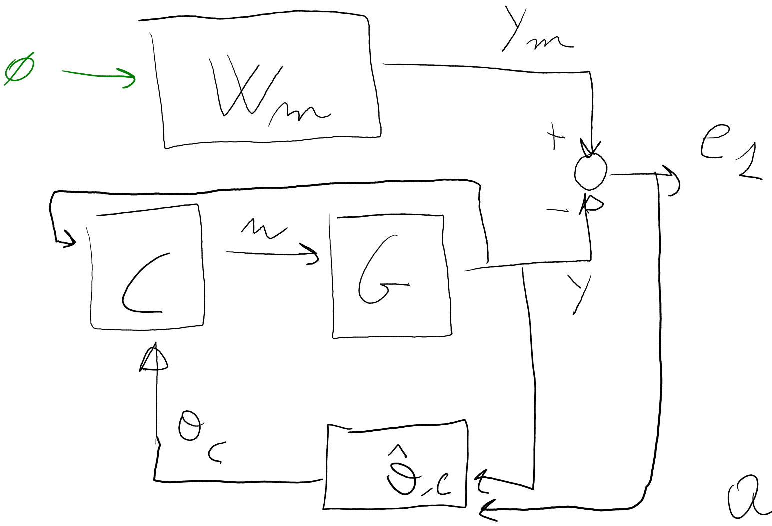
ASS 4 SVILUPPO MRAC VERSION



$W_m := \dot{x}_m = a_m x$ $\quad a_m = -1$

$G := \dot{x} = ax + u$ $\quad a = 1$

La u che farebbe comportare G come W_m è: $\boxed{u = -kx}$ con $k = (a - a_m)$

Infatti:

$$\dot{x} = \cancel{a}x + (+(\cancel{a} + a_m)x) = a_m x \quad ✓$$

Abbiamo quindi che con un'opportuna K il sistema G può risolvere il PROBLEMA della REGOLAZIONE come W_m.

Allo scopo di METTERE in evidenza il PARAMETRO k da stimare riscriviamo l'eq di stato di $G(s)$:

$$\dot{x} = ax + u + \overbrace{kx - kx}^{\emptyset} = -a_m x + \overbrace{kx + u}^{\text{2 SEGNALI, quindi come INGRESSI}}$$

$$(ax - kx = -a_m x)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{1+a_m}\left(kx(t) + u(t)\right)$$

A questo punto, essendo k non nota, usiamo la sua STIMA $\hat{k}$

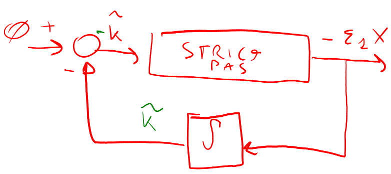
$$\hat{x} = \frac{1}{1+a_m}\left(\hat{k}x(t) + u(t)\right)$$

A questo PUNTO, definiamo l'errore: $\varepsilon_1 = x - \hat{x}$ (da cui $\tilde{k} = \hat{k} - k$)

$$\dot{\varepsilon}_1 = -a_m \varepsilon_1 - \tilde{k}x \iff \varepsilon_1 = \frac{1}{1+a_m}(-\tilde{k}x)$$

SFRUTTANDO il Th della PASSIVITÀ con la funz di STORAGE

$$S(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1^2}{2} \to \dot{S}(\varepsilon_1) = \underbrace{-a_m \varepsilon_1^2}_{\leq \emptyset}\underbrace{(-\tilde{k})}_{u}\underbrace{(\varepsilon_1 x)}_{y}$$



$$\Rightarrow \boxed{\dot{\tilde{k}} = \dot{\hat{k}} = \gamma \varepsilon_1 x}$$

MRAC approccio IAI

Partendo dal sis $G : \begin{cases} \dot{x} = ax + u \\ a = cost \end{cases}$

Reinterpretiamo il SISTEMA aggiungendo lo stato "a" COSTANTE

$$G_{IAI} = \begin{cases} \dot{x} = ax + u \\ \dot{a} = \emptyset \end{cases}$$

Da OSSERVARE che ora il SIS non è più LINEARE causa di "$a \cdot x$"

Continuiamo a usare W_m come DINAMICA TARGET assegnandole poi ad: $\boxed{\dot{x}_m = +a_m x_m}$ $(a_m < \emptyset)$ PER ottenere ciò $\boxed{u = -a_{est}\, x - a_m x}$

$\Rightarrow \hat{k} = a_m + a_{est}$

Seguendo lo SPIRITO IAI, definiamo un osservatore RIDOTTO alla sola (a)

SIS ESTESO
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + u \\ \dot{a} = \emptyset \end{cases} \text{SIS } G_{IAI}$$
$$\dot{\hat{a}} = W(x, \hat{a}) \quad \text{oss RIDOTTO}$$

Da ciò calcoliamo lo SCOSTAMENTO di a_{est} da a

$$z = a_{est} - a = \hat{a} + \underset{\text{NOTO}}{\beta(x)} - a$$

Partendo dalla def di questo SCOSTAMENTO, puntiamo ad ottenere $W(x, \hat{a})$ che permetta di calcolare una legge di UPDATE per la "$\hat{a}$" tc lo scostamento tenda a $\emptyset$

Consideriamo ora il sistema z, come un sistema dinamico, calcoliamo quindi la sua forma DIFFERENZIALE:

$$\frac{d}{dt} z = \dot{\hat{a}} + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} - \emptyset = \dot{\hat{a}} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \dot{x}$$

come già detto, possediamo la u che fa tendere il SIS alla DINAMICA TARGET, mandandolo viene fuori

$$\dot{z} = \dot{\hat{a}} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \Big(ax + \overbrace{(-a_{est} X - a_m X)}^{u \text{ assegnata}} \Big) \Rightarrow \boxed{\dot{z} = \dot{\hat{a}} - \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} a_m \cdot x - \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} z\, x}$$

$$ax - a_{est} X = -zX$$

Ora, assegnando $\boxed{\dot{\hat{a}} = -\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} a_m x}$ (NOTI) siamo in grado di eliminarlo dal CALCOLO

Resta quindi da trovare una $\frac{\partial \beta(x)}{\partial x}$ ($\Rightarrow \beta(x)$) tc il sis dinamico z sia convergente (magari exp) a $\emptyset$ (per la CONVERGENZA vera del PARAMETRO servirebbe un segnale PERSISTENTEMENTE eccit.)

Per testare la PROPRIETÀ, essendo $\beta(x)$ non necessariamente lineare, sfruttiamo il Th di LYAPUNOV:

Def: $V(z) = \frac{z^2}{2} \to \dot{V}(z) = z \cdot \dot{z} = z\left(-\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot z x\right) = \underbrace{-z^2}_{\leq 0 \checkmark} \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} x$

Con questa funz di Lyapunov, $z=0$ è un punto di eq. as. stab. a patto che

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Calcolo di possibili $\beta(x)$ adatte:

1) PARABOLOIDE

$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} = x \Rightarrow x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \rightarrow \beta(x) = \frac{x^2}{2}$ & $\frac{d\beta(x)}{dx} = x$

2) LOGARITMICA

$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0 \longrightarrow \beta(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ & $\frac{d\beta(x)}{dx} = \frac{x}{1+x^2}$

$\hookrightarrow \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$

3) RADICALE

$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = \frac{\sqrt{|\mathrm{sign}(x) \cdot x|}}{x} \cdot x \longrightarrow \beta(x) = 2\sqrt{|x|}$ & $\frac{d\beta(x)}{dx} = \frac{\sqrt{|\mathrm{sign}(x) \cdot x|}}{x}$

$$\int \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} dx = \sqrt{-x} + \sqrt{x} + \left(-\sqrt{-x} + \sqrt{x}\right) \mathrm{sgn}(x)$$

se $\boxed{x > 0}$ $\quad \cancel{\sqrt{-x}} + \sqrt{x} + \left(\cancel{-\sqrt{-x}} + \sqrt{x}\right) \overset{+1}{\cancel{\mathrm{sgn}(x)}} = 2\sqrt{x}$

se $\boxed{x < 0}$ $\quad \sqrt{-x} + \cancel{\sqrt{x}} + \left(+\sqrt{-x} \cancel{+} \cancel{\sqrt{x}}\right) \overset{+1}{\cancel{\mathrm{sgn}(x)}} = 2\sqrt{-x}$

$2\sqrt{|x|} = \beta(x)$

4) MODULO

$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x = \mathrm{sign}(x) \cdot x \longrightarrow \beta(x) = |x|$ & $\frac{d\beta(x)}{dx} = \mathrm{sign}(x)$

5°) TEST LOG a CUSPIDE LIMITATO (PROBLEMI NUMERICI)

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x}\cdot x = \frac{1-\frac{\ln(1+|x|)}{|x|}}{x}\cdot x$$

$\beta(x)$ in $\emptyset$ varrebbe 1, ma lo forziamo a $\emptyset$ PER avere CONTINUITÀ

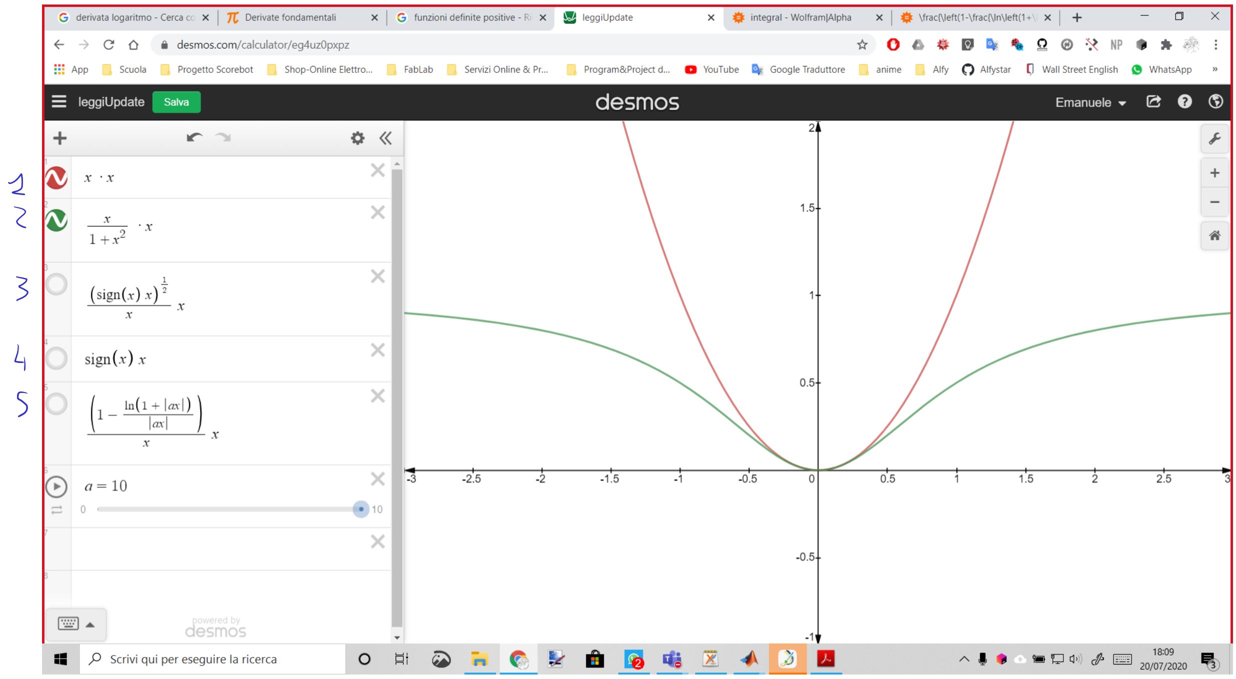
Integrando $\frac{\partial \beta(x)}{\partial x}$ si ha:

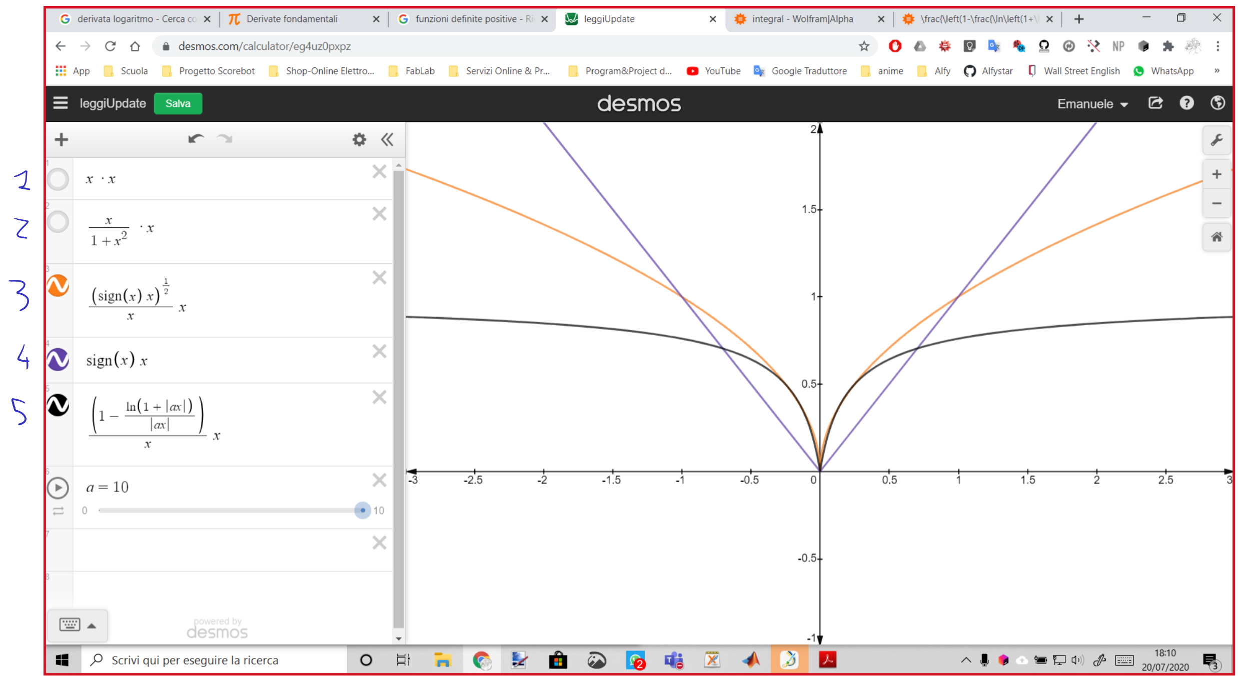
$$\int \frac{1-\frac{\log(1+|a\,x|)}{|a\,x|}}{x}\,dx =$$

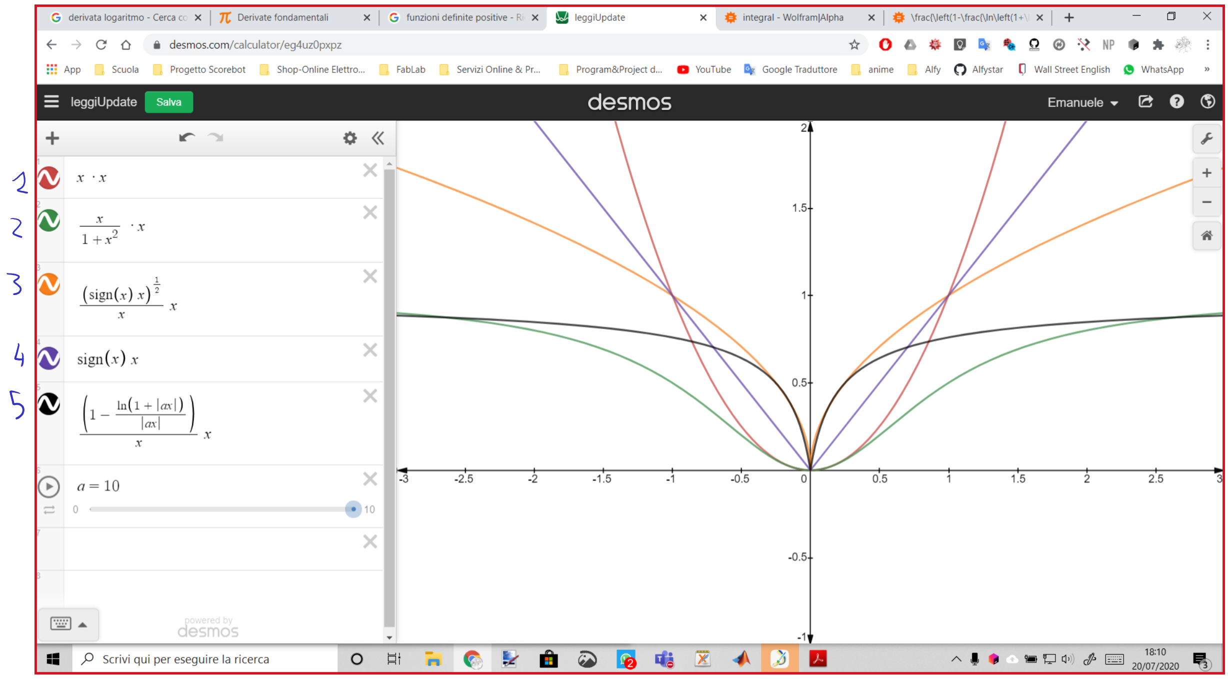
$$\frac{1}{2\,a\,x}\left(\operatorname{sgn}(a\,x)\left((1-a\,x)\log(1-a\,x)+(a\,x+1)\log(a\,x+1)\right)+(a\,x-1)\log(1-a\,x)+(a\,x+1)\log(a\,x+1)\right)+\text{constant}$$

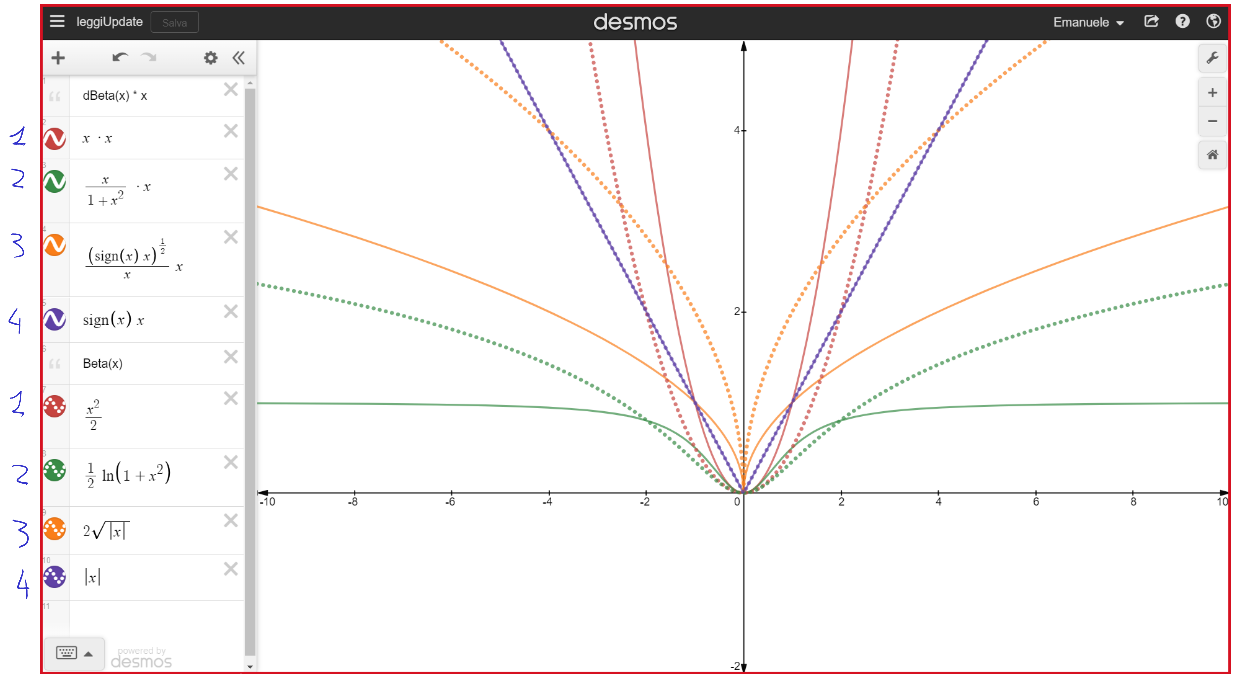
Andamenti della z nella legge di UPDATE

https://www.desmos.com/calculator/gzildhizcw



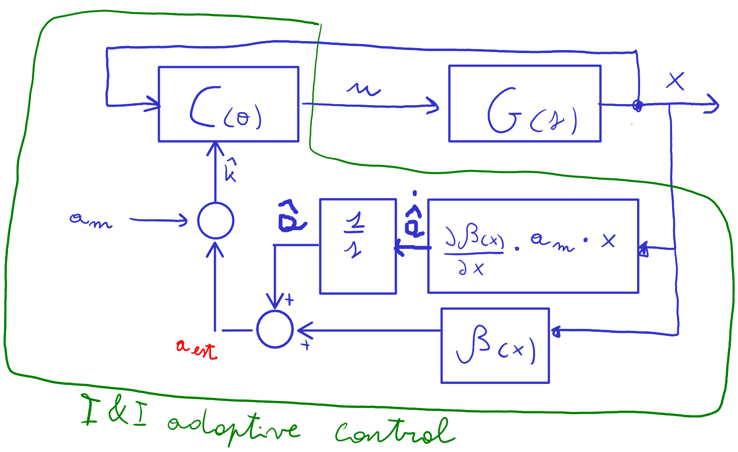






SCHEMA DI IMPLEMENTAZIONE I & I

$$\boxed{\text{Con } \theta = \hat{k} = a_m + a_{est}}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = -a_m x - z x \\ \dot{z} = -\left(\frac{\partial \beta(x)}{\partial x} \cdot x\right) z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = \frac{\partial \beta}{\partial x}\, a_m\, x \\ a_{est} = \hat{a} + \beta(x) \end{cases}$$