Procesos Fraccionarios Lévy-Ornstein–Uhlenbeck

Aplicaciones para resolver EDES

Procesos Estocásticos II

Alfonso Fierro, Jerónimo Osorio

Universidad EAFIT

Introducción

Un proceso de Lévy-Ornstein-Uhlenbeck fraccionario (FLOUP) proporciona una herramienta avanzada para modelar sistemas donde los eventos pasados influyen significativamente en el futuro.

Buscamos implementar un método de solución para ecuaciones diferenciales estocásticas impulsadas por procesos de Levy construyendo sus soluciones usando Procesos de Levy-Ornstein-Uhlenbeck (FLOUP).

Los procesos FLOUP son aproximados a partir de integrales impropias de Riemann-Stieltjes.

Metodología

Los métodos y las fórmulas usadas son tomadas de [Fink and Klüppelberg, 2011]

1. Definir los conceptos y propiedades teóricas necesarias para entender el contexto y los requerimientos para aplicar el método de solución.
2. Generar computacionalmente las rutas de muestra del FLOUP mediante los métodos de integración de Riemann-Stieltjes y el método de Euler.
3. Plantear diferentes ejemplos, derivar sus soluciones con el método SST, para posteriormente usar las rutas generadas FLOUP como soluciones a estas EDES.
4. Mostrar los resultados computacionales.

Procesos de Lévy

Los procesos de Lévy son una clase de procesos estocásticos que generalizan el movimiento Browniano y el proceso de Poisson. Se caracterizan por tener incrementos independientes y estacionarios.

1. Tiene incrementos independientes del pasado, es decir, $X_t - X_s$ es independiente de la filtración $\mathcal{F}_s$, donde $0 \leqslant s < t < \infty$.

2. Tiene incrementos estacionarios, es decir, $X_t - X_s$ tiene la misma distribución que X_{t-s} para $0 \leqslant s < t < \infty$.

3. Es continuo en probabilidad, es decir, $\lim_{t \to s} X_t = X_s$, donde el límite se toma en probabilidad.

Dados tres procesos de Lévy independientes, que están definidos en el mismo espacio de probabilidad:

1. $X^{(1)}$ es un movimiento browniano con arrastre.

2. $X^{(2)}$ es un proceso de Poisson compuesto.

3. $X^{(3)}$ es una martingala de salto puro que casi con seguridad tiene una cantidad numerable de saltos en un intervalo finito.

El proceso definido por $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ es entonces un proceso de Lévy.

$$X_t = \mu t + \sigma B_t + J_t$$

donde μ es un parámetro de deriva, σB_t es un término de difusión con B_t siendo un movimiento Browniano, y J_t representa el componente de salto.

Procesos Fraccionarios de Lévy

Un proceso de Lévy fraccionario introduce una estructura de memoria a largo plazo al modificar el proceso de Lévy mediante un operador fraccionario. Este tipo de proceso se define usando la integral fraccionaria de Riemann-Liouville:

$$L_t^d = \frac{1}{\Gamma(d+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} [(t-s)_+^d - (-s)_+^d] dL_s$$

donde d es el parámetro fraccionario, Γ es la función gamma y L_s es el proceso de Lévy subyacente.

Por teorema, los procesos de Levy se pueden expresar con una integral de Riemann. Esta reopresentación será muy útil para nuestra implementación Computacional

$$L_t^d = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{\mathbb{R}} [(t-s)_+^d - (-s)_+^d] L_s ds$$

El FLOUP se define como un proceso de Lévy modificado por un operador fraccionario, introduciendo una estructura de memoria a largo plazo. Esto permite una modelización más precisa de fenómenos en los que los eventos raros y las dependencias prolongadas son cruciales, algo que los modelos tradicionales no logran captar adecuadamente.

Definición 3.3. Sea L^d un FLP, $d \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\lambda > 0$. Entonces

$$L_t^{d,\lambda} := \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\, dL_s^d, \quad t \in \mathbb{R},$$

se llama un FLOUP.

Integrales de Riemann-Stieltjes

Para las funciones $f, h : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, tomamos el límite de

$$S(f, g, \kappa, \rho) := \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \left[h(x_i) - h(x_{i-1}) \right],$$

donde $\kappa = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ es una partición y $\rho = (y_i)_{i=1,\ldots,n}$ es una partición intermedia de $[a, b]$, es decir, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_{i-1} \leqslant y_i \leqslant x_i \quad$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, mientras dejamos que $\mathrm{mesh}(\kappa) := \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|$ tiende a cero.

Definition 4.1. (i) *A triple* (I, μ, σ) *is called* strongly proper *if and only if it satisfies the following properties*:

(P1) $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *is an open interval, where* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *and* $\mu, \sigma \in \mathcal{C}^0(I)$.
(P2) *There exists a strictly decreasing* ψ, *absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure such that* $\psi = \mu/\sigma$ *on* $I \setminus Z(\sigma)$ *where* $Z(\sigma)$ *are the zeros of* σ, *and*

$$\lim_{x \nearrow b} \psi(x) = -\lim_{x \searrow a} \psi(x) = -\infty.$$

(P3) *There exists* $\lambda > 0$ *such that* $\sigma \psi' \equiv \lambda$ *holds on* I *Lebesgue-a.e.*
(P4) *The inverse function* $\psi^{-1} : \mathbb{R} \to \psi^{-1}(\mathbb{R}) = I$ *is differentiable and* $(\psi^{-1})' \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$.

(ii) *We call the triple* (I, μ, σ) proper *if only* (P1)–(P3) *are satisfied.*
(iii) *The interval* I *is called the* state space, *the unique constant* $\lambda > 0$ *in* (P3) *is called the friction coefficient* (*FC*) *and the unique function* $f : \mathbb{R} \to I = f(\mathbb{R})$, $f(x) := \psi^{-1}(-\lambda x)$, *is called the state space transform* (*SST*) *for* (I, μ, σ).

Figure: Definición de tripleta fuertemente propia SPT

Para implementar estos procesos, utilizamos las librerías ‘numpy‘ y ‘scipy‘ en Python, aprovechando sus capacidades para manejar cálculos numéricos y funciones especiales. Nuestra ruta de acción es la siguiente

- Procesos de Poisson
  Simulamos incrementos de un proceso de Poisson.
- Proceso de Lévy Fraccionario
  Usamos la definición integral para simular el proceso a partir del proceso de Poisson compensado.
- SDE para FLOUP
  Aplicamos el método SST para resolver numéricamente la SDE que define el proceso FLOUP.

Procesos de Poisson

Proceso de Poisson con saltos normales.

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Difusión de saltos de Lévy.

$$L_t = bt + \sigma W_t + \left(\sum_{k=1}^{N_t} J_k - t\lambda\kappa \right)$$

Proceso de Poisson Compensado

$$\hat{N}(t) = N(t) - \Theta t$$

Aproximación numérica

Consideramos que impulsa el proceso de Lévy un proceso de Poisson compensado L^{θ} con intensidad $\theta > 0$; eso es,

$$L_t^{\theta} := P_t^{\theta} - t\theta, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde P^{θ} es un proceso de Lévy. En un primer paso simulamos caminos de muestra de L^{θ} y calculamos el FLP correspondiente L^d mediante una aproximación de Riemann-Stieltjes; es decir, seguimos la siguiente aproximación

$$L_t^d \approx \frac{1}{\Gamma(d+1)}\{ \sum_{k=-n^2}^{0} \left[\left(t - \frac{k}{n} \right)^d - \left(-\frac{k}{n} \right)^d \right] \left(L_{(k+1)/n}^{a,b} - L_{k/n}^{a,b} \right) \tag{1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{[nt]} \left(t - \frac{k}{n} \right)^d \left(L_{(k+1)/n}^{a,b} - L_{k/n}^{a,b} \right) \Bigg\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Aproximación numérica

Ahora usamos una versión del método explícito de Euler para el SDE (1.2)

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_t^{d,\lambda} = -\lambda \mathcal{L}_t^{d,\lambda}\mathrm{d}t + \mathrm{d}L_t^d, \quad t \in \mathbb{R},$$

para calcular rutas de muestra del FLOUP.

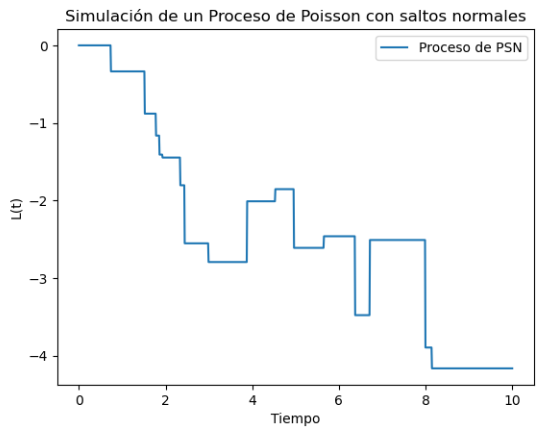

Figure: Proceso de Poisson con saltos normales

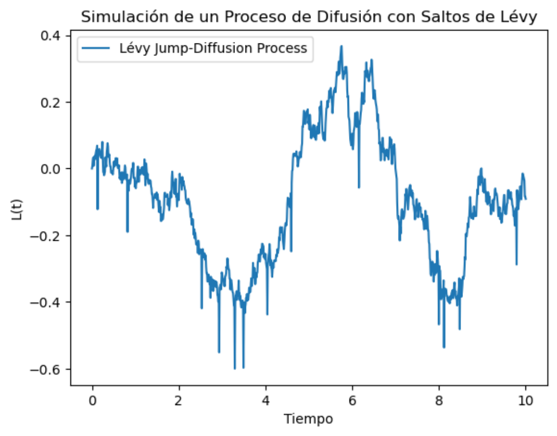

Figure: Difusión de saltos de Lévy.

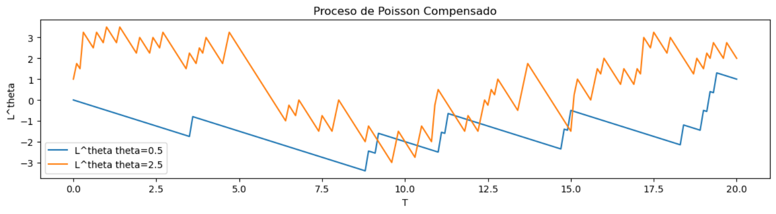

Figure: Proceso de Poisson Compensado.

Método de transformación del espacio de estado SST

El método de transformación del espacio de estado se utiliza para resolver ecuaciones de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t) + \sigma(X_t)dL_t^d$$

Bajo ciertas condiciones, se busca una función $f(x)$ tal que $f(\mathcal{L}_t^{d,\lambda})$ es una solución estacionaria para X_t, con $\mathcal{L}_t^{d,\lambda}$ soluciones de la ecuación de Langevin (1.2) . $f(x)$ cumple que

$$\begin{aligned} f' &= \sigma(f) \\ (f^{-1})' &= 1/\sigma \\ f(X_y) - f(X_s) &= \int_s^t f'(X_u)dX_u \end{aligned}$$

Solución de EDES

Las siguientes ecuaciones describen el comportamiento de los modelos de Cox-Ingersoll-Ross fraccionarios y sus transformaciones naturales en términos de procesos de Lévy fraccionarios:

$$\mathrm{d}X_t = -\gamma X_t \, \mathrm{d}t + \sigma \sqrt{|X_t|} \, \mathrm{d}L_t^d,$$

Con $\gamma = \sigma = 1$, $\lambda = 2.5$, $d = 0.35$, $\theta = 0.5$

La función de transformación es:

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) \frac{\sigma^2}{4} x^2,$$

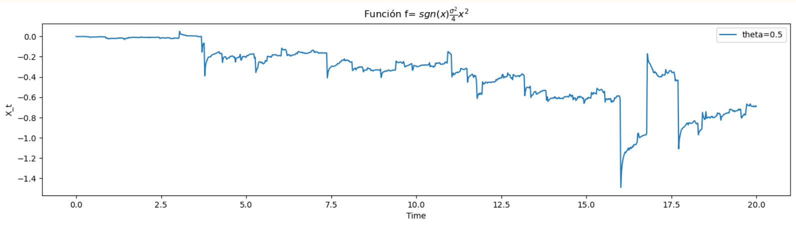

Figure: Solución EDE 1.

$$\mathrm{d}Y_t = -\lambda\sqrt{Y_t}\log(Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma|Y_t|\,\mathrm{d}L_t^d,$$

Con $\gamma = \sigma = 1, \lambda = 2.5, d = 0.35, \theta = 0.5$
La función de transformación de espacio de estado que soluciona la ecuación anterior es:

$$g(x) = e^{\sigma x}.$$

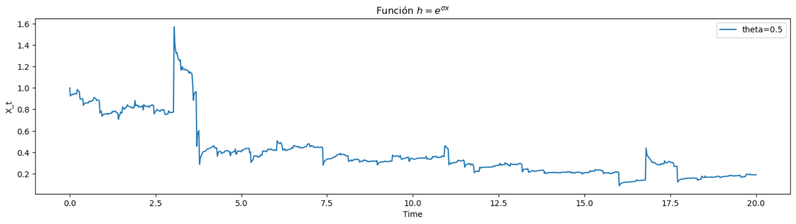

Figure: Solución EDE 2.

Conclusiones

- La generalización de los procesos de Lévy permite que fenómenos con cambios abruptos, como los fenómenos bursátiles, sean modelados con mayor exactitud. Esto se debe a la influencia del proceso de Poisson subyacente, que captura la naturaleza discreta y los saltos inesperados presentes en los mercados financieros. La capacidad de incorporar saltos de tamaño variable en la simulación proporciona una herramienta poderosa para la evaluación de riesgos y la toma de decisiones en finanzas.

- La definición del proceso fraccionario de Lévy se hace comprensible, computacionalmente, a través de su representación como una integral de Riemann. Sin embargo, la aproximación al proceso mediante la integral de Riemann-Stieltjes resulta muy difícil. La falta de soluciones exactas complica la realización de pruebas que validen las implementaciones. A pesar de estos desafíos, las simulaciones permiten aproximarse a comportamientos que serían complejos de modelar con técnicas tradicionales, aunque la validación rigurosa sigue siendo un área pendiente de desarrollo.

- El proceso de solución planteado en este trabajo nos permite evadir los errores de aproximación del método de Euler. Aunque las condiciones para utilizar la transformación SST son estrictas, es mucho más eficiente resolver los procesos FLOUP a través de transformaciones que de aproximaciones numéricas directas. Estas transformaciones simplifican significativamente la implementación computacional, haciendo que las simulaciones sean más rápidas y precisas, lo cual es crucial para aplicaciones prácticas donde la eficiencia y la precisión son esenciales.

Referencias

Fink, H. and Klüppelberg, C. (2011).
Fractional lévy-driven ornstein–uhlenbeck processes and stochastic differential equations.