

# Tratamiento del Señal.

Notas de clase, semestre de primavera 2024.

---

Barcelona, Campus Nord UPC.  
Grado en Ingeniería Electrónica de Telecomunicaciones.

Sergio Mancha Cerezuela



# Índice

<b>1. Introducción al tratamiento de señales. Notación vectorial y matricial, variables aleatorias y procesos estocásticos.</b>	<b>2</b>
1.1. Caracterización de variables aleatorias. Parámetros. . . . .	3
1.2. Procesos estocásticos. . . . .	4
1.3. Proceso estacionario en sentido amplio. . . . .	4
1.4. Caracterización de un proceso. . . . .	5
1.5. Correlación cruzada entre procesos. . . . .	7
1.6. Densidad espectral de potencia. . . . .	7
1.7. Transformación de procesos mediante sistemas lineales. . . . .	8
<b>2. Teoría de la detección.</b>	<b>11</b>
2.1. Formulación del problema de detección. . . . .	11
2.2. Detector de Neyman-Pearson. . . . .	11

# 1. Introducción al tratamiento de señales. Notación vectorial y matricial, variables aleatorias y procesos estocásticos.

En este primer tema se analizará la notación vectorial empleada en este curso, las bases de los procesos aleatorios estocásticos en tiempo discreto, así como algunas nociones fundamentales de variables aleatorias.

Se dice que  $\underline{u}$  es un vector  $N$ -dimensional, cuyos elementos  $u_0 \dots u_{N-1}$  están dispuestos verticalmente. Se dice que  $\underline{u}^H$  es el vector *hermítico*, que corresponde con hacer su transpuesto conjugado.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}$$

Se dice que  $\underline{m}$  es una matriz  $a \times b$ . Se dice que  $\underline{m}^H$  es la matriz *hermítica*, que corresponde con hacer su transpuesto y conjugar cada elemento.

Si  $m_{ij} \in \mathbb{R}$ , entonces se dice que  $\underline{m}$  es una matriz *simétrica* si y solo si  $\underline{m} = \underline{m}^T$ . Cuando los elementos de una matriz  $\underline{m}$  son  $m_{ij} \in \mathbb{C}$ , entonces se dice que la matriz  $\underline{m}$  posee *simetría hermítica* si y solo si se verifica que  $\underline{m} = \underline{m}^H$ . En ambos casos, el *teorema de descomposición espectral* nos asegura que  $\underline{m}$  se puede descomponer en valores y vectores propios.

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1a} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{b1} & \dots & u_{ab} \end{pmatrix}$$

Sea  $\underline{m}$  una matriz cuadrada, de simetría hermítica y descomponible en valores y vectores propios de módulo la unidad. Sean  $\underline{q}_i$  y  $\underline{q}_j$  dos vectores propios de  $\underline{m}$ , luego  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  sus correspondientes valores propios asociados.

- Se verifica que  $\underline{q}_i^H \cdot \underline{q}_j = 0 \quad \forall i \neq j$ .
- Sea  $\underline{Q}$  la matriz formada por todos los autovectores de  $\underline{m}$  dispuestos en filas, entonces se cumple que  $\underline{Q}^H \cdot \underline{Q} = \underline{I}$ .

Podemos derivar una forma cuadrática a partir de la definición de vector y valor propio respecto de  $\underline{m}$ .

$$\begin{cases} \underline{q}_j^H \underline{m} \underline{q}_i = \underline{q}_j^H \lambda_i \underline{q}_i = \lambda_i \underline{q}_j^H \underline{q}_i & (1) \\ \underline{q}_i^H \underline{m} \underline{q}_j = \underline{q}_i^H \lambda_j \underline{q}_j = \lambda_j \underline{q}_i^H \underline{q}_j & (2) \end{cases}$$

Si cojemos ahora el conjugado de la expresión (1) y la sumamos a la segunda, las igualdades necesariamente se tendrán que continuar cumpliendo.

$$(3) \quad \underline{q}_i^H \underline{m}^H \underline{q}_j = \overline{\lambda_i} \underline{q}_i^H \underline{q}_j$$

Sumando ahora (2) con (3).

$$(\lambda_j - \lambda_i) \underline{q}_i^H \underline{q}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda_j \neq \lambda_i \Rightarrow \underline{q}_i^H \cdot \underline{q}_j = 0$$

Aunque esta demostración no aplica para los casos en que tenemos autovalores con multiplicidad mayor a uno, el resultado es generalizable. Si construimos una matriz cuyas filas esten ocupadas por dichos autovectores  $\underline{Q}$ , entonces vemos que:

$$\underline{Q}^H \cdot \underline{Q} = \begin{pmatrix} \underline{q}_1^* & \dots & \underline{q}_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_n \end{pmatrix} = \underline{I}$$

■

Sea  $\underline{\underline{m}}$  una matriz cuadrada descomponible en valores y autovectores ortonormales propios. Sea  $\underline{\underline{Q}}$  la matriz formada por los autovectores de  $\underline{\underline{m}}$ , y sea, además,  $\underline{\underline{\Lambda}}$  la matriz diagonal formada por sus autovalores. Entonces, podemos descomponer  $\underline{\underline{m}}$  a partir de dichas matrices.

$$\underline{\underline{m}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q_1} & \dots & \underline{q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q_1} & \dots & \underline{q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{m}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q_1} & \dots & \underline{q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q_1}^* \\ \dots \\ \underline{q_n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q_1} & \dots & \underline{q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q_1}^* \\ \dots \\ \underline{q_n}^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} \underline{q_1} & \dots & \underline{q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q_1}^* \\ \dots \\ \underline{q_n}^* \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{Q}}^H$$

■

Decimos que una *Variable Aleatoria* es el resultado de un experimento aleatorio al que se le asocia un valor real  $\mathbb{R}$ . Aunque en general esto es cierto, podemos extender dicha definición para una variable aleatoria compleja.

$$x : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : \mathbb{R} + j\mathbb{R}$$

La frecuencia con la que una variable aleatoria toma diferentes valores da a lugar la *función de densidad de probabilidad*. A partir de dos variables aleatorias independientes podemos calcular la función de densidad conjunta como el producto de las densidades marginales.

La variable aleatoria compleja se puede entender como un vector de variables aleatorias reales 2-dimensional, cuyos valores corresponden a las partes real e imaginaria de nuestra variable aleatoria compleja.

## 1.1. Caracterización de variables aleatorias. Parámetros.

La forma más sencilla de caracterizar una variable aleatoria es a través de sus momentos.

- Media, esperanza o momento de primer orden.

$$m_x = \mathbb{E}[x] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx$$

- Potencia.

$$P_x = \mathbb{E}[|x|^2] = \int_{\mathbb{R}} |x|^2 \cdot f(x) dx$$

- Correlación cruzada.

$$r_{xy} = \mathbb{E}[x\bar{y}] = \int_{\mathbb{R}^2} x\bar{y} \cdot f_{xy}(x,y) dx dy$$

Decimos que dos variables son *incorreladas* si y solo si la correlación cruzada se puede expresar como:  $r_{xy} = m_x m_y^*$ . La incorrelación implica diversos factores. La independencia entre dos valores aleatorias implica incorrelación, pero el recíproco no es necesariamente cierto.

- Varianza.

$$\sigma_x^2 = \mathbb{E} [ |x - m_x|^2 ] = \int_{\mathbb{R}} |x - m_x|^2 \cdot f_x(x) dx$$

- Covarianza cruzada.

$$C_{xy} = \mathbb{E} [ (x - m_x) \overline{(y - m_y)} ] = \int_{\mathbb{R}^2} (x - m_x) \overline{(y - m_y)} \cdot f_{xy}(x, y) dx dy$$

Si la covarianza cruzada es cero implica que las variables aleatorias son incorreladas, pero no necesariamente independientes.

## 1.2. Procesos estocásticos.

Se dice que un proceso estocástico discreto en el tiempo es una función que relaciona una señal temporal al resultados de un experimento aleatorio. La caracterización estadística completa de un proceso estocástico requiere del conocimiento de todas las funciones de densidad de probabilidad, *fdp*, conjuntas. Para ello, al igual que en el caso de las variables aleatorias la caracterización se suele reducir al uso de los momentos.

- Media.

$$m_x(n) = \mathbb{E} [x(n)] = \int_{\mathbb{R}} x(n) \cdot f_{x(n)}(x(n)) dx(n)$$

- Autocorrelación.

$$r_x(n+m, n) = \mathbb{E} [x(n+m), x(n)] = \int_{\mathbb{R}^2} x(n+m)x(n) \cdot f_{x(n+m)x(n)}(x(n+m), x(n)) dx(n+m) dx(n)$$

- Potencia instantanea.

$$P_x(n) = r_x(n, n) = \mathbb{E} [ |x(n)|^2 ] = \int_{\mathbb{R}} |x(n)|^2 \cdot f_{x(n)}(x(n)) dx(n)$$

- Potencia media.

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^N r_x(n, n)$$

- Autocovarianza.

$$C_x(n+m, n) = \mathbb{E} [ (x(n+m) - m_x(n+m)) \overline{(x(n) - m_x(n))} ]$$

- Varianza.

$$\sigma_x^2 = \mathbb{E} [ |x(n) - m_x(n)|^2 ] = r_x(n, n) - |m_x(n)|^2$$

## 1.3. Proceso estacionario en sentido amplio.

Se dice que un proceso estocástico es estacionario en sentido amplio si verifica que su media es constante y la autocorrelación sólo depende de la diferencia de tiempo.

- La autocorrelación de un proceso estacionario en sentido amplio tiene simetría hermitica.

$$r_x(m) = \overline{r_x(-m)}$$

*Condiciones de estacionariedad en sentido amplio.*

$$m_x(n) = m_x$$

$$r_x(n+m, n) = r_x(m)$$

$$r_x(m) = \mathbb{E} [ x(m+n) \overline{x(n)} ] = \overline{\mathbb{E} [ x(m+n) x(n) ]} = \overline{r_x(-m)}$$

■

- La autocorrelación es máxima en el origen.

$$r_x(0) \geq |\mathbb{R}\{r_x(m)\}| \quad \forall m$$

$$\langle x(n+m), x(n) \rangle = \mathbb{E} [x(n+m) \overline{x(n)}]$$

$$\left| \mathbb{E} [x(n+m) \overline{x(n)}] \right|^2 \leq \mathbb{E} [|x(n+m)|^2] \cdot \mathbb{E} [|x(n)|^2]$$

Suponiendo que tenemos un proceso estacionario,

$$|r_x(m)|^2 \leq P_x \cdot P_x = r_x(0)^2$$

Si  $x(n) \in \mathbb{R} \Rightarrow r_x(n)$  también será  $\mathbb{R} \Rightarrow r_x(m) \leq r_x(0)$ .

Si  $x(n) \in \mathbb{C} \Rightarrow r_x(n)$  también será  $\mathbb{C} \Rightarrow |r_x(n)| \leq r_x(0)$ , por lo que tendremos que:

$$|r_x(m)|^2 = \text{Re}\{r_x(m)\}^2 + \text{Im}\{r_x(m)\}^2 \leq r_x(0)$$

De esta manera, pues, vemos que necesariamente se tendrá que cumplir que:

$$\text{Re}\{r_x(m)\} \leq r_x(0)$$

$$\text{Im}\{r_x(m)\} \leq r_x(0)$$

■

Se dice que un *proceso es ergódico* si verifica que la media temporal de una realización del proceso coincide con la media estadística  $m_x$ , y la autocorrelación temporal de una realización del proceso coincide con la autocorrelación  $r_x(m)$ .

- Si un proceso es ergódico, siempre es estacionario. Aunque el recíproco no es necesariamente cierto.
- Un proceso ergódico nos permite obtener la media y la autocorrelación a partir de una única realización del proceso.
- En general los procesos reales no son ergódicos. A veces sólo se ha medido una realización de un proceso estocástico y tenemos que suponer ergodicidad para poder extraer conclusiones de los datos.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{-N}^N x(n)}{2N+1} = m_x$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{-N}^N x(n+m) \overline{x(n)}}{2N+1} = r_x(m)$$

## 1.4. Caracterización de un proceso.

Podemos caracterizar un proceso en función de sus momentos.

- Matriz de medias,  $\underline{\underline{m_x}}$ . Es la matriz que contiene todas las medias para cada valor del proceso.
- Matriz de covarianzas,  $\underline{\underline{C_x}}$ . Es la matrix que contiene todas y cada una de las covarianzas cruzadas en sus posiciones.

$$\underline{\underline{m_x}} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[x(0)] \\ \dots \\ \mathbb{E}[x(N-1)] \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_x}} = \underline{\underline{R_x}} - \underline{\underline{m_x}} \cdot \underline{\underline{m_x}}^H$$

- Matriz de correlación,  $\underline{\underline{R_x}}$ . Es la matriz que contiene todas y cada una de las correlaciones de  $x$ .

Si el proceso es  $\mathbb{R}$ , entonces la matriz tendrá simetría respecto de su diagonal. Ahora bien, si el proceso es  $\mathbb{C}$ , la simetría que se produce es hermitica. Dichas simetrías en la matriz de correlación son independientes de la estacionariedad del proceso. Particularmente, pero, si el proceso es estacionario entonces la matriz de correlación se llama de tipo *Toeplitz*. Algunas propiedades interesantes se derivan de dicha particularidad.

- La matriz  $\underline{\underline{R_x}}$  es hermitica. Si  $x(n)$  es estacionario, entonces  $\underline{\underline{R_x}}$  también es *Toeplitz*.
- La matriz  $\underline{\underline{R_x}}$  es semidefinida positivamente, luego la forma cuadrática  $\underline{v}^H \cdot \underline{\underline{R_x}} \cdot \underline{v} \geq 0 \quad \forall \underline{v}$ .

Por simetría hermitica, conocemos que la matriz  $\underline{\underline{R_x}}$  se puede expresar como:

$$\underline{\underline{R_x}} = \underline{\underline{R_x}}^H \Rightarrow \underline{\underline{R_x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^H \Leftrightarrow \underline{\underline{R_x}}^H = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^H$$

Ahora, vemos que necesariamente la forma cuadrática siguiente tiene por resultado un número no negativo.

$$\underline{v}^H \cdot \underline{\underline{R_x}} \cdot \underline{v} = \underline{v}^H \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^H \cdot \underline{v} = \underline{z}^H \cdot \underline{z} = \sum_i |z_i|^2 \geq 0$$

A partir de la definición de vector y valor propio de una matriz podemos derivar una forma cuadrática análoga. Sea  $\underline{q_i}$  un vector propio cualquiera de  $\underline{\underline{R_x}}$ , y sea  $\lambda_i$  el valor propio asociado a dicho autovector.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R_x}} \cdot \underline{q_i} &= \lambda_i \cdot \underline{q_i} \\ \underline{q_i}^H \underline{\underline{R_x}} \underline{q_i} &= \underline{q_i}^H \lambda_i \underline{q_i} \geq 0 \Rightarrow \lambda_i \geq 0 \end{aligned}$$

■

- La traza de  $\underline{\underline{R_x}}$  es igual a la suma de los autovalores.

Sea  $\underline{\underline{R_x}}$  la matriz de correlación de  $x$ . Sea  $\underline{\underline{Q}}$  la matriz cuyas filas contienen sus autovectores, ortonormales, y sea también  $\underline{\underline{\Delta}}$  la matriz diagonal formada por sus autovalores.

$$\text{Tr} [\underline{\underline{R_x}}] = \text{Tr} [\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{Q}}^H] = \text{Tr} [\underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{Q}}^H \underline{\underline{Q}}] = \text{Tr} [\underline{\underline{\Delta}}] = \sum_i \lambda_i$$

■

- El determinante de  $\underline{\underline{R_x}}$  es igual al producto de sus autovalores.

Sea  $\underline{\underline{R_x}}$  la matriz de correlación de  $x$ . Sea  $\underline{\underline{Q}}$  la matriz cuyas filas contienen sus autovectores, ortonormales, y sea también  $\underline{\underline{\Delta}}$  la matriz diagonal formada por sus autovalores.

$$\begin{aligned} \det [\underline{\underline{R_x}}] &= \det [\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{Q}}^H] = \det [\underline{\underline{Q}}] \cdot \det [\underline{\underline{\Delta}}] \cdot \det [\underline{\underline{Q}}^H] = \\ &= \det [\underline{\underline{Q}}] \cdot \det [\underline{\underline{\Delta}}] \cdot \det [\underline{\underline{Q}}^{-1}] = \det [\underline{\underline{\Delta}}] = \prod_i \lambda_i \end{aligned}$$

■

- Los autovectores de  $\underline{\underline{R_x}}$  están acotados por los valores máximo y mínimo del despectro de potencia de  $\underline{x}(n)$ .



## 1.5. Correlación cruzada entre procesos.

A partir de los vectores con las muestras de dos procesos que podemos llamar  $x$  e  $y$ , podemos definir una matriz que contendrá todas las correlaciones cruzadas entre los elementos de dichos procesos,  $\underline{\underline{R_{xy}}}$ .

$$\underline{\underline{R_{xy}}} = \mathbb{E}[x \bar{y}] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[x(0) \bar{y}(0)] & \dots & \mathbb{E}[x(0) \bar{y}(k)] & \dots & \mathbb{E}[x(0) \bar{y}(N-1)] \\ \mathbb{E}[x(1) \bar{y}(0)] & \dots & \mathbb{E}[x(1) \bar{y}(k)] & \dots & \mathbb{E}[x(1) \bar{y}(N-1)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{E}[x(N-1) \bar{y}(0)] & \dots & \mathbb{E}[x(N-1) \bar{y}(k)] & \dots & \mathbb{E}[x(N-1) \bar{y}(N-1)] \end{pmatrix}$$

Se define el *error cuadrático mediano* como la media de la diferencia cuadrática entre dos puntos consecutivos de dos procesos.

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \mathbb{E}[|y(n) - x(n+k)|^2] = \mathbb{E}[(y(n) - x(n+k))(\overline{y(n) - x(n+k)})] = \\ &= \mathbb{E}[y(n)\overline{y(n)}] + \mathbb{E}[x(n+k)\overline{x(n+k)}] - \mathbb{E}[y(n)\overline{x(n+k)}] - \mathbb{E}[x(n+k)\overline{y(n)}] = \\ &= r_x(0) + r_y(0) - 2\text{Re}\{r_{xy}(k)\} \geq 0 \end{aligned}$$

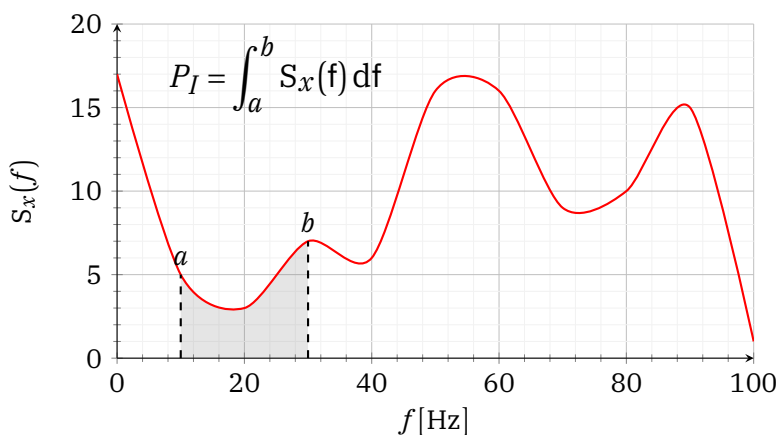
Aquí volvemos a ver realmente cómo la correlación cruzada nos vuelve a retornar esa idea de parecido entre procesos.

## 1.6. Densidad espectral de potencia.

Para un proceso estacionario en sentido amplio, su densidad de potencia se define como la *transformada de Fourier* de su correlación, o, lo que es lo mismo, la media del módulo cuadrático de la transformada del proceso.

$$S_x(f) = \mathbb{E}[|\hat{x}(f)|^2] = \sum_{-\infty}^{\infty} r_x(k) \cdot e^{-j2\pi f k}$$

Se encarga de medir cómo se distribuye la potencia de un señal en frecuencia.



Además, la *densidad espectral de potencia* verifica que,

- Esta es real y positiva.
- Si  $x(n) \in \mathbb{R}$ , la densidad espectral de potencia es par,  $S_x(f) = S_x(-f)$ .

Si nos fijamos en una de las columnas podemos obtener:

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \mathbb{E}[x \bar{y}(k)] = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}[x(0)\bar{y}(k)] \\ \dots \\ \mathbb{E}[x(N-1)\bar{y}(k)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En concreto, si los dos procesos son conjuntamente estacionarios tenemos:

$$= \begin{pmatrix} r_{xy}(-k) \\ r_{xy}(1-k) \\ \dots \\ r_{xy}(N-1-k) \end{pmatrix}$$

En el caso de no tener un proceso estacionario, antes de aplicar la *transformada de Fourier* habría que promediar.

La potencia media puede calcularse como la correlación evaluada en el origen.

$$r_x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f) df$$

Decimos que  $S_x(f)$  es la *densidad espectral de potencia* de  $x$ , y esta es definida real y positiva.

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \sum_k r_x(k) \cdot e^{-j2\pi f k} = r_x(0) + \sum_{-\infty}^{-1} r_x(k) \cdot e^{-j2\pi f k} + \sum_1^{\infty} r_x(k) \cdot e^{-j2\pi f k} = \\ &= r_x(0) + \sum_1^{\infty} r_x(-k) \cdot e^{2\pi f k} + \sum_1^{\infty} r_x(k) \cdot e^{-2\pi f k} = \\ &= r_x(0) + \overline{\left( \sum_1^{\infty} r_x(k) \cdot e^{-2\pi f k} \right)} + \sum_1^{\infty} r_x(k) \cdot e^{-2\pi f k} = \\ &= r_x(0) + 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_1^{\infty} r_x(k) \cdot e^{-j2\pi f k} \right\} \end{aligned}$$

Si  $x(n) \in \mathbb{R} \Rightarrow S_x(f) = r_x(0) + 2 \cdot \sum_1^{\infty} r_x(k) \cdot \cos(2\pi f \cdot k)$ . Si cojemos  $k = n - m$  podemos reescribir la densidad espectral de potencia a partir de dos sumatorios.

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \sum_m \sum_n r_x(n - m) \cdot e^{-j2\pi f (n - m)} = \sum_m \sum_n r_x(n - m) \cdot e^{-j2\pi f n} \cdot e^{j2\pi f m} = \\ &= \underline{\underline{S}}^H \underline{\underline{R_x}} \underline{\underline{S}} \geq 0 \end{aligned}$$

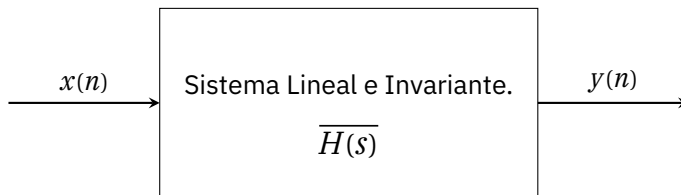
Como ya habíamos demostrado antes, la forma cuadrática resultante siempre es no negativa para la matriz  $\underline{\underline{R_x}}$ . ■

Asimismo, también podemos definir la *densidad espectral de potencia cruzada* entre dos procesos.

$$S_{xy}(f) = E \left[ \hat{x}(f) \overline{\hat{y}(f)} \right] = \sum_k r_{xy}(k) \cdot e^{-j2\pi f k}$$

## 1.7. Transformación de procesos mediante sistemas lineales.

En esta sección supondremos que los sistemas con los que vamos a trabajar son estrictamente lineales e invariantes, por lo que tendremos caracterizado nuestro sistema por su función de transferencia.



El señal a la salida de un sistema lineal viene dado por la convolución entre la función de respuesta impulsional y los coeficientes de entrada.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} \cdot x(n - k) = \begin{bmatrix} \overline{h(0)} & \dots & \overline{h(L-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ \dots \\ x(n - L + 1) \end{bmatrix} = \underline{\underline{h}}^H \underline{\underline{x(n)}}$$

Para que formalmente se cumpla la definición de un producto escalar en el dominio  $\mathbb{C}$  hay que imponer que uno de los términos esté conjugado, por lo que por analogía con el producto escalar en  $\mathbb{R}$  esto corresponde al vector hermítico.

De la misma manera que habíamos hecho estudiando los procesos, que en este contexto podemos considerar como de entrada al sistema, ahora prestaremos atención a la caracterización de los procesos de salida, y su relación para con los de entrada.

■ Media.

$$\begin{aligned} m_y(n) &= \mathbb{E}[y(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} \cdot x(n-k)\right] = \sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} \cdot \mathbb{E}[x(n-k)] = \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} \cdot m_x(n-k) = m_x \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} = m_x \cdot \underline{h}^H \underline{1} = m_y \end{aligned}$$

Si asumimos que el proceso es estacionario, tenemos que:

$$m_x(n-k) = m_x$$

■ Correlación cruzada entrada-salida.

Asumimos un sistema lineal e invariante, el cual podemos caracterizar por su función de transferencia conjugada y que recibe como entrada un proceso  $x(n)$ , y como salida otro  $y(n)$ . Entonces, decimos que  $\underline{r_{xy}}$  es la correlación cruzada entrada-salida.

$$\underline{r_{xy}} = \mathbb{E}\left[\underline{x(n)} \underline{y(n)}^*\right] = \mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} x(n) \\ \vdots \\ x(n-L+1) \end{bmatrix} \cdot y(n)^*\right] = \begin{bmatrix} r_{xy}(0) \\ \vdots \\ r_{xy}(L-1) \end{bmatrix}$$

Aunque si nos fijamos bien, realmente podemos expresar la correlación cruzada a partir del vector función de transferencia y la matriz de correlación de la entrada.

$$\underline{r_{xy}} = \mathbb{E}\left[\underline{x(n)} \underline{y(n)}^*\right] = \mathbb{E}\left[\underline{x(n)} \underline{x(n)}^H \underline{h}\right] = \underline{R_x} \underline{h}$$

Si únicamente queremos una de las correlaciones de la matriz, podemos derivar una expresión analítica.

$$\begin{aligned} r_{xy}(l) &= \mathbb{E}\left[\underline{x(n+l)} \underline{y(l)}^*\right] = \mathbb{E}\left[\underline{x(n+l)} \underline{x(n)}^H \underline{h}\right] = \underline{r_x}^H(l) \cdot \underline{h} = \sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} \cdot r_x(l+k) = \\ &= \underline{h}(-l) * \underline{r_x}(l) \end{aligned}$$

De la misma manera que hemos hecho antes con un proceso, también podemos derivar la *densidad espectral de potencia cruzada* a partir de la transformada de Fourier de la correlación cruzada.

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{r_{xy}(l)\}(f) = \mathcal{F}\{h(-l) * r_x(l)\}(f) = \hat{h}(-f) \cdot S_x(f)$$

Queremos demostrar que la transformada de Fourier de la correlación cruzada nos deriva,  $S_{xy}(f) = \hat{h}(-f) \cdot S_x(f)$ .

$$\begin{aligned} S_{xy}(f) &= \sum_l r_{xy}(l) \cdot e^{-j2\pi fl} = \sum_l \sum_k h(k) r_x(l+k) \cdot e^{-j2\pi fl} = \\ &= \sum_k h(k) \cdot e^{-j2\pi fk} \sum_n r_x(n) \cdot e^{-j2\pi fn} = \hat{h}(-f) \cdot S_x(f) \end{aligned}$$

■

Cabe notar, también, que si invertimos el orden de la correlación cruzada, y nos referimos entonces a  $r_{yx}(l)$ , el resultado obtenido sigue siendo extrapolable en cierta manera para su *densidad espectral de potencia*.

$$S_{yx}(f) = \hat{h}(-f)^* \cdot S_x(f)$$

■ Correlación de la salida.

$$r_y(l) = \mathbb{E}\left[y(n+l) \cdot \overline{y(n)}\right] = \sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} \cdot \mathbb{E}\left[x(n+l-k) \cdot \overline{y(n)}\right] = \sum_{k=0}^{L-1} \overline{h(k)} r_{xy}(l-k) = \overline{h(l)} * r_{xy}(l)$$

■ Densidad espectral de salida.

Podemos calcular, como hasta ahora, la *densidad espectral de potencia* de la salida a partir de la DFT de su correlación.

$$S_y(f) = |\hat{h}(-f)|^2 \cdot S_x(f)$$

■ Potencia de salida.

$$P_y = r_y(0) = \mathbb{E}[|y(n)|^2] = \mathbb{E}[\underline{h}^H \underline{x}(n) \underline{x}(n)^H \underline{h}] = \underline{h}^H \mathbb{E}[\underline{x}(n) \underline{x}(n)^H] \cdot \underline{h} = \underline{h}^H \underline{R}_x \underline{h}$$

Los autovectores de  $\underline{R}_x$  están acotados por los valores máximo y mínimo del espectro de potencia de  $\underline{x}(n)$ .

Suponemos un sistema lineal que filtra un proceso de entrada  $\underline{x}(n)$ , con coeficientes de función de transferencia uno de sus autovectores conjugados que llamamos  $\underline{u}$ .

$$P_y = \underline{u}^H \underline{R}_x \underline{u} = \underline{u}^H \lambda \underline{u} = \lambda \quad \text{con } \lambda \text{ el valor propio asociado a } \underline{u}.$$

A partir de la potencia, podemos acotar un valor en función de la densidad espectral de potencia máxima y mínima del proceso de entrada.

$$S_{x \min} \int |H(f)|^2 df \leq \int S(f) |H(-f)|^2 df \leq S_{x \max} \int |H(-f)|^2 df$$

Fundamentalmente, aprovechamos las cotas mayores y menores de la densidad espectral del proceso de entrada, ya que necesariamente la potencia de salida en su definición integral deberá de estar necesariamente acotada entre estos valores. Haciéndonos valer de la *igualdad de parseval*, y que en nuestro sistema  $\|\underline{h}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 = 1$ , podemos simplificar las expresiones.

$$S_{x \min} \leq \int S(f) |H(-f)|^2 df \leq S_{x \max}$$

Además, al principio hemos demostrado que  $P_y = \lambda$ .

$$S_{x \min} \leq \lambda \leq S_{x \max}$$



*Igualdad de Parseval.*

$$\int |H(f)|^2 df = \|\underline{h}\|^2$$

## 2. Teoría de la detección.

En este tema discutiremos varios métodos para la implementación de decisores, caracterizando dichos detectores en función de la naturaleza del ruido.

### 2.1. Formulación del problema de detección.

En esta sección se formula el proceso de detección típico de un problema de detección. Aunque en este tema asumiremos un contexto situacional en el que únicamente asumimos un sistema de hipótesis binario, los resultados son extendibles al caso general para  $N$  hipótesis.

**A)** Suponemos que se debe decidir entre un conjunto de  $M$  hipótesis.

$$\text{Hipótesis} \longrightarrow \{H_0, H_1, \dots, H_{m-1}\}$$

**B)** Suponemos que recogemos un conjunto de  $N$  muestras de señales ruidosas del canal en el que pretendemos imponer las hipótesis.

$$\text{Datos} \longrightarrow \{x(0), x(1), \dots, x(n-1)\}$$

**C)** Para ello, se construye una función que depende de las muestras y que llamaremos *función de Test*.

$$\text{Función de test} \longrightarrow T(\underline{x}) \triangleq f(x(0), x(1), \dots, x(n-1))$$

**D)** Caracterizamos dicha función. Se segmenta el espacio de observaciones en diferentes regiones correspondientes a las hipótesis,  $R_i$ , y se impone la función de test sobre ellas para derivar la probabilidad de hipótesis y la detección.

$$\text{Si } T(x) \in R_i \text{ entonces se decide } H_i$$

La dificultad del problema de detección depende de la naturaleza de la señal que se pretende detectar, y por supuesto del tipo de ruido en el canal de detección. Por eso, estudiaremos diversos casos en los que el tipo de ruido y del señal emitido nos permitirán optimizar nuestra función de test en mayor o menor manera.

Si pensamos en el caso del filtro adaptado, es cierto que hay señales que presentan autocorrelaciones en el origen mayores que otras.

### 2.2. Detector de Neyman-Pearson.

Suponemos únicamente un conjunto binario de hipótesis, en las que  $H_0$  corresponderá a no detectar señal, luego únicamente recibir ruido, y  $H_1$  el complementario, luego detectar el señal emitido junto con el ruido del canal superpuesto. Buscamos definir las regiones de probabilidad de cada hipótesis de forma que se maximiza la probabilidad de detección, para una cierta probabilidad de falsa detección.

#### ■ Probabilidad de Detección.

$$P_D \triangleq \Pr(H_1 | H_0) = \int_{R_1} f(\underline{x}_{H_1}) d\underline{x}$$

#### ■ Probabilidad de Falsa Alarma.

$$P_{FA} \triangleq \Pr(H_1 | H_0) = \int_{R_1} f(\underline{x}_{H_0}) d\underline{x}$$

#### ■ Probabilidad de Pérdida.

$$P_M \triangleq \Pr(H_1 | H_0) = \int_{R_2} f(\underline{x}_{H_1}) d\underline{x}$$

■ **Probabilidad de Rechazo Correcto.**

$$P_R \triangleq \Pr(H_1 | H_0) = \int_{R_2} f(x_{H_0}) dx$$

En la práctica, podemos ver dichas integrales como el área de las regiones entre las funciones de densidad de probabilidad del señal que mostrearemos en cada hipótesis, es decir cuando sólo detectamos ruido y cuando también detectamos el señal propiamente dicho. Si asumimos, en un primer ejemplo, distribuciones normales respecto ambas hipótesis entonces podemos ver en la *figura X*.

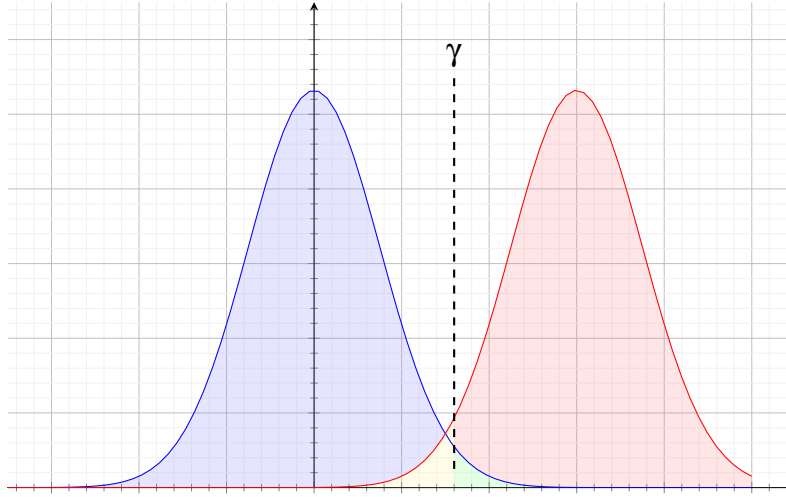


Figura 1: Distribución de las regiones basadas en las funciones de densidad de probabilidad, para cada casuística.

Vemos que existe un compromiso necesario entre las cuatro regiones de probabilidad al desplazar el umbral  $\gamma$ . Para ello, a partir de un vector de  $n$ -observaciones, el *criterio de Neyman-Pierson* nos impone cómo debemos de transformar las observaciones para derivar una variable aleatoria que nos permita dividir el espacio de probabilidad en dichas regiones.

Queremos que todos los puntos en la región 1,  $R_1$ , maximizen la probabilidad de detección.

Sea  $\lambda$  un umbral para las regiones de decision, y sean  $f(x_{H0})$  y  $f(x_{H1})$  las funciones de densidad del muestreo para el señal recibido en cada hipótesis. Entonces, *el criterio de Niemann-Pierson* dice que a partir de la desigualdad formada por dicho cociente y el umbral, podemos diferenciar en qué hipótesis nos hayamos.

Se define la función de coste a partir del Langrangiano. Sea además  $R_1$  la región de decisión de  $H_1$ .

$$\mathcal{L}(R_1, \gamma) = P_D - \gamma(P_{FA} - \alpha) = \int_{x \in R_1} f(x_{H1}) dx - \gamma \cdot \int_{x \in R_1} f_0$$

■