OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esame 20 Luglio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + (x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 & = & u + g(x_1, x_2) \end{array} \right. \tag{1}$$

   Determinare, motivando la risposta, una funzione continua g tale che la legge di controllo $u^\star = -x_1 - x_2$ risulti la soluzione ottima di (1) [6 PUNTI]

2. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 \left(3x(t)^2 + \frac{1}{2} u_1(t)^2 - u_2(t)^2 \right) dt + \frac{\alpha}{2} x(2)^2 \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-3x(t)^2 + u_2(t)^2 - \frac{1}{2} u_1(t)^2 \right) dt - \frac{\alpha}{2} x(2)^2 \right\}, \end{array} \quad s.t. \quad \dot{x} = x + u_1 - u_2 \tag{2}$$

   (a) Determinare un equilibrio di Nash del gioco (2) in funzione del parametro $\alpha \geq 0$ [4 PUNTI]

   (b) Determinare, motivando la risposta, il migliore valore di $\alpha \in [0, 1]$ per il Giocatore 2 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \sqrt{2}$ [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (-x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (-3x(t)^2 + u_2(t)^2) dt \right\}, \end{array} \quad s.t. \quad \dot{x} = 2x - \sqrt{3} u_1 + u_2 \tag{3}$$

   (a) Determinare il numero di equilibri di Nash del gioco differenziale (3) [2 PUNTI]

   (b) Scrivere la matrice M associata al gioco [1 PUNTO]

   (c) Sapendo che l'insieme degli autovalori di M contiene 2 e una coppia di autovalori complessi-coniugati, determinare il valore di tutti gli equilibri di Nash [4 PUNTI]

4. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni sufficienti di ottimalitá [6 PUNTI]

5. Discutere il problema del Filtraggio Ottimo Deterministico [6 PUNTI]