

# 2025.02.02 ~ 2025.02.09 做题表格

02.02

## SHOI2025模拟测试六

### A. 排列

摘要：dp，搜索，状态压缩

线路1: <https://newoj.cyez.cc:18160/d/problemset/p/401>

线路2: <https://www.luogu.com.cn/problem/P5972>

#### 题意

给定一个长度为  $n$  的排列  $p$ ，对于每个  $k$  求每个长度为  $k$  的子序列逆序对的最小值，以及逆序对这个最小值的长度为  $k$  的子序列的个数。

#### 分析思路

我们事实上并不关系具体哪个数选或没选，而只在乎后面出现过的数，比它小的我们选了多少，所以把值域分成连续段统计，设连续段的长度分别为  $L_{i,1}, L_{i,2}, \dots, L_{i,m_i}$ ，则状态数是：

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} L_{i,j}$$

且满足  $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \leq n$

根据均值不等式  $L_i$  都相等取到最大值：

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{n}{n-i+1} \right)^{n-i+1} \simeq 2e7$$

混合进制状态压缩 dp 即可。

### B. 整除

摘要：数学，数据结构

线路1: <https://newoj.cyez.cc:18160/d/problemset/p/402>

## 题意

求有多少个正整数  $x$  满足  $\sum_{i=1}^n c_i x^{a_i} \equiv 0 \pmod{\sum_{i=0}^{m-1} x^i}$ , 其中  $\forall i, c_i \in \{-1, 1\}$ 。

## 分析思路

题意等价于存在一个正整数  $k$ , 使得:

$$\sum_{i=1}^n c_i x^{a_i} = k \sum_{i=0}^{m-1} x^i = k \times \frac{x^m - 1}{x - 1} (x \neq 1)$$

对于 1 特判掉, 然后把  $x - 1$  乘到左边, 记为  $f(x)$ :

$$f(x) = (x - 1) \sum_{i=1}^n c_i x^{a_i} = k(x^m - 1)$$

有  $x^m - 1 \equiv 0 \Rightarrow x^m \equiv 1 \Rightarrow x^{a \bmod m} \equiv x^a \pmod{x^m - 1}$ , 我们把指数都  $a_i \leftarrow a_i \bmod m$ , 左边的式子值域就在  $[-nx^{m-1}, nx^{m-1}]$  之间, 先把无解判断掉 ( $f(x)$  恒等于 0),  $f(x) \geq x^m - 1 \Rightarrow x \leq n$ , 枚举  $x$ 。发现  $x^m - 1$  可以看作一个  $x$  进制下  $m$  位都是  $x - 1$  的数, 指数取模之后  $f'(x) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i x^i$ , 如果对于一个给定的  $x$ , 其实可以进位。具体的, 找到最大或最小的  $f_i$ , 判断  $|f_i| \geq x$ , 新的指数大于等于  $m$  继续加到常数项, 这样最多只会进行调和级数次进位, 配合可回滚的数据结构时间复杂度  $O(n \log^2 n)$ 。

## C. 消逝的传承

Too hard, 学习一些 poly 科技回来再补。

## 02.03

## KLC 大神讲题/kl /kl

## [Ynoi Easy Round 2025] TEST\_176

线路1: <https://www.luogu.com.cn/problem/P11622>

## 题意

给定  $n$  个函数, 第  $i$  个函数为  $f_i(x) = \max(x, a_i - x)$ 。  $q$  次询问, 给定初始值  $x_0$  和函数区间  $[l, r]$ , 求  $(f_r \circ f_{r-1} \cdots \circ f_l)(x_0)$ 。

## 分析思路

离线询问，每个函数是在平衡树上 flip/merge 操作，插入标记回收即可。

## [ZJOI2022] 简单题

线路1: <https://www.luogu.com.cn/problem/P8331>

Too hard, 明天补。

## 02.04

### 颜色的长度 Color Length

传送门: <https://www.luogu.com.cn/problem/UVA1625>

#### 题意

见题面，不赘述。

#### 分析思路

类似 LIS 的  $O(n^2)$  做法设计 dp 状态，但是要统计颜色的长度和不好做。颜色的长度和还可以理解是被线段包含的点的个数，我们对点计算贡献。跨过这个点的线段个数就是前面出现过且后面出现过的字母个数，状压字符集可以做到  $O(1)$  转移。

## 02.05

### 图上、树上随机游走问题

#### A. [HNOI2013] 游走

线路1: <https://newoj.cyez.cc:18160/d/problemset/p/412>

板子题，不多赘述

#### B. [HNOI2011] XOR和路径

线路1: <https://newoj.cyez.cc:18160/d/problemset/p/413>

## 题意

求从 1 随机游走到  $n$  的路径异或和的期望。

## 分析思路

根据期望线性性拆位做，有几个注意点：

- 算  $deg$  的时候要排除自环；
- 尽量列出整系数方程，避免误差；
- 这类概率题有自环的话，有时候要倒着列出方程组，否则会算错。

## C. JC的小苹果

线路1: <https://newoj.cyez.cc:18160/d/problemset/p/414>

## 题意

一个人一开始在 1，有  $hp$  点血，随机游走，走到第  $i$  个点会掉  $a_i$  点血，血量小于等于 0 就死了，求走到  $n$  的概率。

## 分析思路

牛逼题，先列出  $dp$  方程：

$$dp_{u,h} = \sum_{v \in G_u} \frac{dp_{v,(h+a_u)}}{deg_v}$$

似乎直接遍历图就行，但是考虑  $a_u$  可能为 0，这个时候就随机游走了，怎么办。

分类讨论， $a_u$  不等于 0，其实  $dp_{u,h}$  就是常数，可以  $O(deg_u)$  计算。等于 0 列出方程组求解。

发现方程前面的系数矩阵是一定的，因为是不是常数不随  $h$  变化而变化，设解向量为  $\vec{x}$ ，常数向量为  $\vec{b}$ ，有  $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ ，预处理  $A^{-1}$  是立方的，向量乘矩阵是  $O(n^2)$  的，时间复杂度  $O(n^3 + hpn^2)$ 。

# 02.07

## 联合省选2019

### A. [十二省联考 2019] 异或粽子

#### 题意

求第  $k$  大区间异或和。

#### 分析思路

Trie 加堆贪心即可。

### B. [十二省联考 2019] 春节十二响

#### 题意

给定一棵树，点有点权，将所有点券分成若干个集合，有祖先后代关系的不能放在一个组里面，求所有集合最大值和的最小值

#### 分析思路

大力启发式合并即可。

## USACO 趣题

### [USACO21DEC] Tickets P

#### 题意

有  $n$  个站， $m$  张票，第  $i$  张票可以在第  $s_i$  个站花  $p_i$  代价买，买后可以自由进出  $[a_i, b_i]$  中任意一个站，求对于所有起点做到同时能进出  $1, n$  的最小代价

#### 分析思路

线段树优化建图，跑最小斯坦纳树即可。

## SHOI2025模拟测试九

## A. 弹性碰撞

摘要：数学，组合，结论

传送门：<https://newoj.cyez.cc:18160/d/problemset/p/438>

## 题意

有一列  $n$  个电子，电子有两种状态：A（量子），B（虚数），一开始都是 A 状态；还有正电荷和负电荷两种电荷。正电子朝右，负电子朝左做速度相同的匀速直线运动，两个电子如果在同一个位置就状态取反，电荷也取反，求最后在左侧能收集到多少 B 电子。

## 分析思路

模拟赛时被击杀了。听了 jzy 大神的讲解茅塞顿开。

先考虑最浅显的暴力，钦定了问号具体是哪种电子来做。

手玩一下发现正电子一直往右，负电子一直向左，相遇可以看作是穿过，然后对状态进行一系列操作。然后发现状态是 A 还是 B 其实只和被交换的次数有关，记  $cnt_i$  表示第  $i$  个电子被 swap 的次数，如果交换了两个位置  $x, x+1$ ，那么  $cnt_x \leftarrow cnt_x + 1, cnt_{x+1} \leftarrow cnt_{x+1} + 1$ 。swap 若干次后第  $rk$  个正电子就在第  $rk$  的位置，所以第  $rk$  个正电子会把  $cnt_{rk}$  和  $cnt_i$  flip 一下。最后会有若干个正电子聚集在最左端（记作  $k = pos$  个），最后答案就是  $\sum_{i=1}^{pos} cnt_i \bmod 2$ 。于是我们得到了一个  $O(n)$  的 simulate，期望得分 30pts。

然而我们只关心前  $k$  个的  $cnt \bmod 2$ 。枚举  $k \in [pos, pos+q]$  和  $cnt$ ，如果要有贡献一定要原来这个位置是  $-$ 。对于负号它的贡献是  $\binom{q}{k-pos}$ ，对于问号他的贡献就是  $\binom{q-1}{k-pos}$ ，注意其实贡献对应了组合数的后缀，预处理即可。