Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Исследование нелинейных динамических систем на плоскости»

Студент 315 группы
А. В. Горбачев

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

Часть I

Динамические системы с непрерывным временем

1 Постановка задачи

Дана динамическая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{ax(K-x)}{K} - \dfrac{bxy}{N+x}, \\ \dot{y} = dxy - \dfrac{cy^2}{N+y}. \end{cases}$$

Рассматриваемая область: $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$. Параметры системы положительны.

Необходимо:

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы.
2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).
6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

2 Биологическая интерпретация

Система (1) является системой, описывающей модель «хищник-жертва», в общем случае описываемой системой:

$$\begin{cases} \dot{u} = A(u) - B(u,v), \\ \dot{v} = -C(v) + D(u,v), \end{cases}$$

где
u, v — численность жертв, хищников соответственно,
$A(u)$ — функция, описывающая размножение жертв при отсутствии хищников,
$B(u,v)$ описывает выедание жертв хищниками,
$C(v)$ — функция, описывающая вымирание хищников при отсутствии жертв,
$D(u,v)$ — эффективность поедания жертв хищниками.
Тогда для нашей системы получим:

$$A(x) = \frac{ax(K-x)}{K}, B(x,y) = B_1(x) * B_2(y), B_1(x) = \frac{bx}{N+x}, B_2(y) = y,$$

$$C(y) = \frac{cy^2}{N+y}, D(x,y) = D_1(x) * D_2(y), D_1(x) = cx, D_2(y) = y;$$

Функция $A(x)$ представляет собой скорость размножения жертв в отсутствие хищников. В рассматриваемой задаче эта скорость задается логистическим законом. Это значит, что модель учитывает внутривидовую конкуренцию жертв. Максимальное возможное число жертв задается числом K. Параметр a отвечает за интенсивность размножения жертв.
Функцию $B1(x,y)$ называют трофической функцией хищника. Она отражает степень насыщения хищника, так как $\lim_{x\to\infty} B_1(x) = b = const > 0$. Степень насыщения хищника значит, что при фиксированной численности хищников с ростом популяции жертв выедание жертв растет не бесконечно и не превысит некоторого фиксированного числа (в нашем случае, не превысит b);
$B_2(y)$ показывает, как скорость выедания жертв зависит от численности популяции хищников (численность жертв фиксирована). Данная функция, в нашем случае, линейная, что говорит об отсутствии конкуренции за жертв. Это, в свою очередь, может быть только при небольшой численности популяции хищников;
Функция $C(y)$ отвечает за смертность хищников при отсутствии популяции жертв. В нашем случае зависимость $C(y)$ от численности y нелинейная. Заметим, что учитывается нелинейность вымирания хищника при малых плотностях популяции ($\lim_{y\to\infty} C(y) = 0$).
Функция $D(x,y)$ отражает эффективность потребления жертв хищниками. Здесь $D_1(x)$ есть мера пользы для хищников от потребления жертв в зависимости от числа жертв, а $D_2(y)$ — влияние численности популяции хищников на эффективность потребления ими жертв. Обе зависимости линейные.

3 Замена переменных

Возьмем $x = mu(\tau), y = pv(\tau), t = l\tau$,
Тогда

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{lau(K - mu)}{K} - \dfrac{lbpuv}{m(\frac{N}{m} + u)}, \\ \dot{v} = ldmuv - \dfrac{cv^2}{\frac{N}{p} + v}, \end{cases}$$

Из этой системы, с помощью некоторых замен, получим:

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u(1 - u) - \dfrac{\beta uv}{(1 + \gamma u)}, \\ \dot{v} = uv - \dfrac{\delta v^2}{1 + v}, \end{cases}$$

4 Неподвижные точки

Определение 1 *Неподвижными точками (положениями равновесия) динамической системы $\dot{u} = f(u)$, называются такие точки фазового пространства u^*, что $f(u^*) = 0$.*

Тогда для нахождения неподвижных точек решим систему:

$$\begin{cases} \alpha u(1 - u) - \dfrac{\beta uv}{(1 + \gamma u)} = 0, \\ uv - \dfrac{\delta v^2}{1 + v} = 0, \end{cases}$$

Из нее следует, что есть три неподвижные точки: Заметим, что неподвижная точка $(u, v) = (0, 0)$ существует независимо от значений параметров. Далее положим $u = 0$, тогда из второго уравнения следует $v = 0$. Теперь положим $v = 0, u \neq 0$, из первого уравнения следует, что $u(1 - u) = 0$, следовательно вторая неподвижная точка $(u, v) = (1, 0)$ так же не зависит от параметров системы. Теперь остались случаи, когда $uv \neq 0$:

$$\begin{cases} \alpha(1 - u) - \dfrac{\beta v}{(1 + \gamma u)} = 0, \\ u - \dfrac{\delta}{1 + v} = 0, \end{cases}$$

Данную систему нетривиально решить даже с помощью символьных вычислений в системе matlab, поэтому мы не будем ее рассматривать.

5 Устойчивость неподвижных точек

Рассмотрим динамическую систему с непрерывным временем

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \to \mathbb{R}^n,$$

Пусть u^* — ее положение равновесия. Обозначим $J(u^*)$ матрицу Якоби функции $f(u)$ в точке u^*. Пусть n_+, n_0, n_- — число собственных значений $J(u^*)$ (с учетом их кратности) с положительной, равной нулю и отрицательной вещественной частью соответственно.

Определение 2 *Положение равновесия системы (5) называется гиперболическим, если $n_0 = 0$. Гиперболическое положение равновесия называется гиперболическим седлом, если $n_+ n_- \neq 0$.*

Теорема 1 *Пусть u^* — гиперболическое положение равновесия (5). Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия ассимптотически устойчиво, если $n_+ > 0$, то неустойчиво*

Для нашей системы якобиан выглядит так

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} -\alpha u + \alpha(1-u) - \dfrac{\beta v(1+\gamma u) - \gamma\beta u v}{(1+\gamma u)^2} & \dfrac{\beta u}{1+\gamma u} \\ v & u - \dfrac{2\delta v(1+v) - \delta v^2}{(1+v)^2} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим точку $(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \alpha$. Так как существует нулевое собственное значение, то мы не можем оценить устойчивость точки по теореме.
Рассмотрим точку $(1,0)$:

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -\alpha & \dfrac{\beta}{1+\gamma} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\alpha$, так как $\lambda_1 > 0$, то точка неустойчива.
Параметрический портрет системы тривиален.

6 Фазовые портеты системы

Приведем фазовые портреты системы вблизи каждой рассматриваемой неподвижной точки.

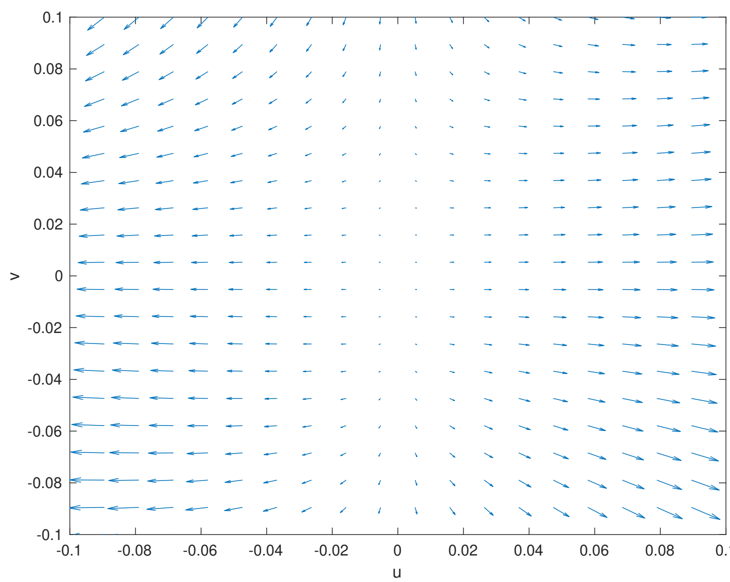

Рис. 1: Фазовый портрет точки $(0, 0)$ при параметрах $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 1$. Видно, что при данных параметрах точка неустойчива.

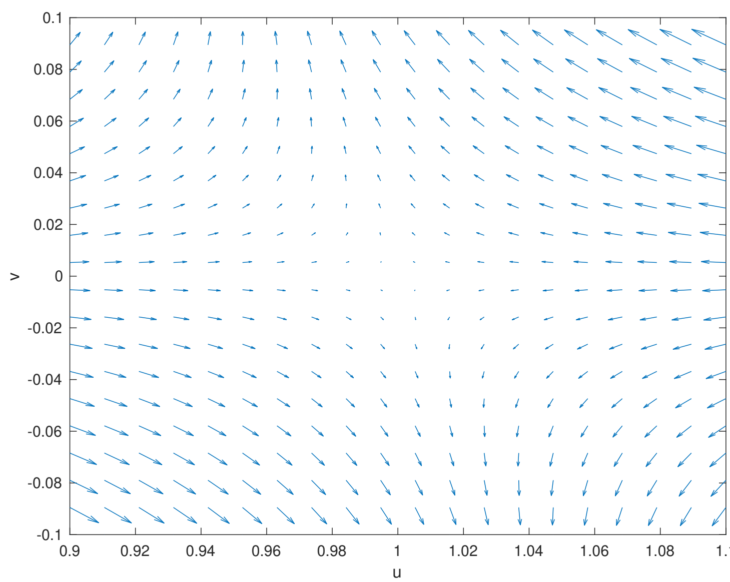

Рис. 2: Фазовый портрет точки $(1, 0)$ при параметрах $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$. Точка при любых значениях параметров неустойчива, что и показано на данном фазовом портрете.

7 Предельные циклы

Определение 3 *Бифуркацией Андронова-Хопфа называется бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел* $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$.

Рассмотрим систему

$$\dot{u} = f(u; \alpha),$$

имеющую при $\alpha = 0$ положение равновесия $u = 0$ и $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \ \omega_0 > 0$. Тогда система представима в виде

$$\dot{u} = A(\alpha) + F(u; \alpha),$$

где F — функция, в разложении в ряд Тейлора которой входят только члены 2 порядка и выше. Пусть матрица $A(\alpha)$ имеет собственные значения $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ и $\overline{\lambda(\alpha)}$. Кроме того, $\mu(0) = 0, \ \omega(0) = \omega_0 > 0$. Пусть $q(\alpha)$ — собственный вектор $A(\alpha)$, отвечающий собственному значению λ, а $p(\alpha)$ — собственный вектор $A^T(\alpha)$, отвечающий собственному значению $\overline{\lambda}$. В нашем случае собственые значения вида $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \ \omega_0 > 0$ не возникают ни про каких значениях параметров, следовательно, система предельных циклов не имеет.

8 Биологическая интерпретация полученных результатов

Перечислим основные возможные пути развития системы:

1. Если в начальный в начальный момент времени хищников существенно больше чем жертв, то хищники слишком интенсивно выедают жертв, что приводит к вымиранию сначала жерт, а потом и самих хищников.

2. Если же хищников меньше (или не радикально больше), чем жертв то наблюдается постепенный прирост как численности жертв так и хищников. Причем на небольшой прирост хищников приходится существенный прирост численности жертв.

3. Когда жертв слишком много, из-за конкуренции внутри жертв, их количество возрастает, следовательно, количество хищников, которые начинают активно поедать жертв, увеличивается. Получаем неустойчивый цикл, в результате которого один из видов вымирает.

Список литературы

[1] А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов «Динамические системы и модели биологии», М.: «Физматлит», 2010 г.

[2] И.В. Востриков курс лекций «Динамические системы и биоматематика», 2022 г.

[3] В.Д. Горяченко «Элементы теории колебаний: учебное пособие для студентов высших учебных заведений», М.: «Высшая Школа», 2001 г.