Informe técnico

Modelo Global de Biomasa:

Diagnóstico, Simulación y Proyección

INIDEP

Mar del Plata

Alfredo H. Gonzalez

Modelo Global de Biomasa: Diagnóstico, Simulación y Proyección

Alfredo H. Gonzalez

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo pretende resumir todos los pasos de una Evaluación de un Recurso Pesquero aplicando un modelo sencillo. Para ello se implementará un modelo global de biomasa para una población de peces. Dicho modelo consta de un único parámetro, el cual será estimado por el método de Máxima Verosimilitud (MV). Los estimadores de máxima verosimilitud poseen la propiedad de tener distribución asintóticamente normal. Con base en este hecho, se calcula la matriz de covarianza del estimador, necesaria para generar réplicas del parámetro con la misma distribución de probabilidades. Haciendo uso de tales ”réplicas” del parámetro, se calculan y grafican las curvas de evolución de posibles biomasas. Se realizan por último proyecciones, en este caso de un año, con un objetivo propuesto, considerando diferentes valores de captura posibles y analizando en cada caso el riesgo asumido para tal valor. Todos los pasos de la modelización han sido implementados en Matlab R2013a, junto con algunas explicaciones teóricas.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Se plantea el modelo de dinámica de biomasa

$$B_{t+1} = B_t + rB_t - C_t \ , \qquad \text{donde} \quad \forall t : \ B_t \geq 0 \quad \text{y} \quad r > 0.$$

Dada una biomasa inicial $B_0 > 0$ se calcula, vía el modelo, un vector de biomasas que tendrá una componente más que el vector de capturas, pues la biomasa del último tiempo y el modelo permiten avanzar un año más. El correspondiente código en Matlab es:

```
function B = ModeloG(r,C,B0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      MODELO GLOBAL DE BIOMASA      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parámetro: r
% Variables Utilizadas:
% C : captura desde el año 1987 (inclusive) al 2001 (inclusive)
% B0 : Biomasa inicial
B = zeros(length(C)+1,1);
B(1) = B0;
for t = 1:length(C)
    B(t+1)= B(t) + r * B(t) - C(t);
end
end
```

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

- Este modelo incluye la estimación de su único parámetro: r.
- Las biomasas estimadas son biomasas absolutas. Sólo podrán estimarse, basados en datos, si se cuenta con al menos un índice de abundancia para estimar el parámetro r.

Indice de Abundancia:

$$\overline{CPUE}_t = q\overline{B}_t + \epsilon_t \ , \quad \text{con} \ \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2) \tag{1}$$

Aquí $\overline{CPUE}_t$ es la $CPUE_t$ (captura por unidad de esfuerzo) *media*. La biomasa media $\overline{B}_t$ se calcula:

$$\overline{B}_t = \frac{B_t + B_{t+1}}{2} \ , \qquad \text{(depende de } r\text{).}$$

Dado que $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$, el estimador de MV de q coincide con el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados, pues habrá que hacer una corrección por heterocedasticidad. Es decir que, dividiendo ambos miembros de (1) por σ_t se tiene:

$$\frac{\overline{CPUE}_t}{\sigma_t} = q\frac{\overline{B}_t}{\sigma_t} + \frac{\epsilon_t}{\sigma_t} \quad \text{donde ahora } \frac{\epsilon_t}{\sigma_t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Puesto que $\overline{B}_t$ depende de r, la suma de cuadrados de errores dependerá tanto de q como de r, es decir: $S^2(q, r) = \sum_t \left(\frac{\overline{CPUE}_t}{\sigma_t} - q\frac{\overline{B}_t}{\sigma_t} \right)^2$, lo cual sugiere que se debe hallar $\underset{q,r}{Min}\, S^2(q, r)$.

Para ello, se calculan las derivadas parciales de S^2 y se igualan a cero, es decir:

$$\frac{\partial S^2}{\partial q} = 0 \qquad \frac{\partial S^2}{\partial r} = 0$$

De la primera de ellas puede despejarse q (que queda en función de r):

$$\hat{q} = \frac{\sum_t (\overline{CPUE}_t \overline{B}_t)/\sigma_t^2}{\sum_t \overline{B}_t^2/\sigma_t^2} \tag{2}$$

Es decir que si se conviene en llamar $S^2(q) = \sum_t \left(\frac{\overline{CPUE}_t}{\sigma_t} - q\frac{\overline{B}_t}{\sigma_t}\right)^2$, entonces el valor estimado $\hat{q}$ del parámetro q será aquel que minimiza la suma de cuadrados anterior.

Para hallar $\underset{q}{Min}\, S^2(q)$ se procede derivando S^2 respecto de q e igualando a cero:

Como ya se ha estimado $\hat{q} = \hat{q}(r)$, debería minimizarse $S^2(\hat{q}(r), r) = \sum_t \left(\frac{\overline{CPUE}_t}{\sigma_t} - \hat{q}\frac{\overline{B}_t}{\sigma_t}\right)^2 = S^2(r)$ es decir:

$$\underset{q,r}{Min}\, S^2(q,r) = \underset{q,r}{Min} \sum_t \left(\frac{\overline{CPUE}_t}{\sigma_t} - q\frac{\overline{B}_t}{\sigma_t}\right)^2 = \underset{r}{Min} \sum_t \left(\frac{\overline{CPUE}_t}{\sigma_t} - \hat{q}\frac{\overline{B}_t}{\sigma_t}\right)^2 = \underset{r}{Min}\, S^2(r)$$

Dado que puede no haber índices de biomasa (en este caso el índice es la CPUE) para todos los tiempos, se le pide al usuario que, al cargar el archivo de datos, coloque un valor negativo cuando no haya datos (no colocar un cero, pues el cero podría representar que no se encontró la especie y no una ausencia de datos).

A continuación se muestra un código en Matlab a minimizar. Se ha definido un vector booleano ”Ind” que guarda un 1 en aquellas componentes donde el índice $I = \overline{CPUE}_t$ es mayor o igual a cero, y cero en los lugares donde el índice $I = \overline{CPUE}_t$ es negativo.

```
function S2=SumaCuad(r,C,B0,I,VarI)
% Parámetro: r
% Variables Utilizadas:
% C : captura desde el año 1987 (inclusive) al 2001 (inclusive)
% B0 : Biomasa inicial
% I = CPUEmed = CPUE media desde 1994 (inclusive) al 2001 (inclusive)
% VarI = VCPUEm = Varianza de CPUE media de 1994(incluido) a 2001(incluido)
ind = I >=0;
Bmed = zeros(length(C),1);
B = ModeloG(r,C,B0);
for h=1:length(C)
    Bmed(h) = 0.5*(B(h)+B(h+1));
end
qest = sum(I.*Bmed.*ind./VarI)/sum(Bmed.*Bmed.*ind./VarI);
S2 = sum((I-qest.*Bmed.*ind).^2./(VarI));
end
```

La anterior función es llamada del siguiente modo:

Dado que $\hat{r}$ es el Estimador de Máxima Verosimilitud, tendrá distribución asintótica normal, donde la media será el valor estimado y la varianza del estimador se calcula:

$$Var(\hat{r}) = 2\left[\frac{d^2 S^2(\hat{r})}{dr^2}\right]^{-1}.$$

```
load('C.mat')
load('CPUEmed.mat')
load('VCPUEm.mat')
B0 = 225600;

%%%%%           Minimizo la suma de cuadrados:           %%%%%
[r,SC] = fminsearch(@(r) SumaCuad(r,C,B0,CPUEmed,VCPUEm),0.15);

%%%        Así, la biomasa estimada será:        %%%
Best = ModeloG(r,C,B0)';
```

El código que realiza dicho cálculo será:

```
%%%%% Defino la función S2 que es la suma de cuadrados con x variable %%%%%
S2 = @(x) SumaCuad(x,C,B0,CPUEmed,VCPUEm);

%%%%%%           Calculo la derivada segunda de S2:              %%%%%%
d = derivada2(S2,r);

%%%%%    Luego, la (matriz de co-) Varianza del r estimado será:     %%%%%
Vr = 2/d;
```

Simulación

```
%%% Dado que 'matriz de covarianza' es asintóticamente normal, simulo un
%%% número grande 'n' de 'réplicas' de 'r' con distrib. normal de media
%%% 'r' y varianza 'Vr'.

n = 500000;

rest = r + sqrt(Vr).*randn(n,1);

% En cada fila de la matriz 'Simula' habrá una realización del modelo
% cada una con una réplica 'rest' de 'r'.
Simula = zeros(n,length(C)+1);

for J=1:n
    Simula(J,:) = ModeloG(rest(J),C,B0)';
end
```

Estadística

Tomo la media, varianza y los percentiles 5 y 95 de las realizaciones simuladas de biomasa.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%   ESTADISTICA   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for K=1:(length(C)+1)
    media(K) = mean(Simula(:,K));
    percentiles(:,K) = prctile(Simula(:,K),[5,50,95]); %%  5%, mediana (50%) y 95%
    varianza(K) = sum((Simula(:,K)-mean(Simula(:,K))).^2)/n;
end

%hold on;
%subplot(1,2,1);
figure(gcf)
figure(1)
hold on;
plot(percentiles(1,:),'r');
plot(percentiles(2,:),'g');
plot(percentiles(3,:),'r');
plot(media,'b');
plot(Best,'s-m');
xlabel('tiempo (años)')
ylabel('Biomasa (tons)')
legend('percentil 5','mediana','percentil 95','media','biomasa estimada MV')
title('Estadística')
```

PROYECCIONES - RIESGO

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%     Riesgo     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 'Cre': Vector Captura de reemplazo del último año(length(C)+1). Cre = r*B
% Para calcular distintos riesgos, pruebo diferentes capturas comenzando por
% 'Cmult' captura mínima del último año (la más baja considerada), subiendo
% hasta 'CMult': Captura Máxima para el último año(la más alta considerada)
% 'Cpos' vector de capturas posibles: va de 'Cult' a 'CMult' con paso 'paso'

Cmult = 0;
CMult = 20000;
cant = 20;
paso = (CMult-Cmult)/cant;
Cpos = Cmult:paso:CMult;
Cre = r*Simula(:,16);
Riesgo = zeros(1,cant+1);
for J = 1:(cant+1)
    Riesgo(J) = sum(Cpos(J)>Cre)/n;
end
%subplot(1,2,2);
figure(gcf)
figure(2)
hold on;
plot(Cpos,Riesgo);
MR = [Cpos;Riesgo];
plot(Cpos,1,'r');
plot(Cpos,0.1,'b');
axis ([0 CMult 0 1.01]);
xlabel('Capturas Ult. año (tons.)');
ylabel('Riesgo');
title('Análisis de Riesgo');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Además de proyectar y graficar, el código anterior guarda en la ”Matriz de Riesgos” MR de $2 \times$ (cant+1), para cada captura, el riesgo correspondiente (probabilidad de no cumplir el objetivo propuesto).

Tomando como ejemplo el caso analizado, donde se han calculado los riesgos con 20 capturas diferentes, la matriz MR tomó la forma:

MR =

0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
2.00E+08	4.00E+08	2.40E+09	0,000148	0,00058	0,002136	0,006558	0,017664	0,041718	0,084994	0,154122

11000	12000	13000	14000	15000	16000	17000	18000	19000	20000
0,251586	0,37178	0,504432	0,633404	0,74674	0,837452	0,902972	0,946222	0,972372	0,986548