

# 浅谈容斥

wtcqwq

maze.size()

上海市曹杨第二中学

2026 年 2 月 4 日

## 1 前言

## 2 正难则反

## 3 容斥定理

## 4 二项式反演

## 5 Min-Max 容斥

## 6 作业及后记

# Introduction

luogu : 241867。qq: 1948735630。

讲者 CSP 2025 T3 得 0 分，NOIP 2025 T2 得 4 分，水平极其低下。

整个 ppt 讲完肯定不止 3h，所以剩下的题目留给大家当作作业。

**大家可以随时打断我发言，只要你认为你的发言是有价值的。也欢迎课后和日后和我多交流/bx**

题目比较简单，以紫题为主，一眼秒飞的大佬轻喷/keI

# 你最好确定自己会这一页。

$\binom{n}{m}$  表示  $n$  个无区别球里，一次挑出  $m$  个球的方案数。

$A_n^m$  表示  $n$  个无区别球里， $m$  次挑出一个球，不放回的方案数。

# 你最好确定自己会这一页。

$\binom{n}{m}$  表示  $n$  个无区别球里，一次挑出  $m$  个球的方案数。

$A_n^m$  表示  $n$  个无区别球里， $m$  次挑出一个球，不放回的方案数。

$\sum_{i=a}^b f(i)$  表示  $f(a) + f(a+1) + \dots + f(b)$ 。

如果只有下标，可能表示省略了 trivial 的上标，或者  $\sum_p f(i)$  表示对  $i$  满足条件  $P$  的  $i$  求和。

$\max_b^a f(i)$ ,  $\min_b^a f(i)$  的定义类似。

# 你最好确定自己会这一页。

$\binom{n}{m}$  表示  $n$  个无区别球里，一次挑出  $m$  个球的方案数。

$A_n^m$  表示  $n$  个无区别球里， $m$  次挑出一个球，不放回的方案数。

$\sum_{i=a}^b f(i)$  表示  $f(a) + f(a+1) + \dots + f(b)$ 。

如果只有下标，可能表示省略了 trivial 的上标，或者  $\sum_p f(i)$  表示对  $i$  满足条件  $P$  的  $i$  求和。

$\max_b^a f(i), \min_b^a f(i)$  的定义类似。

$[P]$  是艾弗森括号。在条件  $P$  成立时，值为 1，反之为 0。

调和级数： $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$  趋近于  $n \ln n$ 。

# 你应该至少掌握如下前置知识

- 逆元的概念，费马小定理求模大质数意义下的逆元，有理数取模 $(\frac{p}{q} \bmod M, M \in prime)$ 。
- $O(n^2)$  预处理组合数， $O(n)$  预处理阶乘和阶乘的逆元，并利用这两个数列  $O(1)$  求出组合数。
- 快速幂。基础动态规划思想。
- 基础的排列组合知识。小学奥数范围内即可。

如果上面的内容，大家有不会的，可以现在提问。

# 正难则反

考虑有些东西，问你合法方案数。你发现这很困难，所以你用总方案数减去不合法方案数。

# 正难则反

考虑有些东西，问你合法方案数。你发现这很困难，所以你用总方案数减去不合法方案数。

例：某中学有  $n$  名男同学， $m$  名女同学和两名老师要排队参加体检。他们排成一条直线，并且任意两名女同学不能相邻，两名老师也不能相邻，那么一共有多少种排法呢？

# 正难则反

考虑有些东西，问你合法方案数。你发现这很困难，所以你用总方案数减去不合法方案数。

例：某中学有  $n$  名男同学， $m$  名女同学和两名老师要排队参加体检。他们排成一条直线，并且任意两名女同学不能相邻，两名老师也不能相邻，那么一共有多少种排法呢？

如果你只考虑两名女同学不能相邻，那么你可以先把别人放好，然后把女同学插进去。只要保证每个空都插了至多一个女同学即可。

只考虑两名女同学不能相邻，显然老师与男同学等价，用插空法解决

$$A_{n+2}^{n+2} \times A_m^m \times C_{n+3}^m$$

其中 C 中的  $n+3$  是因为有  $n+2$  个人，故有  $n+3$  个空。

# 正难则反

考虑有些东西，问你合法方案数。你发现这很困难，所以你用总方案数减去不合法方案数。

例：某中学有  $n$  名男同学， $m$  名女同学和两名老师要排队参加体检。他们排成一条直线，并且任意两名女同学不能相邻，两名老师也不能相邻，那么一共有多少种排法呢？

如果你只考虑两名女同学不能相邻，那么你可以先把别人放好，然后把女同学插进去。只要保证每个空都插了至多一个女同学即可。

只考虑两名女同学不能相邻，显然老师与男同学等价，用插空法解决

$$A_{n+2}^{n+2} \times A_m^m \times C_{n+3}^m$$

其中  $C$  中的  $n+3$  是因为有  $n+2$  个人，故有  $n+3$  个空。

还要减去不合法的两名老师相邻，此时我们可以钦定两名老师相邻，用捆绑法，两名老师整体与男同学等价，同样用插空法答案显然为

$$A_2^2 \times A_{n+1}^{n+1} \times A_m^m \times C_{n+2}^m$$

# 正难则反

考虑有些东西，问你合法方案数。你发现这很困难，所以你用总方案数减去不合法方案数。

例：某中学有  $n$  名男同学， $m$  名女同学和两名老师要排队参加体检。他们排成一条直线，并且任意两名女同学不能相邻，两名老师也不能相邻，那么一共有多少种排法呢？

如果你只考虑两名女同学不能相邻，那么你可以先把别人放好，然后把女同学插进去。只要保证每个空都插了至多一个女同学即可。

只考虑两名女同学不能相邻，显然老师与男同学等价，用插空法解决

$$A_{n+2}^{n+2} \times A_m^m \times C_{n+3}^m$$

其中 C 中的  $n+3$  是因为有  $n+2$  个人，故有  $n+3$  个空。

还要减去不合法的两名老师相邻，此时我们可以钦定两名老师相邻，用捆绑法，两名老师整体与男同学等价，同样用插空法答案显然为

$$A_2^2 \times A_{n+1}^{n+1} \times A_m^m \times C_{n+2}^m$$

相减即可。

## 例

对于所有长度为  $n$  取值为  $[1, m]$  的正整数数组  $a$ ，求所有这样的数列中，其中数的出现次数的最大值之和，除以  $m^n$  的结果。

$$1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq m \leq 10^9.$$

## 例

对于所有长度为  $n$  取值为  $[1, m]$  的正整数数组  $a$ , 求所有这样的数列中, 其中数的出现次数的最大值之和, 除以  $m^n$  的结果。

$$1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq m \leq 10^9.$$

Hint 1. 复杂度是  $O(n^2 \ln n)$ 。

## 例

对于所有长度为  $n$  取值为  $[1, m]$  的正整数数组  $a$ , 求所有这样的数列中, 其中数的出现次数的最大值之和, 除以  $m^n$  的结果。

$1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq m \leq 10^9$ 。

Hint 1. 复杂度是  $O(n^2 \ln n)$ 。

Hint 2. 枚举出现次数  $c$ , 计算所有数字出现次数不超过  $c$  的概率。

# Solution

枚举出现次数  $c$ , 计算所有数字出现次数不超过  $c$  的概率。

# Solution

枚举出现次数  $c$ ，计算所有数字出现次数不超过  $c$  的概率。

设  $f_{n,m}$  表示长度为  $n$ ，值域为  $m$  时的答案，转移考虑在长度为  $n-1$  的合法数组上任意一个数的方案数  $mf_{n-1,m}$ ，减掉不合法的方案数。

# Solution

枚举出现次数  $c$ , 计算所有数字出现次数不超过  $c$  的概率。

设  $f_{n,m}$  表示长度为  $n$ , 值域为  $m$  时的答案, 转移考虑在长度为  $n-1$  的合法数组上任意一个数的方案数  $mf_{n-1,m}$ , 减掉不合法的方案数。

显然只有新加的这一种数可能不合法, 且出现次数一定是  $c+1$ , 那么方案数即为

$$mf_{n-(c+1),m-1} \binom{n-1}{c}$$

# Solution

枚举出现次数  $c$ , 计算所有数字出现次数不超过  $c$  的概率。

设  $f_{n,m}$  表示长度为  $n$ , 值域为  $m$  时的答案, 转移考虑在长度为  $n-1$  的合法数组上任意一个数的方案数  $mf_{n-1,m}$ , 减掉不合法的方案数。

显然只有新加的这一种数可能不合法, 且出现次数一定是  $c+1$ , 那么方案数即为

$$mf_{n-(c+1),m-1} \binom{n-1}{c}$$

注意到  $m$  每减少 1,  $n$  至少减少  $c+1$ , 因此  $m$  最多减少  $\frac{n}{c+1}$ , 那么状态数即为

$$O\left(n \sum_c \frac{n}{c}\right) = O(n^2 \ln n)$$

可以通过。

## 例

把大家把恶心的题面形式化了一下。

在  $1 \sim 2^n - 1$  这些数中选出恰好  $m$  个不同的数，使其异或和为 0。求方案数模大质数。 $n, m \leq 10^6$

## 例

把大家把恶心的题面形式化了一下。

在  $1 \sim 2^n - 1$  这些数中选出恰好  $m$  个不同的数，使其异或和为 0。求方案数模大质数。 $n, m \leq 10^6$

Hint 1. 无序不好做，转成加数的过程，亦即有序的过程。最后再除掉  $m!$  即可。

## 例

把大家把恶心的题面形式化了一下。

在  $1 \sim 2^n - 1$  这些数中选出恰好  $m$  个不同的数，使其异或和为 0。求方案数模大质数。 $n, m \leq 10^6$

Hint 1. 无序不好做，转成加数的过程，亦即有序的过程。最后再除掉  $m!$  即可。

Hint 2. 可以 dp。但是转移的时候会遇到什么麻烦呢？如何套用今天的主题解决呢？

# Solution

我们设  $f_i$  表示选了  $i$  个数时，满足上面两种方案的**有序集合**的方案数。

# Solution

我们设  $f_i$  表示选了  $i$  个数时，满足上面两种方案的**有序集合**的方案数。如何计算？首先，如果我们已经确定了前  $i - 1$  个数，且这  $i - 1$  个数的异或和为  $x$ ，则第  $i$  个数选  $x$  即可。前  $i - 1$  个数的每一种合法方案对应一个  $x$ ，一共有  $A_{2^n - 1}^{i-1}$  种方案。

## Solution 续

注意到这种选法可能会出现不合法的情况：

1.  $x = 0$ , 意味着前  $i - 1$  个数的异或和为零, 显然有  $f_{i-1}$  种方案。2.  $x$  在之前出现过, 我们设这个数是第  $j$  个数, 则将第  $i$  和第  $j$  个数删掉后, 剩下  $i - 2$  个数构成一个满足要求的方案, 而第  $i$  个数有  $(2^n - 1 - (i - 2))$  种选法, 再加上枚举  $j$  的位置 (共有  $i - 1$  种位置), 一共有  $f_{i-2} \times (i - 1) \times (2^n - 1 - (i - 2))$  种方案。

将上面两种不合法的情况减去即可。

## Solution 续

注意到这种选法可能会出现不合法的情况：

1.  $x = 0$ , 意味着前  $i - 1$  个数的异或和为零, 显然有  $f_{i-1}$  种方案。
2.  $x$  在之前出现过, 我们设这个数是第  $j$  个数, 则将第  $i$  和第  $j$  个数删掉后, 剩下  $i - 2$  个数构成一个满足要求的方案, 而第  $i$  个数有  $(2^n - 1 - (i - 2))$  种选法, 再加上枚举  $j$  的位置 (共有  $i - 1$  种位置), 一共有  $f_{i-2} \times (i - 1) \times (2^n - 1 - (i - 2))$  种方案。

将上面两种不合法的情况减去即可。

注意我们求出的  $f$  是**有序**集合下的答案, 而所求答案为**无序**的, 最后需要除以  $m!$ 。

# 容斥原理是什么？

容斥原理的结论如下：

$$|\bigcup_{i=1}^n S_i| = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{a_1 < a_2 < \dots < a_m} |\bigcap_{i=1}^m S_{a_i}|$$

# 容斥原理是什么？

容斥原理的结论如下：

$$|\bigcup_{i=1}^n S_i| = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{a_i < a_{i-1}} |\bigcap_{i=1}^m S_{a_i}|$$

证明的思路是考虑一个元素在每一个  $\bigcap_{i=1}^m S_{a_i}$  里出现的次数，然后通过一番暴算，我们能够发现每个元素都只出现了 1 次，这样，每个元素合起来就变成了总的并集。

# 小学奥数练习题

大家可以举手发言，每一个题第一个说对做法或式子的，可以获得讲者头像 badge 一个。做到你会的最优秀复杂度！

- I：球之间互不相同，盒子之间互不相同。
- II：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
- III：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。

# 小学奥数练习题

大家可以举手发言，每一个题第一个说对做法或式子的，可以获得讲者头像 badge 一个。做到你会的最优秀复杂度！

- I：球之间互不相同，盒子之间互不相同。
- II：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
- III：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。
- IV：球之间互不相同，盒子全部相同。
- V：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至多装一个球。
- VI：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至少装一个球。

# 小学奥数练习题

大家可以举手发言，每一个题第一个说对做法或式子的，可以获得讲者头像 badge 一个。做到你会的最优秀复杂度！

- I：球之间互不相同，盒子之间互不相同。
- II：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
- III：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。
- IV：球之间互不相同，盒子全部相同。
- V：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至多装一个球。
- VI：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至少装一个球。
- VII：球全部相同，盒子之间互不相同。
- VIII：球全部相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
- IX：球全部相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。

# 小学奥数练习题

大家可以举手发言，每一个题第一个说对做法或式子的，可以获得讲者头像 badge 一个。做到你会的最优秀复杂度！

- I：球之间互不相同，盒子之间互不相同。
- II：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
- III：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。
- IV：球之间互不相同，盒子全部相同。
- V：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至多装一个球。
- VI：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至少装一个球。
- VII：球全部相同，盒子之间互不相同。
- VIII：球全部相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
- IX：球全部相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。
- X：球全部相同，盒子全部相同。
- XI：球全部相同，盒子全部相同，每个盒子至多装一个球。
- XII：球全部相同，盒子全部相同，每个盒子至少装一个球。

# 小学奥数练习题

大家可以举手发言，每一个题第一个说对做法或式子的，可以获得讲者头像 badge 一个。做到你会的最优秀复杂度！

- I：球之间互不相同，盒子之间互不相同。
  - II：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
  - III：球之间互不相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。
  - IV：球之间互不相同，盒子全部相同。
  - V：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至多装一个球。
  - VI：球之间互不相同，盒子全部相同，每个盒子至少装一个球。
  - VII：球全部相同，盒子之间互不相同。
  - VIII：球全部相同，盒子之间互不相同，每个盒子至多装一个球。
  - IX：球全部相同，盒子之间互不相同，每个盒子至少装一个球。
  - X：球全部相同，盒子全部相同。
  - XI：球全部相同，盒子全部相同，每个盒子至多装一个球。
  - XII：球全部相同，盒子全部相同，每个盒子至少装一个球。
- Source: P5824 弱化版。（那道题需要用到 Poly 技巧，这里帮大家略去。）

# 例题

## 例

定义一个数列**可爱**，当且仅当它由若干个  $1 \sim k$  的排列拼接而成。

问有多少长度为  $n$  的序列  $A$ ，可以构造出一个**可爱的数列**  $B$ ，使得  $A$  是  $B$  的子段。

Easy Version:  $n \leq 100, k \leq 8$ ,

Hard Version:  $n \leq 10^{18}, k \leq 15$ 。

Extreme Version (Bonus, 今天不讲, 欢迎讨论):  $n \leq 10^{18}, k \leq 750$ 。

# 例题

## 例

定义一个数列**可爱**，当且仅当它由若干个  $1 \sim k$  的排列拼接而成。

问有多少长度为  $n$  的序列  $A$ ，可以构造出一个**可爱的数列  $B$** ，使得  $A$  是  $B$  的子段。

Easy Version:  $n \leq 100, k \leq 8$ ,

Hard Version:  $n \leq 10^{18}, k \leq 15$ 。

Extreme Version (Bonus, 今天不讲, 欢迎讨论):  $n \leq 10^{18}, k \leq 750$ 。

Hint 1. 一个数列一定可以视作: [...], [1 ~  $k$ ], [1 ~  $k$ ], [...], 前后不完整但不能出现重复。

# 例题

## 例

定义一个数列**可爱**，当且仅当它由若干个  $1 \sim k$  的排列拼接而成。

问有多少长度为  $n$  的序列  $A$ ，可以构造出一个**可爱的数列**  $B$ ，使得  $A$  是  $B$  的子段。

Easy Version:  $n \leq 100, k \leq 8$ ,

Hard Version:  $n \leq 10^{18}, k \leq 15$ 。

Extreme Version (Bonus, 今天不讲, 欢迎讨论):  $n \leq 10^{18}, k \leq 750$ 。

Hint 1. 一个数列一定可以视作: [...], [1 ~  $k$ ], [1 ~  $k$ ], [...], 前后不完整但不能出现重复。

Hint 2. 考虑难点在于，第一对中括号和第二对中括号的划分点有可行的多种可能。例如 [2, 1], 2 或 2, [1, 2]。

# 例题

## 例

定义一个数列**可爱**，当且仅当它由若干个  $1 \sim k$  的排列拼接而成。  
问有多少长度为  $n$  的序列  $A$ ，可以构造出一个**可爱的数列**  $B$ ，使得  $A$  是  $B$  的子段。

Easy Version:  $n \leq 100, k \leq 8$ ,

Hard Version:  $n \leq 10^{18}, k \leq 15$ .

Extreme Version (Bonus, 今天不讲, 欢迎讨论):  $n \leq 10^{18}, k \leq 750$ .

Hint 1. 一个数列一定可以视作: [...],  $[1 \sim k]$ ,  $[1 \sim k]$ , [...], 前后不完整但不能出现重复。

Hint 2. 考虑难点在于, 第一对中括号和第二对中括号的划分点有可行的多种可能。例如  $[2, 1], 2$  或  $2, [1, 2]$ 。

Hint 3. 对 Hint 2 的问题进行容斥, 问题发生了转化, 现在该怎么刻画这个问题?

# Solution

Easy Version 做法很多，略去。

考虑容斥，令前  $k$  个点中可以作为起始点的集合是  $S$ 。

Hard Version 不妨考虑，根据 Hint 1，我们相当于钦定了一些段不能出现重复的数。所以一个位置，能填的数的数量是，这个位置所在的无重段中起始点离目前为止最远的那个无重段的约束，剩下的约束都严格弱于它。

乘法原理即可算出对于特定  $S$  的答案。套用容斥原理即可，容斥系数为  $(-1)^{\text{popcount}(S)}$ 。

时间复杂度  $O(2^k \times k)$ 。

休息一下，来点简单题。

## 例

AtCoder 岛上有  $N$  种蝉。第  $i$  种蝉 ( $1 \leq i \leq N$ ) 只有在年份是  $A_i$  的倍数时才会发生大爆发。在第 1 年到第  $Y$  年的  $Y$  年中，求恰好有  $M$  种蝉发生大爆发的年份有多少个。

$$Y \leq 10^{18}, M \leq N \leq 20.$$

Hint 1. 如果给你一道小学数学题，

$Y = 30, N = 3, A_1 = 2, A_2 = 3, A_3 = 5, M = 2$ , 你会怎么做?

休息一下，来点简单题。

## 例

AtCoder 岛上有  $N$  种蝉。第  $i$  种蝉 ( $1 \leq i \leq N$ ) 只有在年份是  $A_i$  的倍数时才会发生大爆发。在第 1 年到第  $Y$  年的  $Y$  年中，求恰好有  $M$  种蝉发生大爆发的年份有多少个。

$Y \leq 10^{18}, M \leq N \leq 20$ 。

Hint 1. 如果给你一道小学数学题，

$Y = 30, N = 3, A_1 = 2, A_2 = 3, A_3 = 5, M = 2$ , 你会怎么做？

Hint 2. 还不会的话，你认真听了吗？

## 例

考虑只包含 0 和 1 的  $N \times M$  矩阵  $A$ 。

我们称满足以下条件的矩阵是好的：

- $\forall 1 \leq i \leq N, \sum_{j=1}^M A_{i,j} \in \{1, 2\}$ ;
- $\forall 1 \leq j \leq M, \sum_{i=1}^N A_{i,j} \in \{1, 2\}$ 。

求出  $N$  行  $M$  列的好矩阵的数量，对  $(10^9 + 7)$  取模。

数据范围： $N, M \leq 2000$

## 例

考虑只包含 0 和 1 的  $N \times M$  矩阵  $A$ 。

我们称满足以下条件的矩阵是好的：

- $\forall 1 \leq i \leq N, \sum_{j=1}^M A_{i,j} \in \{1, 2\}$ ;
- $\forall 1 \leq j \leq M, \sum_{i=1}^N A_{i,j} \in \{1, 2\}$ 。

求出  $N$  行  $M$  列的好矩阵的数量，对  $(10^9 + 7)$  取模。

数据范围： $N, M \leq 2000$

Hint 1. 考虑枚举  $N$  行中有  $a$  行和为 1,  $b$  行和为 2;  $M$  列中有  $c$  列和为 1,  $d$  列和为 2。

容易发现这个枚举量是  $O(\min(N, M))$  级别的，因为我们有  $a + b = N, c + d = M, a + 2b = c + 2d$ 。

## 例

考虑只包含 0 和 1 的  $N \times M$  矩阵  $A$ 。

我们称满足以下条件的矩阵是好的：

- $\forall 1 \leq i \leq N, \sum_{j=1}^M A_{i,j} \in \{1, 2\}$ ;
- $\forall 1 \leq j \leq M, \sum_{i=1}^N A_{i,j} \in \{1, 2\}$ 。

求出  $N$  行  $M$  列的好矩阵的数量，对  $(10^9 + 7)$  取模。

数据范围： $N, M \leq 2000$

Hint 1. 考虑枚举  $N$  行中有  $a$  行和为 1,  $b$  行和为 2;  $M$  列中有  $c$  列和为 1,  $d$  列和为 2。

容易发现这个枚举量是  $O(\min(N, M))$  级别的，因为我们有  $a + b = N, c + d = M, a + 2b = c + 2d$ 。

# Solution

我们考虑把每一列的 1 和 2 的和分配到行上去，可以看作这样一个过程：有  $M$  种颜色的小球，其中  $c$  种颜色各有一个小球， $d$  种颜色各有两个小球。

# Solution

我们考虑把每一列的 1 和 2 的和分配到行上去，可以看作这样一个过程：有  $M$  种颜色的小球，其中  $c$  种颜色各有一个小球， $d$  种颜色各有两个小球。然后你需要把这些小球划分成  $N$  个大小不超过 2 的非空集合序列，满足同一个集合的球颜色互不相同。（即集合有标号，但同一个集合内的球无标号）

# Solution

我们考虑把每一列的 1 和 2 的和分配到行上去，可以看作这样一个过程：有  $M$  种颜色的小球，其中  $c$  种颜色各有一个小球， $d$  种颜色各有两个小球。然后你需要把这些小球划分成  $N$  个大小不超过 2 的非空集合序列，满足同一个集合的球颜色互不相同。（即集合有标号，但同一个集合内的球无标号）

那首先我们考虑把这  $c + 2d$  个球排成一个序列有多少种可能，容易发现是多重集组合数  $\frac{(c+2d)!}{2^d}$ 。然后我们把这个序列按顺序分配给每个集合。此时可能会出现两个问题：

- + 分配出了如  $\{1, 1\}$  这样两个相同元素的集合。
- +  $\{1, 2\}$  和  $\{2, 1\}$  两种分配方式应该算作同一种方案。

# Solution

我们考虑把每一列的 1 和 2 的和分配到行上去，可以看作这样一个过程：有  $M$  种颜色的小球，其中  $c$  种颜色各有一个小球， $d$  种颜色各有两个小球。然后你需要把这些小球划分成  $N$  个大小不超过 2 的非空集合序列，满足同一个集合的球颜色互不相同。（即集合有标号，但同一个集合内的球无标号）

那首先我们考虑把这  $c + 2d$  个球排成一个序列有多少种可能，容易发现是多重集组合数  $\frac{(c+2d)!}{2^d}$ 。然后我们把这个序列按顺序分配给每个集合。此时可能会出现两个问题：

- + 分配出了如  $\{1, 1\}$  这样两个相同元素的集合。
  - +  $\{1, 2\}$  和  $\{2, 1\}$  两种分配方式应该算作同一种方案。
- 考虑容斥掉第一种情况后第二种方案数直接乘上  $2^{-b}$  就可以了。

# Solution 续

那么我们钦定有  $t$  个集合一定被分配到了相等的数，式子就是：

$$\sum_{a+b=N, c+d=M, a+2b=c+2d} \binom{N}{b} \binom{M}{d} \sum_{t=0}^{\min(b,d)} (-1)^t \binom{b}{t} \binom{d}{t} t! \frac{(c+2d-2t)!}{2^{b+d-t}}$$

# Solution 续

那么我们钦定有  $t$  个集合一定被分配到了相等的数，式子就是：

$$\sum_{a+b=N, c+d=M, a+2b=c+2d} \binom{N}{b} \binom{M}{d} \sum_{t=0}^{\min(b,d)} (-1)^t \binom{b}{t} \binom{d}{t} t! \frac{(c+2d-2t)!}{2^{b+d-t}}$$

时间复杂度  $O(\min(N, M)^2)$

# 思考题

## 例

求长度为  $n$  且恰有  $k$  个位置满足  $p_i > p_{i+1}$  的排列的数量。

$$1 \leq k \leq n \leq 10^5$$

Source:P14368。

这道题作为思考题只是我觉得把他纯粹当作例题太亵渎了（这是欧拉数问题，有更多做法）。这甚至值得开一个专题另讲，所以只做一个抛砖引玉。在这个复杂度下，这只是一道非常简单平凡的容斥原理练习题，留给大家课后研究和思考。

# 什么是反演

现在我们有两个数组： $g$  和  $f$ 。而  $f$  和  $g$  之间有对应关系：

$$f_n = \sum_{i=0}^n a_i \times g_i$$

## 二项式反演的公式

我们可以从容斥原理推到二项式反演的公式。

## 二项式反演的公式

我们可以从容斥原理推到二项式反演的公式。

有全集  $U = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n$ , 且任意  $i$  个集合的交集和并集大小相同。设  $f_i$  表示任意  $i$  个集合的并集的大小,  $g_i$  表示任意  $i$  个集合的补集的大小。特别的,  $g_0 = f_0 = |U|$ 。

## 二项式反演的公式

我们可以从容斥原理推到二项式反演的公式。

有全集  $U = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n$ , 且任意  $i$  个集合的交集和并集大小相同。设  $f_i$  表示任意  $i$  个集合的并集的大小,  $g_i$  表示任意  $i$  个集合的补集的大小。特别的,  $g_0 = f_0 = |U|$ 。

根据补集的交集和原集的并集的容斥关系可以得出:

$$\begin{aligned} |\bigcap_{i=1}^n S_i| &= |U| - |\bigcup_{i=1}^n \overline{S_i}| \\ &= |U| - (|\overline{S_1}| + |\overline{S_2}| + \dots + (-1)^{n-1} |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}|) \\ &= |U| - |\overline{S_1}| - |\overline{S_2}| - \dots + (-1)^n |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}| \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bigcap_{i=1}^n \overline{S_i}| &= |U| - |\bigcup_{i=1}^n S_i| \\ &= |U| - (|S_1| + |S_2| + \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|) \\ &= |U| - |S_1| - |S_2| - \cdots + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i \end{aligned}$$

# 公式 1

然而，我们惊奇的发现： $|\bigcap_{i=1}^n S_i| = f_n$ ,  $|\bigcap_{i=1}^n \overline{S_i}| = g_n$ ，于是我们便得到了二项式反演的第一个公式：

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

# 证明

如何用数学方法证明这个公式是正确的呢？直接代入就行。将

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \text{ 代入：}$$

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} g_j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{i}{j} g_j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-i} g_j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_j \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_j [j = n] \\ &= g_n \end{aligned}$$

# 一些解释

$\binom{n}{i} \binom{i}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-i}$  这个可以用数学方法证明，也可组合意义的方法证明，这里主要说明组合意义的证法。求  $|U| = n, |A| = i, b = |j|, B \subseteq A \subseteq U$  的方案数。这里有两种方法：法一：先在  $U$  里取  $i$  个元素构成集合  $A$ ，方案数为  $\binom{n}{i}$ ，然后在  $i$  个元素里再取  $j$  个元素构成集合  $B$ ，方案数为  $\binom{i}{j}$ ，合起来就是  $\binom{n}{i} \binom{i}{j}$  法二：先在  $U$  里取  $j$  个元素构成集合  $B$ ，方案数为  $\binom{n}{j}$ ，再在剩下的  $n - j$  个元素里取  $i - j$  个元素，方案数为  $\binom{n-j}{i-j}$ ，又有  $\binom{n-j}{i-j} = \binom{n-j}{n-i}$ ，所以方案数就是  $\binom{n}{j} \binom{n-j}{n-i}$ 。得证。

## 另外一些解释

$\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} = [j = n]$  设  $k = n - j$ , 令  $k = 0$ , 原式的值为 1,  
令  $k > 0$ , 原式为  $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i$ , 我们来添一个项:  $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i 1^i$ , 发  
现, 这玩意不就是二项式定理的的右式吗? 那么原式就是  
 $(-1 + 1)^k = 0^k = 0$ 。得证。

# 小结

二项式反演的 4 种形式：  
形式一

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

# 小结

二项式反演的 4 种形式：  
形式一

$$f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_i$$

形式二（形式一的变形，比较常用）：

$$f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$$

# 小结

形式三：

$$f_n = \sum_{i=n}^m (-1)^i \binom{i}{n} g_i \iff g_n = \sum_{i=n}^m (-1)^i \binom{i}{n} f_i$$

# 小结

形式三：

$$f_n = \sum_{i=n}^m (-1)^i \binom{i}{n} g_i \iff g_n = \sum_{i=n}^m (-1)^i \binom{i}{n} f_i$$

形式四（形式三的变形，非常常用）：

$$f_n = \sum_{i=n}^m \binom{i}{n} g_i \iff g_n = \sum_{i=n}^m (-1)^{i-n} \binom{i}{n} f_i$$

# 小结

形式三：

$$f_n = \sum_{i=n}^m (-1)^i \binom{i}{n} g_i \iff g_n = \sum_{i=n}^m (-1)^i \binom{i}{n} f_i$$

形式四（形式三的变形，非常常用）：

$$f_n = \sum_{i=n}^m \binom{i}{n} g_i \iff g_n = \sum_{i=n}^m (-1)^{i-n} \binom{i}{n} f_i$$

为什么形式四非常常用呢？因为题里多半都是求恰好满足一些条件的方案数。而我们好求的一般都是钦定满足一些条件的方案数。比如：有  $m$  个条件， $g_i$  表示恰好满足  $i$  个条件的方案数， $f_i$  表示钦定满足  $i$  个条件，剩下的随便的方案数。从  $f_i$  的表述里就可以看出， $f_i$  比  $g_i$  好求很多，我们就可以用  $f$  推得  $g$ 。

## 例

有  $N$  个绿色的石子，标号  $1 \sim N$ 。有  $N$  个灰色的石子，标号  $1 \sim N$ 。  
将  $2N$  个石子任意排成一列，两个相邻石子的距离为 1。定义  $\text{dist}(i)$   
为绿色的上面标有  $i$  的石子与灰色的上面标有  $i$  的石子的距离。

给定正整数  $M$ 。要求  $M$  不是任意一个  $\text{dist}(i)$  的倍数，求出方案数，  
对  $(10^9 + 7)$  取模。

数据范围： $M \leq N \leq 2000$ 。

## 例

给定一棵  $n$  个节点的有根树，树根为 1。现在你需要给树上的每个节点分配一个  $[1, n]$  中的权值，使得每个点的点权都不能超过它的父亲的点权。求出符合条件的方案数对 998244353 取模的值。

$$1 \leq n \leq 3000, 1 \leq d \leq 10^9.$$

# 使用场景

简单来说，由于  $E[\max(x, y)] \neq \max(E[x], E[y])$ ，而如果计算  $E[\min(x, y)]$  比计算  $E[\max(x, y)]$  容易得多，我们就通常使用 Min-Max 容斥转为计算  $E[\min(x, y)]$ 。

对于上面这种  $x, y$  的情况，实际上只需要注意到  $\max(x, y) = x + y - \min(x, y)$ ，就有

$$E[\max(x, y)] = E[x] + E[y] - E[\min(x, y)]$$

上面这一步只利用了期望的线性性，因此是正确的。

# 公式

对于多元的情况，我们有

$$\max(S) = \sum_{T \neq \emptyset, T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \min(T)$$

# 公式

对于多元的情况，我们有

$$\max(S) = \sum_{T \neq \emptyset, T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \min(T)$$

这个式子怎么来的呢，就是利用  $[n=0] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}$ （或者也可以说是  $[S=\emptyset] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|}$ ），考虑将  $S$  中元素从大到小排列后第  $i$  个元素的系数，发现他就是

$$\sum_{S \subseteq \{1, 2, \dots, i-1\}} (-1)^{|S|} = [[1, 2, \dots, i-1] = \emptyset] = [i=0]$$

# 公式

对于多元的情况，我们有

$$\max(S) = \sum_{T \neq \emptyset, T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \min(T)$$

这个式子怎么来的呢，就是利用  $[n=0] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}$ （或者也可以说是  $[S=\emptyset] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|}$ ），考虑将  $S$  中元素从大到小排列后第  $i$  个元素的系数，发现他就是

$$\sum_{S \subseteq \{1, 2, \dots, i-1\}} (-1)^{|S|} = [[1, 2, \dots, i-1] = \emptyset] = [i=0]$$

因此自然有  $\max(S) = \sum_{T \neq \emptyset, T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} \min(T)$ 。换成  $\min$  也同理。

# 扩展

如果要算第  $k$  大即  $\max_k(S)$ , 类似地可以构造

$$\max_k(S) = \sum_{|T| \geq k, T \subseteq S} \binom{|T|-1}{|T|-k} (-1)^{|T|+k} \min(T)$$

对于  $\min_k$  也是类似的。

## 例

有  $N$  个编号为 1 到  $N$  的格子，开始时所有格子都是白色的。

同时，有  $M$  个编号为 1 到  $M$  的球放在箱子里。

重复以下操作，直到所有  $N$  个格子都被涂成黑色为止：

1. 从箱子中随机取出一个球。每个球被取出的概率相等。
2. 设取出的球的编号为  $x$ ，则将格子  $L_x, L_x + 1, \dots, R_x$  全部涂成黑色。
3. 将取出的球放回箱子。

请计算将所有格子涂黑所需操作次数的期望值，并对 998244353 取模输出。

数据范围： $N, M \leq 400$ 。

# Solution

设  $t_i$  表示  $i$  第一次被染色的时间，则答案为  $E[\max(t_i)]$ 。套路地进行 min-max 容斥，有

$$E[\max(t_i)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} E\left[\min_{i \in T} t_i\right]$$

考虑怎么算  $E[\min_{i \in T} t_i]$ ，发现如果能算出与  $T$  有交的区间  $[L_i, R_i]$  个数  $x$ ，那么相当于每次有  $\frac{x}{m}$  的概率命中，一旦命中就立即结束；因此有  $E[\min(T)] = \frac{m}{x}$ 。记这个  $x$  是  $f(T)$ 。

提前把  $[L_i, R_i]$  做二维前缀和预处理出来每个区间包含的子区间个数，设  $dp[i][j]$  表示从前  $i$  个数中选子集，且必须选  $i$ ，且  $f(T) = j$  的方案数，然后枚举上一个选的位置直接 DP 就是  $O(n^2m)$  的，可以通过。

# 作业

## 容斥杂题

- P4707 黑
- ABC236H 紫
- P10591 紫
- P10104 黑
- AGC058D 黑
- AGC060D 黑

## 学习 LGV 引理，并从容斥的角度理解

- CF348D 紫
- P6657 紫
- ABC216H 黑
- P7736 紫

## 学习莫比乌斯函数和莫比乌斯反演，并从容斥的角度理解

- 题目留给卓成杰讲数论的时候给大家。

# 后记

今天的题目，大家做的时候都因为主题是容斥原理，而先天往容斥原理的方向去思考。

真正的比赛环境中，容斥题目最困难的一步往往是

# 后记

今天的题目，大家做的时候都因为主题是容斥原理，而先天往容斥原理的方向去思考。

真正的比赛环境中，容斥题目最困难的一步往往是想到容斥。

# 后记

今天的题目，大家做的时候都因为主题是容斥原理，而先天往容斥原理的方向去思考。

真正的比赛环境中，容斥题目最困难的一步往往是想到容斥。

今天的讲解只是抛砖引玉，希望给大家带来了一些浅薄的计数知识。

祝大家都能成为计数大神。

谢谢大家！