anterior. Digamos que queremos calcular $P(R_2|U_{1:2} = [t, t])$. Entonces, utilizando la ecuación (1), tenemos que

$$P(R_2|U_{1:2} = [t, t]) = \alpha \sum_{R_1} \sum_{R_0} P(U_2 = t|R_2)P(R_2|R_1)P(U_1 = t|R_1)P(R_1|R_0)P(R_0),$$

donde α es una constante de normalización.

BIBLIOGRAFÍA

1 Stuart Rusell,Peter Norvig, S. J., *"Artificial Intelligence: A Modern Approach"*, Cuarta Edición, Prentice Hall, 2020.