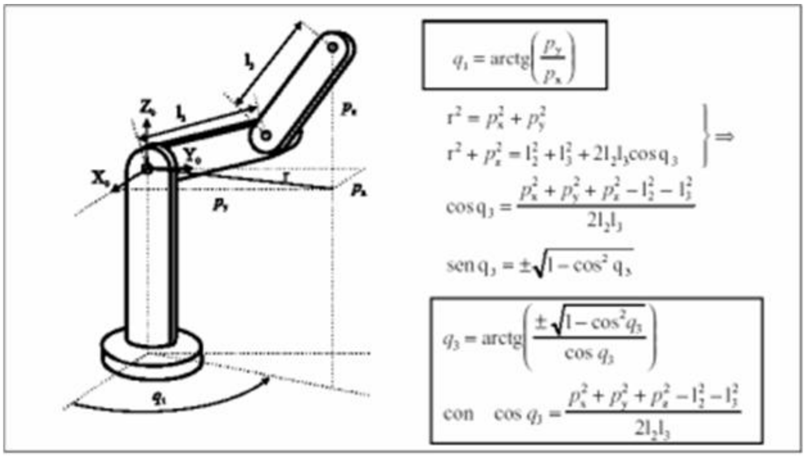
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

Tarea 7

Actividad: Tarea 7
Materia: Cinemática de Robots
Alumnos: Alfredo Rizo Martinez
Maestro: Carlos Enrique Moran Garabito

Cinemática Inversa

Encuentra los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot $q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$ para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial (p,n [o,a]).



Así como abordar el problema cinemático directo de una manera sistemática a partir de la utilización de matrices de transformación homogénea, e independiente de la configuración del robot, no ocurre lo mismo con el problema de la configuración del robot, no ocurre lo mismo con el problema cinemático inverso, siendo el procedimiento de obtención de las ecuaciones fuertemente de pendiente de la configuración del robot.

No obstante, a pesar de las dificultades comentadas, la mayor parte de los robots poseen cinemáticas relativamente simples que facilitan en cierta medida la resolución de su problema cinemático inverso. Por ejemplo, si se consideran solo tres primeros grados de libertad de muchos robots se la circunstancia de que los tres grados de libertad últimos, dedicados fundamentalmente a orientar, el extremo del robot, corresponden a giros sobre ejes que se cortan en un punto.

Los métodos geométricos permiten normalmente obtener los valores de las primeras variables articuladas, que son los que consiguen posicionar el robot (Prescindiendo de la orientación de sus extremos. Para ellos se utilizan relaciones geográficas. Sobre los elementos del robot.

$$\begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [t_i]$$

Donde t_{ij} son función de las coordenadas articulares $[q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$, se pueden despejar las *n* variables articuladas q_i en función de las componentes de los vectores *n, o, a, p*.

Resolución del problema cinemático inverso por métodos geométricos.

El procedimiento en si se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articuladas y las dimensiones físicas de sus elementos.

Para mostrar el procedimiento a seguir, se va a aplicar el método a la resolución del problema cinemático inverso de un robot en 3 GDL de rotación.

El valor de q_1 se obtiene inmediatamente como:

$$q_1 = a \qquad \left(\frac{P}{P}\right)$$

Utilizando el teorema del coseno.

$$r^2 = P^2x + \ P^2z$$

$$r^2 + P^4z = I^2z + I_3^2 + 2I_2I_3c \quad q_3$$

$$\Rightarrow c \quad q_3 = \frac{P^2x + P^2y + P^3z - I_2^3 - I_3^2}{ZI_2I_3}$$

El calculo de q_2 se hace a partir de la diferencia entre β y α:

$$\beta = a \qquad \left(\frac{P}{r}\right) = a \qquad \left(\frac{P}{\pm\sqrt{P^2x + P^2y}}\right) \quad \alpha = a \qquad \left(\frac{l_3s \quad q_3}{l_2 + l_3c \quad q_3}\right)$$

$$q_2 = a \qquad \left(\frac{P}{\pm\sqrt{P^2x + P^2y}}\right) - a \qquad \left(\frac{l_3s \quad q_3}{l_2 + l_3c \quad q_3}\right)$$

Resolución del problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea.

El primer paso por dar para resolver el problema cinemático inverso es obtener la expresión correspondiente a este robot. Es decir, obtener la matriz T que relaciona el sistema de referencia $\{S_0\}$ correspondiente a la base con el sistema de referencia $\{S_3\}$ asociado a su extremo:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ {}^{0}A_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_1 & 0 & C_2 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = T_3^0 = \begin{bmatrix} C_1C_2, & S_1, & -C_1S_2, & -q_3C_1S_2 \\ S_1C_2, & C_1, & -S_1S_2, & -q_3S_1S_2 \\ S_1, & 0, & C_2, & q_3C_2 + L_1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} $$

Algoritmo	**θ**	**d**	**a**	**α**
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	0	-90
3	0	q_3	0	0

Las Expresiones a la solución del problema cinemático inverso del robot considerado. Se muestran tales como:

$$ q_1 = \arctan\left(\frac{P}{P}\right) $$

$$ q_2 = \arctan\frac{\sqrt{P^2x + P^2y}}{L_1 - P} $$

$$ q_3 = C_2(p \;\; - l_1) - S_2\sqrt{P^2x + P^2y} $$

A los mismos resultados se podría haber llegado mediante consideraciones geométricas.

Matriz Jacobiana

En general la matriz Jacobiana de un robot, relacionan el vector de velocidades articuladas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_n)$ con otro vector de velocidades expresado en un espacio distinto.

Existen diferentes posibilidades a la hora de seleccionar este espacio. Una primera elección es la de considerar la relación con las velocidades de la localización del extremo del robot, siendo esta la posición y orientación expresada en base a sus coordenadas cartesianas y ángulos de Euler.

Jacobiana inversa

En primer lugar, supuesta conocida la relación directa, dada por la matriz jacobiana, se puede obtener la relación inversa. Invirtiendo simbólicamente la matriz.

$$\begin{bmatrix} \dot{a_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{a_n} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\emptyset} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \dot{a_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{a_n} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} V \\ V \\ V \\ W \\ W \\ W \end{bmatrix}$$

La tercera a Hernating de obtención de la Jacobiana inversa, es repetir el procedimiento seguido en analítica. Esto es conocido la relación:

$$a_1 = f_1(x, y, z, \emptyset, \theta, \psi)$$
$$\vdots$$
$$a_n = f_1(x, y, z, \emptyset, \theta, \psi)$$

La matriz Jacobiana inversa se obtendrá por diferenciación en respecto al tiempo de ambos miembros de la igualdad.

$$\begin{bmatrix} \dot{a_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{a_n} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} V \\ V \\ V \\ W \\ W \\ W \end{bmatrix}$$

$$J_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial} \end{bmatrix}$$