

$$W_m := \dot{X}_m = a_m X \quad a_m = -1$$

$$G := \dot{X} = aX + u \quad a = 1$$

La u che farebbe comportare G con W_m è:

$$u = -kx \quad \text{con } k = (a - a_m)$$

Infatti:

$$\dot{X} = aX + (+ (a + a_m) X) = a_m X \quad \checkmark \checkmark$$

Abbiamo quindi che con un opportuno

k il sistema G può risolvere il PROBLEMA della REGOLAZIONE come W_m .

Alla scopo di METTERE in evidenza il PARAMETRO k da stimare riscriviamo l'eq di stato di $G(s)$:

$$\dot{X} = \underbrace{aX}_{-a_m X} + u + \underbrace{kX - kX}_{\substack{2 \text{ SEGNALE, quindi} \\ \text{come} \\ \text{INGRESSI}}} = -a_m X + kX + u$$

$$X_{t+1} = \frac{1}{1+a_m} (kX_{(t)} + u_{(t)})$$

A questo punto, essendo k non noto, misuro la sua stima \hat{k}

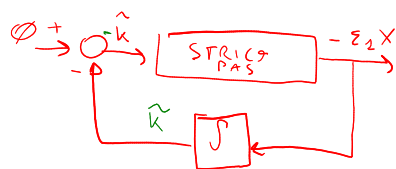
$$\hat{X} = \frac{1}{1+a_m} (\hat{k} X_{(t)} + u_{(t)})$$

A questo punto, definiamo l'errore: $\varepsilon_1 = X - \hat{X}$ (da cui $\tilde{k} = \hat{k} - k$)

$$\dot{\varepsilon}_1 = -a_m \varepsilon_1 - \tilde{k} X \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{1+a_m} (-\tilde{k} X)$$

SFRUTTANDO il Th della PASSIVITÀ con la fun di STORABILE

$$S(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1^2}{2} \rightarrow \dot{S}(\varepsilon_1) = \underbrace{-a_m \varepsilon_1^2}_{\leq 0} \underbrace{(-\tilde{k})}_u \underbrace{(\varepsilon_1 X)}_y$$



$$\Rightarrow \dot{\tilde{k}} = \dot{\hat{k}} = \gamma \varepsilon_1 X$$

MRAI approccio IAI

Partendo dal $\text{sys } G: \begin{cases} \dot{x} = ax + m \\ a = \text{cost} \end{cases}$

Reinterpretiamo il SISTEMA aggiungendo lo stato "a" COSTANTE

$$G_{IAI} = \begin{cases} \dot{x} = ax + m \\ \dot{a} = 0 \end{cases}$$

Da OSSERVARE che ora il SIS non è più LINEARE causa di "a.x"

Continuiamo a usare W_m come DINAMICA TARGET assegnabile per:

es: $\boxed{\dot{x}_m = +a_m x_m} \quad (a_m < 0) \quad \text{PER ottenere cio' } \boxed{m = -a_{est} x - a_m x}$
 $\Rightarrow \hat{k} = a_m + a_{est}$

Seguendo lo SPIRITO IAI, definiamo un osservatore RIDOTTO alla sola (a)

SIS ESTESO $\begin{cases} \dot{x} = ax + m \\ \dot{a} = 0 \\ \dot{\hat{a}} = W(x, \hat{a}) \end{cases}$ $\text{SIS } G_{IAI}$ oss. RIDOTTO

Da cio' calcoliamo lo SCOSTAMENTO di a_{est} da a

$$z = a_{est} - a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NOTO}}}{\hat{a}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NOTO}}}{\beta(x)} - a$$

Partendo dalla def di questo SCOSTAMENTO, puntiamo ad ottenere $W(x, \hat{a})$ che permetta di calcolare una legge di UPDATE per la "a" che lo scostamento tenda a 0

Consideriamo ora il sistema z, come un sistema dinamico, calcoliamo quindi la sua forma DIFFERENZIALE:

$$\frac{d}{dt} z = \dot{\hat{a}} + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} - 0 = \dot{\hat{a}} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \dot{x}$$

come già detto, rivediamo la m che fa tendere il SIS alla DINAMICA TARGET, quando viene fuori

$$\dot{z} = \dot{\hat{a}} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \left(\underbrace{ax + (-a_{est} x - a_m x)}_{\substack{\text{m assegnata} \\ = -z x}} \right) \Rightarrow \boxed{\dot{z} = \dot{\hat{a}} - \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} a_m \cdot x - \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} z x}$$

Ora, assegnando $\boxed{\dot{\hat{a}} = -\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} a_m x}$ siamo in grado di eliminarlo dal calcolo

Resta quindi da trovare una $\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} (\Rightarrow \beta(x))$ che il SIS dinamico z sia convergente (meglio esp) a 0 (per la CONVERGENZA vera del PARAMETRO servirebbe un signal PERSENTEMENTE eccit.)

Per testare la PROPRIETÀ, essendo $\beta(x)$ non necessariamente lineare, sfruttiamo il Th di LYAPUNOV:

$$\text{Def: } V(z) = \frac{z^2}{2} \rightarrow \dot{V}(z) = z \cdot \dot{z} = z \left(-\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot z \right) = \underbrace{-z^2 \frac{\partial \beta(x)}{\partial x}}_{\leq 0 \checkmark}$$

Con questa fun di Lyapunov, $z=0$ è un punto di eq ass. stab a patto che

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Calcolo di possibili $\beta(x)$ adatte:

1) PARABOLICA

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = x \Rightarrow x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \rightarrow \beta(x) = \frac{x^2}{2} \quad \& \quad \frac{d\beta(x)}{dx} = x$$

2) LOGARITMICA

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0 \rightarrow \beta(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \quad \& \quad \frac{d\beta(x)}{dx} = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

3) RADICALE

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = \frac{\sqrt{(\text{sgn}(x) \cdot x)}}{x} \cdot x \rightarrow \beta(x) = 2\sqrt{|x|} \quad \& \quad \frac{d\beta(x)}{dx} = \frac{\sqrt{(\text{sgn}(x) \cdot x)}}{x}$$

$$\int \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} dx = \sqrt{-x} + \sqrt{x} + (-\sqrt{-x} + \sqrt{x}) \text{sgn}(x)$$

$$\text{se } \boxed{x > 0} \quad \cancel{\sqrt{-x}} + \sqrt{x} + (-\cancel{\sqrt{-x}} + \sqrt{x}) \cancel{\text{sgn}(x)}^{+1} = 2\sqrt{x}$$

$$\text{se } \boxed{x < 0} \quad \sqrt{-x} + \cancel{\sqrt{x}} + (+\sqrt{-x} - \cancel{\sqrt{x}}) \cancel{\text{sgn}(x)}^{+2} = 2\sqrt{-x}$$

$$\left(2\sqrt{|x|} \right) = \beta(x)$$

4) MODULO

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = \text{sgn}(x) \cdot x \rightarrow \beta(x) = |x| \quad \& \quad \frac{d\beta(x)}{dx} = \text{sgn}(x)$$

5°) TEST LOG a CUSPIDE LIMITATO (PROBLEMI NUMERICI)

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = \frac{1 - \frac{\ln(1+|x|)}{|x|}}{x} \cdot x$$

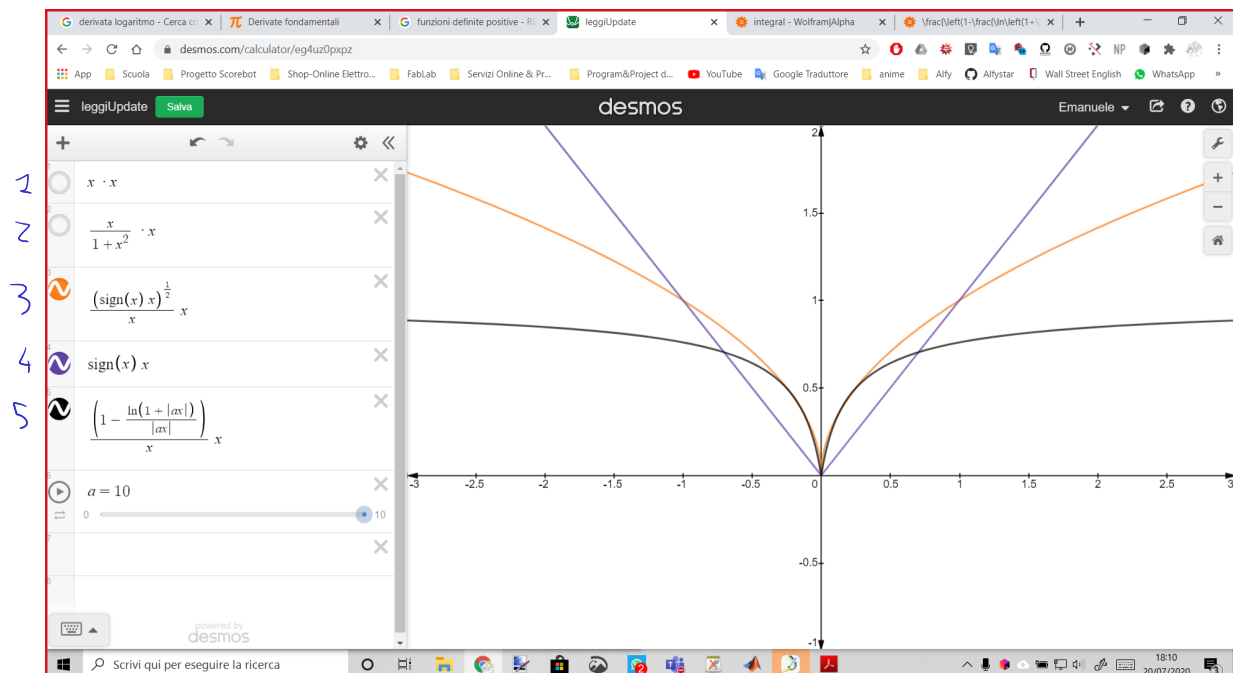
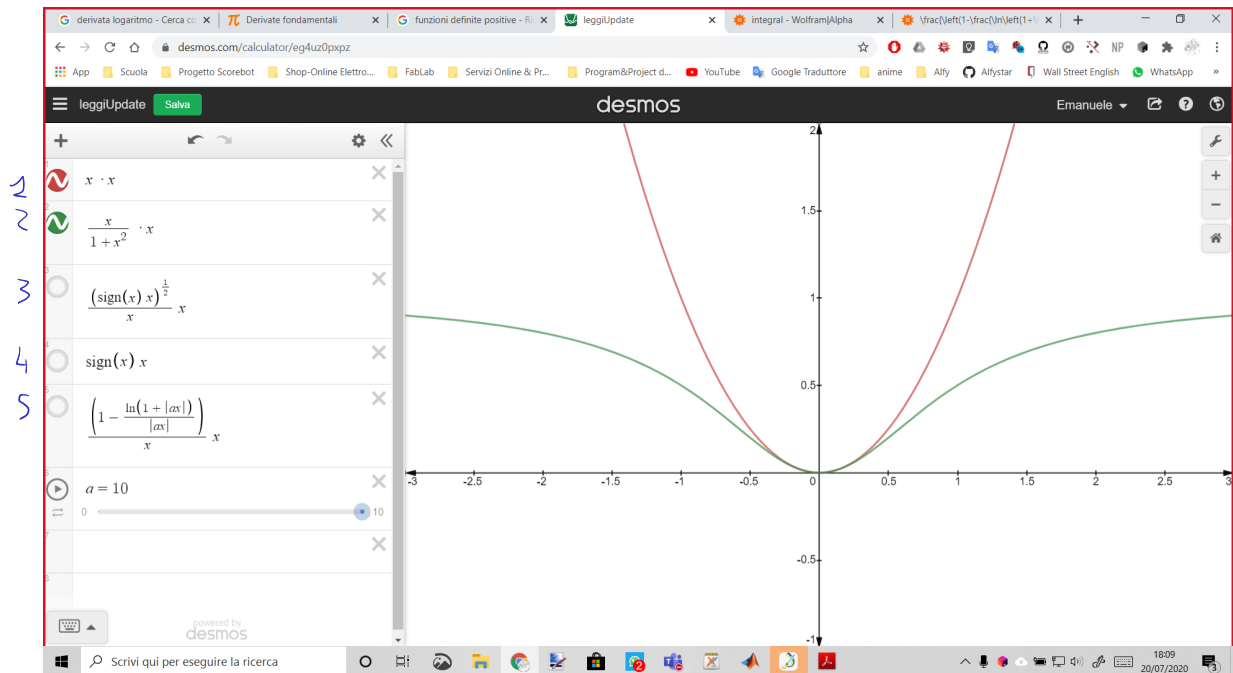
β in \emptyset verrebbe 1, ma la forziamo a 0 PER OVVIA CONTINUITÀ

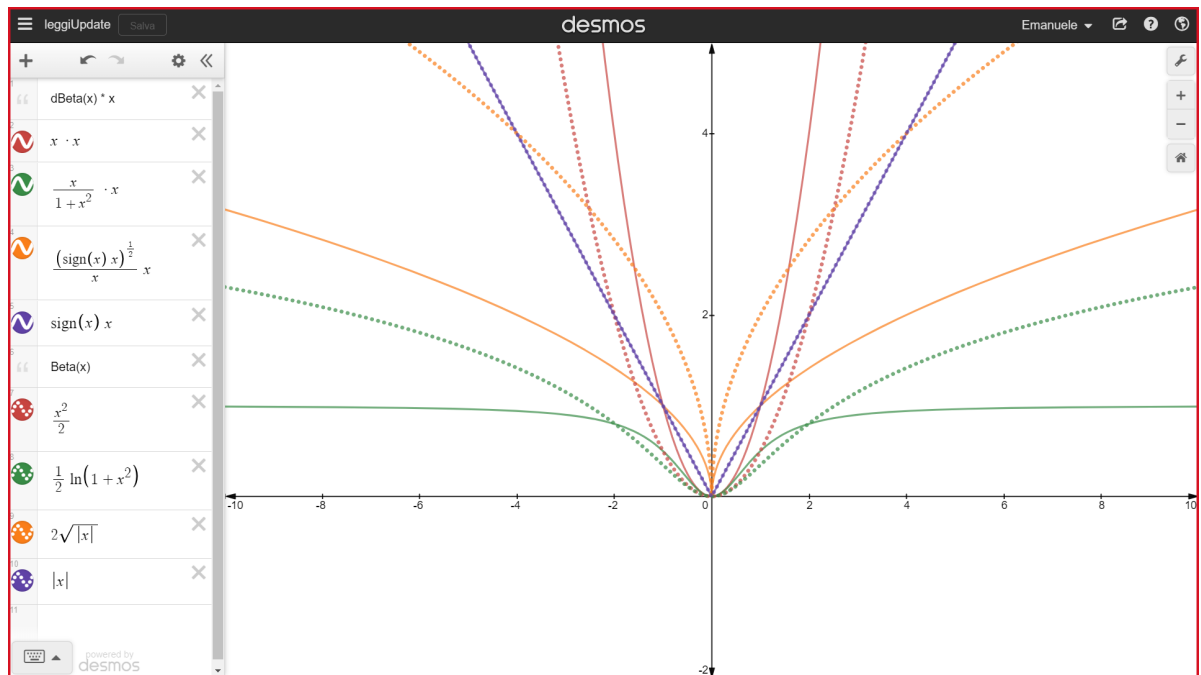
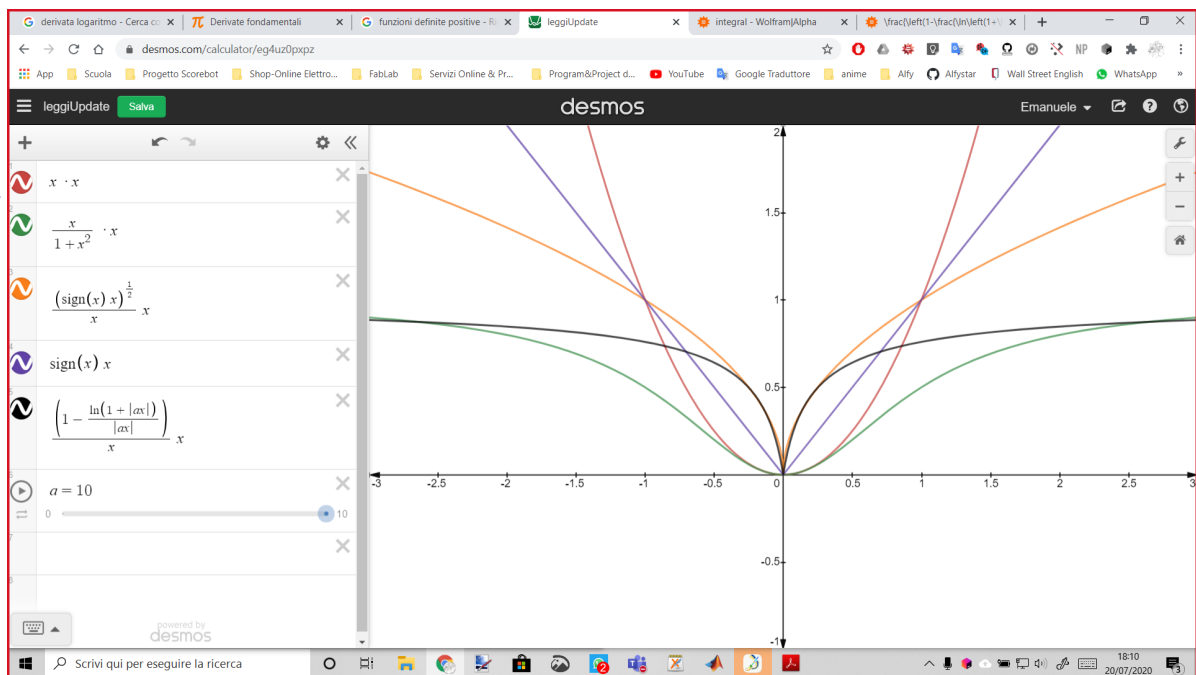
Integriamo $\frac{\partial \beta(x)}{\partial x}$ e ha:

$$\int \frac{1 - \frac{\log(1+|a x|)}{|a x|}}{x} dx = \frac{1}{2 a x} (\text{sgn}(a x) ((1 - a x) \log(1 - a x) + (a x + 1) \log(a x + 1)) + (a x - 1) \log(1 - a x) + (a x + 1) \log(a x + 1)) + \text{constant}$$

Andamenti della \hat{z} nella legge di UPDATE

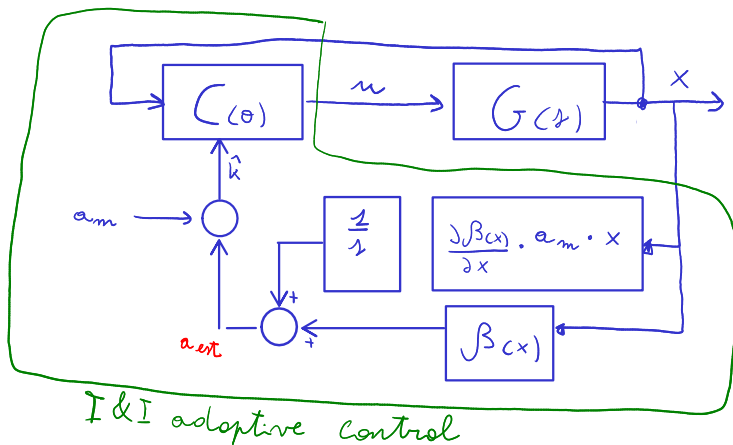
<https://www.desmos.com/calculator/gzildhizcw>





SCHEMA di IMPLEMENTAZIONE

I & I



$$\text{con } \theta = \hat{k} = a_m + a_{est}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_m x - z x \\ \dot{z} = -\left(\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x\right) z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = \frac{\partial \beta}{\partial x} a_m x \\ a_{est} = \hat{a} + \beta(x) \end{cases}$$

I&I adaptive control