CHAPTER 5 第5章

线性目标规划

线性规划在实践中得到广泛的应用，但存在两方面的不足：一是不能处理多目标的优化问题；二是其约束条件过于刚性化，不允许约束资源有丝毫超差。目标规划是为了解决上述不足，而创建的一类数学模型。

目标规划的有关概念和数学模型是由美国学者查纳斯(A. Charnes)和库伯(W. W. Cooper)在1961年首次提出。1965年Yuji. Ijiri在处理多目标问题分析各类目标的重要性时，引入了赋予各目标优先因子和加权系数等概念，进一步完善了数学模型。以后U. Jaahelaineu和Sang. Lee改进了求解方法，近几年来又有新的发展。本章仅介绍有优先等级和加权系数的线性目标规划，下面所提到的目标规划均指线性目标规划。

5.1 目标规划的数学模型

为了具体说明目标规划与线性规划在处理问题的方法上的区别，先通过例子来介绍目标规划的有关概念及数学模型。

例5-1 某工厂生产Ⅰ，Ⅱ两种产品，已知有关数据见表5-1。试求获利最大的生产方案。

表 5-1

	Ⅰ	Ⅱ	拥有量
原材料/kg	2	1	11
设备生产能力/小时	1	2	10
利润/(元/件)	8	10	

解 这是求获利最大的单目标的规划问题，用 x_1，x_2 分别表示Ⅰ，Ⅱ产品的产量，其线性规划模型表述为

$$\max z=8x_1+10x_2$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 11\\ x_1+2x_2\leqslant 10\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

用图解法求得最优决策方案为：$x_1^*=4$，$x_2^*=3$，$z^*=62$(元)。

但实际上工厂在作决策时，还要考虑市场等一系列其他条件。

(1) 根据市场信息，产品Ⅰ的销售量有下降的趋势，故考虑产品Ⅰ的产量不大于产品Ⅱ。

(2) 超过计划供应的原材料时，需用高价采购，会使成本大幅度增加。

(3) 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班。

(4) 应尽可能达到并超过计划利润指标56元。

这样考虑的产品决策，称为多目标决策问题。目标规划方法是解这类决策问题的方法之一。下面引入与建立目标规划数学模型有关的概念。

1. 正、负偏差变量 d^+，d^-

设 x_1，x_2 为决策变量，此外，引进正偏差变量 d^+ 表示决策值超过目标值的部分；负偏差变量 d^- 表示决策值未达到目标值的部分。因决策值不可能既超过目标值同时又未达到目标值，即恒有 $d^+ \cdot d^- = 0$。

2. 绝对约束和目标约束

绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束；如线性规划问题的所有约束条件，不能满足这些约束条件的解称为非可行解，所以它们是硬约束。目标约束是目标规划特有的，可把约束右端项看做要追求的目标值。在达到此目标值时允许发生正偏差或负偏差，因此在这些约束中加入正、负偏差变量，它们是软约束。线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差变量后可变换为目标约束。也可根据问题的需要将绝对约束变换为目标约束。如：例5-1的目标函数 $z=8x_1+10x_2$ 可变换为目标约束 $8x_1+10x_2+d_1^- - d_1^+ = 56$。约束条件 $2x_1+x_2 \leqslant 11$ 可变换为目标约束 $2x_1+x_2+d_2^- - d_2^+ = 11$。

3. 优先因子(优先等级)与权系数

一个规划问题常常有若干目标。但决策者在要求达到这些目标时，是有主次或轻重缓急的。要求第一位达到的目标赋予优先因子 P_1，次位的目标赋予优先因子 P_2，…，并规定 $P_k \gg P_{k+1}$，$k=1,2,\cdots,K$。表示 P_k 比 P_{k+1} 有更大的优先权。即首先保证 P_1 级目标的实现，这时可不考虑次级目标；而 P_2 级目标是在实现 P_1 级目标的基础上考虑的；以此类推。若要区别具有相同优先因子的两个目标的差别，这时可分别赋予它们不同的权系数 ω_j，这些都由决策者按具体情况而定。

4. 目标规划的目标函数

目标规划的目标函数(准则函数)是按各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子及权系数而构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能地缩小偏离目标值。因此目标规划的目标函数只能是 $\min z = f(d^+, d^-)$。其基本形式有三种：

(1) 要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小，这时

$$\min z = f(d^+ + d^-)$$

(2) 要求不超过目标值，即允许达不到目标值，就是正偏差变量要尽可能地小。这时

$$\min z = f(d^+)$$

(3) 要求超过目标值,即超过量不限,但必须是负偏差变量要尽可能地小,这时

$$\min z = f(d^-)$$

对每一个具体目标规划问题,可根据决策者的要求和赋予各目标的优先因子来构造目标函数,以下用例子说明。

例 5-2 例 5-1 的决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑:首先是产品Ⅱ的产量不低于产品Ⅰ的产量;其次是充分利用设备有效台时,不加班;最后是利润额不小于 56 元。求决策方案。

解 按决策者所要求的,分别赋予这三个目标 P_1, P_2, P_3 优先因子。这问题的数学模型是

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

目标规划的一般数学模型为

$$\min z = \sum_{l=1}^{L} P_l \sum_{k=1}^{K} (\omega_{lk}^- d_k^- + \omega_{lk}^+ d_k^+) \tag{5-1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^- - d_k^+ = g_k, \quad k = 1, \cdots, K & (5\text{-}2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, \quad i = 1, \cdots, m & (5\text{-}3) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, n & (5\text{-}4) \\ d_k^-, d_k^+ \geqslant 0, \quad k = 1, \cdots, K \end{cases}$$

式中,ω_{lk}^-,ω_{lk}^+ 为权系数。

建立目标规划的数学模型时,需要确定目标值、优先等级、权系数等,它都具有一定的主观性和模糊性,可以用专家评定法给以量化。

5.2 解目标规划的图解法

对只具有两个决策变量的目标规划的数学模型,可以用图解法来分析求解。

先在平面直角坐标系的第一象限内画出各约束条件。绝对约束条件的作图与线性规划相同。本例中满足绝对约束的可行域为三角形 OAB。做目标约束时,先令 $d_i^-, d_i^+ = 0$,作

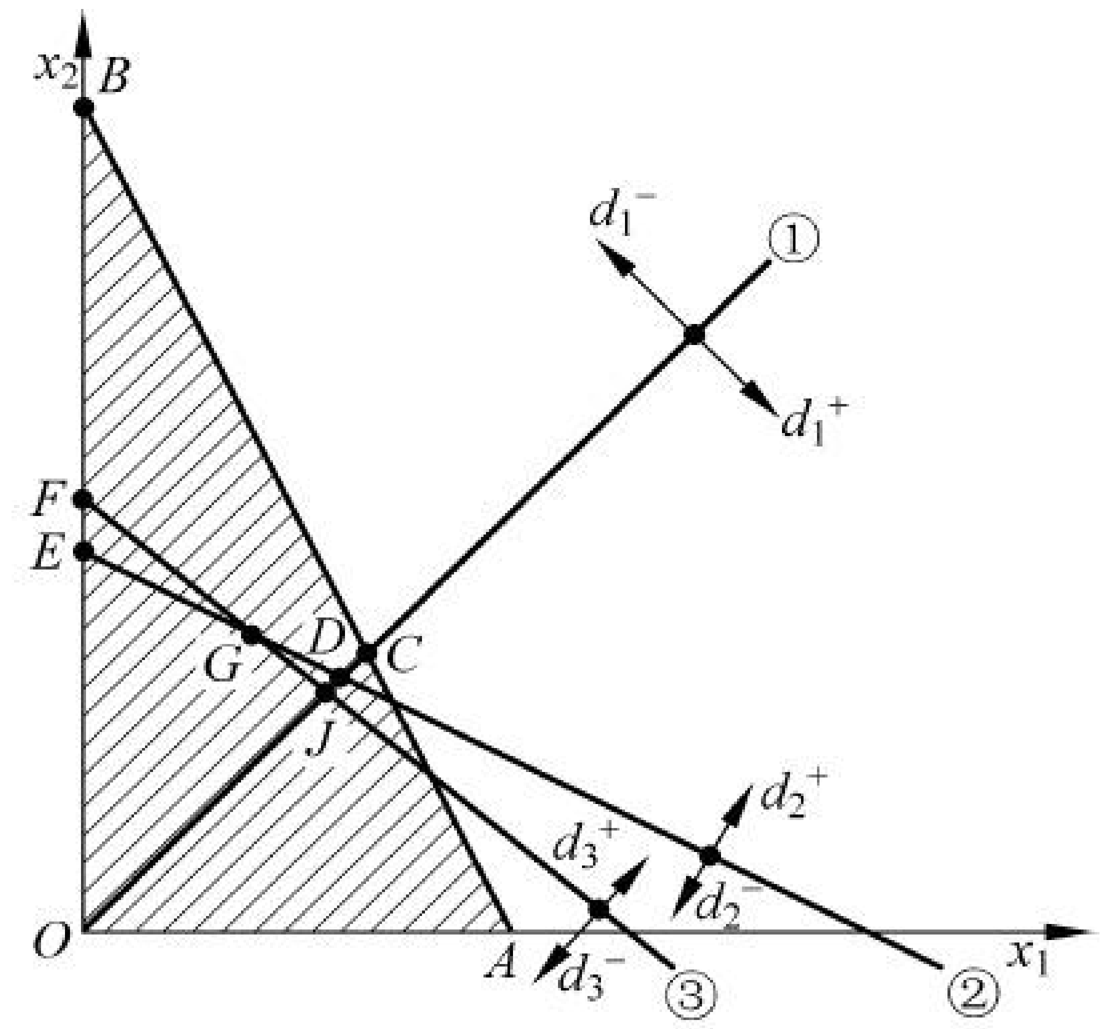

图　5-1

相应的直线，然后在这直线旁标上 d_i^-，d_i^+，如图 5-1所示。这表明目标约束可以沿 d_i^-，d_i^+ 所示方向平移。下面根据目标函数中的优先因子来分析求解。首先考虑具有 P_1 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现 $\min d_1^+$，从图中可见，可以满足 $d_1^+=0$。这时 x_1，x_2 只能在三角形 OBC 的边界和其中取值，接着考虑具有 P_2 优先因子的目标的实现。在目标函数中要求实现 $\min(d_2^+ + d_2^-)$，当 d_2^+，$d_2^-=0$ 时，x_1，x_2 可在线段 ED 上取值。最后考虑具有 P_3 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现 $\min d_3^-$。从图 5-1 中可以判断可以使 $d_3^-=0$，这就使 x_1，x_2 取值范围缩小到线段 GD 上，这就是该目标规划问题的解。可求得 G 的坐标是(2,4)，D 的坐标是(10/3,10/3)，G，D 的凸线性组合都是该目标规划问题的解。

注意目标规划问题求解时，把绝对约束作最高优先级考虑。在本例中能依先后次序都满足 $d_1^+=0$，$d_2^+ + d_2^-=0$，$d_3^-=0$，因而 $z^*=0$。但在大多数问题中并非如此，通常都会出现某些约束得不到满足，故将目标规划问题的最优解称为满意解。

例 5-3　某电视机厂装配黑白和彩色两种电视机，每装配一台电视机需要占用装配线 1 小时，装配线每周计划开动 40 小时。预计市场每周彩色电视机的销量是 24 台，每台可获利 80 元；黑白电视机的销量是 30 台，每台可获利 40 元。该厂按预测的销量制订生产计划，其目标为：

第一优先级：充分利用装配线每周计划开动 40 小时；

第二优先级：允许装配线加班；但加班时间每周尽量不超过 10 小时；

第三优先级：装配电视机的数量尽量满足市场需要。因彩色电视机的利润高，取其权系数为 2。

试建立这问题的目标规划模型，并求解黑白和彩色电视机的产量。

解　设 x_1，x_2 分别表示彩色和黑白电视机的产量。

这个问题的目标规划模型为

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ x_1 \qquad + d_3^- - d_3^+ = 24 \\ \qquad x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, \quad i=1,\cdots,4 \end{cases}$$

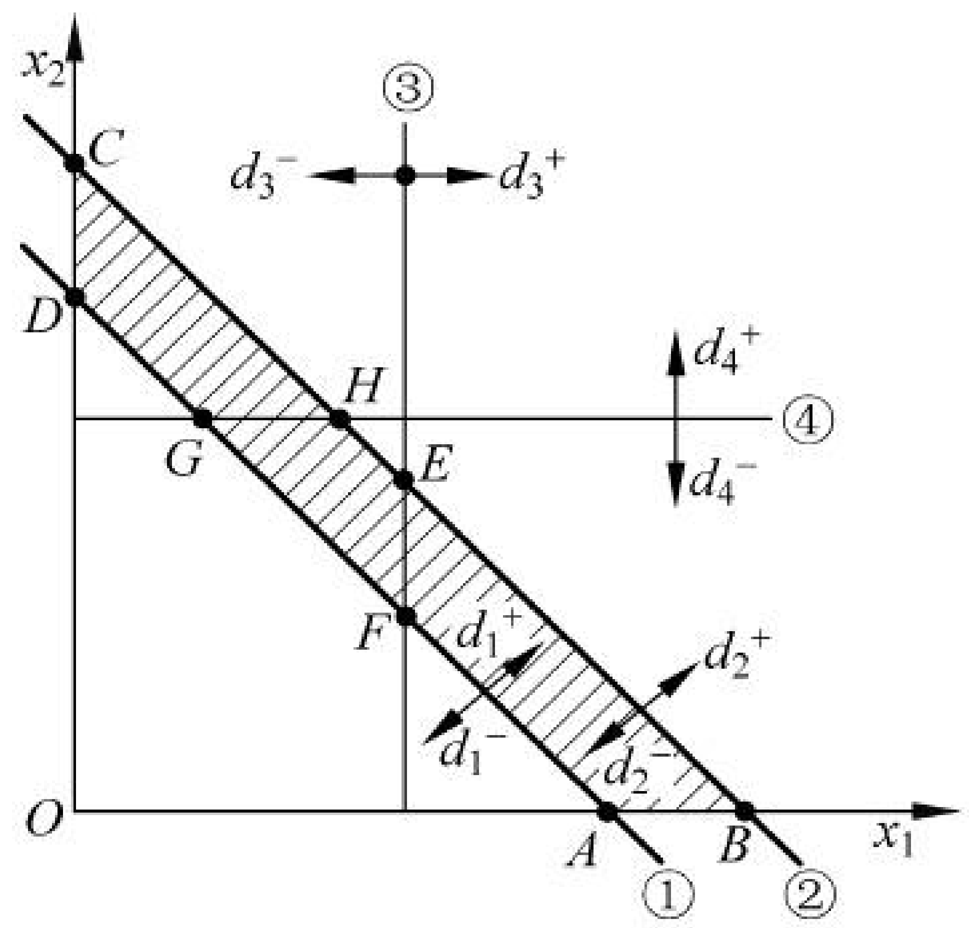

图 5-2

用图解法求解,见图 5-2。

从图 5-2 中看到,在考虑具有 P_1,P_2 的目标实现后,x_1,x_2 的取值范围为 $ABCD$。考虑 P_3 的目标要求为实现 $\min 2d_3^-$;这时 x_1,x_2 取值范围为 $ABEF$;而实现 $\min d_4^-$,x_1,x_2 取值范围为 $CDGH$。因两者无公共区,只能比较最邻近的 H 点和 E 点,看在哪一点处使($2d_3^-+d_4^-$)实现最小值。H 点的坐标为(20,30),在该点处 $d_3^-=4$,$d_4^-=0$,有($2d_3^-+d_4^-$)$=8$,E 点的坐标为(24,26),在该点处 $d_3^-=0$,$d_4^-=4$,有($2d_3^-+d_4^-$)$=4$。

故 E 点为满意解。因其坐标为(24,26),即该厂每周应装配彩色电视机 24 台,黑白电视机 26 台。

5.3 解目标规划的单纯形法

目标规划的数学模型结构与线性规划的数学模型结构形式上没有本质的区别,所以可用单纯形法求解。但要考虑目标规划的数学模型一些特点,现作以下规定:

(1) 因目标规划问题的目标函数都是求最小化,所以以 $c_j-z_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$为最优准则。

(2) 因非基变量的检验数中含有不同等级的优先因子,即

$$c_j-z_j=\sum \alpha_{kj}P_k,\quad j=1,2,\cdots,n;\quad k=1,2,\cdots,K$$

因 $P_1\gg P_2\gg\cdots\gg P_K$;从每个检验数的整体来看:检验数的正、负首先决定于 P_1 的系数 α_{1j} 的正、负。若 $\alpha_{1j}=0$,这时此检验数的正、负就决定于 P_2 的系数 α_{2j} 的正、负,下面可以此类推。

解目标规划问题的单纯形法的计算步骤如下:

(1) 建立初始单纯形表,在表中将检验数行按优先因子个数分别列成 K 行,置 $k=1$,即对应优先因子行中的第 1 行开始计数。

(2) 检查该行中是否存在负数,且对应列的前 $k-1$ 行的系数是零。若有负数取其中最小者对应的变量为换入变量,转步骤(3)。若无负数,则转步骤(5)。

(3) 按最小比值规则确定换出变量,当存在两个和两个以上相同的最小比值时,选取具有较高优先级别的变量为换出变量。

(4) 按单纯形法进行基变换运算,建立新的计算表,返回步骤(2)。

(5) 当 $k=K$ 时,计算结束。表中的解即为满意解。否则置 $k=k+1$,返回到步骤(2)。

例 5-4 试用单纯形法来求解例 5-2。

将例 5-2 的数学模型转化为标准型

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_s = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, x_s, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

① 取 x_s, d_1^-, d_2^-, d_3^- 为初始基变量，列初始单纯形表，见表 5-2。

② 取 $k=1$，检查 P_1 行的检验数，因该行无负检验数，故转(5)。

表 5-2

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	11	2	1	1							11/1
	d_1^-	0	1	−1		1	−1					
P_2	d_2^-	10	1	[2]				1	−1			10/2
P_3	d_3^-	56	8	10						1	−1	56/10
$c_j - z_j$		P_1					1					
		P_2	−1	−2					2			
		P_3	−8	−10							1	

③ 因 $k=1<K=3$，置 $k=k+1=2$，返回到(2)。

④ $k=2$ 时，查出 P_2 行中的检验数有 −1、−2；取 min (−1,−2)=−2。它对应的变量 x_2 为换入变量，转入(3)。

⑤ 在表 5-2 上计算最小比值

$$\theta = \min\ (11/1, -, 10/2, 56/10) = 10/2$$

它对应的变量 d_2^- 为换出变量，转入(4)。

⑥ 进行基变换运算，计算结果见表 5-3，再返回到(2)。

表 5-3

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	6	3/2		1			−1/2	1/2			4
	d_1^-	5	3/2			1	−1	1/2	−1/2			10/3
	x_2	5	1/2	1				1/2	−1/2			10
P_3	d_3^-	6	[3]					−5	5	1	−1	6/3
$c_j - z_j$		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3	−3					5	−5		1	

⑦ 表 5-3 中 P_1,P_2行检验数全为正,P_3行有两个负值检验数,即变量 x_1 列的 -3 和变量 d_2^+ 列的 -5,因 -5 上面 P_2行的检验数为 1,即 d_2^+ 的检验数应为 $P_2-5P_3>0$,故换入变量只能取 x_1。

⑧ 在表 5-3 中 计算最小比值

$$\theta=\min\left(\frac{6}{3/2},\frac{5}{3/2},\frac{5}{1/2},\frac{6}{3}\right)=\frac{6}{3}$$

其对应变量 d_3^- 为换出变量,转入(4)。

⑨ 进行基变换运算,得新的单纯形表,见表 5-4。

表 5-4

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	3			1			2	-2	$-1/2$	1/2	6
	d_1^-	2				1	-1	3	-3	$-1/2$	1/2	4
	x_2	4		1				4/3	$-4/3$	$-1/6$	1/6	24
	x_1	2	1					$-5/3$	5/3	1/3	$-1/3$	
c_j-z_j		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3								1		

表 5-4 所示的解 $x_1^*=2$,$x_2^*=4$ 为例 5-2 的满意解。此解相当于图 5-2 的 G 点。检查表 5-4 的检验数行,发现非基变量 d_3^+ 的检验数为 0,这表示存在多重满意解。在表 5-4 中以非基变量 d_3^+ 为换入变量,d_1^- 为换出变量,经迭代得到表 5-5。由表 5-5 得到解 $x_1^*=10/3$,$x_2^*=10/3$,此解相当于图 5-1 的 D 点,G、D 两点的凸线性组合都是例 5-2 的满意解。

表 5-5

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	1			1	-1	1	-1	1			
	d_3^+	4				2	-2	6	-6	-1	1	
	x_2	10/3		1		$-1/3$	1/3	1/3	$-1/3$			
	x_1	10/3	1			2/3	$-2/3$	1/3	$-1/3$			
c_j-z_j		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3								1		

5.4 应用举例

例 5-5 某研究所领导在考虑本单位职工的升级调资方案时,依次遵守以下优先级顺序规定:

(1) 不超过年工资总额 3 000 万元;

(2) 提级时,每级的人数不超过定编规定的人数;

(3) Ⅱ,Ⅲ级的升级面尽可能达到现有人数的 20%,且无越级提升。

此外,Ⅲ级不足编制的人数可录用新职工,又Ⅰ级的职工中有 10%要退休。

有关资料汇总于表 5-6 中,问该领导应如何拟订一个满意的方案。

表 5-6

等级	工资额/(万元/年)	现有人数/人	编制人数/人
Ⅰ	10.0	100	120
Ⅱ	7.5	120	150
Ⅲ	5.0	150	150
合计		370	420

解 设 x_1, x_2, x_3 分别表示提升到Ⅰ、Ⅱ级和录用到Ⅲ级的新职工人数。对各目标确定的优先因子为:

P_1——不超过年工资总额 3 000 万元;

P_2——每级的人数不超过定编规定的人数;

P_3——Ⅱ、Ⅲ级的升级面尽可能达到现有人数的 20%。

先分别建立各目标约束。

年工资总额不超过 3 000 万元

$$10(100-100\times0.1+x_1)+7.5(120-x_1+x_2)+5.0(150-x_2+x_3)+d_1^- -d_1^+ =3\,000(\text{万元})$$

每级的人数不超过定编规定的人数:

对Ⅰ级有 $100(1-0.1)+x_1+d_2^- -d_2^+ =120(\text{人})$

对Ⅱ级有 $120-x_1+x_2+d_3^- -d_3^+ =150(\text{人})$

对Ⅲ级有 $150-x_2+x_3+d_4^- -d_4^+ =150(\text{人})$

Ⅱ,Ⅲ级的升级面不大于现有人数的 20%:

对Ⅱ级有 $x_1+d_5^- -d_5^+ =120\times0.2(\text{人})$

对Ⅲ级有 $x_2+d_6^- -d_6^+ =150\times0.2(\text{人})$

目标函数：$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3(d_5^- + d_6^-)$

经过整理后得下列目标规划模型

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3(d_5^- + d_6^-)$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + 2.5x_2 + 5.0x_3 + d_1^- - d_1^+ = 450 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 30 \\ -x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ -x_2 + x_3 + d_4^- - d_4^+ = 0 \\ x_1 + d_5^- - d_5^+ = 24 \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 30 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 6) \end{cases}$$

将求得的部分变量的结果及其含义汇总于表 5-7，在表中未列出的变量，均在满意解时取值为 0。

表 5-7

变　量	含　义	解 1
x_1	晋升到Ⅰ级的人数/人	24
x_2	晋升到Ⅱ级的人数/人	30
x_3	新招收Ⅲ级的人数/人	30
d_1^-	工资总额的结余额/万元	16.5
d_2^-	Ⅰ级缺编人数/人	6
d_3^-	Ⅱ级缺编人数/人	24
d_4^-	Ⅲ级缺编人数/人	0

例 5-6　已知有三个产地给四个销地供应某种产品，产销地之间的供需量和单位运价见表 5-8。有关部门在研究调运方案时依次考虑以下七项目标，并规定其相应的优先等级：

P_1——B_4 是重点保证单位，必须全部满足其需要；

P_2——A_3 向 B_1 提供的产量不少于 100；

P_3——每个销地的供应量不小于其需要量的 80%；

P_4——所定调运方案的总运费不超过最小运费调运方案的 10%；

P_5——因路段的问题，尽量避免安排将 A_2 的产品往 B_4；

P_6——给 B_1 和 B_3 的供应率要相同；

P_7——力求总运费最省。

试求满意的调运方案。

表　5-8

产地	销　　地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	2	6	7	300
A_2	3	5	4	6	200
A_3	4	5	2	3	400
销量	200	100	450	250	900/1 000

解　用表上作业法求得最小运费的调运方案见表 5-9。这时得最小运费为 2 950 元，再根据提出的各项目标的要求建立目标规划的模型。模型中 x_{ij} 为由 i 产地调运给 j 销地的产品数。

表　5-9

产地	销　　地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	200	100			300
A_2	0		200		200
A_3			250	150	400
虚设点				100	100
销量	200	100	450	250	1 000/1 000

供应约束

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqslant 300$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqslant 200$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leqslant 400$$

需求约束

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_1^- - d_1^+ = 200$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_2^- - d_2^+ = 100$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_3^- - d_3^+ = 450$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_4^- - d_4^+ = 250$$

A_3 向 B_1 提供的产品量不少于 100

$$x_{31}+d_5^- - d_5^+ = 100$$

每个销地的供应量不小于其需要量的 80%

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_6^- - d_6^+ = 200\times 0.8$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_7^- - d_7^+ = 100\times 0.8$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_8^- - d_8^+ = 450\times 0.8$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_9^- - d_9^+ = 250\times 0.8$$

调运方案的总运费不超过最小运费调运方案的 10%

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+d_{10}^{-}-d_{10}^{+}=2\,950(1+10\%)$$

因路段的问题,尽量避免安排将 A_2 的产品运往 B_4

$$x_{24}+d_{11}^{-}-d_{11}^{+}=0$$

给 B_1 和 B_3 的供应率要相同

$$(x_{11}+x_{21}+x_{31})-\frac{200}{450}(x_{13}+x_{23}+x_{33})+d_{12}^{-}-d_{12}^{+}=0$$

力求总运费最省

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+d_{13}^{-}-d_{13}^{+}=2\,950$$

目标函数为

$$\min z=P_1d_4^{-}+P_2d_5^{-}+P_3(d_6^{-}+d_7^{-}+d_8^{-}+d_9^{-})+P_4d_{10}^{+}+P_5d_{11}^{+}+P_6(d_{12}^{-}+d_{12}^{+})+P_7d_{13}^{+}$$

计算结果,得到满意调运方案见表 5-10。

表 5-10

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1		100		200	300
A_2	90		110		200
A_3	100		250	50	400
虚设点	10		90		100
销量	200	100	450	250	1 000/1 000

总运费为

$$\begin{aligned}C&=3\times90+4\times100+2\times100+4\times110+2\times250+7\times200+3\times50\\&=3\,360(\text{元})\end{aligned}$$

注　记

用单纯形法求解线性规划问题是令人满意的算法。但在1972年V. Klee和G. Minty构造了一个 n 个变量 $2n$ 个不等式约束的例子。证明用单纯形法求解此线性规划问题时,其计算次数为 2^n。从计算复杂性的标准来看,不是问题规模 n 的多项式函数。凡算法所需计算工作量是问题规模(变量数或方程数) n 的多项式函数时,这算法为有效算法,如高斯消去法的计算量为 $n^3/3$ 的加法,$n^3/2$ 的乘法,$n^2/2$ 的除法。即为 $0(kn^3)$。若某算法的计算量是问题规模的指数式函数 a^n 时,就不是有效算法。因而不能肯定单纯形法是有效算法。于是就产生一问题,能否找到一种解线性规划问题的肯定的多项式算法。1979年苏联科学院计算中心的哈奇扬(ХАЧИЯН)发表了求解线性规划问题的多项式算法一文,解决了这问题。他提出的椭球算法,并证明了线性规划问题存在多项式算法。但哈奇扬的椭球算法在应用

时，迭代次数比单纯形法还要多，因此理论上意义很大，但实用价值不大。此后卡玛卡尔（N. Karmarkar）又提出了一种新的投影尺度算法（参见参考资料[12]）。它本质上是一种内点算法，也属多项式算法。

运筹学的应用与计算机软件的开发紧密联系，规模稍大的运筹学模型是无法用手工计算来求解的。国内目前常用的计算机软件主要有 LINDO，LINGO，WinQSB，MATLAB 和 EXCEL-Risk Solver Platform，Premium Solver Platform 等求解器（solver）。软件商品化进展很快，不时有新版本推出，不需要自己开发。商品品种很多，如 CPLEX，其中用于教学目的软件可从网上免费下载，但有限使用。

对线性规划模型在实践中的模型一般含几百到几千个变量和约束条件，有时变量和约束条件个数可达几十万个到几百万个之多。对这类大规模的模型要用手工建模及输入计算机是不现实的。因此近几年已开发诸如 AMPL（A Mathematical Programming Language），GAMS（The General Algebraic Modeling System）等建模语言，有效地解决了大规模线性规划模型建模和优化计算问题，并还可以用于对这类模型的管理，包括数据存取，将数据转换成模型参数，根据需要修改模型参数，分析模型的解，以及产生决策制定者的内部总结报告和文本等，并与求解器结合使用。介绍以下网址供查阅。

http://www.solver.com/student

http://www.ampl.com

http://www.theindustrialanalyst.com/analysis_software/linear_programming_tool.htm

http://www-01.ibm.com/software/cn/websphere/ilog/products/ampl/

http://www-01.ibm.com/software/cn/websphere/ilog/products/cplex/index.html

习题

5.1　若用以下表达式作为目标规划的目标函数，试述其逻辑是否正确。

（1）$\max z=d^-+d^+$　　（2）$\max z=d^- - d^+$

（3）$\min z=d^-+d^+$　　（4）$\min z=d^- - d^+$

5.2　分别用图解法和单纯形法找出以下目标规划问题的满意解。

（1）
$$\min z=P_1(d_1^-+d_1^+)+P_2(2d_2^+ + d_3^+)$$
$$\begin{cases} x_1-10x_2+d_1^- - d_1^+ = 50 \\ 3x_1+5x_2+d_2^- - d_2^+ = 20 \\ 8x_1+6x_2+d_3^- - d_3^+ = 100 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+ \geqslant 0, \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

（2）
$$\min z=P_1(d_3^+ + d_4^+)+P_2 d_1^+ + P_3 d_2^- + P_4(d_3^- + 1.5d_4^-)$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+d_1^- - d_1^+ = 40 \\ x_1+x_2+d_2^- - d_2^+ = 100 \\ x_1+d_3^- - d_3^+ = 30 \\ x_2+d_4^- - d_4^+ = 15 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+ \geqslant 0, \quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$

(3)
$$\min z=P_1d_2^+ +P_1d_2^- +P_2d_1^-$$
$$\begin{cases} x_1+\ 2x_2+d_1^- -d_1^+ =10 \\ 10x_1+12x_2+d_2^- -d_2^+ =62.4 \\ 2x_1+\quad x_2 \qquad\qquad \leqslant 8 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+ \geqslant 0;\quad i=1,2 \end{cases}$$

(4)
$$\min z=P_1d_1^- +P_2d_2^+ +P_3(5d_3^- +3d_4^-)+P_4d_1^+$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+d_1^- -d_1^+ =80 \\ x_1+x_2+d_2^- -d_2^+ =90 \\ x_1+\qquad d_3^- -d_3^+ =70 \\ \qquad x_2+d_4^- -d_4^+ =45 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+ \geqslant 0;\quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$

5.3 根据本书习题2.10给出的某糖果厂生产计划优化的各项数据，若该糖果厂确定生产计划的目标函数为：

P_1——利润不低于某预期值；

P_2——甲、乙、丙三种糖果的原材料比例性满足配方要求；

P_3——充分利用又不超过规定的原材料供应量。

根据上述要求，构建目标规划的数学模型。

5.4 南溪市计划在下一年度预算中购置一批救护车，已知每辆购置价为20万元。救护车用于所属 A,B 两个郊区县，各分配 x_A 辆和 x_B 辆。A 县救护站从接到呼叫到出动的响应时间为$(40-3x_A)$分钟；B 县救护站的响应时间为$(50-4x_B)$分钟。该市确定如下优先目标：

P_1——用于救护车的购置费不超过400万元；

P_2——A 县的响应时间不超过8分钟；

P_3——B 县的响应时间不超过8分钟。

要求：

(1) 建立目标规划模型，并求出满意解；

(2) 若对优先级目标函数进行调整，将 P_2 调为 P_1，P_3 调为 P_2，P_1 调为 P_3。试重新构建目标规划的数学模型，并找出新的满意解。

5.5 某商标的酒是用三种等级的酒兑制而成。若这三种等级的酒每天供应量和单位成本见表5-11。

表 5-11

等　级	日供应量/kg	成本/(元/kg)
Ⅰ	1 500	6
Ⅱ	2 000	4.5
Ⅲ	1 000	3

设该种牌号酒有三种商标(红、黄、蓝),各种商标的酒对原料酒的混合比及售价,见表5-12。决策者规定:首先必须严格按规定比例兑制各商标的酒;其次是获利最大;最后是红商标的酒每天至少生产2 000kg,试列出目标规划的数学模型。

表　5-12

商　标	兑制要求/%	售价/(元/kg)
红	Ⅲ少于10　　Ⅰ多于50	5.5
黄	Ⅲ少于70　　Ⅰ多于20	5.0
蓝	Ⅲ少于50　　Ⅰ多于10	4.8

参考资料

[1] Dantzig G B. Linear Programming 1: Introduction. Springer,New York,1997

[2] Dantzig G B. Linear Programming 2: Theory and Extensions. Springer,New York,2003

[3] Vanderbei R J. Linear Programming: Foundations and Extensions. 3rd ed., Springer, New York,2008

[4] 裘宗沪.解线性规划的单纯形算法中避免循环的几种方法.数学的实践与认识,1978年,第4期

[5] Schrage L. Optimization Modeling with LINGO,LINDO System Press,Chicago,IL,2008

[6] Bazaraa M S. Linear Programming and Network Flow. Second ed. John Wiley & Sons,1990

[7] Williams H P. Model Building in Mathematical Programming. Fourth ed. Wiley,1999

[8] J. P. Ignizio. Goal Programming and Extensions. D. C. Heath and Company,1976

[9] Hamdy A Taha. Operations Research—An Introduction. Eighth ed. Pearson Education Inc. 2007

[10] Cliff Ragsdale. Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Management Science. 6th ed., Virginia Polytechnic Institute and State University College Bookstore 2011

[11] 越民义.椭球算法介绍.运筹学杂志,1983年,第1期

[12] N. Karmarkar. A New Polynomial Time Argorithm for Linear Progamming. Proceedings of 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 1984

[13] Frederick S. Hillier 等著.运筹学导论(第9版).北京:清华大学出版社,2010