

CAPÍTULO 11

Espacio afín. Transformaciones afines y movimientos

11.1 Espacio afín y espacio afín métrico

Definición 11.1 *El espacio afín (tridimensional) está constituido por los siguientes elementos.*

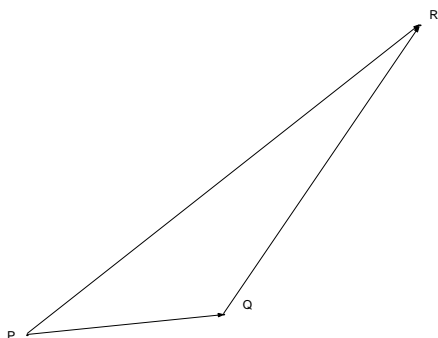
- *El espacio vectorial \mathbb{R}^3*
- *Un conjunto E_3 a cuyos elementos se les llama puntos, y que se denomina espacio puntual.*
- *Una aplicación, a la que se le denomina afinidad, que a cada par de puntos (P, Q) le asigna un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, que se denota $\vec{v} = \vec{PQ}$, denominándose origen de \vec{v} al punto P y extremo de \vec{v} a Q . Además al vector \vec{v} así definido se le designa como vector de posición de Q respecto del punto P .*

y todo ello de manera que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- *Para cada punto $P \in E_3$ y cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, existe un único $Q \in E_3$ que satisface $\vec{v} = \vec{PQ}$.*
- *Dados tres puntos P, Q , y $R \in E_3$, se tiene $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$.*

La primera conclusión de este resultado es que $\vec{v} = \vec{PP} = \vec{0}$, pues $\vec{PP} + \vec{PQ} = \vec{PQ}$ y el elemento neutro de la suma de vectores es $\vec{0}$. Por otra parte, \vec{PQ} con $Q \neq P$ es distinto de $\vec{0}$ porque hemos visto que $PP = \vec{0}$, y el extremo que produce ese vector dado con ese origen dado ha de ser único.

La segunda es que $\vec{PQ} = -\vec{QP}$ pues $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \vec{0}$



Al espacio afín así definido se le suele denotar simplemente como E_3 , o E_2 si consideramos el plano.

Definición 11.2 *El espacio afín E_3 (o E_2) recibe el nombre de espacio afín euclídeo o espacio métrico, si se ha definido en el espacio vectorial un producto escalar.*

En este caso el concepto de distancia entre puntos se hereda de las definiciones de distancia y norma en el espacio euclídeo:

Dados dos puntos P, Q de E_3 , su distancia es

$$\text{dist}(P, Q) = \| \vec{PQ} \|$$

Esta definición de distancia goza de las propiedades de la distancia que se conocen de geometría elemental.

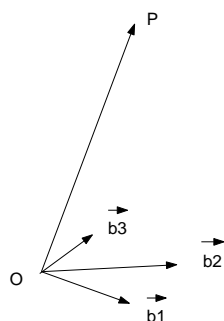
$$\text{dist}(P, Q) = 0 \text{ si y sólo si } P = Q$$

$$\text{dist}(PQ) = \text{dist}(QP)$$

$$\text{dist}(PQ) + \text{dist}(QR) \leq \text{dist}(PR)$$

11.2 Sistema de referencia afín. Coordenadas

Definición 11.3 *Dado un punto origen $O \in E_3$ y una base de \mathbb{R}^3 , $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, se dice que $\{O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es un **sistema de referencia** o **sistema de coordenadas** de E_3 . Cuando la base es ortonormal la referencia se denomina **cartesiana** o **rectangular**. Se definen las **coordenadas** de un punto $P \in E_3$ respecto a dicha referencia como las coordenadas del vector \vec{OP} en la base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.*



Consideremos la base canónica de \mathbb{R}^3 y el origen O , formando el sistema de referencia $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Las coordenadas de O son $(0, 0, 0)$, pues \vec{OO} tiene coordenadas nulas en cualquier base de \mathbb{R}^3 .

Dado un punto P , el vector en correspondencia con el par (O, P) es el vector \vec{p} . Si $\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$ diremos que (p_1, p_2, p_3) son las coordenadas de P respecto del sistema de referencia R , y escribiremos:

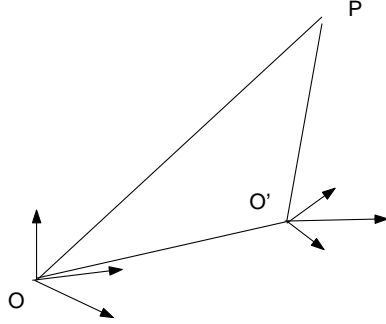
$$\vec{OP} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$$

$$\text{Por otra parte, } \vec{OQ} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3$$

$$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = -\vec{OP} + \vec{OQ} = (q_1 - p_1)\vec{e}_1 + (q_2 - p_2)\vec{e}_2 + (q_3 - p_3)\vec{e}_3$$

11.3 Cambio de sistema de referencia

El cambio de coordenadas en el espacio afín es una consecuencia directa de los cambios de bases en espacios vectoriales. Supongamos un punto P con coordenadas (x_1, x_2, x_3) en un sistema de referencia $\{O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ y (x'_1, x'_2, x'_3) en otra referencia $\{O'; \vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$. La relación entre ambas coordenadas viene dada por



$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \quad [1]$$

$$\underbrace{x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3}_{\vec{OP}} = \underbrace{w_1 \vec{b}_1 + w_2 \vec{b}_2 + w_3 \vec{b}_3}_{\vec{OO'}} + \underbrace{x'_1 \vec{b}'_1 + x'_2 \vec{b}'_2 + x'_3 \vec{b}'_3}_{\vec{O'P}}$$

(x'_1, x'_2, x'_3) son las coordenadas de $\vec{O'P}$ respecto de la base $\{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$. Es decir, $[\vec{O'P}]_{B'} = (x'_1, x'_2, x'_3)$.

El cambio de coordenadas de la base B' a la base B se realiza a través de la correspondiente matriz de cambio de base Q :

$$Q[\vec{O'P}]_{B'} = [\vec{O'P}]_B$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} q_{11}x'_1 + q_{12}x'_2 + q_{13}x'_3 \\ q_{21}x'_1 + q_{22}x'_2 + q_{23}x'_3 \\ q_{31}x'_1 + q_{32}x'_2 + q_{33}x'_3 \end{bmatrix} \\ Q & [\vec{O'P}]_{B'} & & [\vec{O'P}]_B \end{matrix}$$

Una vez que conocemos las coordenadas de todos los vectores de la ecuación [1] respecto de la base B , podemos escribir la ecuación, respecto a esta base, como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

P en ref O, B

P en ref O', B'

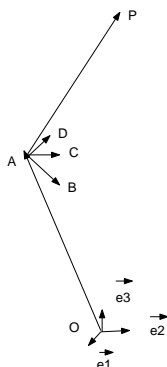
O' en ref O, B

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & w_1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & w_2 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia afín. La inclusión de la cuarta fila en las tres matrices permite expresar el cambio de coordenadas como en espacios vectoriales, mediante un producto matriz vector.

Ejemplo 11.1 En el espacio afín E_3 , respecto de la base cartesiana $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideran los puntos $A = (3, 1, -2)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (1, 0, -1)$ y $D = (4, 3, -2)$. Las coordenadas de un punto P en el nuevo sistema de referencia $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ son (x', y', z') . Hallar las coordenadas en el sistema original.

Solución:



$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (2, 2, 0) - (3, 1, -2) = (-1, 1, 2) \\ \vec{AC} &= (1, 0, -1) - (3, 1, -2) = (-2, -1, 1) \\ \vec{AD} &= (4, 3, -2) - (3, 1, -2) = (1, 2, 0)\end{aligned}$$

$$\vec{AP} = x' \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

En lo que sigue utilizaremos la base canónica ortonormal excepto cuando se indique lo contrario.

11.4 Subespacios afines en E_3

Se denomina dimensión del espacio afín a la dimensión del espacio vectorial con el que está asociado por afinidad. Así de E_3 se dice que su dimensión es 3.

Todo subconjunto S de E_3 con estructura de espacio afín es un subespacio afín. En este caso la aplicación de afinidad existirá entre S y un subespacio vectorial S_0 de \mathbb{R}^3 , de forma que a cada par de puntos P, Q de S se le asocie un vector $\vec{PQ} \in S_0$. Cada subespacio afín está determinado por un punto P_0 contenido en S , o punto de apoyo del subespacio afín, y la dirección dada por S_0 , que es el subespacio vectorial asociado o subyacente.

$$S_{afin}(P_0, S_0) = \{X \in E_3 / P_0\vec{X} \in S_0\}$$

Considerados dos subespacios afines $F_1(P, S_0)$ y $F_2(Q, S'_0)$, tendremos que $F_1 = F_2$ si y sólo si $S_0 = S'_0$ y $\vec{PQ} \in S$.

E_3 tiene dos tipos de subespacios afines, los planos, que son subespacios bidimensionales, y las rectas, que son los subespacios unidimensionales. Seguidamente veremos sus ecuaciones.

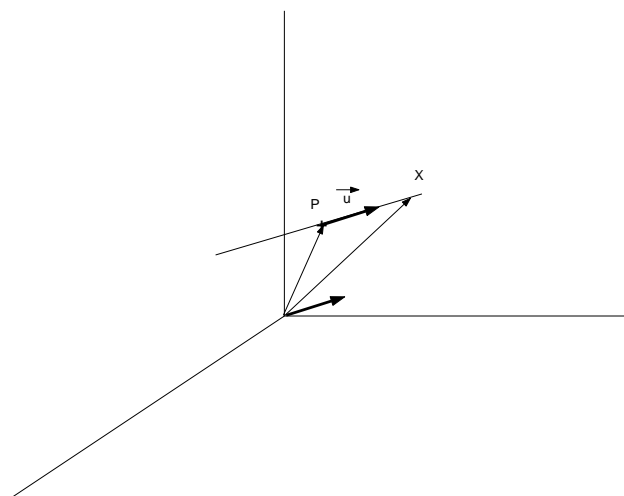
Subespacios afines unidimensionales: rectas

Definición 11.4 Dados un punto P y un vector no nulo \vec{u} , la **recta** que pasa por P y tiene dirección $\langle \vec{u} \rangle$ está formada por los puntos $X = (x, y, z)$ tales que $P\vec{X} = \lambda \vec{u}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir:

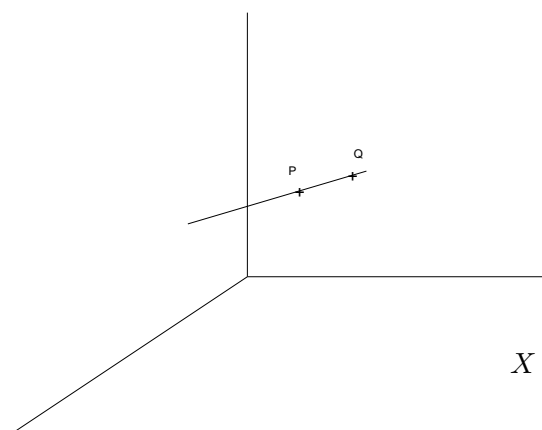
$$\begin{aligned}X - P &= \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ X &= P + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Estas son la **ecuación vectorial paramétrica** y las **ecuaciones (escalares) paramétricas** de la recta.

De \vec{u} se dice que es el vector director de la recta.



Otra forma de definir una recta es a través de su paso por dos puntos P y Q . La ecuación vectorial de esta recta será:



$$X = P + \lambda \vec{PQ}, \lambda \in \mathbb{R}$$

A partir de las ecuaciones paramétricas, despejando λ obtenemos la ecuación de la recta en **forma continua**:

$$\frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3} \quad \text{si } u_1, u_2, u_3 \neq 0$$

Si $u_1 = 0$ de la ec. paramétrica se deduce $x = p_1$

Si $u_2 = 0$ de la ec. paramétrica se deduce $y = p_2$

Si $u_3 = 0$ de la ec. paramétrica se deduce $z = p_3$

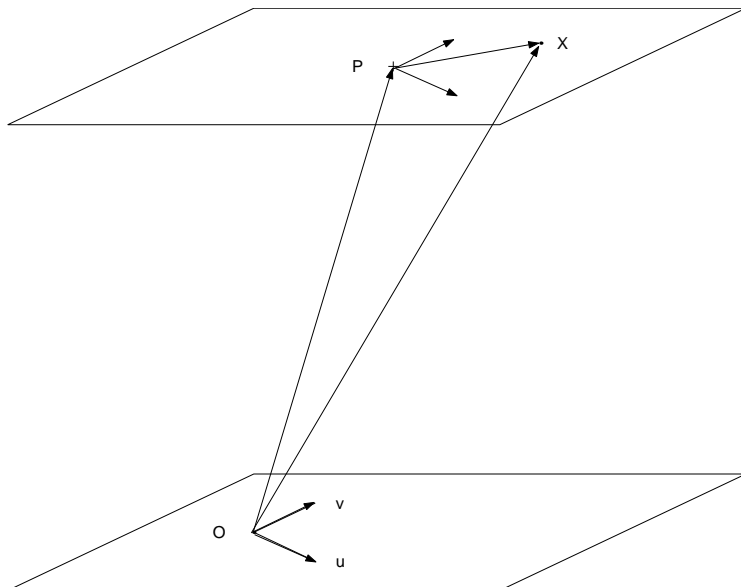
u_1, u_2, u_3 no pueden ser simultáneamente cero, pues si el vector director es $(0,0,0)$ la recta se reduciría al punto P .

La ecuación continua está constituida por dos ecuaciones implícitas, que forman un sistema no homogéneo compatible indeterminado con un parámetro libre. La ecuación también recibe el nombre de ecuación cartesiana, analítica o intrínseca de la recta.

Las rectas que pasan por el origen O y en la dirección de los tres vectores de la base canónica se denominan ejes coordenados. La notación más habitual para estos es X, Y, Z , u Ox, Oy, Oz . También reciben el nombre de eje de abscisas, eje de ordenadas y eje de cotas.

Subespacios afines bidimensionales: planos

Definición 11.5 Dados un punto P y el subespacio bidimensional $S_0 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, el **plano** que pasa por P y tiene dirección S_0 está formado por los puntos $X = (x, y, z)$ tales que $\vec{PX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ con λ y $\mu \in \mathbb{R}$.



$$X - P = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Estas son la **ecuación vectorial paramétrica** y las **ecuaciones (escalares) paramétricas** del plano.

De \vec{u} y \vec{v} se dice que son los vectores directores del plano.

Otra forma de definir un plano es a través de su paso por tres puntos P , Q y R . La ecuación vectorial de este plano será por ejemplo:

$$X = P + \lambda \vec{PQ} + \mu \vec{PR}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

La expresión $\vec{PX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, implica que
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante nos queda una ecuación de la forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

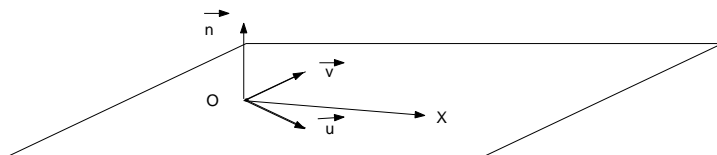
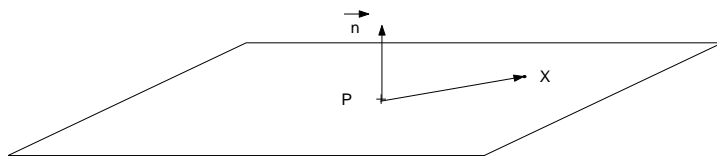
que es la **Ecuación general del plano**, también denominada **ecuación en forma implícita del plano**. A esta ecuación también se le llama ecuación cartesiana, analítica o intrínseca del plano.

Para el plano que pasa por O , que es el subespacio vectorial S_0 , la ecuación correspondiente sería:

$$Ax + By + Cz = 0,$$

(A, B, C) es un vector ortogonal a los dos planos, ya que en el desarrollo del determinante anterior resulta $(A, B, C) = \vec{u} \times \vec{v}$.

Se presenta seguidamente otra justificación de que (A, B, C) es un vector normal a los dos planos, basada en ortogonalidad de vectores.



Los planos que pasan por \vec{O} (denotado π_0) y por P (denotado π_1) tienen la misma dirección (son paralelos entre sí) y por tanto tienen el mismo vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$.

- π_0

Los puntos $X = (x, y, z)$ del plano π_0 serán tales que $\vec{n} \cdot \vec{OX} = 0$, por tanto
 $(A, B, C) \cdot (x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$

La ecuación implícita es: $Ax + By + Cz = 0$

- π_1

Los puntos $X = (x, y, z)$ del plano π_1 serán tales que $\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$, por tanto
 $(A, B, C) \cdot (x - p_1, y - p_2, z - p_3) = Ax + By + Cz - Ap_1 - Bp_2 - Cp_3 = 0$

La ecuación implícita de π_2 es: $Ax + By + Cz + D = 0$,

con $D = -Ap_1 - Bp_2 - Cp_3$

El conjunto de todos los planos paralelos, con vector normal (perpendicular) $\vec{n} = (a_1, a_2, a_3)$, viene dado por la ecuación: $a_1x + a_2y + a_3z + a = 0, \quad a \in \mathbb{R}$

11.5 Subespacios afines en E_2

E_2 es un espacio afín de dimensión 2. Sus subespacios afines son las rectas, que son subespacios unidimensionales.

La ecuación vectorial paramétrica de los puntos de una recta en E_2 es:

$$X = P + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Las correspondientes ecuaciones paramétricas escalares son:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Eliminando λ de las ecuaciones anteriores obtenemos una única ecuación, de la forma $Ax + By + C = 0$, que es la ecuación implícita de una recta en E_2 . (A, B) es un vector normal a la recta.

Es frecuente expresar las rectas en E_2 mediante ecuaciones de la forma $y = mx + n$ (se deduce directamente de la anterior sin más que despejar y). Este tipo de expresión se denomina ecuación explícita o ecuación punto-pendiente.

11.6 Transformaciones afines y movimientos

Una aplicación f del espacio afín E en E se dice que es una aplicación afín, también denominada transformación afín, si existe un endomorfismo τ en el espacio vectorial subyacente tal que

$$f(P)\vec{f}(Q) = \tau(\vec{PQ})$$

En lo que sigue consideraremos únicamente aplicaciones f biyectivas, lo que implica que el endomorfismo τ sea también biyectivo.

En tales transformaciones se dice que un punto X es **fijo**, también denominado doble o invariante, si $f(X) = X$. Una transformación afín tiene 0, 1 o infinitos puntos fijos.

Si hay rectas y/o planos invariantes también se dice de éstos que son fijos o dobles, entendiéndose la invarianza de la recta como tal o del plano como tal, que no implica la invarianza de sus puntos.

La composición de transformaciones afines es grupo (operación cerrada, asociativa, con elemento neutro y elemento inverso).

Expresión matricial de una transformación afín respecto de un sistema de referencia dado.

$$O\vec{X}' = Of(\vec{X}) = Of(\vec{O}) + f(O)\vec{f}(X) = Of(\vec{O}) + \tau(O\vec{X}) \Rightarrow$$

$$O\vec{X}' = O\vec{O}' + \tau(O\vec{X})$$

$X' = O' + \tau(O\vec{X})$ (es usual utilizar también este tipo de notación en la que se combinan puntos y vectores).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} o'_1 \\ o'_2 \\ o'_3 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} & & & | & o'_1 \\ & \tau & & | & o'_2 \\ & & & | & o'_3 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}}_{T_A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} \quad [2] \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto y de la imagen, con el uno al final, son las denominadas coordenadas homogéneas de los puntos.

Movimientos

Dado un espacio afín euclídeo en el que está definida una transformación afín, se dice que ésta es un **movimiento** si deja invariantes las distancias, es decir, si $dist(P, Q) = dist(f(P), f(Q)) \forall P, Q \in E$

TEOREMA. Si una transformación afín es un movimiento, entonces el endomorfismo asociado es una isometría.

$$\| \tau(\vec{PQ}) \| = \| f(P)\vec{f}(Q) \| = dist(P', Q') = dist(P, Q) = \| \vec{PQ} \| \Rightarrow \tau \text{ isometría}$$

Los movimientos se clasifican en directos o inversos según las correspondientes isometrías sean directas o inversas, respectivamente.

Dos puntos P y P' , uno transformado del otro mediante un movimiento en E_2 , se dice que son puntos homólogos.

Los movimientos posibles en E_2 son los correspondientes a las isometrías en \mathbb{R}^2 (giro respecto de un punto y simetría axial), la traslación, que trataremos a continuación, y las composiciones entre ellos.

Los movimientos posibles en E_3 son los correspondientes a las isometrías en \mathbb{R}^3 (giro respecto de una recta y simetría respecto de un plano), la traslación, y las composiciones entre ellos.

Traslación

Traslación dada por el vector $\vec{v} = OV$

$$f(X) = X + V$$

$$f(P) = P + V$$

$$f(Q) = Q + V$$

$f(P)f(Q) = Q - P$, por tanto $\tau(\vec{PQ}) = \vec{PQ}$ es la identidad. La identidad es isometría, por tanto se trata de un movimiento.

$$\text{Las ecuaciones de la traslación son: } \begin{cases} x'_1 = x_1 + v_1 \\ x'_2 = x_2 + v_2 \\ x'_3 = x_3 + v_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$O\vec{X}' = O\vec{O}' + \tau(O\vec{X}) \quad (O\vec{O}' = O\vec{V})$$

Para $\vec{v} = \vec{0}$ es la transformación afín identidad.

La expresión matricial para obtener $X' = f(X)$ correspondiente a la traslación \vec{v} como producto matriz-vector, es decir, utilizando coordenadas homogéneas es:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & | & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & v_3 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}}_{T_A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ - \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La recta que une un punto P y su transformado P' se denomina guía, y es recta doble, quedando definida la traslación por el vector PP' .
- Dos rectas que sean una la transformada de la otra son paralelas, y forman ángulos iguales con las guías.
- En E_3 todo plano que contenga una guía es doble.
- El conjunto de las traslaciones tiene estructura de grupo abeliano con el producto o composición de traslaciones.

Puntos fijos

En E_3 , los puntos fijos son los $X \in E_3$ tales que $f(X) = X$. Sustituyendo en la ec. [2] $X' = X$, y denotando los elementos de la matriz asociada al endomorfismo τ respecto de la base canónica como t_{ij} , tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & | & o'_1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & | & o'_2 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & | & o'_3 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ - \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} - 1 & t_{12} & t_{13} & | & o'_1 \\ t_{21} & t_{22} - 1 & t_{23} & | & o'_2 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - 1 & | & o'_3 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ - \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} - 1 & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - 1 & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - o'_1 \\ - o'_2 \\ - o'_3 \end{bmatrix}$$

Los puntos fijos son las soluciones de este sistema.

En E_2 tendríamos las dos primeras ecuaciones.

Casos:

En E_2

$rg[\tau - I_2]$	$rg[\tau - I_2 \mid O']$	
2	2	Giro respecto de un punto fijo
1	2	Simetría deslizante: composición de simetría y traslación paralela al eje de simetría
1	1	Simetría respecto de una recta de puntos fijos
0	1	Traslación
0	0	Identidad

En E_3

$rg[\tau - I_3]$	$rg[\tau - I_3 \mid O']$	
3	3	Un punto fijo. Composición de un giro y una simetría, siendo el eje de giro y el plano de simetría perpendiculares
2	3	Mov. helicoidal: comp. de giro y traslación paralela al eje de giro.
2	2	Giro respecto de una recta de puntos fijos
1	2	Simetría deslizante: composición de simetría y traslación paralela al plano de simetría.
1	1	Simetría respecto de un plano de puntos fijos
0	1	Traslación
0	0	Identidad

11.7 Movimientos en el plano

11.7.1 Giro de ángulo θ con centro en (a, b)

Composición de:

- 1) traslación de $C = (a, b)$ a $O = (0, 0)$
- 2) rotación de ángulo θ con centro en $(0, 0)$
- 3) traslación de $(0, 0)$ a (a, b)

$$T_{afin} = T_{(a,b)} R_{\theta} T_{(-a,-b)} \quad \tau \equiv R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para calcular la transformación afín hay que expresar cada una de las transformaciones en coordenadas homogéneas, aquí y en lo que sigue.

$$T_{afin} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & o'_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & o'_2 \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

o'_1 y o'_2 son cada uno de ellos una expresión dependiente de las variables de a, b y θ , resultante de efectuar el producto de las tres matrices indicadas.

$rg[\tau - I_2] = 2 = rg[\tau - I_2 | O']. \text{ Tiene un punto fijo que es } C = (a, b).$

- La composición de dos giros del mismo centro es un giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos.
- La composición de un giro y una traslación es un giro del mismo ángulo. Lo que varía es el centro de giro.

11.7.2 Simetría axial

Supongamos la simetría ortogonal respecto de una recta r que contiene el punto $P = (a, b)$, y que tiene una pendiente θ y vector director \vec{u} (nótese que con uno de los dos últimos datos es suficiente, ya que uno se deduce del otro). Indicamos tres formas de obtener la transformación.

1. Composición de:

- 1) traslación de $P = (a, b)$ a $O = (0, 0)$,
- 2) simetría respecto a recta paralela a r que pasa por el origen
- 3) traslación de $(0, 0)$ a (a, b)

$$T_{afin} = T_{(a,b)} Sim_{\theta} T_{(-a,-b)}$$

Seguidamente, recordamos que tenemos dos formas de obtener la matriz de la transformación $\tau \equiv Sim_{\theta}$.

* La primera es utilizar la expresión deducida en el capítulo anterior:

$$\tau \equiv Sim_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

* La segunda consiste en obtener la matriz a través de lo que conocemos de sus vectores propios. En efecto, haciendo $\vec{u} = \vec{b}_1$, tendremos, $f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$ y tras obtener

un vector \vec{b}_2 del plano, ortogonal a \vec{b}_1 , tendremos $f(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2$. Por tanto la matriz del endomorfismo en la base de esos vectores normalizados, que denotaremos $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, y referida a la base canónica será: PDP^t , con $P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2]$. (La matriz sería PDP^{-1} pero hemos utilizado el hecho de que $P^{-1} = P^t$ ya que P es matriz ortogonal, por ser sus columnas base ortonormal).

$$\tau = Sim_\theta = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2]^t$$

2. Composición de:

- 1) traslación de $P = (a, b)$ a $O = (0, 0)$,
- 2) rotación $R_{-\theta}$
- 3) simetría axial respecto del eje X
- 4) rotación R_θ
- 5) traslación de $(0, 0)$ a (a, b)

3. El tercer método consiste en determinar los elementos de la matriz de la transformación a partir de lo que se espera de las imágenes de determinados puntos. Escogidos dos puntos P y Q de la recta tendremos que sus imágenes son ellos mismos, son puntos fijos. $T_{afin}P = P$ y $T_{afin}Q = Q$.

$$T_{afin} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} \quad T_{afin} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ - \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte sabemos que la dirección normal a la recta se refleja. La única forma de tratar el vector normal como un punto es considerar la misma simetría en el origen, lo que equivale a aplicar la transformación T_{afin} al punto N de coordenadas homogéneas $N = (n_1, n_2; 0)$, ya que el valor 0 de la última componente elimina el efecto de la parte afín. Entonces $T_{afin}N = -N$.

$$T_{afin} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \tau & & o'_1 \\ & & & o'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_1 \\ -n_2 \\ - \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con las imágenes de los tres puntos se puede obtener T_{afin} .

$$T_{afin} \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 & n_2 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & -n_1 \\ p_2 & q_2 & -n_2 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T_{afin} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & -n_1 \\ p_2 & q_2 & -n_2 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 & n_2 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$T_{afin} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & o'_1 \\ & \tau & & o'_2 \\ \hline & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$rg[\tau - I_2] = 1 = rg[\tau - I_2|O']$. Se tiene una recta de puntos fijos que es el eje de simetría.

- La composición de simetría con traslación perpendicular al eje de simetría es una simetría con el eje de puntos fijos paralelo al original.
- La composición de simetría con traslación paralela al eje de simetría se denomina simetría deslizante. Este movimiento carece de puntos fijos, pero el eje de simetría original es recta invariante.
- En conclusión, la composición de simetría y traslación es simetría con recta de puntos fijos o simetría deslizante.

$rg[\tau - I_2] = 1 \neq 2 = rg[\tau - I_2|O']$. Simetría deslizante.

Ejemplo 11.2 a) En E_2 , determine la matriz de la transformación afín correspondiente a un giro de ángulo $3\pi/4$ con centro en $C = (1, 0)$. b) Obtenga la composición de la transformación anterior y una traslación dada por $\vec{p} = (2, 0)$ siendo ésta la última en aplicarse.

a) $T_{afin} = T_{(a,b)} R_\theta T_{(-a,-b)}$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos 3\pi/4 & -\sin 3\pi/4 \\ \sin 3\pi/4 & \cos 3\pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$T_{afin} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ \hline & & \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1 + 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \hline & & \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Nótese que el endomorfismo τ es igual al del giro del mismo ángulo en el origen, no se modifica con las traslaciones.

b) $T_{afin2} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] T_{afin} = \left[\begin{array}{cc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 3 + 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \hline & & \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

Las ecuaciones de esta transformación afín son:

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Para estudiar este movimiento hallaremos los puntos fijos. Para ello basta sustituir $x' = x$ e $y' = y$ en el SL anterior. La matriz ampliada del SL resultante es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{-1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right]$$

Multiplicando las ecuaciones por $\sqrt{2}$ y permutándolas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1-\sqrt{2} & 1 \\ -1-\sqrt{2} & -1 & -3\sqrt{2}-1 \end{array} \right] \quad f2 = f2 + f1 * (1 + \sqrt{2})$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1-(1+\sqrt{2})^2 & -3\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1-(1+2\sqrt{2}+2) & -2\sqrt{2} \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -4-2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{array} \right] \quad y = \frac{-2\sqrt{2}}{-4-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$x = 1 + (1 + \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2} + 2}{2 + \sqrt{2}} = 2$$

La transformación T_{afin2} es un giro de ángulo $3\pi/4$ y centro

$$(2, \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}})$$

Ejemplo 11.3 a) En E_2 , determine la matriz de la transformación afín T_a correspondiente a la simetría ortogonal respecto de la recta $x+2y=4$. b) Aplique a T_a la traslación dada por $\vec{p}=(3,1)$ y obtenga las ecuaciones de este movimiento total. c) Aplique a T_a la traslación dada por $\vec{p}=(-2,1)$ y obtenga la matriz de la transformación resultante. d) Antecedente de la recta $y=2$ para la aplicación T_a .

a) Se presenta la obtención de T_a por tres métodos distintos:

- Mediante composición de transformaciones:

$r: x+2y-4=0$. Un vector normal a la recta es $(1,2)$ y uno director $b_1=(2,-1)$

$$\left[\begin{array}{cc} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{array} \right]$$

Un punto de la recta es $(0,2)$ por tanto la composición de transformaciones es:

$$T_a = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3/5 & -4/5 & 8/5 \\ -4/5 & -3/5 & 16/5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Nótese que el endomorfismo τ es igual al de la simetría con respecto a la recta paralela que pasa por el origen, no se modifica con las traslaciones.

- A partir de los homólogos de tres puntos

A y B serán puntos de la recta. C corresponderá a un punto cuya imagen conocemos como transformación en un espacio vectorial, no en el espacio afín, y de ahí que para C tomaremos 0 en vez de 1 en la coordenada adicional.

$$A = (4, 0; 1) \rightarrow A' = (4, 0; 1)$$

$$B = (0, 2; 1) \rightarrow B' = (0, 2; 1)$$

$$C = (1, 2; 0) \rightarrow C' = (-1, -2; 0)$$

$$T_a \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$T_a = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 8/5 \\ -4/5 & -3/5 & 16/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Combinando ambos métodos*

Supuesta conocida la matriz de la correspondiente isometría, $\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$, sólo quedarían por determinar dos elementos de T_a :

$$T_a = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & t_1 \\ -4/5 & -3/5 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imponiendo seguidamente que $A = (4, 0; 1)$ es punto fijo, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & t_1 \\ -4/5 & -3/5 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ por tanto}$$

$$\begin{cases} 12/5 t_1 + t_1 = 20/5 \\ -16/5 + t_2 = 0 \end{cases}, \Rightarrow t_1 = 8/5 \text{ y } t_2 = 16/5$$

Los puntos de la recta r son fijos, pues con esa premisa se obtuvo T_a .

Las ecuaciones de la transformación son: $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{8}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{16}{5} \end{cases}$

$$b) T_b = T_{(3,1)} T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 8/5 \\ -4/5 & -3/5 & 16/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 23/5 \\ -4/5 & -3/5 & 21/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No hay puntos fijos. Se trata de una simetría deslizante. En efecto el desplazamiento $(3, 1)$ se puede escribir como suma de un desplazamiento perpendicular a r y otro paralelo a r . En el desplazamiento perpendicular se produce un nuevo eje de simetría r' de puntos fijos, paralelo al original. En el desplazamiento paralelo la nueva simetría “desliza” y dejan de existir puntos fijos, aunque la recta r' es invariante.

La descomposición de la traslación $(3, 1)$ como suma de traslación perpendicular y traslación paralela es:

$$(3, 1) = \alpha(1, 2) + \beta(2, -1) \Rightarrow \alpha = \beta = 1$$

Veamos el nuevo eje de simetría tras el desplazamiento perpendicular $\vec{p}_\perp = (1, 2)$,

$$T_{(1,2)} T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 8/5 \\ -4/5 & -3/5 & 16/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 13/5 \\ -4/5 & -3/5 & 26/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puntos fijos:

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 13/5 \\ -4/5 & -3/5 & 26/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3/5x - 4/5y = -13/5 \\ -4/5x - 3/5y = -26/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2/5x - 4/5y = -13/5 \\ -4/5x - 8/5y = -26/5 \end{cases}$$

Vemos que la segunda ec. es el doble de la primera. El SL es compatible indeterminado. Los puntos fijos son los (x, y) que verifican la ec. que nos queda. Multiplicándola por $-5/2$

la ec. resultante es: $r' : x + 2y - 13/2 = 0$. Éste es el nuevo eje de simetría tras efectuar la traslación perpendicular.

La siguiente componente de la traslación $\vec{p}_{\parallel} = (2, -1)$ desliza esta simetría axial, por tanto T_b es una simetría deslizante que deja invariante la recta r'

Las ecuaciones del movimiento completo son (ver la matriz al principio del apartado) son:

$$\begin{cases} x' = 3/5x - 4/5y + 23/5 \\ y' = -4/5x - 3/5y + 21/5 \end{cases}$$

$$c) T_{(-2,1)}T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 8/5 \\ -4/5 & -3/5 & 16/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & -2/5 \\ -4/5 & -3/5 & 21/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al ser una traslación paralela no hay puntos fijos. Se trata de una simetría deslizante, siendo la recta invariante la original r .

d) T_a es una simetría, por tanto es lo mismo calcular la imagen de un punto que el antecedente de ese punto. Ambos, imagen y antecedente, coinciden.

De la recta $s' : y = 2$ puedo obtener dos puntos, por ejemplo $A = (0, 2)$ y $B = (1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 8/5 \\ -4/5 & -3/5 & 16/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 \\ 2 & 6/5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que las imágenes son $A' = (0, 2)$ y $B' = (3/5, 6/5)$. La ecuación de la recta s que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(3/5, 6/5)$ es $y = -4/3x + 2$.

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 2 = a \times 0 + b \\ 6/5 = a \times 3/5 + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a = -4/3$ y $b = 2$.

Ejemplo 11.4 En E_2 obtén la matriz correspondiente a un giro de ángulo $\pi/3$ que transforme el punto $(2, 1)$ en el $(1, 0)$.

La matriz de rotación es: $R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$T_{afin} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & t_1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & t_1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{3}/2 + t_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3} + 1/2 + t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = -1/2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$T_{afin} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -1/2 - \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.8 Movimientos en el espacio

11.8.1 Giro de ángulo θ respecto de un eje

Supongamos un giro de ángulo θ alrededor de un eje orientado con dirección y sentido dados por \vec{v} y que pasa por el punto (a, b, c) . Se obtendrá la expresión matricial de la transformación afín, relativa a la base canónica, como composición de una serie movimientos.

Denotamos en primer lugar
$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Buscamos dos vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 unitarios, ortogonales, y tales que $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es base ortonormal. Por ser construida de esta manera, con el tercero producto vectorial del primero por el segundo, los vectores tienen la misma orientación relativa que los de la base canónica.

La matriz correspondiente al giro de ángulo θ respecto de la base B es:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3]$ es la matriz de cambio de base tal que $P[\vec{x}]_B = \vec{x}$, y por ser P ortogonal, $P^{-1} = P^t$.

La matriz de la transformación afín se obtendrá como la composición de las siguientes transformaciones:

- 1) traslación de (a, b, c) a $(0, 0, 0)$, a fin de que el eje de giro pase por el origen
- 2) cambio de coordenadas de la base canónica a la base B , mediante producto por P^t
- 3) giro de ángulo θ respecto al eje con la orientación dada $\langle \vec{v} \rangle$
- 4) cambio de coordenadas de la base B a la base canónica mediante el producto por P
- 5) traslación de $(0, 0, 0)$ a (a, b, c)

$$\tau = P \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^t$$

$$T_{afin} = T_{(a,b,c)} \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tau & & 0 \\ & & & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] T_{(-a,-b,-c)}$$

Los puntos del plano de simetría son puntos fijos.

La composición de una simetría respecto de un plano y una traslación perpendicular al eje de giro es un giro del mismo ángulo con el nuevo eje de giro de puntos fijos paralelo al original.

La composición de un giro y una traslación paralela al eje de giro es un movimiento helicoidal. Carece de puntos fijos. El eje de giro original es recta invariante del movimiento compuesto.

Se resumen las dos últimas afirmaciones en que la composición de un giro con una traslación es un giro o un movimiento helicoidal.

La matriz τ de la transformación afín tiene un único autovalor real que es $\lambda = 1$. Las dos únicas excepciones son el giro de ángulo 0 o identidad, que tiene tres autovalores unidad, y el giro de ángulo π , con un autovalor 1 y dos autovalores -1 . Este último movimiento es la simetría respecto de un eje (el eje de giro) o simetría axial.

11.8.2 Simetría respecto de un plano

Supongamos una simetría respecto del plano que pasa por el punto (a, b, c) y con vector perpendicular \vec{v} .

Determinemos en primer lugar la matriz para la simetría en un plano paralelo al original que contenga el origen $(0, 0, 0)$. Denotamos $\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Buscamos dos vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 unitarios, ortogonales, y tales que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es base ortonormal.

$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3]$ es una base de autovectores, con autovalores asociados 1, 1 y -1 respectivamente. La matriz asociada a la simetría que tratamos, respecto de esta base, es:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz referida a la base canónica se obtiene a partir de la anterior:

$$\tau = PDP^t \quad (P^{-1} = P^t \text{ por ser } P \text{ ortogonal})$$

La transformación afín resultante, teniendo en cuenta que debemos hacer inicialmente una traslación de (a, b, c) a $(0, 0, 0)$ y deshacerla al final, es:

$$T_{afin} = T_{(a,b,c)} \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tau & & 0 \\ & & & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] T_{(-a,-b,-c)}$$

Los puntos del plano de simetría son puntos fijos.

La composición de una simetría y una traslación perpendicular al plano de simetría es una simetría con el nuevo plano de simetría de puntos fijos paralelo al original.

La composición de una simetría y una traslación paralela al plano de simetría es una simetría deslizante. Ya no existen puntos fijos. El plano de simetría original es invariante.

Se resumen las dos últimas afirmaciones en que la composición de una simetría con respecto a un plano y una traslación es una simetría con plano de puntos fijos, o una simetría deslizante.

La matriz τ de la transformación afín tiene autovalores 1, 1 y -1 . Recordamos que la matriz de un endomorfismo tiene los mismos autovalores independientemente de la base a la que esté referida.

$rg[\tau - I_3] = 1 = rg[\tau - I_3 \mid O']$. Simetría respecto a un plano de puntos fijos.

$rg[\tau - I_3] = 1 \neq 2 = rg[\tau - I_3 \mid O']$. Simetría deslizante.

Ejemplo 11.5 Determinar las ecuaciones de la composición de un giro de ángulo π con respecto a la recta $r: (0, 0, 1) + t(0, 1, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$ con la traslación de vector $\vec{v} = (1, 1, 0)$, aplicándose la traslación en segundo lugar.

El eje de giro tiene la dirección dada por $(0, 1, 1)$. Tomando la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, (0, 1, 1)/\sqrt{2}\}$, siendo \vec{u}_1 y \vec{u}_2 unitarios, ortogonales entre sí y tales que $(0, 1, 1)/\sqrt{2} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, la matriz del giro de ángulo π referida a esta base es:

$$R_\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para pasar la matriz a coordenadas relativas a la base canónica debemos efectuar el producto $PR_\pi P^t$, siendo $P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ (0, 1, 1)/\sqrt{2}]$

Partiendo de $\vec{v} = (0, 1, 1)$, dos vectores ortogonales a éste son: $(1, 0, 0)$, y $(0, 1, -1)$. Normalizados y con el orden adecuado se tiene $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1)/\sqrt{2}, (0, 1, 1)/\sqrt{2}\}$

$$y \ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

La matriz del giro referida a base canónica es entonces:

$$R_{\pi <(0,1,1)>} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{afin} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}}_{T_{(0,0,1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}}_{T_{(0,0,-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tras } R_{afin} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ecuaciones: } \begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = z \\ z' = y + 1 \end{cases}$$

La traslación no es perpendicular al eje de giro, por tanto tiene componente paralela, y esto significa que el movimiento es helicoidal. Puede comprobarse en las ecuaciones que carece de puntos fijos.

$$\begin{cases} x = -x + 1 \\ y = z \\ z = y + 1 \end{cases}.$$

Las dos últimas ecuaciones muestran de forma inmediata que el sistema es incompatible.

También se podría concluir a partir de los rangos, comparando $\text{rg}[\tau - I_3]$ y $\text{rg}[\tau - I_3 \mid O']$

$$[\tau \mid O'] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}, \quad [\tau - I_3 \mid O'] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante eliminación gaussiana en la última matriz obtenemos:

$$[\tau - I_3 \mid O'] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$rg[\tau - I_3] = 2 \neq 3 = rg[\tau - I_3 \mid O'] \Rightarrow \text{movimiento helicoidal.}$$

Ejemplo 11.6 Encontrar las ecuaciones de la simetría con respecto al plano $2x + y + z - 2 = 0$.

Método 1

Comenzamos calculando la matriz correspondiente a la simetría en un plano paralelo al anterior pasando por el origen. Para ello utilizamos la base de autovectores natural para el problema.

$$\begin{aligned}\tau(2, 1, 1) &= (-2, -1, -1) \\ \tau(1, -1, -1) &= (1, -1, -1) \\ \tau(0, 1, -1) &= (0, 1, -1)\end{aligned}$$

Nótese que los vectores seleccionados son base ortogonal. Pero tomaremos base ortonormal:

$$B = \{ (1, -1, -1)/\sqrt{3}, (0, 1, -1)/\sqrt{2}, (2, 1, 1)/\sqrt{6} \}$$

Respecto de esta base, la matriz de la simetría es: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Y la transformación a la base canónica:

$$\begin{aligned}\tau &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Una vez obtenida la matriz del endomorfismo τ podremos calcular la transformación afín, teniendo en cuenta que el plano contiene el punto $P = (0, 0, 2)$.

$$\begin{aligned}T_{afin} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_{(0,0,2)}} \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_{(0,0,-2)}} = \\ &\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{Ecuaciones : } \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(x + 2y + 2z - 4) \\ y' = -\frac{1}{3}(2x - 2y + z - 2) \\ z' = -\frac{1}{3}(2x + y - 2z - 2) \end{cases}$$

Método 2

Podemos calcular la matriz de la transformación afín a partir de las imágenes de tres puntos del plano $2x + y + z - 2 = 0$, y de una dirección.

$$P = (1, 0, 0; 1) \quad Q = (0, 2, 0; 1) \quad R = (0, 0, 2; 1) \quad N = (2, 1, 1; 0)$$

$$T_{afin} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{afin} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.9 Determinación de subespacios invariantes en los movimientos

Veremos cómo obtener, para el caso de la simetría deslizante y del mov. helicoidal, los subespacios invariantes (eje o plano de simetría y eje de giro respectivamente) y la traslación que experimentan sus puntos, en dicho movimiento.

Partiendo de $P \in S$ y supuesto S invariante tendremos, utilizando las expresiones de las transformaciones afines de la sección 11.6, los siguientes resultados:

$$\begin{cases} f(P) = P' \\ f(P') = P'' \end{cases} \Rightarrow P'\vec{P}'' = \tau(P\vec{P}')$$

Por otra parte el desplazamiento \vec{v} en el subespacio invariante S es constante, tanto en la simetría deslizante como en el mov. helicoidal, por lo que $P\vec{P}' = P'\vec{P}''$, por tanto:

$$\tau(P\vec{P}') = P\vec{P}', \text{ es decir, } (\tau - I_3)P\vec{P}' = \vec{0}$$

Desarrollando la expresión anterior para eliminar P' tenemos:

$$\begin{aligned} P\vec{P}' &= O\vec{P}' - O\vec{P} = O\vec{O}' + O'\vec{P}' - O\vec{P} = O\vec{O}' + \tau(O\vec{P}) - O\vec{P} = O\vec{O}' + (\tau - I_3)O\vec{P} \\ (\tau - I_3)P\vec{P}' &= (\tau - I_3)(O\vec{O}' + (\tau - I_3)O\vec{P}) = (\tau - I_3)O\vec{O}' + (\tau - I_3)^2 O\vec{P} \\ \Rightarrow &\boxed{(\tau - I_3)O\vec{O}' + (\tau - I_3)^2 O\vec{P} = \vec{0}} \end{aligned}$$

Podemos escribir la última expresión cómo: $\boxed{(\tau - I_3) O' + (\tau - I_3)^2 P = 0}$

Siendo los datos sobre la transformación afín τ y O' , y denotando las coordenadas de P como (x, y, z) , la ecuación matricial anterior determina el subespacio invariante S .

Se puede demostrar con cálculos sencillos que la ecuación encuadrada es la misma que la

$$\text{siguiente } \boxed{(T_{afin} - I_4)^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}. \text{ Obviamente } T_{afin} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & o'_1 \\ & \tau & & o'_2 \\ & & & o'_3 \\ \hline - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Para calcular el desplazamiento \vec{v} sobre el subespacio invariante obtenemos $P' = f(P)$, y $\vec{v} = P\vec{P}'$

Para E_2 basta con eliminar la coordenada z .

Ejemplo 11.7 Estudiar el movimiento cuya matriz asociada a la transformación afín es:

$$T_{afin} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veremos si tiene puntos fijos mediante la ec. $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \sqrt{3}/2x + 1/2y + 1 = x \\ 1/2x - \sqrt{3}/2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}/2 - 1)x + 1/2y = -1 \\ 1/2x - (\sqrt{3}/2 + 1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} - 2)x + y = -2 \\ x - (\sqrt{3} + 2)y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (3 - 4)x + (\sqrt{3} + 2)y = -2(\sqrt{3} + 2) \\ x - (\sqrt{3} + 2)y = 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + (\sqrt{3} + 2)y = -2(\sqrt{3} + 2) \\ x - (\sqrt{3} + 2)y = 0 \end{cases}$$

Es obvio que el sistema es incompatible, por tanto el mov. carece de puntos fijos.

La isometría asociada es inversa $|\tau| = -1$, por tanto se trata de una simetría deslizante.

Para obtener la recta invariante aplicamos la ecuación: $(T_{afin} - I_3)^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Para este caso: } (T_{afin} - I_3)^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3/4 - \sqrt{3} + 1 + 1/4 & \sqrt{3}/4 - 1/2 - \sqrt{3}/4 - 1/2 & \sqrt{3}/2 - 1 \\ \sqrt{3}/4 - 1/2 - \sqrt{3}/4 - 1/2 & 1/4 + 3/4 + \sqrt{3} + 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}/2 - 1 \\ -1 & 2 + \sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}/2 - 1 \\ -1 & 2 + \sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - y + \sqrt{3}/2 - 1 = 0 \\ -x + (2 + \sqrt{3})y + 1/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - y = -\sqrt{3}/2 + 1 \\ -x + (2 + \sqrt{3})y = -1/2 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ec. por $(2 + \sqrt{3})$ obtenemos:

$$\begin{cases} (4 - 3)x - (2 + \sqrt{3})y = (2 - \sqrt{3})/2(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow x - (2 + \sqrt{3})y = (4 - 3)/2 = 1/2 \\ -x + (2 + \sqrt{3})y = -1/2 \end{cases}$$

La segunda ec. es la opuesta de la primera. Nos queda por tanto una ecuación que es la ec. del subespacio invariante o recta de simetría: $x - (2 + \sqrt{3})y - 1/2 = 0$

$\vec{n} = (-1, 2 + \sqrt{3})$ es un vector normal al eje de simetría

A continuación determinamos el vector de traslación sobre el eje de simetría. Elegimos un punto P del eje, sencillo, por ejemplo $x = 1/2$, $y = 0$, por tanto $P = (1/2, 0)$ y calculamos su transformado P' .

$$P' = T_{afin} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 + 1 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por tanto $P' = (\sqrt{3}/4 + 1, 1/4)$

$$\vec{v} = P\vec{P}' = P' - P = (\sqrt{3}/4 + 1/2, 1/4)$$

Efectivamente $P\vec{P}'$ es ortogonal al vector normal al eje, \vec{n} .

11.10 Homotecia de centro A y razón k

Estudiaremos a continuación una transformación afín denominada homotecia de centro A y razón k . Esta transformación está definida como:

$$f(X) = A + k(X - A) \text{ con } k \neq 0 \quad [3]$$

Nótese que $f(A) = A$, por tanto A es punto invariante.

Para $k = 1$ la transformación afín es la identidad.

Determinemos a continuación cual es el endomorfismo asociado. Tomando dos puntos P y Q , las imágenes o transformados son:

$$\begin{aligned} f(P) &= A + k(P - A) \\ f(Q) &= A + k(Q - A) \end{aligned}$$

$f(P)f(Q) = k(Q - P)$, por tanto tenemos que el endomorfismo asociado es $\tau(\vec{PQ}) = k\vec{PQ}$, demostrando que la homotecia es una transformación afín. Es obvio que para $|k| \neq 1$ la homotecia no es un movimiento, pues no conserva las normas.

Obtengamos la expresión matricial que permite obtener las coordenadas de X' a partir de las coordenadas de X , en E_3

$$\begin{cases} x'_1 = a_1 + k(x_1 - a_1) \\ x'_2 = a_2 + k(x_2 - a_2) \\ x'_3 = a_3 + k(x_3 - a_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = kx_1 + a_1(1 - k) \\ x'_2 = kx_2 + a_2(1 - k) \\ x'_3 = kx_3 + a_3(1 - k) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1(1 - k) \\ a_2(1 - k) \\ a_3(1 - k) \end{bmatrix}$$

$$OX' = \tau(OX) + OO'$$

Y como un único producto matriz-vector:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & a_1(1 - k) \\ 0 & k & 0 & a_2(1 - k) \\ 0 & 0 & k & a_3(1 - k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular los puntos fijos hay que resolver la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & a_1(1-k) \\ 0 & k & 0 & a_2(1-k) \\ 0 & 0 & k & a_3(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & a_1(1-k) \\ 0 & k & 0 & a_2(1-k) \\ 0 & 0 & k & a_3(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} - I \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 & a_1(1-k) \\ 0 & k-1 & 0 & a_2(1-k) \\ 0 & 0 & k-1 & a_3(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones resultante es:

$$\begin{cases} (k-1)x_1 = a_1(k-1) \\ (k-1)x_2 = a_2(k-1) \\ (k-1)x_3 = a_3(k-1) \end{cases}$$

Si $k = 1$ todos los puntos son fijos, puesto que hemos visto que la transformación es la identidad.

Si $k \neq 1$ la solución es única, $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$. Por tanto el único punto fijo es el centro de la homotecia.

Las únicas rectas dobles y los únicos planos invariantes son las/los que pasan por el centro de la homotecia.

La homotecia con $k = -1$ es la simetría central, con centro A .

$$f(X) = A - (X - A) = -X + 2A$$

En la figura se presentan dos homotecias en E_2 , con centro en $(0,0)$ y razones 2 y -2 .

