INTRODUCCIÓ ALS CIRCUITS D'ALTA FREQÜÈNCIA

Apunts de classe, semestre de primavera 2024.

Barcelona, Campus Nord UPC.
Grau en Enginyeria Electrònica de Telecomunicacions.

Sergio Mancha Cerezuela

Índex

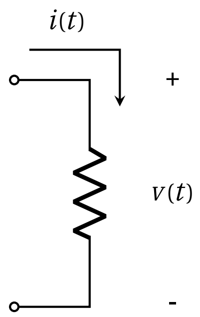
TEMA I.
CONCEPTES BÀSICS.

En aquesta unitat, s'introdueixen tots els conceptes fonamentals per al curs *d'introducció als circuits d'alta freqüència*. Es discuteix sobre el càlcul d'energies i potències en circuits elèctrics, circuits en règim permanent sinusoïdal, relacions logarítmiques i el concepte d'atenuació.

Potència instantània i potència mitjana.

Definim la *potència instantània*, sobre un component elèctric, a partir de la variació del treball respecte el temps com el producte entre la tensió per el corrent.

$$\mathrm{P(t)} = \frac{\partial W}{\partial t} = v(t) \cdot i(t)$$



A l'hora d'estudiar un senyal o un circuit elèctric, ens interessarà definir magnituds de potència que no mantinguin una dependència temporal.

Com la potència manté una estricte correlació amb el temps, podem definir la *potència mitjana* a partir de la integral temporal de la potència.

$$\overline{\mathrm{P}} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} P(t)\,\mathrm{d}t$$

Per a senyals periòdics, podem reformular la definició de la potència mitjana com la integral temporal de la potència respecte d'un període, T. Altrament, la primera definició ens portaria a potències infinites pel cas dels senyals periòdics.

$$\overline{\mathrm{P}} = \frac{1}{T} \int_T P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_T v(t) \cdot i(t)\,\mathrm{d}t$$

Per a tractar la potència tant en continua com alterna, podem definir dues magnituds v_{DC} i v_{AC}, així com pel corrent i_{DC} i i_{AC}, per a diferenciar les components d'un senyal. A partir d'aquí, assumirem que treballem amb senyals periòdics, llevat de que tot senyal pot ser entès com una sèrie de funcions periòdiques a partir d'una descomposició en *sèrie de Fourier*.

Definim el nivell de continua d'un senyal com el promig d'aquest, a partir de la integral de temps normalitzada respecte del període d'integració.

$$v_{DC} = \frac{1}{T} \int_T v(t)\,\mathrm{d}t \qquad i_{DC} = \frac{1}{T} \int_T i(t)\,\mathrm{d}t$$

Espectralment, la component continua correspon a $f = 0\mathrm{Hz}$.

A partir de les magnituds elètriques en continua i l'expressió de la potència, podem deduir l'expressió per a la potència en continua, P_{DC}.

$$P_{DC} = i_{DC} \cdot v_{DC} \quad [\mathrm{W}]$$

Definim el nivell d'alterna d'un senyal com la diferència entre el senyal i el seu nivell de continua, en una magnitud elèctrica.

$$v_{AC} = v(t) - v_{DC} \qquad i_{AC} = i(t) - i_{DC}$$

De la mateixa manera que amb la component continua, podem derivar una expressió per a la potència promig en alterna.

$$\overline{\mathsf{P}_{AC}} = \frac{1}{T}\int_T v_{AC}\cdot i_{AC}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_T \left(v(t)-v_{DC}\right)\cdot\left(i(t)-i_{DC}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{T}\left[\int_T v(t)\cdot i(t)\,\mathrm{d}t - \int_T v(t)\cdot i_{DC}\,\mathrm{d}t + \int_T i(t)\cdot v_{DC}\,\mathrm{d}t + \int_T v_{DC}\cdot i_{DC}\,\mathrm{d}t\right] =$$
$$= \overline{\mathsf{P}} - P_{DC}$$

■

Règim permanent sinusoidal.

Assumim un simple circuit format per una càrrega resistiva, R, sobre la que circula un corrent $i(t)$ i amb una caiguda de tensió de $v(t)$.

$$\overline{\mathsf{P}} = \frac{1}{T}\int_T v(t)\cdot i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\frac{1}{T}\int_T v^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Definim la *tensió eficaç* a partir de la formulació de la potència, com aquell valor que ens permet reesciure la expressió integral com un quocient respecte la resistència.

$$v_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T v^2(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \overline{\mathsf{P}} = \frac{v_{\text{ef}}^2}{R}$$

Assumint, però, que únicament tenim components alternes. De manera anàloga, assumint les mateixes premises podem definir el valor de *corrent eficaç*.

$$i_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T i^2(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \overline{\mathsf{P}} = R\cdot i_{\text{ef}}^2$$

En el cas de treballar en *règim permanent sinusoïdal*, el valor eficaç d'un senyal es correspon al quociente entre $v_{\text{ef}} = \frac{v_o}{\sqrt{2}}$.

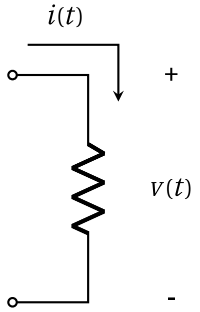
Sigui $v(t) = v_o\cdot\cos(\omega t+\phi)$, un senyal en tensió pròpi d'un circuit elèctric. Sigui v_o la seva amplitud.

$$v_{\text{ef}}^2 = \frac{v_o^2}{T}\int_T \cos^2(\omega t+\phi)\,\mathrm{d}t = \frac{v_o^2}{T}\int_T \frac{1+\cos(2\omega t+2\phi)}{2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{v_o^2}{2T}\left[t+\frac{\sin(2\omega t+2\phi)}{2\omega}\right]_T = \frac{v_o^2}{2}$$

■

Senyals sinusoïdals, potència dissipada i factor de potència.

Assumim una malla formada per un generador d'ones sinusoidals, i una càrrega resistiva.



$$v(t) = v_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_v) \qquad i(t) = i_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_i)$$

A partir de la definició de potència instantània, podem derivar la expressió pel cas en que treballem en RPS.

$$\mathsf{P}(t) = v(t) \cdot i(t) = v_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_v) \cdot i_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_i) =$$
$$= \frac{v_0 \cdot i_0}{2} \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) + \frac{v_0 \cdot i_0}{2} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

D'aquí, per a derivar la potència mitjana simplement integrem sobre un període a partir de la definició per a senyals periòdics.

$$\begin{aligned}\overline{\mathsf{P}} &= \frac{1}{T}\int_T \mathsf{P}(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{v_0 \cdot i_0}{2T}\int_T \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)\,\mathrm{d}t + \frac{v_0 \cdot i_0}{2T}\cos(\phi_v - \phi_i)\int_T \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2} v_0 \cdot i_0 \cdot \cos(\phi_v - \phi_i)\end{aligned}$$

A partir de l'expressió de potència mitjana en règim permanent sinusoidal, definim el *factor de potència* com $\mathsf{FP} = \cos(\phi_v - \phi_i)$.

Les càrregues resistives $\phi_v = \phi_i$, que no afegeixen fase alguna entre tensió i corrent, es caracteritzen per una expresió de potència que no depèn del factor de potència.

Així doncs, podem particularitzar l'expressió de la potència mitjana per a dos casos, en funció del factor de potència.

- **Càrrega resistiva**.

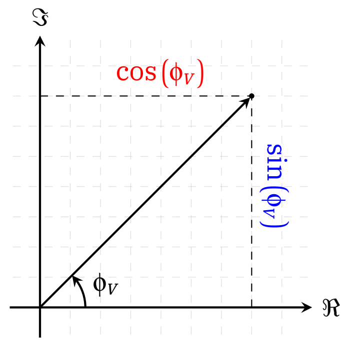
$$\overline{\mathsf{P}} = \frac{v_0 \cdot i_0}{2} = v_{\mathsf{ef}} \cdot i_{\mathsf{ef}}$$

- **Cas general**, en funció del factor de potència.

$$\overline{\mathsf{P}} = v_{\mathsf{ef}} \cdot i_{\mathsf{ef}} \cdot \cos(\phi_v - \phi_i)$$

Fasors d'amplitud.

El fasor d'amplitud és un nombre complex en notació exponencial que ens permet simplificar la notació de senyals, en tensió i corrent, a un circuit elèctric en funció de la seva fase. És d'especial utilitat quan treballem en règim permanent sinusoidal.



$$v = v_0 \cdot e^{j\phi_v} = v_0 \cdot (\cos(\phi_v) + j\sin(\phi_v))$$

Podem alternar entre el domini temporal i el domini fasorial a partir d'agafar la part real de l'expressió fasorial.

$$v(t) = \Re\left\{v \cdot e^{j\omega t}\right\} = \Re\left\{v_0 \cdot e^{j\phi_v} \cdot e^{j\omega t}\right\} = v_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_v)$$

De la mateixa manera, aplicable per al fasor de corrent.

En notació fasorial d'amplitud.

$$\overline{\mathsf{P}} = \frac{1}{2}\Re\{v \cdot i^*\}$$

Fasors de valor eficaç.

Si considerem fasors on ara no tenim amplitud, però el seu valor eficaç, podem tornar a derivar expresions per als dominis fasorials i temporals.

$$v = v_{\mathsf{ef}} \cdot e^{j\phi_v} \quad \longrightarrow \quad v(t) = \Re\left\{\sqrt{2} \cdot v \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

En notació fasorial, l'expressió de la potència mitjana resulta exactament la mateixa que a partir de fasors d'amplitud, com no podria ser d'una altre manera.

Suposem dos senyals, un en tensió $v = v_0 \cdot e^{j\phi_v}$ i l'altre en corrent $i = i_0 \cdot e^{j\phi_i}$ associats a un element circuital d'una malla elèctrica.

$$\overline{\mathrm{P}} = \Re\{v \cdot i^*\} = \frac{1}{2}\Re\left\{v_0 \cdot e^{j\phi_v} \cdot i_0 \cdot e^{-j\phi_i}\right\} = \frac{v_0 \cdot i_0}{2}\Re\left\{e^{j\phi_v} e^{-j\phi_i}\right\} =$$
$$= \frac{v_0 \cdot i_0}{2}\cos\left(\phi_v - \phi_i\right)$$

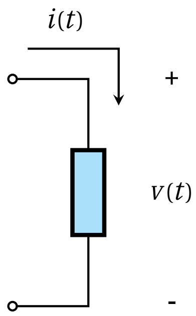
■

En notació fasorial de valor eficaç.

$$\overline{\mathrm{P}} = \Re\{v \cdot i^*\}$$

Concepte d'impedància.

La *impedància* és un concepte que relaciona els fasors tensió i corrent, a través d'un quocient.



El concepte d'impedància és independent al tipus de fasor donat, ja que és un quocient entre tensió i corrent, es podria entendre com una generalització del concepte de resitència tal i com apareix formalment en la *llei d'ohm*.

En unitats del SI, la impedància es mesura en $[\Omega]$ mentre que la admitància en $[S]$.

resistència

Z = R + jX

impedància reactància

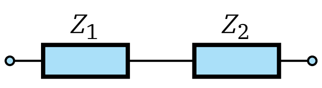
Podem, també, definir la *admitància* com la inversa de la impedància. I de la mateixa manera, agrupar cada terme.

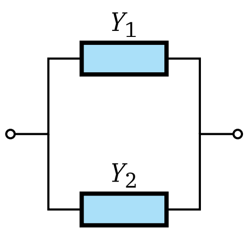
conductància

Y = G + jB

admitància susceptància

Diferenciar entre impedància i admitància és útil, especialment en els casos de configuracions tipus sèrie-paral·lel.





$Z_{\mathrm{eq}} = Z_1 + Z_2$ $\qquad$ $Y_{\mathrm{eq}} = Y_1 + Y_2$

En el cas particular d'una bobina, l'expressió de la seva tensió en funció del temps ve donada per una equació diferencial.

$$v_L(t) = L \cdot \frac{\partial i_L(t)}{\partial t}$$

En definitiva, la notació fasorial no deixa de ser una representació derivada d'aplicar la *transformada de Fourier*. Per això, si derivem el fasor tensió de l'equació diferencial que la realciona amb el corrent través d'una bobina,

$$v = j\omega \cdot L \cdot i \qquad \rightleftarrows \qquad v(t) = \Re\left\{j\omega \cdot L \cdot i \cdot e^{j\omega t}\right\} = L \cdot \frac{\partial i_L(t)}{\partial t}$$

Per inspecció de l'expressió fasorial, i en comparació amb la llei d'ohm, podem concloure que $Z = j\omega \cdot L$. De la mateixa manera, la admitància associada no deixa de ser la inversa de l'expressió de l'impedància que acabem de trobar, $Y = -j\frac{1}{\omega \cdot L}$. D'aquí podem observar, fàcilment, que una bobina afegeix un desfasament en radians de $-\frac{\pi}{2}$ entre la tensió i el corrent.

Per a una **bobina**.

$$Z = j\omega \cdot L$$

$$Y = -j\frac{1}{\omega \cdot L}$$

Per a un **condensador**.

$$Z = -j\frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$Y = j\omega \cdot C$$

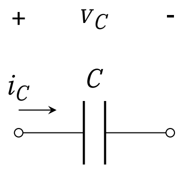
Pel que respecta als condensadors, l'expressió del seu corrent també ve donada per una equació diferencial que el relaciona amb la variació en el temps de la seva tensió.

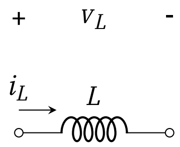
$$i_C = C \cdot \frac{\partial v_C(t)}{\partial t}$$

Fasorialment, si inspeccionem l'expressió com en el cas anterior, trobem que $Y = j\omega \cdot C$. Amb una impedància associada de $Z = -j\frac{1}{\omega \cdot C}$.

$$\Re\left\{i \cdot e^{j\omega t}\right\} = \Re\left\{v \cdot j\omega \cdot Ce^{j\omega t}\right\}$$

A partir de les expressions derivades per a les respectives impedàncies i admitàncies, podem calcular les potències mitjes dissipades en cada component.

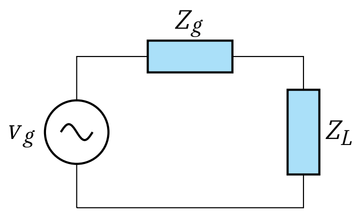




$$\mathrm{P}_C = \Re\{v_C \cdot i_C^*\} =$$

$$\mathrm{P}_L = \Re\{v_L \cdot i_L^*\} = |i_L|^2 \cdot R_L = |v_L|^2 \cdot G_L$$

Per a exemplificar els resultats trobats, farem l'anàlisi d'una malla RL simple, on trobarem la potència subministrada sobre la càrrega inductiva.



$$\mathrm{P}_L = |I_L|^2 \cdot R_L = \frac{|v_g|^2 \cdot R_L}{(R_L + R_g)^2 + (X_L + X_G)^2}$$

La *potència màxima disponible*, és a dir quan es produeixi la màxima transmisió de potència sobre la càrrega, succeeix sempre que es verifica $Z_G = Z_L^*$. D'aquí, podem derivar una expresió per a la potència màxima disponible en funció de la impedància del generador i la tensió que subministra.

$$\mathrm{P}_{\max}\Big|_{\text{eficaç}} = \frac{|v_g|^2}{4 \cdot R_g} \qquad \mathrm{P}_{\max}\Big|_{\text{amplitud}} = \frac{|v_g|^2}{8 \cdot R_g}$$

Definim el *coeficient de desadaptació* com el percentatge de potència dissipada en front a la disponible en un circuit.

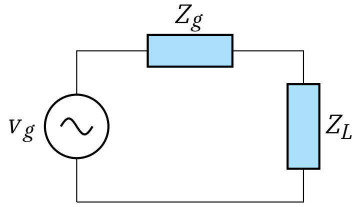
$$\mathrm{C}_d = \frac{\mathrm{P}_L}{\mathrm{P}_{\max}} \cdot 100$$

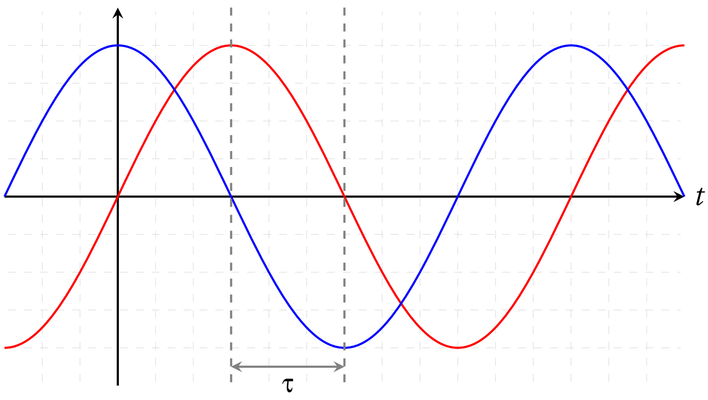
En el cas de la malla anterior, desenvolupant a partir de l'expressió de la potència dissipada sobre Z_L podem arribar a l'expressió del seu coeficient de desadaptació.

$$\mathrm{P}_L = \frac{|v_G|^2 \cdot R_L}{(R_L+R_g)^2+(X_L+X_G)^2} \cdot \frac{4\cdot R_G}{4\cdot R_G} = \mathrm{P}_{\max} \cdot \frac{4\cdot R_L R_G}{(R_L+R_g)^2+(X_L+X_G)^2}$$
$$C_d = \frac{P_L}{P_{\max}} = \frac{4\cdot R_L R_G}{(R_L+R_g)^2+(X_L+X_G)^2}$$

Retard temporal i en fase.

Suposem una malla tancada formada per un sitema amb un generador d'ones sinusoidals, una impedància de generador i una de càrrega.





La tensió que mesurem sobre la càrrega Z_L està retardada respecte la referència del generador.

$$v_G(t) = v_G \cdot \cos(\omega t) \qquad v_L(t) = v_L \cos(\omega t + \phi)$$

De manera que podem derivar, a partir d'una mesura en fase temporal, la fase en radians.

$$\phi = -\omega \cdot \tau$$

Biports.

Relacions logarítmiques.

Atenuació d'un cable.

TEMA II.

LINIES DE TRANSMISIÓ, TRANSITÒRI.

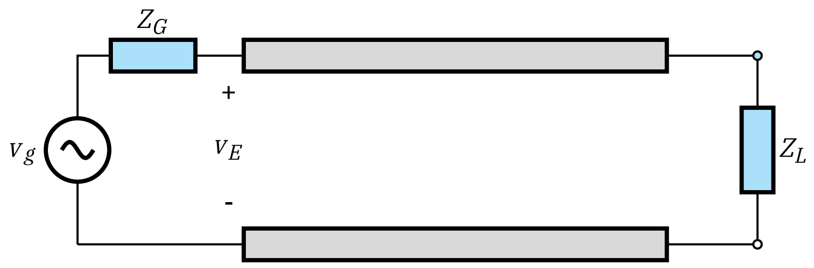
TEMA III.

LINIES DE TRANSMISIÓ EN RPS.

En aquest tema ens fixarem en la resposta d'una linia de transmisió al superar el transistòri, i assumir que treballem en *règim permanent sinusoïdal*.

Equacions del telegrafista. Constant d'atenuació i de fase, impedància característica i altres paràmetres.

Suposem una malla formada per un generador, amb una resistència de generador associada, una linia de transmisió bifilar i una resistència de càrrega.



D'on a priori coneixem les equacions que descriuen els comportaments del senyal en tensió subministrat pel generador, i l'expressió general per a la tensió i corrent d'un punt arbitràri de la linia de transmisió a partir dels resultats que ja hem derivat per a fasors.

$$v_G(t) = \Re\left\{v_G \cdot e^{j\omega t}\right\} = v_G \cdot \cos\left(\omega t + \phi_G\right)$$

$$v(z,t) = \Re\left\{v(z) \cdot e^{j\omega t}\right\} \qquad i(z,t) = \Re\left\{i(z) \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

L'anàlisi a partir de les *lleis de Kirchoff* de la malla circuital deriva en un parell d'equacions diferencials anomenades *equacions del telegrafista*.

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = R \cdot i(z,t) + L \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G \cdot v(z,t) + C \cdot \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

Prenent la primera equació diferencial, i aplicant sobre ella la definició a partir de l'expresió fasorial, podem derivar la relació fasorial entre la compoent de tensió i corrent.

Diem que Z és la impedància per unitat de longitud.

$$\Re\left\{-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right\} = \Re\left\{R \cdot i(z) e^{j\omega t} + j\omega \cdot L \cdot i(t) e^{j\omega t}\right\}$$

$$-\frac{\partial v(z)}{\partial z} = \left(R + j\omega L\right) \cdot i(z) = Z \cdot i(z)$$

L'equació resultant és una altre diferencial, però que en aquest cas ens relaciona tensió i corrent a nivell fasorial a partir de la impedància de la linia. La mateixa realació, per a la admitància en aquest cas, podem derivar aplicant la definició de fasor a la segona equació diferencial.

Diem que Y és la admitància per unitat de longitud.

$$\Re\left\{-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right\} = \Re\left\{R \cdot i(z) e^{j\omega t} + j\omega \cdot L \cdot i(t) e^{j\omega t}\right\}$$

$$-\frac{\partial v(z)}{\partial z} = \left(R + j\omega L\right) \cdot i(z) = Z \cdot i(z)$$

Aquest parell d'equacions diferencials que hem derivat són *acoblades*, i diem que són les *equacions del telegrafistra* en el domini fasorial. Prenent ara la derivada respecte de z en el parell d'equacions diferencials acoblades, i substituint en la segona equació.

$$\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = Z \cdot Y \cdot v(z) = \gamma^2 \cdot v(z)$$

Diem que $\gamma \left[\mathrm{m}^{-1}\right]$ és la constant de propagació de les ones en la linia de transmisió.

$$\gamma = \sqrt{Z \cdot Y} = \sqrt{(R + j\omega L)^2 (G + j\omega C)^2}$$

Podem fraccionar la constant de propagació en dos termes, corresponents als mòduls de les respectives parts real i imaginària.

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$\alpha \longrightarrow$ constant d'atenuació $\left[\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}\right]$

$\beta \longrightarrow$ constant de fase $\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}\right]$

La solució de les *equacions del telegrafista* en el domini fasorial,

$$v(z) = v^+(z) + v^-(z) = v_0^+ \cdot e^{-j\gamma z} + v_0^- \cdot e^{j\gamma z}$$
$$i(z) = i^+(z) + i^-(z) = i_0^+ \cdot e^{-j\gamma z} + i_0^- \cdot e^{j\gamma z}$$

Si ens fixem en la solució per a la corrent en la linia de transmisió, podem derivar una realació biunívoca entre senyal en corrent i tensió per a qualsevol punt en la linia.

$$i^+(z) + i^-(z) = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial v(z)}{\partial z} = -\frac{1}{Z}\left[\frac{\partial v^+(z)}{\partial z} + \frac{\partial v^-(z)}{\partial z}\right] =$$
$$= \frac{\gamma}{Z}\left[v^+(z) - v^-(z)\right]$$

Comparant per a cada component.

$$v^+(z) = \frac{Z}{\gamma} i^+(z)$$
$$v^-(z) = -\frac{Z}{\gamma} i^-(z)$$

Definim, per analogia amb la *llei d'ohm*, la *impedància característica* d'una linia de transmisió com el quocient entre la impedància per unitat de longitud i la constant de propagació.

$$Z_0 = \frac{Z}{\gamma} = \frac{Z}{\sqrt{Z \cdot Y}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

Prenent les parts reals de les expressions fasorials per a les expresions dels senyals en tensió i corrent, en funció dels paràmetres que hem derivat, podem trobar l'expressió general dels senyals en funció de l'espai i temps.

$$v(z,t) = \Re\left\{\sqrt{2}\left[\left|v_0^+\right| \cdot e^{j\phi_0^+} e^{-\alpha \cdot z} e^{-j\beta \cdot z} e^{j\omega t} + |v_0|^- e^{j\phi_0^-} e^{\alpha \cdot z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right]\right\} =$$
$$= \sqrt{2}\left|v_0^+\right| e^{-\alpha \cdot z} \cos\left(\omega t - \beta z + \phi_0^+\right) + \sqrt{2}\left|v_0^-\right| e^{\alpha \cdot z} \cos\left(\omega t + \beta z + \phi_0^-\right)$$

Linies de transmisió sense pèrdues.

Aquest tipus de linies són aquelles que considerem con el cas ideal, en que assumim que no tenim càrregues resistives en el model de linia de transmisió. Per tant, tot el que correspon a la linia pròpiament són comportaments capacitius i inductius, això ens permet particularitzar les expressions de la *constant d'atenuació*.

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \longrightarrow \alpha = 0 \qquad \beta = a\sqrt{LC}$$

La velocitat de propagació correspon a,

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Linies de transmisió de baixes pèrdues.

En aquest cas considerem una expressió de la constant de propagació formada tant per resistivitats, i components capacitives i indicutives.

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{R}{j\omega L}\right)\left(1+\frac{G}{j\omega C}\right)} \approx$$

Les condicions de baixes pèrdues,

$$\frac{R}{\omega\cdot L} << 1$$

$$\frac{G}{\omega\cdot C} << 1$$

Aplicant una aproximació per Taylor de segon ordre.

$$\approx j\omega\sqrt{LC}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{j\omega L}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{G}{j\omega C}\right) \approx$$

Aplicant les condicions de linia de transmisió de baixes pèrdues, desapareixen els termes de segon ordre.

$$\approx j\omega\sqrt{LC} + \frac{1}{2}\frac{R\sqrt{LC}}{j\omega L} + \frac{1}{2}\frac{G\sqrt{LC}}{C\cdot L} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{2}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} + j\omega\sqrt{LC}$$

Per tant, en condicions de baixes pèrdudes podem particularitzar les expresions tant de la constant de fase com la d'atenuació, diferenciant en pèrdues del dielèctric i del conductor.

$$\beta_{\text{baixes pèrdues}} \approx \beta_{\text{ideal}} = \omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha_{\text{baixes pèrdues}} = \alpha_C + \alpha_D$$

$$\alpha_C = \frac{R}{2\cdot Z_{\text{o ideal}}}$$

$$\alpha_D = \frac{G\cdot Z_{\text{o ideal}}}{2}$$

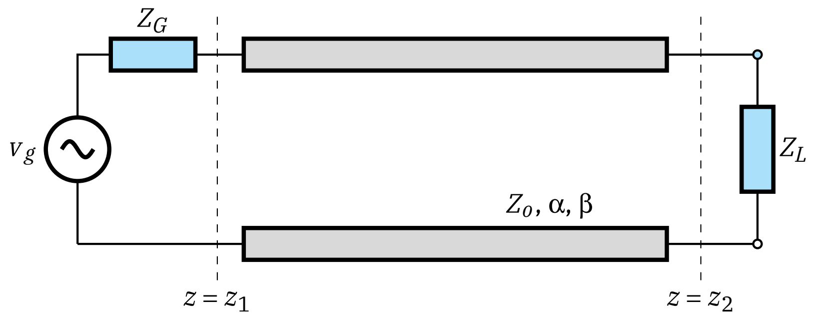
Per la velocitat de propagació i la impedància característica,

$$v_p = v_{\text{p ideal}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_{\text{o baixes pèrdues}} \approx Z_{\text{o ideal}}$$

Circuits en RPS amb linies de transmisió.

Assumim una malla formada per un generador, ia la seva respectiva impedància de generador associada, una linia de tranmisió i una càrrega.



De la resolució de les equacions del telegrafista,

$$v(z) = v_o^+ e^{-\gamma\cdot z} + v_o^- e^{\gamma\cdot z}$$

$$i(z) = \frac{v^+(z)}{Z_o} - \frac{v^-(z)}{Z_o}$$

Definim el *coeficient de reflexió* en una *linia de transmissió* com el quocient entre el valor dels senyals que es propaguen cap al generador amb el valor dels senyals que es propaguen cap a la càrrega.

$$\rho(z) = \frac{v^-(z)}{v^+(z)}$$

ANOTACIÓ

A diferència de la definició en l'estudi del transitòri en una linia de tranmisió, el coeficient de reflexió en aquest cas no té un significat físic. Únicament representa la relació analítica.

Podem desenvolupar la expresió pel coeficient expandint a partir de les expresions fasorials per a cada component del senyal $v(z)$.

$$\rho(z) = \frac{V_o^- \cdot e^{\gamma \cdot z}}{V_o^+ \cdot e^{-\gamma \cdot z}} = \frac{V_o^-}{V_o^+} \cdot e^{2\gamma \cdot z} = \rho(0) \cdot e^{2\gamma \cdot z}$$

A partir del coeficient, podem donar les expresions dels senyals en tensió i corrent per a qualsevol punt de la linia de transmissió.

$$v(z) = v^+(z) \cdot (1 + \rho(z)) \qquad i(z) = \frac{v^+(z)}{Z_o} \cdot (1 - \rho(z))$$

Un resultat interessant per a calcular el valor del coeficient de reflexió, és donar una expresió per al cálcul del coeficient en un punt arbitràri a partir del seu valor en un altre.

$$\rho(z_1) = \rho(0) \cdot e^{2\gamma \cdot z_1}$$
$$\rho(z_2) = \rho(0) \cdot e^{2\gamma \cdot z_2}$$

prenent el quocient d'ambdues expresions,

$$\rho(z_1) = \rho(z_2) \cdot e^{-2\gamma(z_2 - z_1)}$$

En alguns problemes voldrem calcular la impedància d'entrada a una linia de transmissió. Per això, derivem l'expresió per a la impedància d'entrada en funció del seu coeficient.

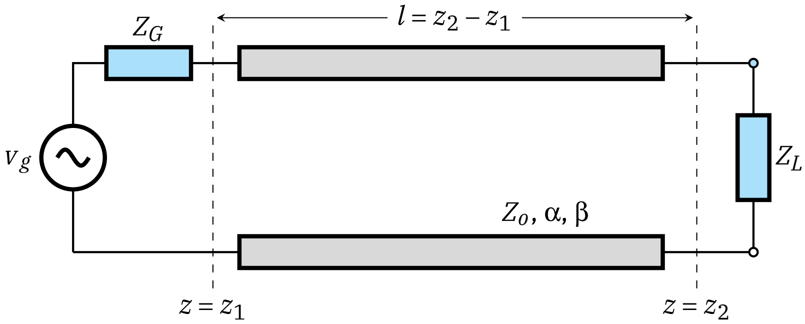
$$\rho(z_L) = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \qquad \rho_E(z_1) = \rho_L \cdot e^{-2\gamma \cdot (z_L - z_1)}$$

De manera que finalment, l'expresió de la impedància d'entrada manté la mateixa relació algebraica que en el cas de l'anàlisi que vam fer per a l'estudi del transistòri.

$$Z_E = Z_o \cdot \frac{1 + \rho_E}{1 - \rho_E}$$

Tensions i corrents en una linia de transmisió.

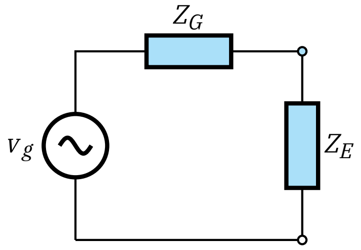
Assumim una malla formada per un generador, amb la seva respectiva impedància associada, una linia de transmisió bifilar i una càrrega Z_L.



De la resolució de les equacions del telegrafista,

$$v(z) = v_o^+ e^{-\gamma \cdot z} + v_o^- e^{\gamma \cdot z}$$
$$i(z) = \frac{v^+(z)}{Z_o} - \frac{v^-(z)}{Z_o}$$

Podem calcular la tensió d'entrada en el pla $z = z_1$ substituint la *linia de transmisió* per la seva impedància d'entrada, derivant un circuit equivalent al d'un divisor de tensió.



$$V_E = V_G \cdot \left(\frac{Z_E}{Z_E + Z_G} \right)$$

ANOTACIÓ

Aquest coeficient torna a no tenir cap significat físic, és únicament una relació aritmètica per a simplificar la notació.

Definim el *coeficient de reflexió* del generador a partir de la seva impedància.

$$\rho_G = \frac{Z_G - Z_o}{Z_G + Z_o} \qquad Z_G = Z_o \cdot \frac{1 + \rho_G}{1 - \rho_G}$$

A partir d'aquest anàlisi a l'entrada de la linia de transmisió, podem derivar l'expresió per al càlcul de $v^+(z_1)$ a partir de la tensió del generador i els coeficients de reflexió d'entrada i del pròpi generador.

$$v^+(z_1) = v_G \cdot \frac{Z_o \cdot \frac{1+\rho_E}{1-\rho_E} \frac{1}{1+\rho_E}}{Z_o \cdot \frac{1+\rho_E}{1-\rho_E} + Z_o \cdot \frac{1+\rho_G}{1-\rho_G}} = \frac{1}{2} V_G \cdot \frac{1 - \rho_G}{1 - \rho_G \rho_E}$$

Per tant, a partir de l'expressió que coneixem de $v^+(z_1)$, podem derivar v_o^+ a partir de l'observació de la component del senyal a l'entrada.

$$v^+(z_1) = v_o \cdot e^{-\gamma \cdot z_1} \quad \longrightarrow \quad v_o^+ = v^+(z_1) \cdot e^{\gamma \cdot z_1}$$

D'igual manera que hem fet amb els altres paràmetres, podem derivar una expresió per al càlcul de la tensió $v^+(z)$ en un punt arbitràri de la linia z_2, a partir de l'observació en un d'altre z_1.

$$v^+(z_1) = v_o^+ \cdot e^{-\gamma \cdot z_1}$$
$$v^+(z_2) = v_o^+ \cdot e^{-\gamma \cdot z_2}$$

prenent el quocient d'ambdues expresions,

$$v^+(z_2) = v^+(z_1) \cdot e^{-\gamma(z_2 - z_1)}$$

És interessant, també, estudiar alguns casos per a configuracions particulars de la impedància de càrrega i de la impedància del generador.

- **Càrrega adaptada.** En aquest cas coneixem que $Z_L = Z_o$, per tant el coeficient de reflexió sobre la càrrega com ja hem vist serà $\rho_L = 0$. Això implica que per a qualsevol z de la linia de transmisió, tindrem $\rho(z) = 0$, per tant $v^-(z)$.

  $$v^+(z_1) = \frac{1}{2} \cdot v_G (1 - \rho_G) = v_G \cdot \frac{Z_o}{Z_o + Z_G}$$

  També es verifica per a la impedància de la linia de transmisió,

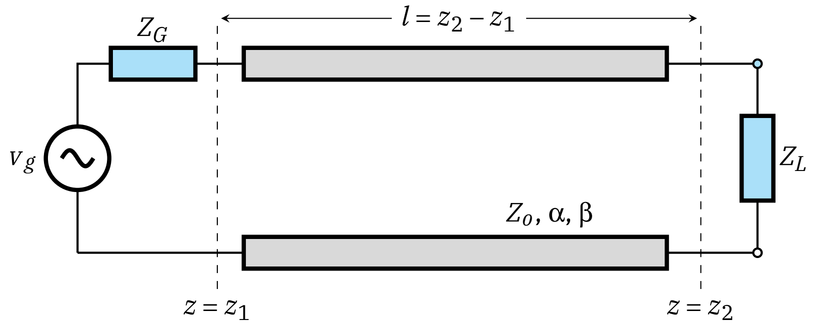
  $$Z(z) = Z_o \quad \forall z$$

- **Generador canònic.** Per a aquesta configuració, tenim $Z_G = Z_o$. Això implica que el coeficient de reflexió sobre el generador és nul, $\rho_G = 0$. En aquest cas no podem assegurar $v^-(z) = 0$, però sí que l'expressió de la tensió a l'entrada,

  $$v^+(z_1) = \frac{1}{2} \cdot v_G$$

Càlcul de potència.

Considerem una malla formada per un generador tensió sinusoïdal, un impedància associada, una linia de transmissió bifilar i una càrrega.



De la resolució de les equacions del telegrafista,

$$v(z) = v^+(z) \cdot \left(1 + \rho(z)\right)$$
$$i(z) = \frac{v^+(z)}{Z_o} \cdot \left(1 - \rho(z)\right)$$

En aquesta secció estudiem el càlcul de la potència en la linia de transmissió per a qualsevol pla $z = z_i$.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z) &= \Re\left\{v(z) \cdot \overline{i(z)}\right\} = \Re\left\{v^+\left(1 + \rho(z)\right)\frac{\overline{v^+(z)}}{Z_o}\left(1 - \overline{\rho(z)}\right)\right\} = \\ &= \frac{\left|v^+(z)\right|^2}{Z_o} \cdot \left(1 - \left|\rho(z)\right|^2\right) = \frac{\left|v^+(z)\right|^2}{Z_o} - \left|\rho(z)\right|^2 \frac{\left|v^+(z)\right|^2}{Z_o} = \\ &= \frac{\left|v^+(z)\right|^2}{Z_o} - \frac{|v^-(z)|^2}{Z_o} = P^+(z) - P^-(z)\end{aligned}$$

Descomposant cada component de la potència.

$$\mathrm{P}^+(z) = \frac{\left|v^+(z)\right|^2}{Z_o} \cdot e^{-2\alpha \cdot z} = \mathrm{P}^+\left(z = 0\right) \cdot e^{-2\alpha \cdot z} \qquad \mathrm{P}^-(z) = \frac{|v^-(z)|^2}{Z_o} \cdot e^{2\alpha \cdot z} = \mathrm{P}^-\left(z = 0\right) \cdot e^{2\alpha \cdot z}$$

De cara a l'anàlisi, farem incís en dos casos particulars.

- **Linia de transmissió amb pèrdues i adaptada.** Com hem vist en el cas anterior, per a linies adaptades no tenim reflexió sobre la càrrega, $\rho_E = 0$. Això implica aleshores que necessàriament $\mathrm{P}^-(z) = 0 \ \forall z$. La potència que dissiparem serà íntegrament derivada de la component de propagació cap a la càrrega.

  $$\mathrm{P}(z) = \mathrm{P}^+(z) = \mathrm{P}^+\left(z = 0\right) \cdot e^{-2\alpha \cdot z}$$

  Prenent el parell d'equacions format per l'avaluació de la potència en dos punts, z_1 i z_2. Podem derivar el càlcul de la potència en un punt arbitràri, per a la observació en un altre.

  $$\mathrm{P}\left(z_2\right) = \mathrm{P}\left(z_1\right) \cdot e^{-2\alpha(z_2 - z_1)}$$

- **Linia de tranmisió ideal.** En el cas ideal de la linia de transmissió, tenim $\alpha = 0$.

  $$v(z) = \left|v^+(z)\right| \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

  El mòdul $\left|v^+(z)\right|$ és constant, ja que no tenim atenuació present en la linea.

  $$v(z) = \left|v_o^+\right| \cdot e^{-j\beta \cdot z} \qquad \mathrm{P}(z) = \mathrm{P}(0) \cdot e^{2j\beta \cdot z} \Rightarrow |\mathrm{P}(z)| = \left|\mathrm{P}(0)\right| \quad \forall z$$

- **Linia de transmissió amb generador canònic.** En aquest cas tenim $Z_G = Z_o$, i ja hem demostrat la potència dissipada sobre la càrrega serà la disponible.

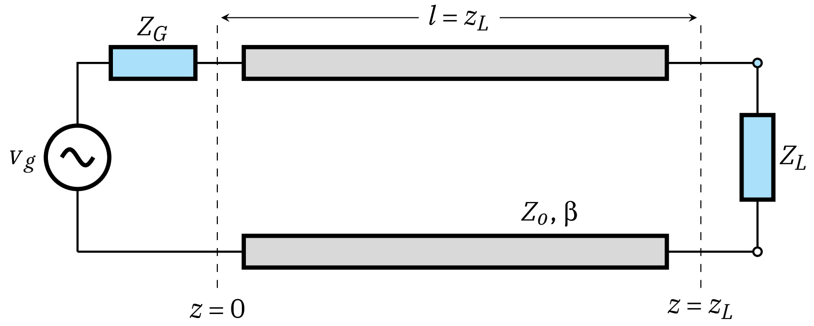
  $$\mathrm{P}_{\text{disp}} = \frac{\left|V_G\right|^2}{4 \cdot Z_o}$$

En general, es verifica que:

$$\mathrm{P}(z) = \mathrm{P}^+(z) \cdot \left(1 - \left|\rho(z)\right|^2\right)$$
$$\mathrm{P}^+(z) = \frac{\left|v^+(z)\right|^2}{Z_o} = \mathrm{P}^+$$

Circuits en règim permanent sinusoïdal amb linies de transmisió en el cas ideal, sense pèrdues.

En aquesta secció estudiem les linies de tranmisió en el cas ideal, quan no tenim pèrdues. Per a l'estudi, suposem una malla formada per un generador d'ones sinusoidals, amb la seva impedància associada, una linia de transmisió bifilar sense pèrdues i una càrrega.



Podem derivar el càlcul del coeficient de reflexió per a un punt arbitràri en la linia de transmisió, en funció del valor a l'origen, i la constant de fase.

$$\rho(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \rho(0)e^{j2\beta\cdot z} = \rho(0)e^{j\frac{4\pi}{\lambda}\cdot z} = \rho(0)\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\cdot z\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}\cdot z\right)\right)$$

A partir de l'expresió del coeficient de reflexió, i de les expresions que ja hem derivat prèviament per a les tensions i potències en el cas ideal, podem estudiar la periodicitat dels paràmetres. Això és especialment útil, ja que ens permet relacionar la longitud física de la linia de transmisió, amb la seva longitud elèctrica a partir d'observacions experimentals dels paràmetres de la linia.

$$\frac{4\pi}{\lambda}\Delta z = 2\pi\cdot n \quad\Rightarrow\quad \Delta z = \frac{\lambda\cdot n}{2}$$

El coeficient de reflexió en el cas ideal és una funció periòdica, que es repeteix cada $\Delta z = \frac{\lambda}{2}$. Si estudiem el cas de la impedància en un punt arbitràri de la linia de transmisió, a partir de l'expresió que hem derivat anteriorment.

$$Z(z) = Z_o\cdot\frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$$

També té periodicitat $\frac{\lambda}{2}$. Per al fasor de tensió i corrent, estudiem la seva periodicitat a partir de la representació a partir del coeficient de reflexió.

$$V^+(z_2) = V^+(z_1)\cdot e^{-j\beta(z_2-Z_1)} = V^+(z_1)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta z} = V^+(z_1)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z\right)\right)$$

En aquest cas, el fasor tensió i corrent és una funció periòdica que es repeteix cada $\Delta z = \lambda$. Aquest resultat és redundant en la pròpia definició de la longitud d'ona, que com hem dit abans és precisament la distància entre dos punts amb el mateix valor consecutius. Ara bé, la periodicitat del mòdul és $\frac{\lambda}{2}$.

Representació gràfica del coeficient de reflexió.

La representació del coeficient de reflexió és un mètode gràfic d'estudi del comportament del coeficient en funció de la posició en la linia, trauïda en una fase. Per això, utilitzem un eix coordenat complex, on acotarem tant el mòdul com la fase i el recorregut del coeficient en el pla en funció de l'angle.

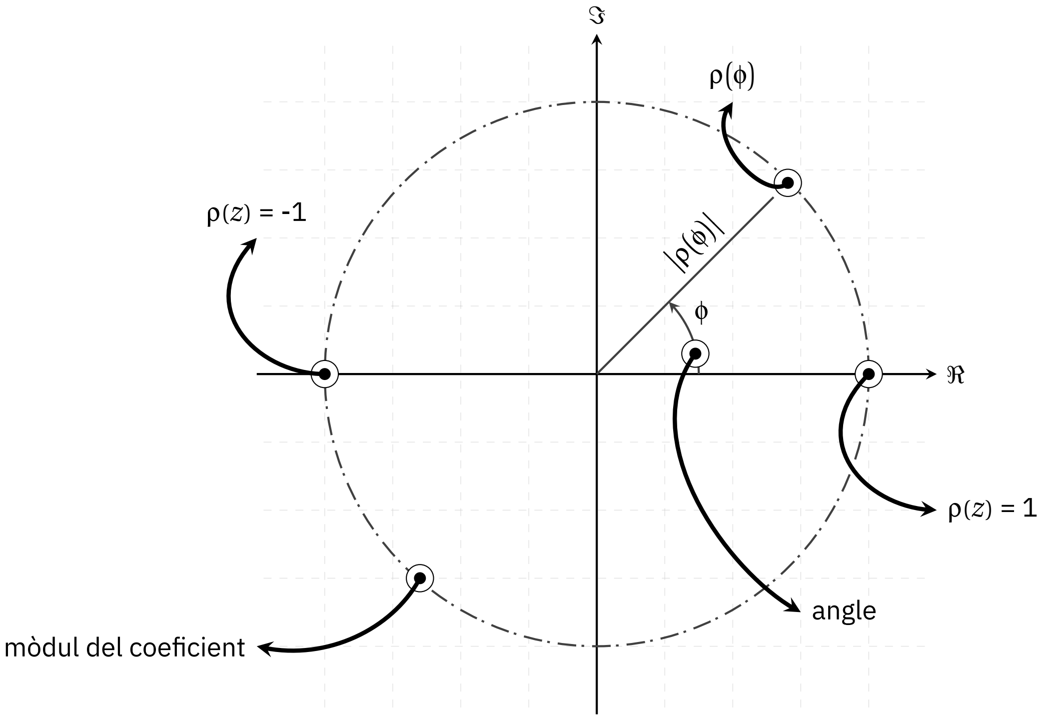
$$\rho(z_1) = |\rho_L|\cdot e^{J\phi_1} = |\rho_L|\cdot e^{-j\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\Delta z} \quad\Rightarrow\quad \phi_1 = \phi_L - \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\Delta z$$

A partir d'aquesta expresió, establim una relació biunívoca entre el desplaçament sobre la linia de transmisió i la fase associada al coeficient de reflexió. Podem veure també aquest desplaçament traduït en termes de λ, és a dir la longitud elèctrica de la linia.

ANOTACIÓ

Conversió de desplaçament en termes de z a radians,

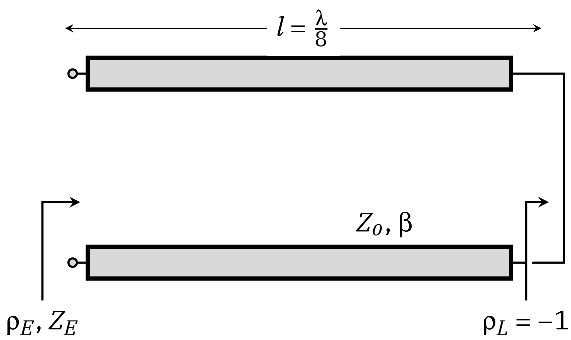
$$z = \Delta\phi \cdot \frac{\lambda}{4\pi}$$



Impedència d'entrada d'una linia de transmisió ideal.

En aquesta secció estudiem com determinar la resistència d'entrada d'una linia de transmisió ideal, és a dir sense pèrdues.

Suposem una linia de transmisió ideal, de longitud elèctrica $l = \frac{\lambda}{8}$ i curtcircuitada al final.



Determinem el coeficient d'entrada de la linia,

$$\rho_E = \rho_L \cdot e^{-j\frac{4\pi}{\lambda}\cdot l} = -e^{-j\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{8}} = j$$

Gràficament també ho podem determinar,

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{2}$$

ANOTACIÓ

Per a altres longituds,

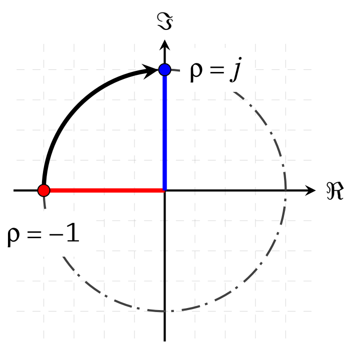
$$n \cdot \frac{\lambda}{2} \longrightarrow Z_E = Z_L$$

$$\frac{\lambda}{4} \longrightarrow Z_E = \frac{Z_o^2}{Z_L}$$

De manera que partir de ϕ_L, amb una fase associada de π, retrocedim $\frac{\pi}{2}$, per tant $\phi = \frac{\pi}{2}$ que correspon a $\rho(\phi) = j$.

Podem determinar la impedància d'entrada en funció de la característica,

$$Z_E = Z_o \cdot \frac{1+\rho_E}{1-\rho_E} = j \cdot Z_o$$



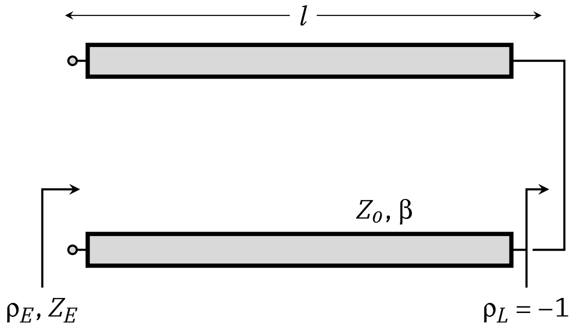
De manera genèrica, podem derivar una expressió per a la obtenció de la impedància d'entrada com a funció de la constant de fase, la impedància característica, la impedància de càrrega i la longitud elèctrica de la linia de transmisió.

$$Z_E = Z_o \cdot \frac{1+\rho_L e^{-j2\beta\cdot l}}{1-\rho_L e^{-j2\beta\cdot l}} = Z_o \cdot \frac{e^{j\beta\cdot l}+\rho_L e^{-j\beta\cdot l}}{e^{j\beta\cdot l}-\rho_L e^{-j\beta\cdot l}} = Z_o \cdot \frac{Z_L + jZ_o \tan(\beta\cdot l)}{Z_L + jZ_L \tan(\beta\cdot l)}$$

Fabricació d'una càrrega reactiva a partir d'una linia de transmisió ideal (STUB).

En el cas de les bobines i els condensadors, a mesura que augmentem la freqüència apareixeran elements paràsits en la linia de transmisió que ens modificaran el seu comportament. Podem aprofitar això per a fabricar càrregues a partir de linies de transmisió. Analitzarem dos casos particulars.

- **Linia de transmisió ideal en curtcircuit.** Suposem una linia de transmisió ideal, amb impedància característica Z_o i constant de fase β, acabada en curtcircuit, $Z_L = 0$.

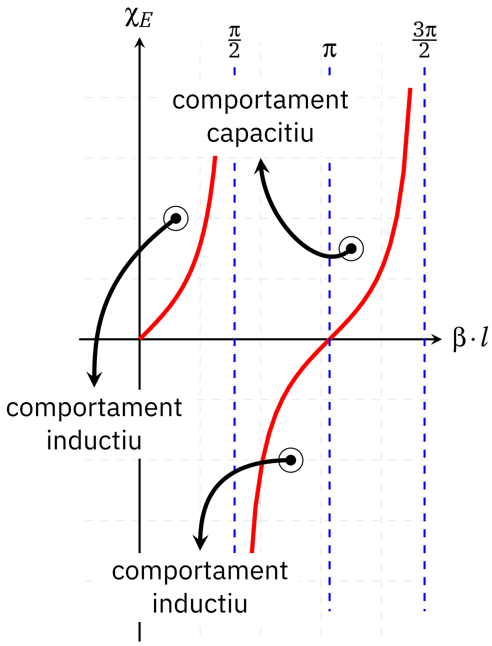


$$Z_E = j \cdot \chi_E \Big|_{\chi_E = Z_o \cdot \tan(\beta l)}$$

ANOTACIÓ

Com Z_E és imaginaria $\forall\ \beta\cdot l$, aleshores necessàriament χ_E és la part reactiva de la impedància d'entrada.

Representant la impedància d'entrada en funció de χ_E.



Podem expressar el producte en termes de λ,

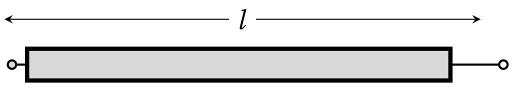
$$\beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l$$

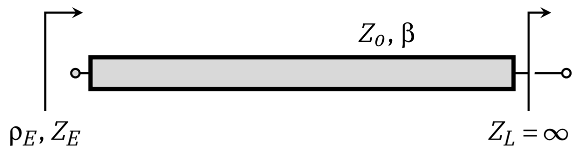
En cada tram, en funció de λ:

- $0 \le l < \frac{\lambda}{4}$ comportament indictiu
- $l = \frac{\lambda}{4}$ comportament circuit obert
- $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ comportament capacitiu
- $l = \frac{\lambda}{2}$ comportament circuit obert

El comportament es repeteix de manera periòdica cada $\frac{\lambda}{2}$.

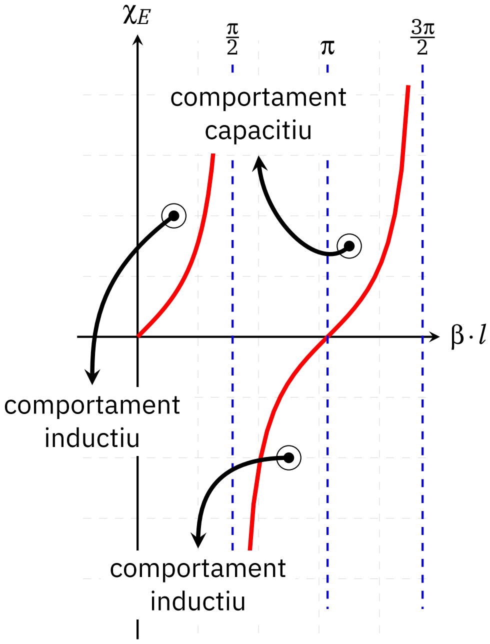
- **Linia de transmisió ideal en circuit obert.** Suposem una linia de transmisió ideal, amb impedància característica Z_o i constant de fase β, acabada en curtcircuit, $Z_L = 0$.





$$Z_E = j \cdot \chi_E \Big|_{\chi_E = Z_o \cdot \tan(\beta l)}$$

Representant la impedància d'entrada en funció de χ_E.



Podem expressar el producte en termes de λ,

$$\beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l$$

En cada tram, en funció de λ:

- $0 \leq l < \frac{\lambda}{4}$ comportament indictiu
- $l = \frac{\lambda}{4}$ comportament circuit obert
- $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ comportament capacitiu
- $l = \frac{\lambda}{2}$ comportament circuit obert

El comportament es repeteix de manera periòdica cada $\frac{\lambda}{2}$.

Ona estacionaria en una linia de transmisió

En aquellaquesta secció estudiem el patró d'interferències generat en una linia de transmisió. Prenent el mòdul del senyal a la linia en tensió, a partir de l'expresió que hem derivat com a funció del coeficient de reflexió.

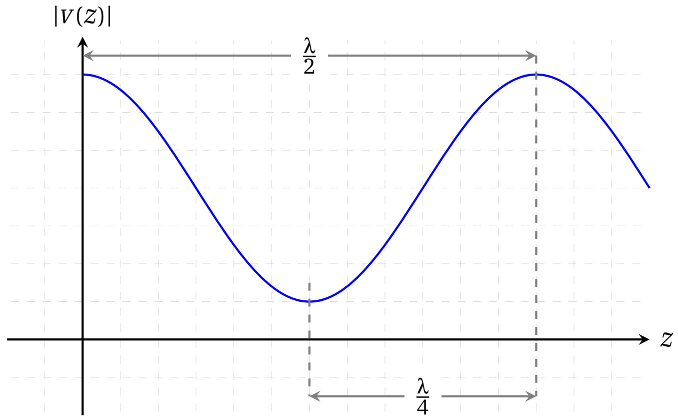
$$\begin{aligned}
|v(z)| &= |v^+(z)||1 + \rho(z)| = \left|v^+(z) \cdot \left(1 + \rho_L \cdot e^{j2\beta(z - z_L)}\right)\right| = \\
&= |v^+(z)||1 + \rho_L \cdot [\cos(2\beta(z - z_L)) + j\sin(2\beta(z - z_L))]| = \\
&= |v^+(z)| \cdot \sqrt{(1 + |\rho_L|\cos(2\beta(z - z_L)))^2 + \sin^2(2\beta(z - z_L)) \cdot |\rho_L|^2} = \\
&= |v^+(z)| \cdot \sqrt{1 + 2|\rho_L|\cos(2\beta(z - z_L)) + |\rho_L|^2\left(\cos^2(2\beta(z - Z_L)) + \sin^2(2\beta(z - z_L))\right)} = \\
&= |v^+(z)| \cdot \sqrt{1 + 2|\rho_L|\cos(2\beta(z - z_L)) + |\rho_L|^2}
\end{aligned}$$

De la mateixa manera, desenvolupant per al mòdul del fasor corrent.

$$|i(z)| = \frac{|v^+(z)|}{Z_o} \cdot \sqrt{1 + 2|\rho_L|\cos(2\beta(z - z_L)) + |\rho_L|^2}$$

El patró d'interferència resultant entre el conjunt d'ones propagades en direcció la càrrega i direcció el generador resulta en una ona estacionaria.

- **Linia de transmisió ideal adaptada.** Per a aquesta configuració coneixem ja que $\rho(z) = 0 \quad \forall z$, per tant no tenim component reflexada. De manera que en aquest cas no es produïrà ona estacionaria, i en concret tindrem $|V(z)| = |V_0^+| \quad \forall z$, d'igual manera per al fasor corrent $|i(z)| = \frac{|V_0^+|}{Z_0} \quad \forall z$.
- **Linia de transmisió ideal amb càrrega $Z_L \neq Z_0$.** En aquest cas hem vist que es generarà un patró d'interferència en la linia de transmisió, que implica la presència d'una ona estacionaria en la linia.



Relació d'ona estacionaria, pèrdues per retorn i impedàncies normalitzades.

La *relació d'ona estacionaria* (ROE) és un paràmetre experimental que ve donat pel quocient entre el valor màxim i mínim mesurat en un patró d'interferència d'una ona estacionaria.

$$\text{ROE} = \frac{|V_{\text{max}}|}{|V_{\text{min}}|} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

A partir de les cotes de la ROE podem determinar els comportaments extrems de la linia de transmisió.

Es defineix el paràmetre de pèrdues per retorn, ò RL per les seves sigles en anglès, com el quocient de potències creuades.

$$\text{RL} = \frac{\text{P}^+}{\text{P}^-} = \frac{1}{|\rho_L|^2}$$

Al tractar-se d'una relació de potències, podem expressar aquest paràmetre també en decibels, simplement prenent $\text{RL}_{dB} = -20 \cdot \log_{10} |\rho_L|$.

En alguns casos particulars, però, podem derivar-ne resultats concrets d'aquest paràmetre. Si disposem d'una càrrega adaptada, coneixem que $|\rho_L| = 0$ i per tant necessàriament $\text{RL} \longrightarrow \infty\text{dB}$, totes les pèrdues de la linia es produeixen en el retorn. Si tenim una linia completament desadaptada, és a dir $|\rho_L| = 1$, el coeficient de pèrdues per retorn aleshores $\text{RL} \longrightarrow 0\text{dB}$, per tant totes les pèrdues es produeixen per retorn.

Definim la *impedància normalitzada* d'un circuit com el quocient entre la impedància en un punt z, i la impedància característica associada a la linia de transmisió.

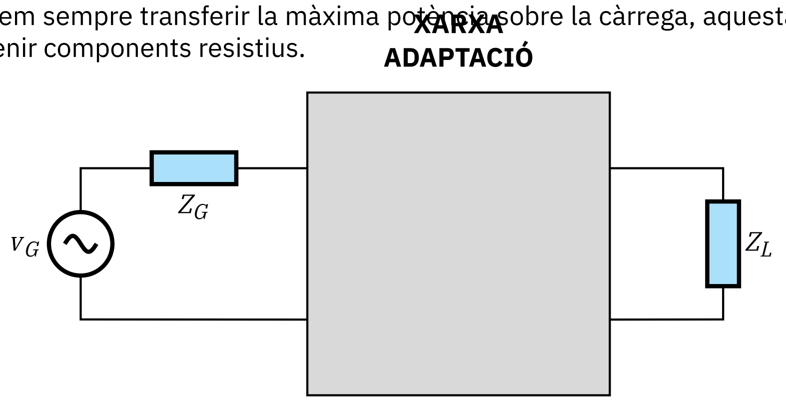
$$\overline{Z}(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \qquad \overline{Y}(z) = \frac{Z_0}{Z(z)} = \frac{1 - \rho(z)}{1 + \rho(z)}$$

Mesures d'impedància.

Adaptació de linies de transmisió.

En aquesta secció estudiarem alguns dels mètodes emprats per a adaptar linies de transmisió.

En una malla general, sempre es proudïrà màxima transmisió de potència quan $Z_G = \overline{Z_L}$. Però no sempre tindrem la impedància de càrrega en aquestes condicions, per a això haurem d'afegir una *xarxa d'adaptació*, és a dir un biport, a l'entrada de la linia de transmisió. Com busquem sempre transferir la màxima potència sobre la càrrega, aquesta xarxa mai podrà contenir components resistius.



TEMA IV.
GUIES D’ONA CONDUCTORES

TEMA V.
ANTENES