

CHAPTER 6

第 6 章

整数线性规划

6.1 整数线性规划问题的提出

在前面讨论的线性规划问题中,有些最优解可能是分数或小数,事实上,线性规划是连续变量的线性优化问题。但在实际中,常有要求解答必须是整数的情形(称为整数解)。例如,所求解是机器的台数、完成工作的人数或装货的车辆数等,分数或小数的解答就不合要求。为了满足整数解的要求,初看起来,似乎只要把已得到的带有分数或小数的解经过“舍入化整”就可以了。但这常常是不行的,因为化整后不见得是可行解;或虽是可行解,但不一定是最优解。因此,对求最优整数解的问题,有必要另行研究。我们称这样的问题为整数线性规划(integer linear programming),简称 ILP,整数线性规划是最近几十年来发展起来的数学规划论中的一个分支。

整数线性规划中如果所有的变量都限制为(非负)整数,就称为纯整数线性规划(pure integer linear programming)或称为全整数线性规划(all integer linear programming);如果仅一部分变量限制为整数,则称为混合整数线性规划(mixed integer linear programming)。整数线性规划的一种特殊情形是 0-1 规划,它的变量取值仅限于 0 或 1。本章最后讲到的指派问题就是一个 0-1 规划问题。

现举例说明用前述单纯形法求得的解不能保证是整数最优解。

例 6-1 某厂拟用集装箱托运甲、乙两种货物,每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如表 6-1 所示。问两种货物各托运多少箱,可使获得利润为最大?

表 6-1

货 物	体积/(m^3 /箱)	重量/(100kg/箱)	利润/(百元/箱)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24m^3	1 300kg	

现在我们解这个问题,设 x_1, x_2 分别为甲、乙两种货物的托运箱数(当然都是非负整数)。这是一个(纯)整数规划问题,用数学式可表示为

$$\begin{aligned}
 \max z &= 20x_1 + 10x_2 & \text{①} \\
 \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases} & & \begin{matrix} \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \\ \text{⑤} \end{matrix} & (6-1)
 \end{aligned}$$

它和线性规划问题的区别仅在于最后的条件⑤。现在我们暂不考虑这一条件,即解式①~④(以后我们称这样的问题为与原问题相应的线性规划问题),很容易求得最优解为

$$x_1 = 4.8, \quad x_2 = 0, \quad \max z = 96$$

但 x_1 是托运甲种货物的箱数,现在它不是整数,所以不合条件⑤的要求。

是不是可以把所得的非整数的最优解经过“化整”就可得到合于条件⑤的整数最优解呢?如将 $(x_1 = 4.8, x_2 = 0)$ 凑整为 $(x_1 = 5, x_2 = 0)$,这样就破坏了条件②(关于体积的限制),因而它不是可行解;如将 $(x_1 = 4.8, x_2 = 0)$ 舍去尾数 0.8,变为 $(x_1 = 4, x_2 = 0)$,这当然满足各约束条件,因而是可行解,但不是最优解,因为

当 $x_1 = 4, x_2 = 0$ 时 $z = 80$;

但当 $x_1 = 4, x_2 = 1$ (这也是可行解)时, $z = 90$ 。

本例还可以用图解法来说明。见图 6-1。非整数的最优解在 $C(4.8, 0)$ 点达到。图中画

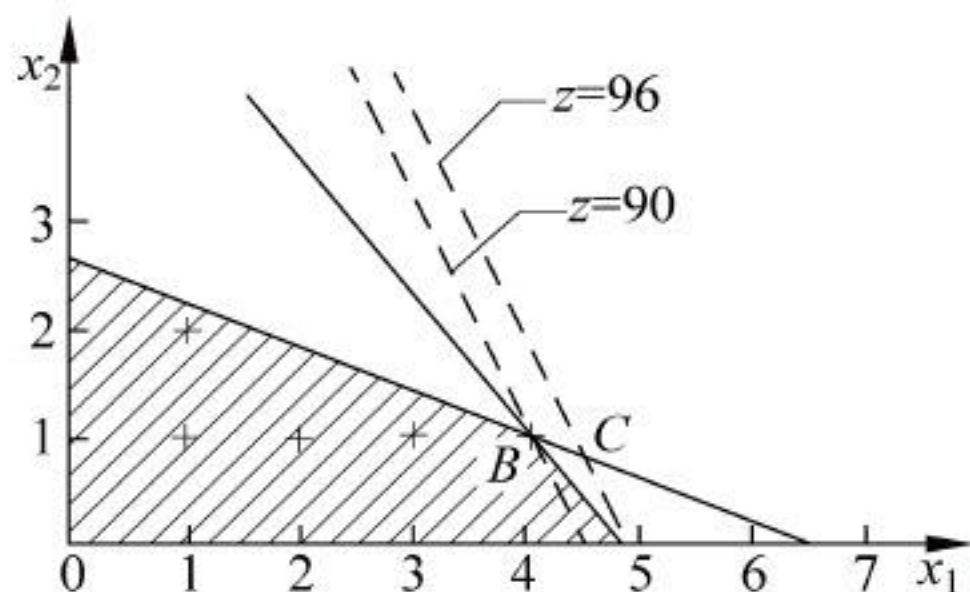


图 6-1

“+”号的点表示可行的整数解,可见整数线性规划问题的可行域是某相应线性规划可行域中的整数点集(或称格点集)。凑整的 $(5, 0)$ 点不在可行域内,而 C 点又不合于条件⑤。为了满足题中要求,表示目标函数的 z 的等值线必须向原点(即向可行域内部方向)平行移动,直到第一次遇到带“+”号的 B 点 $(4, 1)$ 为止。这样, z 的等值线就由 $z = 96$ 变到 $z = 90$,它们的差值

$$\Delta z = 96 - 90 = 6$$

表示利润的降低,这是由于变量的不可分性(装箱)所引起的。

由例 6-1 看出,将其相应的线性规划的最优解“化整”来解原整数规划,虽是最容易想到的,但常常得不到整数规划的最优解,甚至根本不是可行解。因此有必要对整数规划的解法进行专门研究。

6.2 分支定界解法

在求解整数规划时,如果可行域是有界的,首先容易想到的方法就是穷举变量的所有可行的整数组合,就像在图 6-1 中画出所有“+”号的点那样,然后比较它们的目标函数值以定出最优解。对于小规模的问题,变量数很少,可行的整数组合数也是很小时,这个方法可行的,也是有效的。在例 6-1 中,变量只有 x_1 和 x_2 ; 由条件②, x_1 所能取的整数

值为 0、1、2、3、4 共 5 个；由条件③, x_2 所能取的整数值为 0、1、2 共 3 个, 它的组合(不都是可行的)数是 $3 \times 5 = 15$ (个), 穷举法还是勉强可用的。对于大规模的问题, 可行的整数组合数是很大的。例如在 6.5 节的指派问题(这也是整数规划)中, 将 n 项任务指派 n 个人去完成, 不同的指派方案共有 $n!$ 种, 当 $n=10$, 这个数就超过 300 万; 当 $n=20$, 这个数就超过 $20! = 2.432\,9 \times 10^{18}$ 。如果一一计算, 就是用每秒百万次的计算机, 也要几万年的工夫, 很明显, 解这样的题, 穷举法是不可取的。

所以我们的方法一般应是仅检查可行的整数组合的一部分, 就能定出最优的整数解。分支定界解法(branch and bound method)就是其中的一个。分支定界法可用于解纯整数或混合的整数规划问题。在 20 世纪 60 年代初由 Land Doig 和 Dakin 等人提出。由于该方法灵活且便于用计算机求解, 所以现在它已是解整数规划的重要方法。现在大部分整数规划商业软件, 如 CPLEX 和 BARON 等都是基于分支定界法框架的。

设有最大化的整数规划问题 A , 与它相应的线性规划为问题 B , 从解问题 B 开始, 若其最优解不符合 A 的整数条件, 那么 B 的最优目标函数值必是 A 的最优目标函数值 z^* 的上界, 记作 \bar{z} ; 而 A 的任意可行解的目标函数值将是 z^* 的一个下界 \underline{z} 。分支定界法就是将 B 的可行域分成子区域(称为分支)的方法, 逐步减小 \bar{z} 和增大 \underline{z} , 最终求到 z^* 。现用下例来说明。

例 6-2 求解 A

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_1 + 90x_2 & \text{①} \\ \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 &\leq 56 & \text{②} \\ 7x_1 + 20x_2 &\leq 70 & \text{③} \\ x_1, x_2 &\geq 0 & \text{④} \\ x_1, x_2 &\text{为整数} & \text{⑤} \end{cases} & (6-2) \end{aligned}$$

解 先不考虑条件⑤, 即解相应的线性规划 B 式①~式④(见图 6-2), 得最优解

$$x_1 = 4.81, \quad x_2 = 1.82, \quad z_0 = 356$$

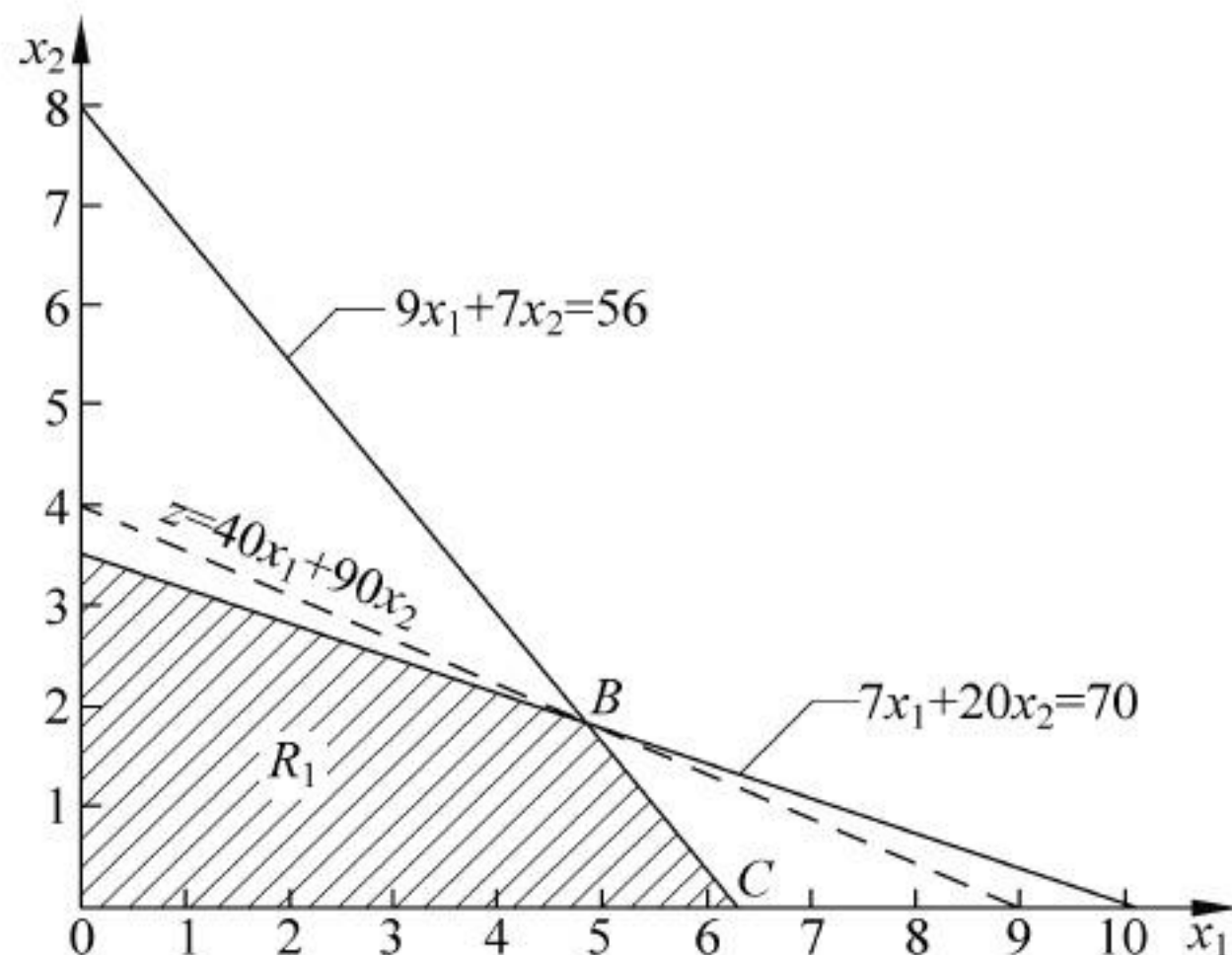


图 6-2

可见它不符合整数条件⑤,但 $z_0 = 356$ 是问题 A 的最优目标函数值 z^* 的上界,记作 $z_0 = \bar{z}$ 。而 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时,显然是问题 A 的一个整数可行解,其相应的 $z = 0$,是 z^* 的一个下界,记作 $\underline{z} = 0$,即 $0 \leq z^* \leq 356$ 。

分支定界法的解法,是基于其中非整数变量的解进行分支的,如 x_1 ,在问题 B 的解中 $x_1 = 4.81$ 。基于 x_1 ,对原问题增加两个约束条件

$$x_1 \leq 4, \quad x_1 \geq 5$$

可将原问题分解为两个子问题 B_1 和 B_2 (即两支),给每支增加了一个约束条件,如图 6-3 所示。这并不影响问题 A 的可行域,不考虑整数条件解问题 B_1 和 B_2 ,称此为第一次迭代。得到最优解,如表 6-2 所示。

表 6-2

问题 B_1	问题 B_2
$z_1 = 349$	$z_2 = 341$
$x_1 = 4.00$	$x_1 = 5.00$
$x_2 = 2.10$	$x_2 = 1.57$

显然没有得到全部变量是整数的解。因 $z_1 > z_2$,故将 \bar{z} 改为 349,那么必存在最优整数解,得到 z^* ,并且

$$0 \leq z^* \leq 349$$

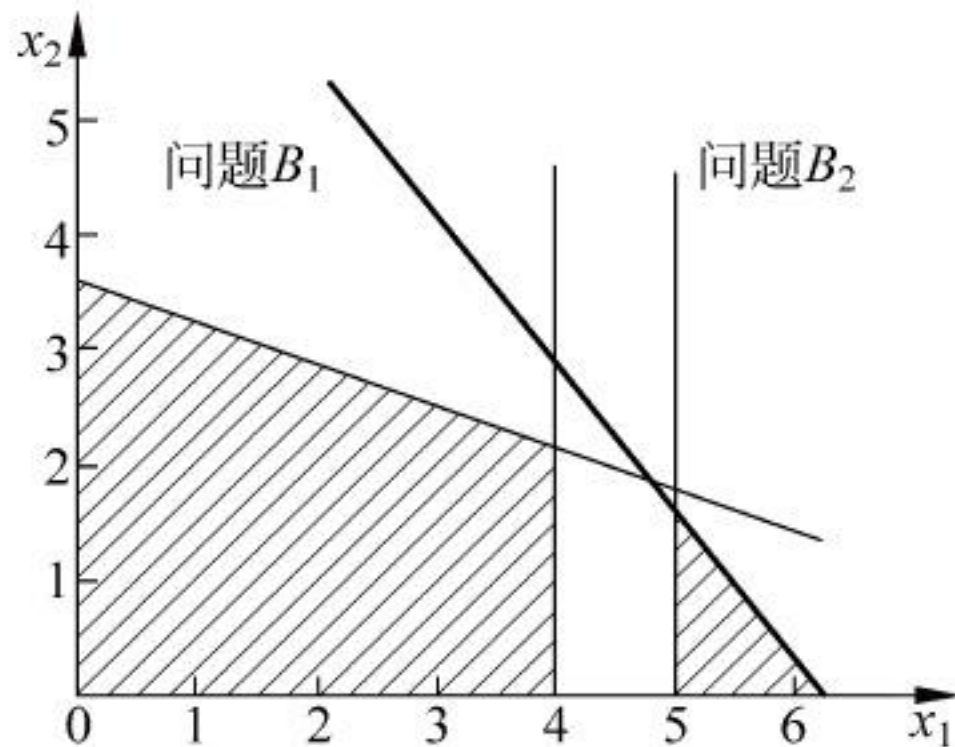


图 6-3

继续对问题 B_1 和 B_2 进行分解,因 $z_1 > z_2$,故先分解 B_1 为两支。增加条件 $x_2 \leq 2$ 者,称为问题 B_3 ; 增加条件 $x_2 \geq 3$ 者称为问题 B_4 。在图 6-3 中再舍去 $x_2 > 2$ 与 $x_2 < 3$ 之间的可行域,再进行第二次迭代。解题过程的结果都列在图 6-4 中。可见问题 B_3 的解已都是整数,它的目标函数值 $z_3 = 340$,可取为 \underline{z} ,而它大于 $z_4 = 327$ 。所以再分解 B_4 已无必要。而问题 B_2 的 $z_2 = 341$,所以 z^* 可能在 $340 \leq z^* \leq 341$ 之间有整数解。于是对 B_2 分解,得问题 B_5 ,为非整数解,且 $z_5 = 308 < z_3$,问题 B_6 为无可行解。于是可以断定

$$z_3 = \underline{z} = z^* = 340$$

问题 B_3 的解 $x_1 = 4.00, x_2 = 2.00$ 为最优整数解。

从以上解题过程可得用分支定界法求解整数规划(最大化)问题的步骤为:

将要求解的整数规划问题称为问题 A,将与它相应的线性规划问题称为问题 B。

(1) 解问题 B,可能得到以下情况之一。

- ① B 没有可行解,这时 A 也没有可行解,则停止。
- ② B 有最优解,并符合问题 A 的整数条件,B 的最优解即为 A 的最优解,则停止。
- ③ B 有最优解,但不符合问题 A 的整数条件,记它的目标函数值为 \bar{z}_0 。

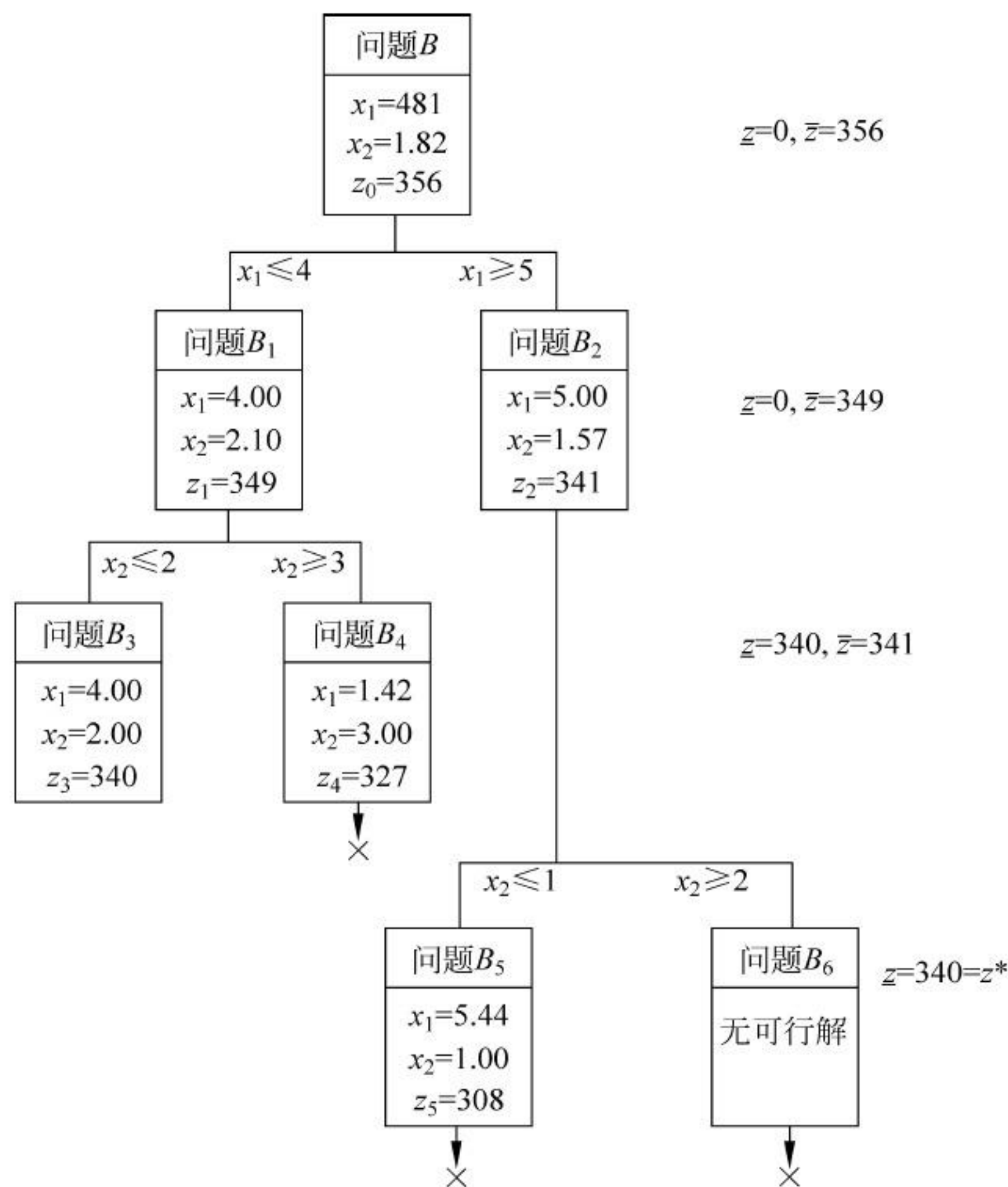


图 6-4

(2) 用观察法找问题 A 的一个整数可行解, 如可取 $x_j = 0, j = 1, \dots, n$, 试探, 求得其目标函数值, 并记作 \underline{z} 。以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值; 这时有

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

其中, \underline{z} 和 \bar{z} 分别为 z^* 的下界和上界, 初始上界即 \bar{z}_0 。

(3) 进行迭代。

第一步: 分支, 在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j , 其值为 b_j , 以 $[b_j]$ 表示小于 b_j 的最大整数。构造两个约束条件

$$x_j \leq [b_j] \quad \text{和} \quad x_j \geq [b_j] + 1$$

将这两个约束条件, 分别加入问题 B , 形成两个后继规划问题 B_1 和 B_2 。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

定界, 以每个后继问题为一分支标明求解的结果, 与其他问题的解比较, 找出最优目标函数值最大者作为新的上界 \bar{z} 。从已符合整数条件的各分支中, 找出目标函数值为最大者作为新的下界 \underline{z} , 若无可行解, $\underline{z} = 0$ 。

第二步: 比较与剪支, 各分支的最优目标函数值中若有小于 \underline{z} 者, 则剪掉这支(用打“×”表示), 即以后不再考虑了。若大于 \underline{z} , 且不符合整数条件, 则重复第一步。一直到最后得到 $z^* = \underline{z}$ 为止, 得最优整数解 $x_j^*, j=1, \dots, n$ 。

用分支定界法可解纯整数规划问题和混合整数规划问题。它比穷举法优越。因为它仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解, 计算量比穷举法小。问题是若变量数目很大, 使用分支定界法的计算工作量也是相当可观的。

6.3 割平面解法

与分支定界法的相同点是, 割平面解法也是将求解整数线性规划的问题转化为一系列普通线性规划问题求解。

割平面解法的思路是: 首先不考虑变量 x_i 是整数这一条件, 仍然先解其相应的线性规划, 若得到非整数的最优解, 则增加能割去非整数解的线性约束条件(用几何术语, 称为割平面), 使得由原可行域中切割掉一部分, 切割掉的部分只包含非整数解, 即没有切割掉任何整数可行解。本方法将指出怎样找到适当的割平面(不见得一次就找到), 使切割后最终得到这样的可行域, 它的一个有整数坐标的极点恰好是问题的最优解。这个方法是 R. E. Gomory 提出来的, 所以又称为 Gomory 的割平面法。以下只讨论纯整数规划的情形, 现举例说明。

例 6-3 求解

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 & \text{①} \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 & \text{②} \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 & \text{③} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \text{④} \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} & \text{⑤} \end{cases} & \text{(6-3)} \end{aligned}$$

如不考虑条件⑤, 容易求得相应的线性规划的最优解

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{7}{4}, \quad \max z = \frac{10}{4}$$

它就是图 6-5 中域 R 的极点 A , 但不合于整数条件。现设想, 如能找到像 CD 那样的直线去切割域 R (图 6-6), 去掉三角形域 ACD , 那么具有整数坐标的 C 点(1,1)就是域 R' 的一个极点, 如在域 R' 上求解式①~式④, 而得到的最优解又恰巧在 C 点就得到原问题的整数解, 所以解法的关键就是怎样构造一个这样的“割平面” CD , 尽管它可能不是唯一的, 也可能不是一步能求到的。下面仍就本例说明。

在原问题的前两个不等式中增加非负松弛变量 x_3, x_4 , 使两式变成等式约束

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \text{⑥} \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 & \text{⑦} \end{cases}$$

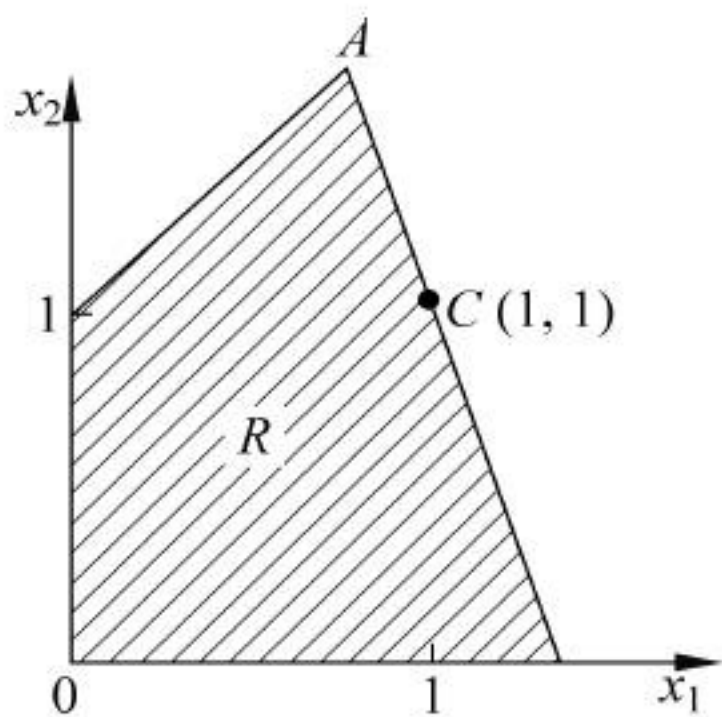


图 6-5

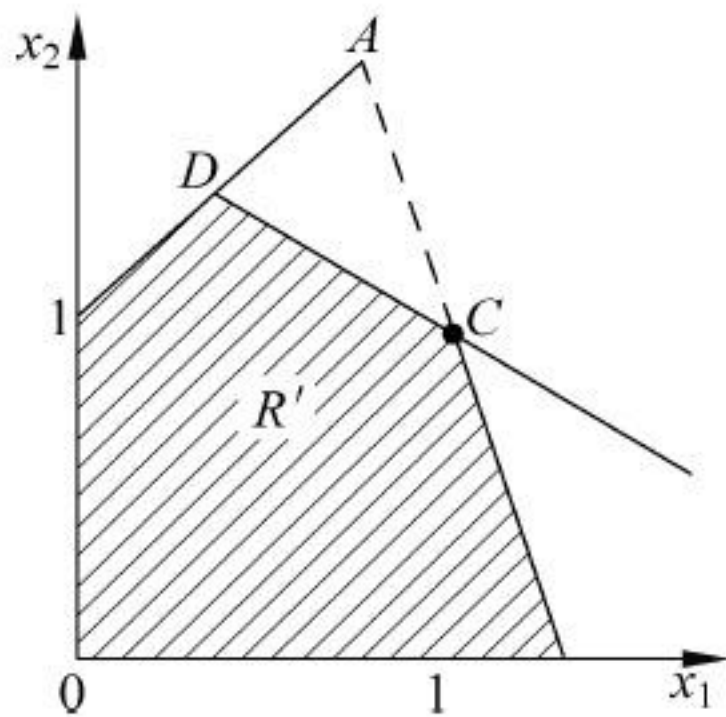


图 6-6

不考虑条件⑤,用单纯形表解题,见表 6-3。

表 6-3

	c_j			1	1	0	0
	C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
初始计算表	0	x_3	1	-1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
	$c_j - z_j$		0	1	1	0	0
最终计算表	1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
	$c_j - z_j$		-5/2	0	0	-1/2	-1/2

从表 6-3 的最终计算表中,得到非整数的最优解

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{7}{4}, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad \max z = \frac{5}{2}$$

不能满足整数最优解的要求。考虑其中的非整数变量,可以最终计算表中得到相应的关系式

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数两部分之和

$$(1+0)x_1 + \left(-1+\frac{3}{4}\right)x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 0 + \frac{3}{4}$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 1 + \frac{3}{4}$$

然后将整数部分与分数部分分开,移到等式左右两边,得到

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

$$x_2 - 1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

现考虑整数条件⑤,要求 x_1, x_2 都是非负整数,于是由条件⑥、⑦可知 x_3, x_4 也都是非负整数^①。在上式中(其实只考虑一式即可)从等式左边看是整数;等式右边也应是整数。但在等式右边的(·)内是正数;所以等式右边必是非正数。就是说,右边的整数值最大是零。于是整数条件⑤可由下式所代替;

$$\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right) \leq 0$$

即

$$-3x_3 - x_4 \leq -3 \quad (8)$$

这就得到一个切割方程(或称为切割约束),将它作为增加的约束条件,再解例 6-3。

引入松弛变量 x_5 , 得到等式

$$-3x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

将这个新的约束方程添加到表 6-3 的最终计算表,得表 6-4。

从表 6-4 的 b 列中可看到,这时得到的是非可行解,于是需要用对偶单纯形法继续计算。选择 x_5 为换出变量,计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{\alpha_{lj}} \mid \alpha_{lj} < 0 \right) = \min \left(\frac{-\frac{1}{2}}{-3}, \frac{-\frac{1}{2}}{-1} \right) = \frac{1}{6}$$

表 6-4

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	-3	0	0	-3	-1	1
$c_j - z_j$		-5/2	0	0	-1/2	-1/2	0

将 x_3 作为换入变量,再按原单纯形法进行迭代,得表 6-5。

表 6-5

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	1	1	0	0	1/3	-1/12
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
0	x_3	1	0	0	1	1/3	-1/3
$c_j - z_j$		-2	0	0	0	-1/3	-1/6

① 这一点对以下推导是必要的,如不都是整数,则应在引入 x_3, x_4 之前乘以适当常数,使之都是整数。

由于 x_1, x_2 的值已都是整数, 解题已完成。

注意: 新得到的约束条件⑧

$$-3x_3 - x_4 \leq -3$$

如用 x_1, x_2 表示, 由式⑥、式⑦得

$$3(1+x_1-x_2) + (4-3x_1-x_2) \geq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

这就是 (x_1, x_2) 平面内形成新的可行域, 即包括平行于 x_1 轴的直线 $x_2=1$ 和这直线下的可行区域, 整数点也在其中, 没有被切割掉。直观地表示在图 6-7 中。但从解题过程来看, 这一步是不必要的。

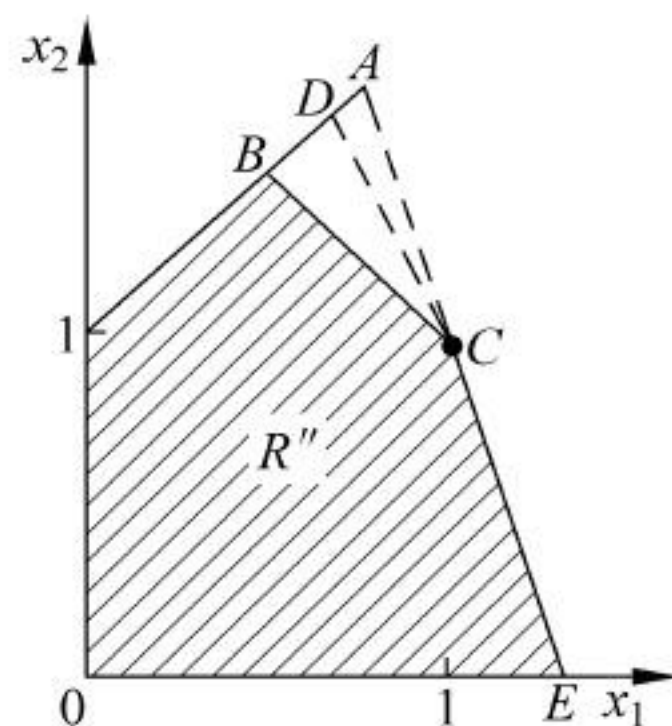


图 6-7

现把求一个切割方程的步骤归纳为:

(1) 令 x_i 是相应线性规划最优解中为分数值的一个基变量, 由单纯形表的最终表得到

$$x_i + \sum_k \alpha_{ik} x_k = b_i \quad (6-4)$$

其中, $i \in Q$ (Q 指构成基变量号码的集合);

$k \in K$ (K 指构成非基变量号码的集合)。

(2) 将 b_i 和 α_{ik} 都分解成整数部分 N 与非负真分数 f 之和, 即

$$\begin{aligned} b_i &= N_i + f_i, & \text{其中 } 0 < f_i < 1 \\ \alpha_{ik} &= N_{ik} + f_{ik}, & \text{其中 } 0 \leq f_{ik} < 1 \end{aligned} \quad (6-5)$$

而 N 表示不超过 b 的最大整数。例如,

$$\begin{aligned} \text{若 } b &= 2.35, & \text{则 } N &= 2, f = 0.35 \\ \text{若 } b &= -0.45, & \text{则 } N &= -1, f = 0.55 \end{aligned}$$

代入式(6-4)得

$$x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k \quad (6-6)$$

(3) 现在提出变量(包括松弛变量, 参阅例 6-3 的注)为整数的条件(当然还有非负的条件), 这时, 上式由左边看必须是整数, 但由右边看, 因为 $0 < f_i < 1$, 所以不能为正值, 即

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \leq 0 \quad (6-7)$$

这就是一个切割方程。

由式(6-4)、式(6-6)和式(6-7)可知:

① 切割方程式(6-7)真正进行了切割, 至少把非整数最优解这一点割掉了。

② 没有割掉整数解, 这是因为相应的线性规划的任意整数可行解都满足式(6-7)的缘故。

Gomory 的割平面法自 1958 年被提出后, 即引起人们广泛的注意, 至今还在不断地改进。

6.4 0-1 型整数线性规划

0-1 型整数规划是整数规划中的特殊情形,它的变量 x_i 仅取值 0 或 1。这时 x_i 称为 0-1 变量,或称二进制变量^①。 x_i 仅取值 0 或 1 这个条件可由下述约束条件所代替。

$$\begin{aligned} x_i &\leq 1 \\ x_i &\geq 0, \quad \text{整数} \end{aligned}$$

它和一般整数规划的约束条件形式是一致的。如果变量 x_i 不是仅取值 0 或 1,而是可取其他范围的非负整数,这时可利用二进制的记数法将它用若干个 0-1 变量来代替。例如,在给定的问题中,变量 x 可取 0 与 10 之间的任意整数时,令

$$x = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + 2^2 x_2 + 2^3 x_3$$

则 x 就可用 4 个 0-1 变量 x_0, x_1, x_2, x_3 来代替,因此 0-1 变量也称二进制变量。

在实际问题中,如果引入 0-1 变量,就可以把有各种情况需要分别讨论的线性规划问题统一在一个问题中讨论了。在本节我们先介绍引入 0-1 变量的实际问题,再研究解法。

6.4.1 引入 0-1 变量的实际问题

1. 投资场所的选定——相互排斥的计划

例 6-4 某公司拟在市区的东、西、南三区建立门市部。拟议中有 7 个位置(点) A_i ($i=1,2,\dots,7$)可供选择。规定:

在东区,由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选两个;

在西区,由 A_4, A_5 两个点中至少选一个;

在南区,由 A_6, A_7 两个点中至少选一个。

如选用 A_i 点,设备投资估计为 b_i 元,每年可获利润估计为 c_i 元,但投资总额不能超过 B 元。问应选择哪几个点可使年利润为最大?

解题时先引入 0-1 变量 x_i ($i=1,2,\dots,7$)

令

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } A_i \text{ 点被选用,} \\ 0, & \text{当 } A_i \text{ 点没被选用.} \end{cases} \quad i=1,2,\dots,7$$

于是问题可表示为

^① 如果变量 x_i 不是仅取值 0 或 1,而是可取其他范围的非负整数,这时可利用二进制的记数法将它用若干个 0-1 变量来代替。例如,在给定的问题中,变量 x 可任取 0 与 10 之间的任意整数时,令

$$x = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + 2^2 x_2 + 2^3 x_3$$

这时, x 就可用 4 个 0-1 变量 x_0, x_1, x_2, x_3 来代替。

$$\begin{aligned} \max z = & \sum_{i=1}^7 c_i x_i \\ & \begin{cases} \sum_{i=1}^7 b_i x_i \leq B \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6-8)$$

2. 相互排斥的约束条件

在本章开始的例 6-1 中,关于运货的体积限制为

$$5x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (6-9)$$

今设运货有车运和船运两种方式,上面的条件系用车运时的限制条件,如用船运时关于体积的限制条件为

$$7x_1 + 3x_2 \leq 45 \quad (6-10)$$

这两条件是互相排斥的。为了统一在一个问题中,引入 0-1 变量 y ,令

$$y = \begin{cases} 0, & \text{当采取车运方式} \\ 1, & \text{当采取船运方式} \end{cases}$$

于是式(6-9)和式(6-10)可由下述的条件式(6-11)和式(6-12)来代替

$$5x_1 + 4x_2 \leq 24 + yM \quad (6-11)$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 45 + (1-y)M \quad (6-12)$$

其中, M 是充分大的数。读者可以验证,当 $y=0$ 时,式(6-11)就是式(6-9),而式(6-12)自然成立,因而是多余的。当 $y=1$ 时式(6-12)就是式(6-10),而式(6-11)是多余的。引入的变量 y 不必出现在目标函数内,即认为在目标函数式内 y 的系数为 0。

如果有 m 个互相排斥的约束条件(\leq 型)

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n \leq b_i, \quad i=1,2,\cdots,m$$

为了保证这 m 个约束条件只有一个起作用,可引入 m 个 0-1 变量 $y_i (i=1,2,\cdots,m)$ 和一个充分大的常数 M ,而下面这一组 $m+1$ 个约束条件

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n \leq b_i + y_i M, \quad i=1,2,\cdots,m \quad (6-13)$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = m-1 \quad (6-14)$$

就合乎上述的要求。这是因为,由于式(6-14), m 个 y_i 中只有一个能取 0 值,设 $y_{i^*}=0$,代入式(6-13),就只有 $i=i^*$ 的约束条件起作用,而别的式子都是多余的。

3. 关于固定费用的问题(fixed cost problem)

在讨论线性规划时,有些问题是要求使成本为最小。那时总设固定成本为常数,并在线性规划的模型中不必明显列出。而有些固定费用(固定成本)的问题不能用一般线性规划来描述,但可改变为混合整数规划来解决,见例 6-5。

例 6-5 某工厂为了生产某种产品,有几种不同的生产方式可供选择,如选定投资高

的生产方式(选购自动化程度高的设备),由于产量大,因而分配到每件产品的变动成本就降低;反之,如选定投资低的生产方式,将来分配到每件产品的变动成本可能增加,所以必须全面考虑。今设有三种方式可供选择,令

x_j 表示采用第 j 种方式时的产量;

c_j 表示采用第 j 种方式时每件产品的变动成本;

k_j 表示采用第 j 种方式时的固定成本。

为了说明成本的特点,暂不考虑其他约束条件。采用各种生产方式的总成本分别为

$$P_j = \begin{cases} k_j + c_j x_j, & \text{当 } x_j > 0 \\ 0, & \text{当 } x_j = 0 \end{cases} \quad j=1,2,3$$

在构成目标函数时,为了统一在一个问题中讨论,现引入 0-1 变量 y_j ,令

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{当采用第 } j \text{ 种生产方式,即 } x_j > 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当不采用第 } j \text{ 种生产方式,即 } x_j = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (6-15)$$

于是目标函数

$$\min z = (k_1 y_1 + c_1 x_1) + (k_2 y_2 + c_2 x_2) + (k_3 y_3 + c_3 x_3)$$

式(6-15)这个规定可由下述 3 个线性约束条件表示:

$$x_j \leq y_j M, \quad j=1,2,3 \quad (6-16)$$

式中, M 是个充分大的常数。式(6-16)说明,当 $x_j > 0$ 时 y_j 必须为 1; 当 $x_j = 0$ 时只有 y_j 为 0 时才有意义,所以式(6-16)完全可以代替式(6-15)。

6.4.2 0-1 型整数规划的解法

解 0-1 型整数规划最容易想到的方法,和一般整数规划的情形一样,就是穷举法,即检查变量取值为 0 或 1 的每一种组合,比较目标函数值以求得最优解,这就需要检查变量取值的 2^n 个组合。对于变量个数 n 较大(例如 $n > 10$),这几乎是不可能的。因此常设计一些方法,只检查变量取值的组合的一部分,就能求到问题的最优解。这样的方法称为隐枚举法(implicit enumeration),分支定界法也是一种隐枚举法。另外,还有拉格朗日松弛法。下面举例介绍一种解 0-1 型整数规划的隐枚举法。

例 6-6

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 & \text{①} \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 & \text{②} \\ x_1 + x_2 \leq 3 & \text{③} \\ 4x_1 + x_3 \leq 6 & \text{④} \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 & \text{⑤} \end{cases} \quad (6-17)$$

解题时先通过试探的方法找一个可行解,容易看出 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 就是合于条件①~④的,算出相应的目标函数值 $z = 3$ 。

对于极大化问题,当然希望 $z \geq 3$,于是在式①之前增加一个约束条件

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \tag{◎}$$

增加的这个约束条件称为过滤的条件(filtering constraint)。这样,原问题的线性约束条件就变成 5 个。用全部枚举的方法,3 个变量共有 $2^3=8$ 个解,原来 4 个约束条件,共需 32 次运算。现在增加了过滤条件◎,如按下述方法进行,就可减少运算次数。将 5 个约束条件按见◎、①~④顺序排好(见表 6-6),对每个解,依次代入约束条件左侧,求出数值,看是否适合不等式条件,如某一条件不适合,同行以下各条件就不必再检查,因而就减少了运算次数。本例计算过程如表 6-6,实际只作 24 次运算。

于是求得最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1) \quad \max z = 8$

在计算过程中,若遇到 z 值已超过条件◎右边的值,应改变条件◎,使右边为迄今为止最大者,然后继续作。例如,当检查点(0,0,1)时因 $z=5(>3)$,所以应将条件◎换成

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \tag{◎}$$

这种对过滤条件的改进,更可以减少计算量。

表 6-6

点	条 件					满足条件? 是(√)否(×)	z 值
	◎	①	②	③	④		
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	√	5
(0,1,0)	-2					×	
(0,1,1)	3	1	5			×	
(1,0,0)	3	1	1	1	0	√	3
(1,0,1)	8	0	2	1	1	√	8
(1,1,0)	1					×	
(1,1,1)	6	2	6			×	

注意：一般常重新排列 x_i 的顺序使目标函数中 x_i 的系数是递增(不减)的,如在例 6-6 中,改写 $z=3x_1-2x_2+5x_3=-2x_2+3x_1+5x_3$ 。

因为-2,3,5 是递增的,变量 (x_2, x_1, x_3) 也按下述顺序取值:(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),...,这样,最优解容易比较早地被发现。再结合过滤条件的改进,更可使计算简化。在例 6-6 中

$$\begin{aligned} \max z &= -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \\ \begin{cases} -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 3 & \text{◎} \\ 2x_2 + x_1 - x_3 \leq 2 & \text{①} \\ 4x_2 + x_1 + x_3 \leq 4 & \text{②} \\ x_2 + x_1 \leq 3 & \text{③} \\ 4x_1 + x_3 \leq 6 & \text{④} \end{cases} \end{aligned} \tag{6-18}$$

解题时按下述步骤进行(见表 6-7)。

表 6-7(a)

点 (x_2, x_1, x_3)	条 件					是否满足条件	z 值
	◎	①	②	③	④		
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	√	5

表 6-7(b)

点 (x_2, x_1, x_3)	条 件					是否满足条件	z 值
	◎'	①	②	③	④		
(0,1,0)	3					×	
(0,1,1)	8	0	2	1	1	√	8

改进过滤条件,用

$-2x_2+3x_1+5x_3\geqslant 5$

◎'

代替式◎,继续进行。

再改进过滤条件,用

$2x_2+3x_1+5x_3\geqslant 8$

◎''

代替式◎',再继续进行。至此, z 值已不能改进,即得到最优解,解答如前,但计算已简化。

表 6-7(c)

点 (x_2, x_1, x_3)	条 件					是否满足条件	z 值
	◎''	①	②	③	④		
(1,0,0)	2					×	
(1,0,1)	3					×	
(1,1,0)	1					×	
(1,1,1)	6					×	

6.5 指派问题

在生活中经常遇到这样的问题,某单位需完成 n 项任务,恰好有 n 个人可承担这些任务。由于每人的专长不同,各人完成任务不同(或所费时间),效率也不同。于是产生应指派哪个人去完成哪项任务,使完成 n 项任务的总效率最高(或所需总时间最小)的问题。这类问题称为指派问题或分派问题(assignment problem)。

例 6-7 有一份中文说明书,需译成英、日、德、俄四种文字。分别记作 E 、 J 、 G 、 R 。现有甲、乙、丙、丁四人。他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需时间如表 6-8

所示。问应指派何人去完成何工作,使所需总时间最少?

表 6-8

人员	任 务			
	<i>E</i>	<i>J</i>	<i>G</i>	<i>R</i>
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

类似地有:有 n 项加工任务,怎样指派到 n 台机床上分别完成的问题;有 n 条航线,怎样指定 n 艘船去航行的问题……对应每个指派问题,需有类似表 6-8 那样的数表,称为效率矩阵或系数矩阵,其元素 $c_{ij} > 0 (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 表示指派第 i 人去完成第 j 项任务时的效率(或时间、成本等)。解题时需引入变量 x_{ij} ; 其取值只能是 1 或 0。并令

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务} \\ 0 & \text{当不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务} \end{cases}$$

当问题要求极小化时数学模型是

$$\min z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \tag{①}$$
$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1, & j = 1, 2, \cdots, n \tag{②} \\ \sum_j x_{ij} = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \tag{③} \\ x_{ij} = 1 \text{ 或 } 0 \tag{④} \end{cases} \tag{6-19}$$

约束条件②说明第 j 项任务只能由 1 人去完成;约束条件③说明第 i 人只能完成 1 项任务。满足约束条件②~④的可行解 x_{ij} 也可写成表格或矩阵形式,称为解矩阵。如例 6-7 的一个可行解矩阵是

$$(x_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解矩阵 (x_{ij}) 中各行各列的元素之和都是 1,但这不是最优解。

指派问题是 0-1 规划的特例,也是运输问题的特例;即 $n = m, a_j = b_i = 1$ 。当然可用整数规划,0-1 规划或运输问题的解法去求解,但这就如同用单纯形法求解运输问题一样是不合算的。利用指派问题的特点可有更简便的解法。

指派问题的最优解有这样性质,若从系数矩阵 (c_{ij}) 的一行(列)各元素中分别减去该

行(列)的最小元素,得到新矩阵 (b_{ij}) ,那么以 (b_{ij}) 为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵求得的最优解相同。

利用这个性质,可使原系数矩阵变换为含有很多0元素的新系数矩阵,而最优解保持不变,在系数矩阵 (b_{ij}) 中,我们关心位于不同行不同列的0元素,以下简称为独立的0元素。若能在系数矩阵 (b_{ij}) 中找出 n 个独立的0元素;则令解矩阵 (x_{ij}) 中对应这 n 个独立的0元素的元素取值为1,其他元素取值为0。将其代入目标函数中得到 $z_b=0$,它一定是最小。这就是以 (b_{ij}) 为系数矩阵的指派问题的最优解。也就得到了原问题的最优解。

库恩(W. W. Kuhn)于1955年提出了指派问题的解法,他引用了匈牙利数学家康尼格(D. König)一个关于矩阵中0元素的定理:系数矩阵中独立0元素的最多个数等于能覆盖所有0元素的最少直线数。此解法称为匈牙利法。以后在方法上虽有不断改进,但仍沿用这名称。以下用例6-7来说明指派问题的匈牙利解法。

第一步:使指派问题的系数矩阵经变换,在各行各列中都出现0元素。

- (1) 从系数矩阵的每行元素减去该行的最小元素;
- (2) 再从所得系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

若某行(列)已有0元素,那就不必再减了。例6-7的计算为

$$(c_{ij}) = \begin{matrix} & & \min & \\ \begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{matrix} 4 & 2 & \min \end{matrix}} & \begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (b_{ij}) \end{matrix}$$

第二步:进行试指派,以寻求最优解。为此,按以下步骤进行。

经第一步变换后,系数矩阵中每行每列都已有了0元素;但需找出 n 个独立的0元素。若能找出,就以这些独立0元素对应解矩阵 (x_{ij}) 中的元素为1,其余为0,这就得到最优解。当 n 较小时,可用观察法、试探法去找出 n 个独立0元素。若 n 较大时,就必须按一定的步骤去找,常用的步骤为:

(1) 从只有一个0元素的行开始,给这个0元素加圈,记作 \odot 。这表示对这行所代表的人,只有一种任务可指派。然后划去 \odot 所在列的其他0元素,记作 Φ 。这表示这列所代表的任务已指派完,不必再考虑别人了。

(2) 给只有一个0元素列的0元素加圈,记作 \odot ;然后划去 \odot 所在行的其他0元素,记作 Φ 。

(3) 反复进行(1)、(2)两步,直到所有0元素都被圈出和划掉为止。

(4) 若仍有没有画圈的0元素,且同行的0元素至少有两个(表示对这个人可以从两项任务中指派其一)。这可用不同的方案去试探。从剩有0元素最少的行(列)开始,比较这行各0元素所在列中0元素的数目,选择0元素少的那列的这个0元素加圈(表示选择

性多的要“礼让”选择性少的)。然后划掉同行同列的其他 0 元素。可反复进行,直到所有 0 元素都已圈出和划掉为止。

(5) 若⊙元素的数目 m 等于矩阵的阶数 n ,那么这指派问题的最优解已得到。若 $m < n$,则转入下一步。

现用例 6-7 的 (b_{ij}) 矩阵,按上述步骤进行运算。按步骤(1),先给 b_{22} 加圈,然后给 b_{31} 加圈,划掉 b_{11}, b_{41} ; 按步骤(2),给 b_{43} 加圈,划掉 b_{44} ,最后给 b_{14} 加圈,得到

$$\begin{bmatrix} \Phi & 13 & 7 & \odot \\ 6 & \odot & 6 & 9 \\ \odot & 5 & 3 & 2 \\ \Phi & 1 & \odot & \Phi \end{bmatrix}$$

可见 $m=n=4$,所以得最优解为

$$(x_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这表示：指定甲译出俄文,乙译出日文,丙译出英文,丁译出德文。所需总时间最少

$$\begin{aligned} \min z_b &= \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij} = 0 \\ \min z &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = c_{31} + c_{22} + c_{43} + c_{14} = 28(\text{小时}) \end{aligned}$$

例 6-8 求表 6-9 所示效率矩阵的指派问题的最小解。

表 6-9

人员	任 务				
	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

解题时按上述第一步,将这系数矩阵进行变换。

$$\begin{matrix} & \min \\ \begin{bmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

经一次运算即得每行每列都有 0 元素的系数矩阵,再按上述步骤运算,得到

$$\begin{bmatrix} 5 & \odot & 2 & \Phi & 2 \\ 2 & 3 & \Phi & \odot & \Phi \\ \odot & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & \odot & \Phi & 4 \\ \Phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

这里 \odot 的个数 $m=4$,而 $n=5$;所以解题没有完成,这时应按以下步骤继续进行。

第三步:作最少的直线覆盖所有 0 元素,以确定该系数矩阵中能找到最多的独立元素数。为此按以下步骤进行:

- (1) 对没有 \odot 的行打“√”号;
- (2) 对已打“√”号的行中所有含 Φ 元素的列打“√”号;
- (3) 再对打有“√”号的列中含 \odot 元素的行打“√”号;
- (4) 重复(2)、(3)直到得不出新的打“√”号的行、列为止;
- (5) 对没有打“√”号的行画一横线,有打“√”号的列画一纵线,这就得到覆盖所有 0 元素的最少直线数。

令这直线数为 l 。若 $l < n$,说明必须再变换当前的系数矩阵,才能找到 n 个独立的 0 元素,为此转入第四步:若 $l = n$,而 $m < n$,应回到第二步(4),另行试探。

在例 6-8 中,对矩阵 $\textcircled{1}$ 按以下次序进行:

先在第 5 行旁打“√”,接着可判断应在第 1 列下打“√”,接着在第 3 行旁打“√”。经检查不再能打“√”了。对没有打“√”行,画一直线以覆盖 0 元素,已打“√”的列画一直线以覆盖 0 元素。得

$$\begin{array}{c} | \\ \begin{bmatrix} 5 & \odot & 2 & \Phi & 2 \\ 2 & 3 & \Phi & \odot & \Phi \\ \odot & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & \odot & \Phi & 4 \\ \Phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ - \\ \checkmark \\ - \\ \checkmark \end{array} \quad \textcircled{2}$$

由此可见 $l=4 < n$ 。所以应继续对矩阵 $\textcircled{2}$ 进行变换。转第四步。

第四步:对矩阵 $\textcircled{2}$ 进行变换的目的是增加 0 元素。为此在没有被直线覆盖的部分中找出最小元素。然后在打“√”行各元素中都减去这最小元素,而在打“√”列的各元素都加上这最小元素,以保证原来 0 元素不变。这样得到新系数矩阵(它的最优解和原问题相同)。若得到 n 个独立的 0 元素,则已得最优解,否则回到第三步重复进行。

在例 6-8 的矩阵 $\textcircled{2}$ 中,在没有被覆盖部分(第 3、5 行)中找出最小元素为 2,然后给第 3、5 行各元素分别减去 2,给第 1 列各元素加 2,得到新矩阵 $\textcircled{3}$ 。按第二步,找出所有独立

的 0 元素,得到矩阵④。

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & \odot & 2 & \Phi & 2 \\ 4 & 3 & \Phi & \odot & \Phi \\ \Phi & 8 & 3 & 5 & \odot \\ 11 & 8 & \odot & \Phi & 4 \\ \odot & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

它具有 n 个独立 0 元素。这就得到了最优解,相应的解矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由解矩阵得最优指派方案

甲—B, 乙—D, 丙—E, 丁—C, 戊—A

本例还可以得到另一最优指派方案

甲—B, 乙—C, 丙—E, 丁—D, 戊—A

所需总时间为 $\min z=32$ 。

当指派问题的系数矩阵,经过变换得到了同行和同列中都有两个或两个以上 0 元素时。这时可以任选一行(列)中某一个 0 元素,再划去同行(列)的其他 0 元素。这时会出现多重解。

以上讨论限于极小化的指派问题。对极大化的问题,即求

$$\max z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (6-20)$$

可令

$$b_{ij} = M - c_{ij}$$

式中, M 是足够大的常数(如选 c_{ij} 中最大元素为 M 即可),这时系数矩阵可变换为

$$\mathbf{B} = (b_{ij})$$

这时 $b_{ij} \geq 0$,符合匈牙利法的条件。目标函数经变换后,即解

$$\min z' = \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij} \quad (6-21)$$

所得最小解就是原问题的最大解,因为

$$\begin{aligned}
 \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij} &= \sum_i \sum_j (M - c_{ij}) x_{ij} \\
 &= \sum_i \sum_j M x_{ij} - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
 &= nM - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}
 \end{aligned}$$

因 nM 为常数, 所以当 $\sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij}$ 取最小时, $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ 便为最大。

习题

6.1 对下列整数规划问题, 问用先解相应的线性规划然后凑整的办法能否求到最优整数解?

(1) $\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

(2) $\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

6.2 用分支定界法解

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

6.3 用 Gomory 的割平面法解

(1) $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

(2) $\max z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

6.4 某城市的消防总部将全市划分为 11 个防火区, 设有 4 个消防(救火)站。图 6-8 表示各防火区域与消防站的位置, 其中①、②、③、④表示消防站, 1, 2, ..., 11 表示防火区域。根据历史的资料证实, 各消防站可在事先规定的允许时间内对所负责的地区的火灾予以消灭。图 6-8 中虚线即表示各地区由哪个消防站负责(没有虚线连接, 就表示不负

责)。现在总部提出:可否减少消防站的数目,仍能同样负责各地区的防火任务?如果可以,应当关闭哪个?

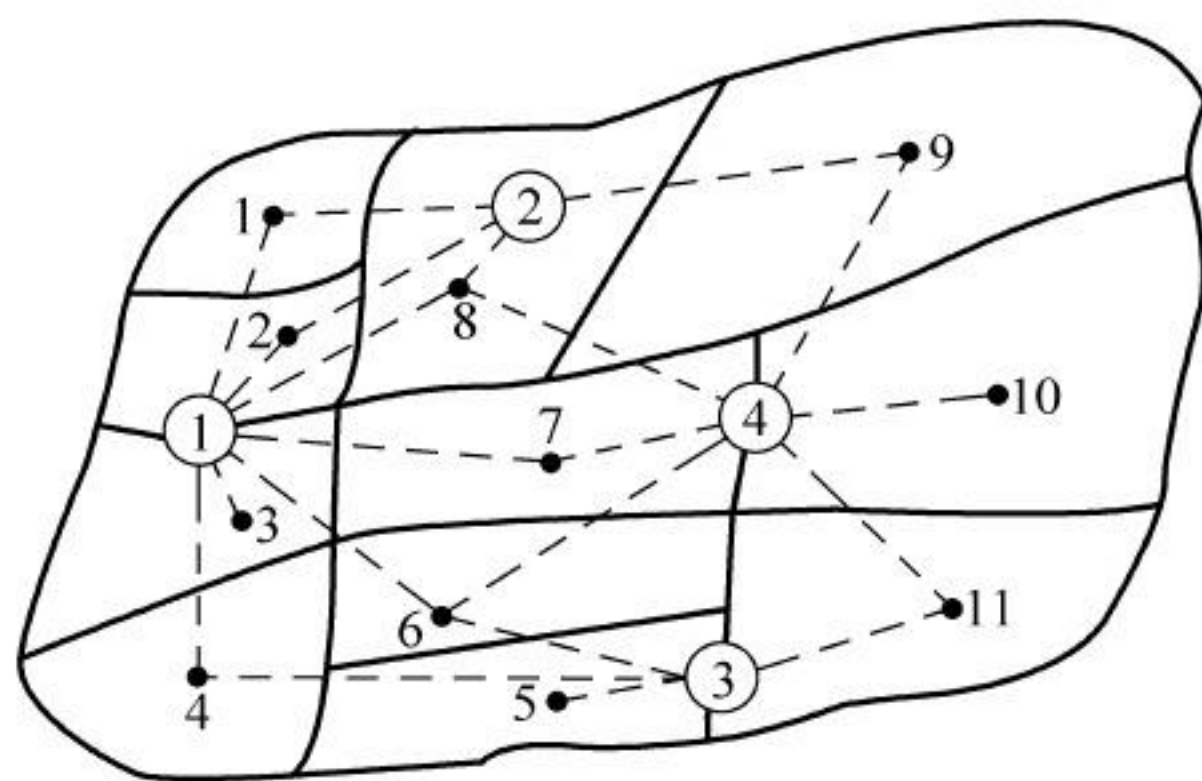


图 6-8

提示:对每个消防站定义一个 0-1 变量 x_i ,

令

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{当某防火区域可由第 } j \text{ 消防站负责时,} \\ 0, & \text{当某防火区域不由第 } j \text{ 消防站负责时,} \end{cases} \\ j=1,2,3,4$$

然后对每个防火区域列一个约束条件。

6.5 某大型企业每年需要进行多种类型的员工培训。假设培训需求(如技术类、管理类)共有 6 种,每种需求的最低培训人数为 $a_i, i=1, \dots, 6$,可供选择的培训方式(如内部自行培训、外部与高校合作培训)有 5 种,每种的最高培训人数为 $b_j, j=1, \dots, 5$ 。又设若选择了第 1 种培训方式,则第 3 种培训方式也要选择。记 x_{ij} 为第 i 种需求由第 j 种方式培训的人员数量, Z 为培训总费用。费用的构成包括固定费用和可变费用,第 j 种方式的固定培训费用为 h_j (与人数无关),与人数 x_{ij} 相应的可变费用为 C_{ij} (表示用第 j 种方式培训第 i 种需求类型的单位费用)。如果以成本费用为优化目标,请建立该培训问题的结构优化模型。

6.6 为了提高校园的安全性,某大学的保安部门决定在校园内部的几个位置安装紧急报警电话。校园的主要街道示意图如图 6-9 所示,其中①~⑧表示道路交叉口, A~K 表示街道。现需决定在哪些地方安装,可使每条街道都有报警电话,并且总电话数目最少? 请建立本问题的数学规划模型。

6.7 在有互相排斥的约束条件的问题中,如果约束条件是(\leq)型的,我们用加以 $y_i M$ 项(y_i 是 0-1 变量, M 是很大的常数)的方法统一在一个问题中。

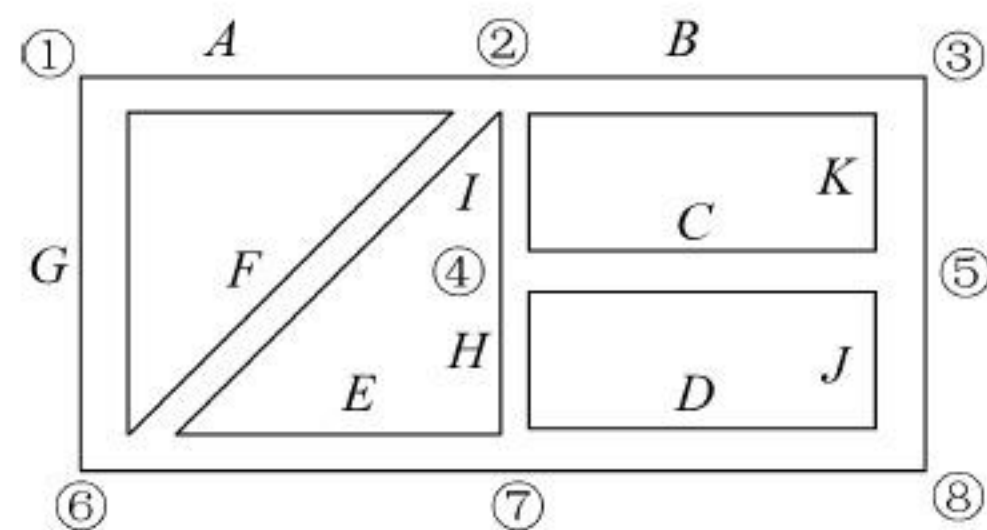


图 6-9

如果约束条件是(\geq)型的,我们将怎样利用 y_i 和 M 呢?

6.8 解 0-1 规划。

$$(1) \min z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

$$(2) \min z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

6.9 有 4 个工人,要指派他们分别完成 4 种工作,每人做各种工作所消耗的时间如表 6-10 所示,问指派哪个人去完成哪种工作,可使总的消耗时间为最小?

表 6-10

工人	工 种			
	A	B	C	D
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

参考资料

- [1] A. Kaufmann. Integer and mixed programming. Theory and Application. Academic press. INC (London)LTD
- [2] 孙小玲,李端. 整数规划,运筹与管理科学丛书 10. 科学出版社,2010