



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по второй лабораторной работе

## «Управление движением материальной точки на прямой»

*Студент 315 группы*  
А. В. Горбачёв

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2022

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические выкладки</b>	<b>4</b>
2.1	Формулировка принципа максимума Понтрягина . . . . .	4
2.2	Вычисление оптимального управления . . . . .	5
2.3	Формула Коши для $x(t)$ и $\psi(t)$ . . . . .	6
2.4	Исследование особых режимов . . . . .	6
2.5	О перепараметризации . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Исследование задачи в первом варианте</b>	<b>8</b>
3.1	$\psi_0 < 0$ . . . . .	8
3.1.1	$\psi_2^0 > 0$ . . . . .	8
3.2	Аномальный случай: $\psi_0 = 0$ . . . . .	11
3.2.1	Случай $\psi_2^0 > 0$ . . . . .	11
3.2.2	Случай $\psi_2^0 \leq 0$ . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Исследование задачи во втором варианте</b>	<b>12</b>
4.1	Нормальный случай: $\psi_0 < 0$ . . . . .	12
4.2	Аномальный случай: $\psi_0 = 0$ . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Примеры работы программы</b>	<b>15</b>
5.1	$\mathcal{P}_1$ . . . . .	15
5.1.1	Пример 1. . . . .	15
5.1.2	Пример 2 (обнуление функционала). . . . .	18
5.2	$\mathcal{P}_2$ . . . . .	22
5.2.1	Пример 1. . . . .	22
5.2.2	Пример 2. . . . .	26
5.3	Сравнение оптимальных траекторий при $u_1 \in \mathcal{P}_1$ и $u_1 \in \mathcal{P}_2$ . . . . .	30

# 1 Постановка задачи

Движение материальной точки на прямой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} = u_1 - x(1 + u_2) - gx, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

На возможные значения управляющих параметров  $u_1, u_2$  наложены следующие ограничения:

1. либо  $0 \leq u_1 \leq \alpha, u_2 \in [k_1, k_2], k_2 \geq k_1 \geq 0$ ,
2. либо  $u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in [k_1, k_2], k_2 \geq k_1 \geq 0$

Задан начальный момент времени  $t_0 = 0$  и начальная позиция  $x(0) = L, \dot{x}(0) = 0$ . Необходимо за счет выбора программного управления  $u$  перевести систему из данной начальной позиции в такую позицию в момент времени  $T$ , в которой  $|x(T)| \leq \varepsilon, |\dot{x}(T)| \leq \varepsilon$ . На множестве всех программных управлений, переводящих материальную точку в указанное множество, необходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int_0^T u_1^2(t) dt \rightarrow \min_{u(\cdot)}$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам  $\alpha, T, k_1, k_2, L, \varepsilon$  определяет, разрешима ли задача оптимального управления (при одном из указанных двух ограничений на управление). Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.
2. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчёте, должны быть доказаны. В отчёте должны быть приведены примеры оптимальных траекторий для всех возможных качественно различных "режимов".

## 2 Теоретические выкладки

### 2.1 Формулировка принципа максимума Понтрягина

Произведём замену переменных  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1 - x_2(1 + u_2) - gx_1, \\ x_1(0) = L, x_2(0) = 0, \\ |x_1(T)| \leq \varepsilon, |x_2(T)| \leq \varepsilon, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим подынтегральную функцию в функционале следующим образом:

$$f_0(x, u) = u_1^2(t).$$

Расширим фазовое пространство переменных путём добавления новой переменной  $x_0$ , которой соответствует дифференциальное уравнение  $\dot{x}_0 = f_0(x, u)$ . После этого мы получим расширенную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = f_0(x, u), \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1 - x_2(1 + u_2) - gx_1, \\ x_1(0) = L, x_2(0) = 0, x_0(0) = 0, \\ |x_1(T)| \leq \varepsilon, |x_2(T)| \leq \varepsilon, \\ x_0(T) \rightarrow \min_{u(\cdot)}, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3)$$

Введём сопряженные переменные:  $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$  и введём обозначения:  $\tilde{x} = (x_0, x_1, x_2)$ ,  $\tilde{f} = (f_0, f_1, f_2)$ , где  $f_0 = u_1^2$ ,  $f_1 = x_2$ ,  $f_2 = u_1 - x_2(1 + u_2) - gx_1$  для того, чтобы записать функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H} = \psi_0 u_1^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (u_1 - x_2(1 + u_2) - gx_1).$$

**Теорема 1.** (Принцип максимума Понтрягина) Пусть  $u^*(\cdot), x^*(\cdot)$  — оптимальная пара для исходной задачи из  $(L, 0)^T$  в  $\mathcal{X} = \{(x_0, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| \leq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\}$  с ограничением на управление  $\mathcal{P}$ . Тогда существует функция  $\tilde{\psi}^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которая называется сопряженной функцией, такая, что выполнены следующие условия:

1.  $\tilde{\psi}^* \neq 0$ .
2.  $\dot{\tilde{\psi}}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{x}} \bigg|_{\substack{\tilde{\psi}=\tilde{\psi}^*(t) \\ \tilde{x}=\tilde{x}^*(t) \\ u=u^*(t)}}$
3.  $\mathcal{H}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) \stackrel{n.s.t}{=} \sup_{u \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u) = \mathcal{M}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t)).$
4.  $\psi_0^*(\cdot) = \text{const} \leq 0$
5. Если  $\mathcal{X}$  является многообразием с касательным пространством  $T^*$  в точке  $x(T)$ , то решение  $\psi(t)$  может быть выбрано удовлетворяющим условиям трансверсальности:  $\psi(T)$  ортогонально к  $T^*$

Вторая система уравнений в теореме называется сопряженной системой, третье – условия максимума, пятое – условия трансверсальности. Запишем выражение, которое эквивалентно условию максимума, чтобы было проще выбирать претендентов на оптимальное управление:

$$u^*(t) \stackrel{\text{п.в.т}}{\in} \operatorname{Arg} \max_{u \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u).$$

Сопряжённая система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 g, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2(1 + u_2). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения сопряженной системы однородные. Поэтому если  $\psi()$  удовлетворяет ей, то и  $\gamma\psi()$  будет ей удовлетворять, где  $\gamma$  – некоторая постоянная. Кроме того, ясно, что умножение тройки  $(\psi_0(), \psi_1(), \psi_2())$  на положительную постоянную не нарушит условия максимума. Поэтому, в дальнейшем достаточно рассмотреть случаи  $\psi_0 = -\frac{1}{2} < 0$  и  $\psi_0 = 0$ .

## 2.2 Вычисление оптимального управления

Найдём оптимальное управление  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  из условия максимума, т.е. оно должно максимизировать функцию Гамильтона-Понтрягина  $\mathcal{H}$ : Рассмотрим первую компоненту  $u_1^*$ :  $\psi_0 u_1^2 + \psi_2 u_1 \rightarrow \max_{u_1()}$

1. Ограничение на компоненту управления  $u_1$  такое  $0 \leq u_1 \leq \alpha$

(a) При  $\psi_0 \neq 0$ :

$$u_1^*(t) = \begin{cases} -\frac{\psi_2}{2\psi_0}, & 0 < -\frac{\psi_2}{2\psi_0} < \alpha \\ 0, & -\frac{\psi_2}{2\psi_0} \leq 0 \\ \alpha, & \alpha \leq -\frac{\psi_2}{2\psi_0}. \end{cases}$$

(b) При  $\psi_0 = 0$ :

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & \psi_2 < 0 \\ \alpha, & \psi_2 > 0 \\ [0, \alpha], & \psi_2 = 0. \end{cases}$$

2. Ограничение на  $u_1$  имеет вид  $u_1 \in \mathbb{R}$

(a) При  $\psi_0 = 0$ :

$$u_1^*(t) = \begin{cases} +\infty, & \psi_2 > 0 \\ -\infty, & \psi_2 < 0 \\ (-\infty, +\infty), & \psi_2 = 0. \end{cases}$$

То есть либо  $u_1$  принимает бесконечные значения, либо  $\psi \equiv 0$ , что противоречит условиям теоремы.

(b) При  $\psi_0 \neq 0$ :

$$u_1^*(t) = -\frac{\psi_2}{2\psi_0}.$$

Найдём  $u_2^*(t)$ , слагаемое с  $u_2$  в  $\mathcal{H}$  имеет вид:  $-\psi_2 x_2 u_2$ . В обоих случаях ограничение на компоненту  $u_2$  имеет вид  $u_2 \in [k_1, k_2]$ ,  $k_2 \geq k_1 \geq 0$ . следовательно можно сразу выписать вид  $u_2$ :

$$u_2^*(t) = \begin{cases} k_2, & x_2 \psi_2 < 0 \\ [k_1, k_2], & x_2 \psi_2 = 0 \\ k_2, & x_2 \psi_2 > 0. \end{cases}$$

### 2.3 Формула Коши для $x(t)$ и $\psi(t)$ .

**Теорема 2.** *Формула Коши). Решение задачи Коши для неоднородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay(t) + f(t), \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

представимо в виде:

$y(t) = W(t, t_0)y^0 + \int_{t_0}^t W(t, \tau)f(\tau)d\tau$ , где  $W(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$  - фундаментальная матрица системы.

Введём следующие обозначения:

$$A_x^{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -(1+u_2) \end{bmatrix}, f^{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \end{bmatrix}, y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix},$$

$$A_\psi^{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -1 & 1+u_2 \end{bmatrix}, \psi^0 = \begin{bmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{bmatrix}.$$

Система 2 примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_x^{u_2}x + f^{u_1} \\ x(t_0) = x^0. \end{cases}$$

По формуле Коши решение системы 2 для промежутков времени, на которых компонента управления  $u_2$  постоянна, имеет вид:

$$x(t) = e^{A_x^{u_2}(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^t e^{A_x^{u_2}(\tau-t_0)}f^{u_1}(\tau)d\tau$$

Сопряжённая система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = A_\psi^{u_2}\psi + f^{u_1} \\ \psi(t_0) = \psi^0. \end{cases}$$

По формуле Коши решение сопряжённой системы для промежутков времени, на которых компонента управления  $u_2$  постоянна, имеет вид:

$$\psi(t) = e^{A_\psi^{u_2}(t-t_0)}\psi^0 + \int_{t_0}^t e^{A_\psi^{u_2}(\tau-t_0)}f^{u_1}(\tau)d\tau$$

### 2.4 Исследование особых режимов

При  $\psi_2 x_2 = 0$  возможен особый режим, в этом случае компонента управления  $u_2$  восстанавливается неоднозначно. Рассмотрим условия возникновения особого режима.

1.  $x_2(t) = 0$ . Покажем, что при этом условии нет особого режима. При  $x_2 = 0$  компонента управления  $u_2$  не влияет на траекторию системы, поэтому  $u_2$  можно взять любым.
2.  $\psi_2(t) = 0$ . Возникает возможность особого режима, т.е. не возможность однозначно определить компоненту управления  $u_2 \in [k_1, k_2]$ . Допустим  $\psi_2(t) = 0 \forall t \in [t_1, t_2] \subset [0, T]$ , но тогда из вида сопряженного уравнения и единственности решения задачи Коши получим, что  $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t) \equiv 0$  на  $[0, T]$ , что противоречит условию нетривиальности  $\psi(t)$  в принципе максимума Понтрягина. Значит особый режим может иметь место только в конкретной точке, в которой мы можем выбрать  $u_2^*$  любым, не повлияв на результат.

Также потенциально возможен особый режим при  $\psi_2(t) = \psi_0 = 0$ , тогда  $u_1^*$  определяется неоднозначно, но рассуждениями, аналогичными предыдущему пункту, приходим к выводу, что такая неоднозначность может возникнуть только в конкретной точке, где мы можем выбрать  $u_1^*$  произвольно, не повлияв этим на результат.

## 2.5 О перепараметризации

Для решения задачи необходимо построить все траектории, получающиеся при управлениях из принципа максимума, из них выбрать, те которые попадают в целевое множество  $\mathcal{X}$  в финальный момент времени  $T$ , и из полученных выбрать оптимальную пару, которая минимизирует функционал. Из получившегося по принципу максимума вида оптимального управления, следует что переключения управления  $u^*$  возможны при  $\psi_2(t) = 0, x_2(0) = 0$  в обоих вариантах (вид компоненты  $u_2^*$  для них общий), а также при  $\psi_2 = \alpha$  в случае  $\psi_0 < 0$  первого варианта. Ранее было показано что эти переключения простые, т.е. в задаче не возникает особых режимов. Для того чтобы найти время первого переключения управления  $u^*$  необходимо получить зависимости  $x(t), \psi(t)$ , проинтегрировав систему на  $x(t)$  и сопряжённую систему, что невозможно без знания начальных значений  $\psi_1^0, \psi_2^0$ . Если знать эти начальные значения, то решив задачу Коши для  $x(t), \psi(t)$  из начальной позиции  $(L, 0, \psi_1^0, \psi_2^0)$ , можно найти время первого переключения  $t^*$  и получить связь между  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  и  $t^*$ . Далее изменив систему на  $x(t)$  и сопряжённую систему (смена управления), имеем задачу Коши с начальной позицией  $(x_1(t^*), x_2(t^*), \psi_1(t^*), \psi_2(t^*))$  для дальнейшего получения  $x(t), \psi(t)$ .

Но  $\psi_1^0, \psi_2^0$  не даны. Перебор по ним невозможен в силу неограниченности множества их значений.

Поэтому обратим задачу: будем искать  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  из их связи с временем первого переключения  $t^*$ , перебирая по возможным значениям  $t^*$ . А это уже перебор по конечному множеству. Если не удастся поточнее оценить  $t^*$ , то можно перебирать его по всему временному отрезку  $[0, T]$ , так как финальное время  $T$  не очень велико. Уточним, для перепараметризации задачи недостаточно одного временем первого переключения  $t^*$ , но его связь с нужными  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  даёт возможность перебора по  $t^*$ , что вместе с ещё одним конечным перебором по какому-либо параметру позволит заменить неограниченный перебор на конечный. Вторым параметром в зависимости от случая может быть  $\psi_1$  или  $\psi_2$ , если они приемливо ограничены, или время второго переключения  $t^{**}$ , либо используем воспользуемся известным нам условием трансверсальности на правом конце.

### 3 Исследование задачи в первом варианте

Ограничения на допустимые управления имеют вид:

$$u \in \mathcal{P} = \{(u_1, u_2)^T : 0 \leq u_1 \leq \alpha, u_2 \in [k_1, k_2], k_2 \geq k_1 \geq 0\}.$$

#### 3.1 $\psi_0 < 0$

Пусть  $\psi_0 = -\frac{1}{2}$ , т.к.  $(\psi_0, \psi(t))$  определяются с точностью до умножения на положительную константу. Тогда компоненты оптимального управления имеют вид:

$$u_1^* = \begin{cases} 0, \psi_2 < 0 \\ [0, \alpha], \psi_2 = 0 \\ \alpha, \psi_2 > 0; \end{cases} \quad u_2^* = \begin{cases} k_2, \psi_2 x_2 < 0 \\ [k_1, k_2], \psi_2 x_2 = 0 \\ k_1, \psi_2 x_2 > 0; \end{cases}$$

##### 3.1.1 $\psi_2^0 > 0$

Покажем, что в этом случае  $\psi_2 x_2 > 0$  до первого переключения по  $\psi_2^*(t) = 0$ , а следовательно, до  $t^*$  задача решается при управлении  $u_2^* = k_1$ . Рассмотрим поведение системы в окрестности начального времени  $t_0 = 0$ . Так как  $\psi_2^0 > 0$ , то компонента управления  $u_1^*$  может принимать следующие значения:

$$u_1^* = \begin{cases} \psi_2, 0 < \psi_2 < \alpha, \\ \alpha, \psi_2 > \alpha. \end{cases} \Rightarrow u_1 > 0 \text{ в окрестности } t_0 = 0.$$

$\dot{x}_2(0) = (u_1 - x_2(1 + u_2) - gx_1)|_{t=0} = u_1(0) - gL$ . Не ограничивая общности, предположим, что  $u_1(0) - gL > 0 \Rightarrow \dot{x}_2(0) > 0$  в окрестности  $t_0 = 0 \Rightarrow x_2$  возрастает в окрестности  $t_0 = 0 \Rightarrow x_2(t) > 0$  в окрестности  $t_0 = 0$ , т.к.  $x_2(0) = 0$ . Так как  $\psi_2^0 > 0$  и система рассматривается до первого переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$ , то  $\psi_2(t) > 0$  до времени  $t^* \Rightarrow \psi_2 x_2 > 0$  в окрестности  $t_0 = 0$ . До переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$  возможно переключение  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$ . Но при нём изменится компонента  $u_1^*$ , что не повлияет на сопряжённую систему. Проблема возникает с доказательством отсутствия переключения по  $x_2(t) = 0$ . Получено, что  $x_2(t) > 0$  и компонента управления  $u_2^* = k_1$  в окрестности  $t_0 = 0$ . Доказательство того, что  $x_2(t) > 0$  и дальше до переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$ , приводится далее при рассмотрении всех возможностей поведения  $\psi_2(t)$ . Итак, в этом случае система решается при компоненте управления  $u_2^* = k_1$  до времени первого переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$ . Поэтому при фиксированных  $\psi_1^0, \psi_2^0$  получим:

$$\psi(t) = e^{A_\psi t} \psi^0 \Rightarrow \psi_2(t) = \frac{\exp(\frac{t(1+k_1)}{2})}{p} ((-2\psi_1^0 + (1+k_1)\psi_2^0) \sinh \frac{pt}{2} + p\psi_2^0 \cosh \frac{pt}{2}),$$

где  $p = \sqrt{k_1^2 + 2k_1 - 4g + 1}$ . Получим ограничение на возможные входные параметры задачи:

$$k_1^2 + 2k_1 - 4g + 1 > 0.$$

Получим связь параметров  $\psi_1^0, \psi_2^0$  и временем первого переключения  $t^*$  из условия  $\psi_2(t^*) = 0$ :

$$\tanh \frac{pt^*}{2} = \frac{p\psi_2^0}{2\psi_1^0 - (1+k_1)\psi_2^0}.$$

Область значений гиперболического тангенса при положительном аргументе:  $0 < \tanh \frac{pt^*}{2} < 1$ , поэтому:



1.  $\psi_2(t)$  не пересекает ноль, если  $\frac{p\psi_2^0}{2\psi_1^0-(1+k_1)\psi_2^0} \notin (0, 1) \Rightarrow 2\psi_1^0 \leq \psi_2^0(1+k_1)$ . В этом случае  $\psi_2(t)$  возрастает.
2.  $\psi_2(t)$  пересекает ноль, если  $\frac{p\psi_2^0}{2\psi_1^0-(1+k_1)\psi_2^0} \in (0, 1)$ . Возможны два варианта поведения функции  $\psi_2(t)$  до пересечения с нулём: монотонно убывает или сначала колеблется, а потом убывает;

Рассмотрим 2 следующие ситуации:  $\psi_2(t)$  не пересекает ноль,  $\psi_2(t)$  пересекает ноль.

Первый случай:  $\psi_2(t)$  не пересекает ноль.

Во-первых, как было обещано, необходимо доказать, что  $x_2$  при таком поведении функции  $\psi_2(t)$  не обнуляется до переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$ . Во-вторых, необходимо получить нужную перепараметризацию. Так как поведение всей системы зависит от компоненты  $u_1^*$  и возможны два её значения до переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$  (в силу того, что  $\psi_2(t^*) > 0$  до  $t^*$ ), рассмотрим следующие два случая:  $\psi_2^0 \geq \alpha$  или  $\psi_2^0 < \alpha$ .

1.  $\psi_2^0 \geq \alpha$  (случай без переключений) По формуле для компоненты управления  $u_1^*$  получим её начальное значение:  $u_1^* = \alpha$ . Переключение по  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$  не возможно в силу возрастания функции  $\psi_2(t)$  из начального значения  $\psi_2^0 \geq \alpha$ . Рассмотрим знак функции  $x_2(t)$ :

$$x(t) = e^{A_{x^2}(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^t e^{A_{x^2}(\tau-t_0)}f^{u_1}(\tau)d\tau \Rightarrow x_2(t) = \frac{2\alpha e^{-t(1+k_1)/2}}{p} \sinh \frac{pt}{2} > 0.$$

Итак, в этом случае переключения управления нет. Поэтому перепараметризация не нужна, т.к. решение сопряжённой системы не требуется для интегрирования системы. Решив систему на  $x(t)$  при управлении  $u_1^* = \alpha, u_2^* = k_1$  из начальной точки  $x^0 = (L, 0)$  до финального времени  $T$ , проверяем попадание траектории в целевое множество  $\mathcal{X}$ . Если  $x(T) \in \mathcal{X}$ , то полученная пара  $(x(t), u(t))$  подлежит дальнейшему рассмотрению на минимизацию функционала.

2.  $\psi_2^0 < \alpha$  По формуле для компоненты  $u_1^*$  получим, что система стартует с  $u_1^*(t) = \psi_2(t)$ . Так как  $\psi_2(t)$  возрастает, получим при  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$  компонента управления  $u_1^*$  переключается с  $\psi_2(t)$  на  $\alpha$ . Введём новый параметр – время этого переключения  $t_\alpha$ . Как уже пояснялось, это переключение не повлияет на сопряжённую систему, поэтому из условия  $\psi_2(t_\alpha)$  получим связь  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  и параметра  $t_\alpha$ :

$$\psi_1^0 = \frac{1}{2 \sinh \frac{pt_\alpha}{2}} (((1+k_1) \sinh \frac{pt_\alpha}{2} + \cosh \frac{pt_\alpha}{2}) \psi_2^0 - \alpha p e^{-(1+k_1)\frac{t_\alpha}{2}}).$$

Осталось показать, что функция  $x_2(t)$  не обращается в нуль до времени  $t_\alpha$ . Предполагалось доказательство до  $t^*$ , но это лишнее, т.к. задача Коши для системы после первого переключения задана и подлежит численному интегрированию. Получим:

$$x_2(t) = \frac{e^{-\frac{t(1+k_1)}{2}}}{2(1+k_1)p} ((e^{t(1+k_1)}-1)p\psi_2^0 \cosh \frac{pt}{2} - (2(e^{t(1+k_1)}-1)\psi_1^0 - (1+k_1)(e^{t(1+k_1)}+1)\psi_2^0) \sinh \frac{pt}{2}).$$

Используя ограничение этого случая на  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$ :  $-2\psi_1^0 > -(p + (1+k_1))\psi_2^0$  оценим полученное выражение для  $x_2(t)$ :

$$-2(e^{t(1+k_1)}-1)\psi_1^0 - (1+k_1)(e^{t(1+k_1)}+1)\psi_2^0 > (p(1-e^{t(1+k_1)})+2(1+k_1))\psi_2^0 \Rightarrow x_2(t) > 0.$$

Итак, получена перепараметризация:

$\psi_2^0 \in [0, \alpha], t_\alpha \in [0, T]$  и формула связи.

Второй случай:  $\psi_2(t)$  пересекает ноль.

Как было показано, этот случай возможен при  $\psi_1^0 > \frac{\psi_2^0}{2}(p + (1 + k_1))$ . Функция  $\psi_2(t)$  до пересечения с нулём может: либо монотонно убывать, либо до окрестности нуля как-то произвольно себя вести, например сначала возрастать или колебаться, а в окрестности убывать. Но цель этого пункта получить корректную перепараметризацию задачи, а для этого нужно исследовать поведение системы до первого, если надо второго, переключения. Рассмотрим три возможных случая начального значения  $\psi_2^0$  и поведения функции  $\psi_2(t)$ .

1.  $\psi_2^0 > \alpha$ . До переключения по  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$  система решается с  $u_1^* = \alpha, u_2^* = k_1$ . Поэтому функция  $x_2(t)$  положительна до переключения  $t_\alpha$ . Из условия  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$  получим связь параметров  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  и времени первого переключения  $t_\alpha$ , которая выражается формулой:

$$\psi_1^0 = \frac{1}{2 \sinh \frac{pt_\alpha}{2}} (((1 + k_1) \sinh \frac{pt_\alpha}{2} + \cosh \frac{pt_\alpha}{2}) \psi_2^0 - \alpha p e^{-(1+k_1)\frac{t_\alpha}{2}}).$$

Так как  $\{\psi_2 > \alpha\}$  - неограниченное множество, нужен ещё один параметр: время переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$ . После переключения по  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$  компонента управления  $u_1^*$  изменится с  $\alpha$  на  $\psi_2$ , а вторая компонента останется прежней  $u_2^* = k_1$ . Рассмотрим пересечение функции  $\psi_2(t)$  с нулём, оно описывается формулой (9). Подставим в формулу, описывающую это пересечение, связь  $\psi_1^0$  с  $\psi_2^0, t_\alpha$ . Получим связь  $\psi_2^0$  от новых параметров  $t_\alpha, t^*$ :

$$\psi_2^0 = \alpha e^{-(1+k_1)\frac{t_\alpha}{2}} \frac{\sinh \frac{pt^*}{2}}{\sinh \frac{p(t^*-t_\alpha)}{2}}.$$

Осталось проверить, что функция  $x_2(t)$  положительна при  $0 < \psi_2(t) < \alpha$ . Поведение  $x_2(t)$  при  $t \in [t_\alpha, t^*]$ , описывает формулой второй компоненты функции:

$$x(t) = e^{A_{x_1}^{k_1}(t-t_\alpha)} x(t_\alpha) + \int_{t_\alpha}^t e^{A_{x_1}^{k_1}(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2(\tau) \end{bmatrix} d\tau,$$

где  $x(t_\alpha)$  определяется соответствующей формулой. Из-за слишком длинных выражений не будем полностью приводить доказательство положительности  $x_2(t)$ , скажем лишь оно проводится аналогично предыдущему случаю.

Итак, получена перепараметризация:  $0 < t_\alpha < t^* \leq T$  и формулы связи.

2.  $\psi_2^0 \leq \alpha$  и  $\psi_2(t) < \alpha$  всегда. До переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$  система решается при  $u_1^* = \psi_2, u_2^* = k_1$ . Так как функция  $\psi_2(t)$  не зависит от компоненты  $u_1^*$ , то можно получить связь  $\psi_1^0$  с  $\psi_2^0, t^*$ :

$$\psi_1^0 = \frac{1}{2} \psi_2^0 (p \coth \frac{pt^*}{2} + 1 + k_1).$$

Доказательство положительности функции  $x_2(t)$  до переключения  $\psi_2(t^*) = 0$  аналогично подслучаю (2) первого случая. Итак, получена перепараметризация:

$$\psi_2^0 \in (0, \alpha], t^* \in [0, T]$$

И соответствующая формула связи.

3.  $\psi_2^0 \leq \alpha$  и  $\psi_2(t)$  пересекает  $\alpha$ . В этом случае функция  $\psi_2(t)$  не сразу убывает к нулю. До переключения по  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$  система решается при  $u_1^* = \psi_2, u_2^* = k_1$ . Так как функция  $\psi_2(t)$  не зависит от компоненты  $u_1^*$ , то получим связь  $\psi_1^0$  с  $\psi_2^0, t_\alpha$ :

$$\psi_1^0 = \frac{1}{2 \sinh \frac{pt_\alpha}{2}} \left( ((1 + k_1) \sinh \frac{pt_\alpha}{2} + \cosh \frac{pt_\alpha}{2}) \psi_2^0 - \alpha p e^{-(1+k_1)\frac{t_\alpha}{2}} \right).$$

Доказательство положительности функции  $x_2(t)$  до переключения  $\psi_2(t_\alpha) = \alpha$  аналогично подслучаю (2) первого случая. Так же как и в том случае доказательство положительности функции  $x_2(t)$  далее до переключения по  $\psi_2(t^*) = 0$  излишне, по тем же причинам.

Итак, получена перепараметризация:  $\psi_2^0 \in (0, \alpha], t_\alpha \in [0, T]$  и соответствующая формула связи.

### 3.2 Анормальный случай: $\psi_0 = 0$ .

Из принципа максимума получено, что компоненты оптимального управления имеют вид:

$$u_1^* = \begin{cases} 0, \psi_2 > 0, \\ \alpha, \psi_2 < 0, \\ [0, \alpha], \psi_2 = 0; \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} k_1, \psi_2 x_2 > 0, \\ k_2, \psi_2 x_2 < 0, \\ [k_1, k_2], \psi_2 x_2 = 0. \end{cases}$$

Анормальный случай исследуется по той же схеме, что и нормальный, но с некоторыми особенностями и упрощениями.

#### 3.2.1 Случай $\psi_2^0 > 0$ .

Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно сделать выводы о том, что система стартует с  $u_2^* = k_1, u_1^* = 0$ . Так же можно сделать вывод о том, что функция  $x_2(t)$  не обнулится раньше чем функция  $\psi_2(t)$ . Поведение сопряжённой системы не зависит от компоненты  $u_1^*$ , поэтому:

$$\psi(t) = e^{A_\psi^k t} \psi^0 \Rightarrow \psi_2(t) = \frac{\exp(\frac{t(1+k_1)}{2})}{p} ((-2\psi_1^0 + (1 + k_1)\psi_2^0) \sinh \frac{pt}{2} + p\psi_2^0 \cosh \frac{pt}{2}).$$

Переключение по  $\psi_2(t^*) = 0$  возможно, если существует:

$$\tanh \frac{pt^*}{2} = \frac{p\psi_2^0}{2\psi_1^0 - (1 + k_1)\psi_2^0}.$$

Возможно два случая:

1. (случай без переключения)

Не существует  $t^* : \psi_2(t^*) = 0 \Rightarrow 2\psi_1^0 \leq \psi_2^0(1 + k_1)$ . Функция  $\psi_2(t)$  возрастает или ведёт себя так, что в окрестности  $t^*$  возрастает и уходит от нуля. Итак, в этом случае переключений нет.

2. (случай с переключениями)

Существует  $t^* : \psi_2(t^*) = 0 \Rightarrow 2\psi_1^0 > \psi_2^0(p + 1 + k_1)$ . Функция  $\psi_2(t)$  убывает до пересечения с нулём. Введём параметр  $t^*$ . Его связь с  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  выражается формулой:

$$2\psi_1^0 = \psi_2^0(p \coth \frac{pt^*}{2} + 1 + k_1).$$

Поскольку  $\psi_2(t)$  обнуляется при  $\psi_1^0, \psi_2^0$ , связанных соотношением, получим, что параметр  $\psi_2^0$  входит в формулу для  $\psi_2(t)$  лишь как положительный множитель, а потому не влияет на момент переключения  $t^*$ , т.е. функция положительно однородна по  $\psi_2^0$ . Поэтому фиксируем  $\psi_2^0 = 1$ . Итак, получена перепараметризация:  $\psi_2^0 = 1, t^* \in [0, T]$ , и формула связи.

### 3.2.2 Случай $\psi_2^0 \leq 0$ .

Повторяя рассуждения случая 3.1.2 можно сделать вывод о том, что система стоит в нуле до времени  $t' : \psi_2(t') = 0$ . После этого получим возникновение особого режима, т.е. невозможность определения компоненты  $u_1 \in [0, \alpha]$ . Но если сразу не выйти из этого состояния, то система останется в нуле. Поэтому, взяв в момент времени  $t'$  компоненту  $u_1 = \alpha$  (значение, которое она будет принимать после выхода из режима застоя системы), получим дальнейшее неограниченное возрастание функции  $\psi_2(t)$ . Связь параметра  $t'$  с  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  выражается соответствующей формулой. Видно, что далее система не имеет переключений ни по  $\psi_2(t)$ , ни по  $x_2(t)$ . Аналогично случаю 3.2.1 фиксируем  $\psi_2^0 = -1$  Итак, получена перепараметризация:  $\psi_2^0 = -1, t' \in [0, T]$  и формула связи.

## 4 Исследование задачи во втором варианте

$$u \in \mathcal{P} = \{(u_1, u_2)^T : u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in [k_1, k_2], k_2 \geq k_1 \geq 0\}.$$

### 4.1 Нормальный случай: $\psi_0 < 0$ .

Пусть  $\psi_0 = -\frac{1}{2}$ , т.к.  $(\psi_0, \psi(t))$  определяются с точностью до умножения на положительную константу. Тогда компоненты оптимального управления имеют вид:

$$u_1^* = \psi_2; \\ u_2^* = \begin{cases} k_1, \psi_2 x_2 > 0, \\ k_2, \psi_2 x_2 < 0, \\ [k_1, k_2], \psi_2 x_2 = 0. \end{cases}$$

Повторяя рассуждения случая 3.1.1, можно сделать вывод о том, что система стратует с  $u_2^* = k_1$ . Компонента управления  $u_1 = \psi_2$  на всём отрезке  $[0, T]$ . Поведение сопряжённой системы не зависит от компоненты  $u_1^*$ , поэтому воспользуемся следующей формулой:

$$\psi(t) = e^{A_{\psi}^k t} \psi^0 \Rightarrow \psi_2(t) = \frac{\exp(\frac{t(1+k_1)}{2})}{p} ((-2\psi_1^0 + (1+k_1)\psi_2^0) \sinh \frac{pt}{2} + p\psi_2^0 \cosh \frac{pt}{2}).$$

Поведение функции  $x_2(t)$  описывается формулой:

$$x_2(t) = \frac{e^{-\frac{t(1+k_1)}{2}}}{2(1+k_1)p} ((e^{t(1+k_1)} - 1)p\psi_2^0 \cosh \frac{pt}{2} - (2(e^{t(1+k_1)} - 1)\psi_1^0 - (1+k_1)(e^{t(1+k_1)} + 1)\psi_2^0) \sinh \frac{pt}{2}).$$

Аналогично случаю 3.1.1 доказывается, что  $\psi_2(t)$  обнулится раньше чем  $x_2(t)$ . Данный случай предполагает, что переключение  $\psi_2(t)$  попадёт на временной отрезок  $[0, T]$ . В зависимости от случая  $\psi_2^0 > 0$  или  $\psi_2^0 < 0$  получим, что существование времени  $t^* : \psi_2(t^*) = 0$ , определяемого формулой:

$$\tanh \frac{pt^*}{2} = \frac{p\psi_2^0}{2\psi_1^0 - (1+k_1)\psi_2^0},$$

эквивалентно выполнению условий:

1. если  $\psi_2^0 > 0$ , то  $2\psi_1^0 > \psi_2^0(p+1+k_1)$ . Функция  $\psi_2(t)$  убывает.
2. если  $\psi_2^0 < 0$ , то  $2\psi_1^0 < \psi_2^0(p+1+k_1)$ . Функция  $\psi_2(t)$  возрастает.

Введём параметр  $t^*$ . Его связь с  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$  выражается формулой:

$$\psi_1^0 = \frac{1}{2}\psi_2^0(p \coth \frac{pt^*}{2} + 1 + k_1).$$

Итак, рассмотрено поведение системы в нормальном случае. Сделан вывод о том, что только функция  $\psi_2(t)$  имеет единственное пересечение с нулём. Но данный подход имеет два значительных недостатка, не позволяющих использовать его для решения задачи:

1. (основной) введя один новый параметр  $t^*$  не возможно перепараметризовать два начальных значения  $\psi_1^0$  и  $\psi_2^0$ . Перебор не по одному из них (как это делалось в разделе 3.1.1 первый случай подслучай (1), второй случай подслучаи (2),(3)) не возможен в силу неограниченности множества их возможных значений. Подход с фиксацией параметра  $\psi_2^0$ , использованный в аномальном случае первого варианта, здесь не имеет смысла, т.к. именно по  $u_1(t) = \psi_2(t)$  минимизируется функционал  $J(u)$  (в том случае первая компонента управления принимала постоянные значения 0 или  $\alpha$ ). Более того далее в системе не наблюдается переключений: если переключение есть, то это только  $t^* : \psi_2(t^*) = 0$ . Поэтому подход, использованный в случаях первого варианта (в разделе 3.1.1 второй случай подслучай (1), раздел 3.1.2), основанный на введении в качестве нового параметра времени второго переключения, к рассматриваемому варианту не применим.
2. если бы проблема второго параметра как-то и разрешилась, то возникает сложность разделения на два случая: либо переключение успело произойти до финального времени  $T$ , либо нет.

Исходя из приведённых рассуждений, используем другой подход к перепараметризации начальных параметров  $\psi_1^0, \psi_2^0$ . Полученные результаты пригодятся. Идея заключается в использовании в качестве дополнительной связи, условия трансверсальности из принципа максимума. Введём всего один новый параметр:  $x_2^{end} = x_2(T)$ . По условию задачи  $x_2^{end} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , что даёт возможность конечного перебора по новому параметру. Будем искать решения  $x(t)$ , попадающие в целевое множество  $\mathcal{X}$ , т.е.  $|x_1(T)| \leq \varepsilon, |x_2(T)| \leq \varepsilon$ , и удовлетворяющие условию трансверсальности  $\psi_2(T) = 0$ . Покажем, что этой связи достаточно для перепатраматризации  $\psi_1^0, \psi_2^0$ . При  $t = T$  получим:

$$x_2^{end} = x_2(T) = \frac{e^{-\frac{T(1+k_1)}{2}}}{2(1+k_1)p} ((e^{T(1+k_1)}-1)p\psi_2^0 \cosh \frac{pT}{2} - (2(e^{T(1+k_1)}-1)\psi_1^0 - (1+k_1)(e^{T(1+k_1)}+1)\psi_2^0) \sinh \frac{pT}{2}).$$

Распишем условие  $\psi_2(T) = 0$  по формуле:

$$0 = \psi_2(T) = \frac{\exp(\frac{T(1+k_1)}{2})}{p} ((-2\psi_1^0 + (1+k_1)\psi_2^0) \sinh \frac{pT}{2} + p\psi_2^0 \cosh \frac{pT}{2}).$$

Теперь возможно однозначно восстановить  $\psi_1^0, \psi_2^0$  по  $x_2^{end}$ .

Из общих соображений следует, что за счёт произвольности  $u_1 \in \mathbb{R}$ , система должна быть управляемой. А если задача управляема, то существует и оптимальное управление. Принцип максимума является необходимым условием оптимальности, т.е. он ограничивает класс управлений, претендующих на оптимальность. Поэтому среди управлений удовлетворяющих принципу максимума должно существовать оптимальное управление, реализующее задачу. Так как программная реализация предполагает приближённое численное решение, точное выполнение условия трансверсальности является завышенным требованием, сильно уменьшающим получающиеся управления (до одного). Поэтому организуем перебор:  $\psi_2(T) \in [-\varepsilon', \varepsilon']$ , где  $\varepsilon'$  – погрешность выполнения условия трансверсальности. Увеличивая погрешность  $\varepsilon'$ , обязательно получим реализующее задачу управление. Если их будет несколько выбираем то, которое минимизирует функционал  $J(u)$ . Итак, получена перепараметризация:  $x_2^{end} \in [0, \varepsilon]$ , формула связи, и набор формул для  $\psi_2(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ .

## 4.2 Анормальный случай: $\psi_0 = 0$ .

Как было показано ранее, в анормальном случае нет элемента, на котором достигается максимум функции Гамильтона-Понтрягина. Следовательно, задача оптимизации неразрешима.

## 5 Примеры работы программы

### 5.1 $\mathcal{P}_1$ .

#### 5.1.1 Пример 1.

Значение параметров  $g = 0.125, \alpha = 3, k_1 = 0, k_2 = 1, L = 3, T = 2, \varepsilon = 0.2$ . В результате  $\min_{u(\cdot)}(J) = 2.7086$ .

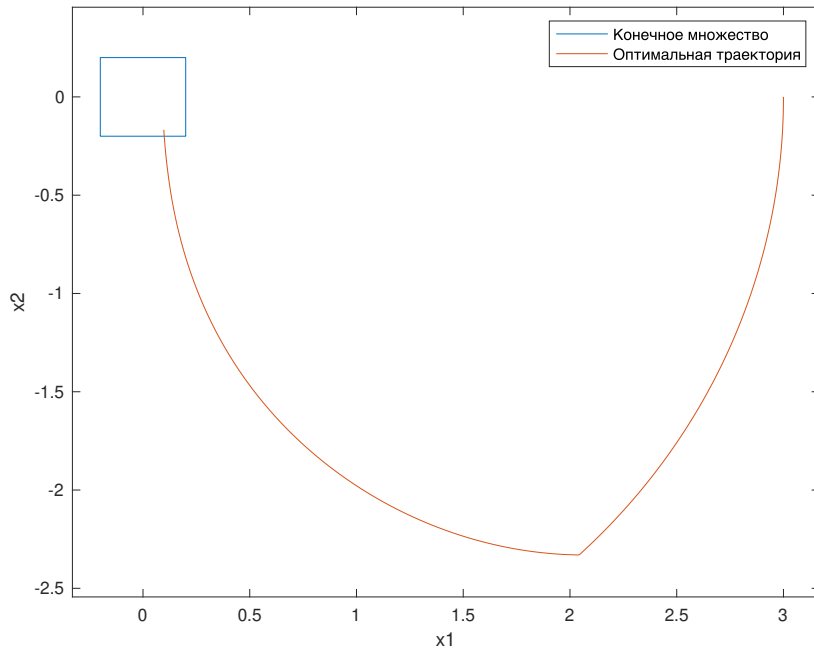


Рис. 1:

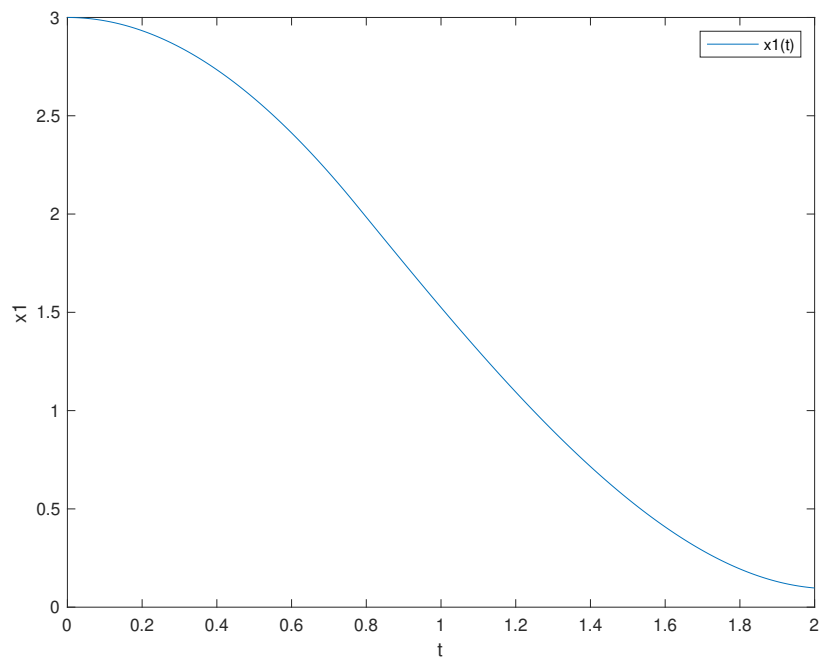


Рис. 2: Компонента  $x_1^*(t)$

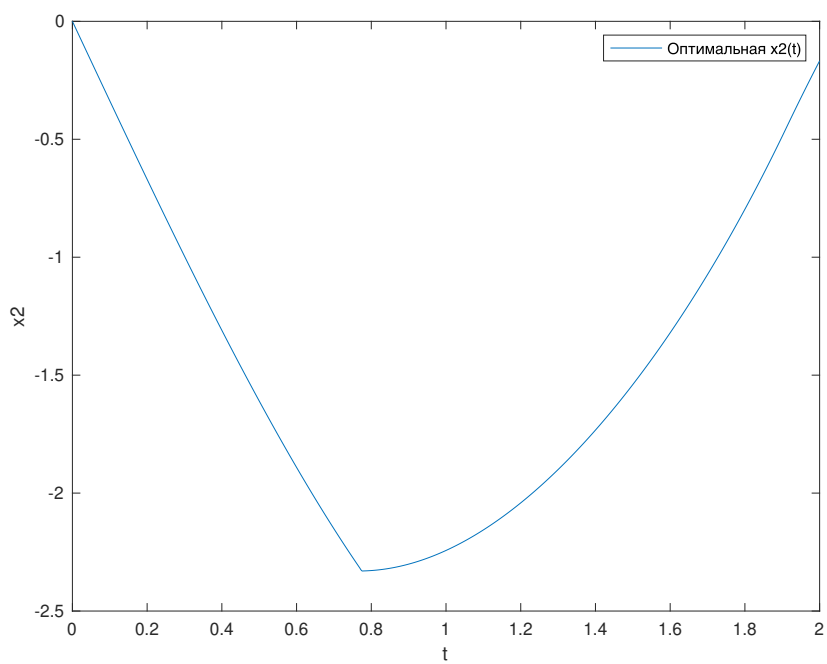


Рис. 3: Компонента  $x_2^*(t)$



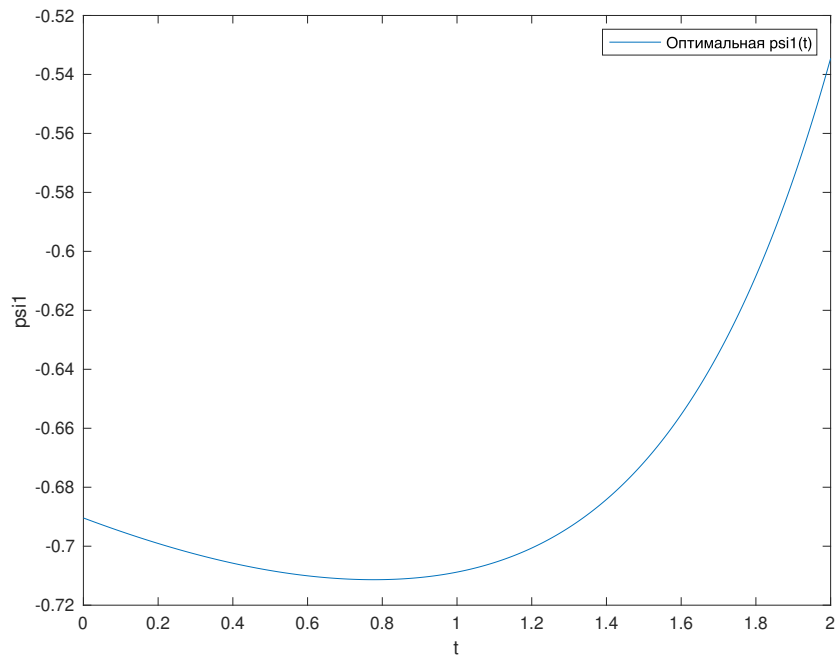


Рис. 4: Компонента  $\psi_1^*(t)$

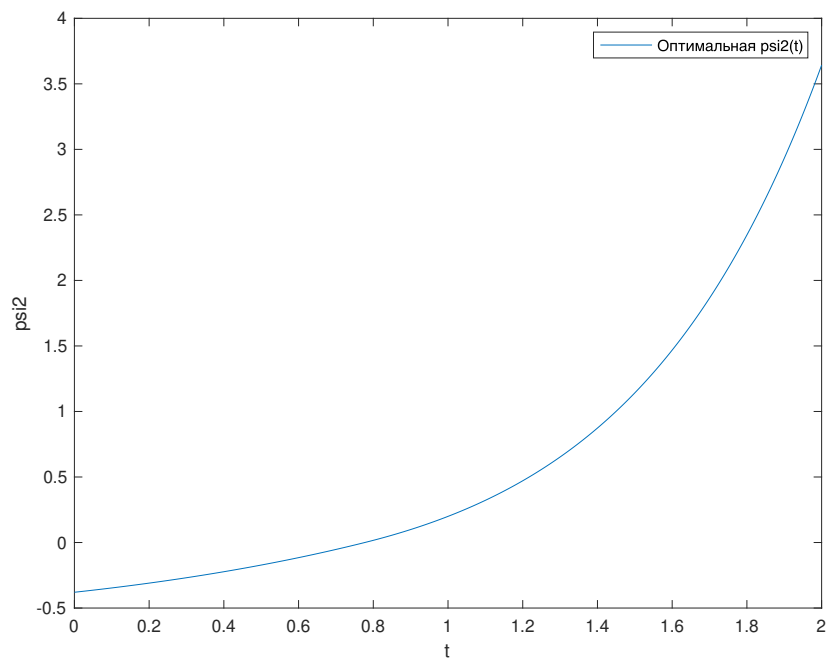


Рис. 5: Компонента  $\psi_2^*(t)$

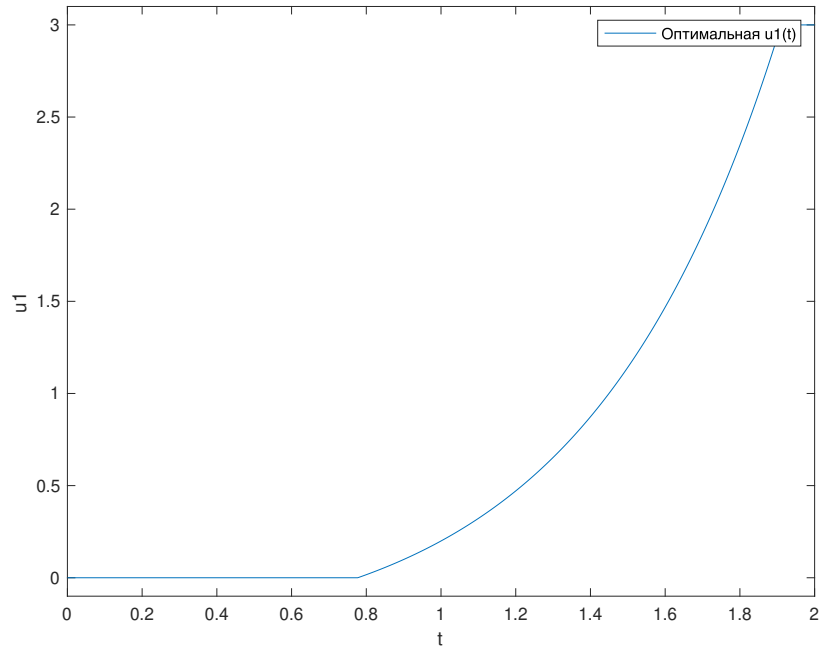


Рис. 6: Компонента  $u_1^*(t)$

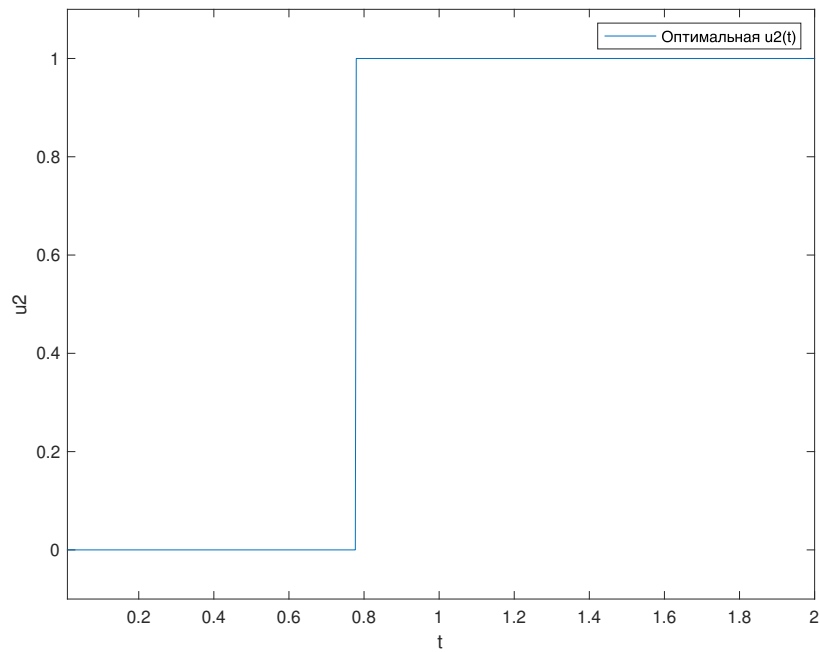


Рис. 7: Компонента  $u_2^*(t)$

### 5.1.2 Пример 2 (обнуление функционала).

Значение параметров  $g = -0.1, \alpha = 0.5, k_1 = 1, k_2 = 2, L = 50, T = 11, \varepsilon = 0.2$ . В результате  $\min_{u(\cdot)}(J) = 0$ .

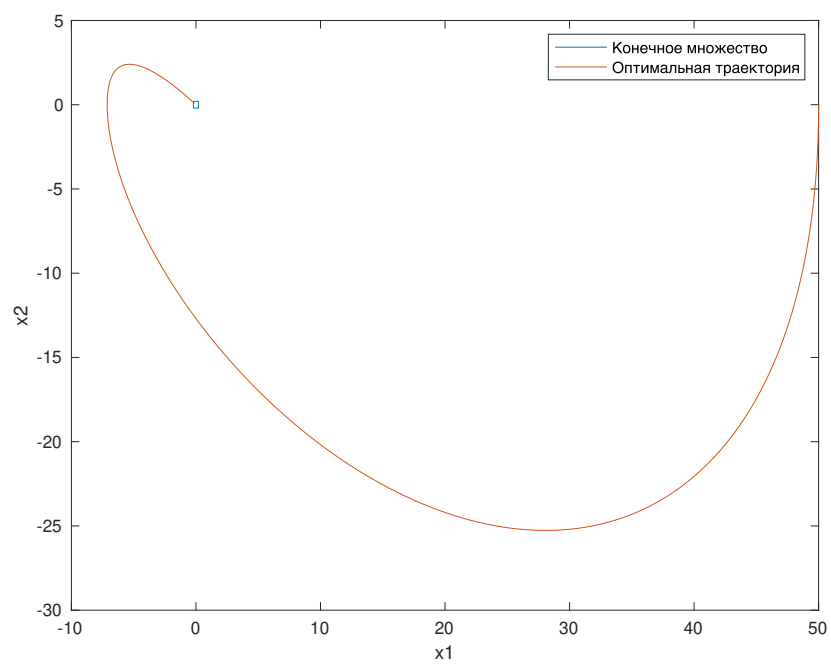


Рис. 8:

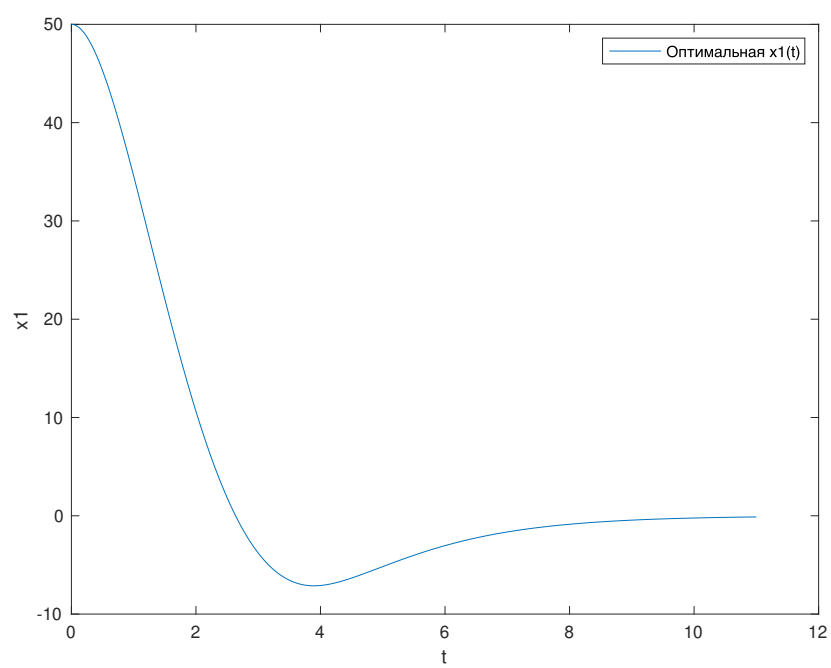


Рис. 9: Компонента  $x_1^*(t)$

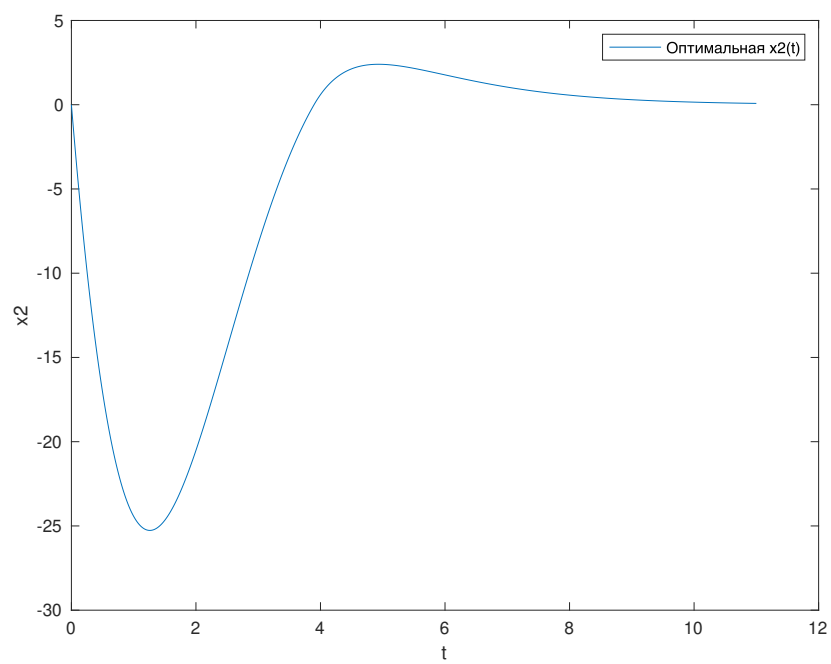


Рис. 10: Компонента  $x_2^*(t)$

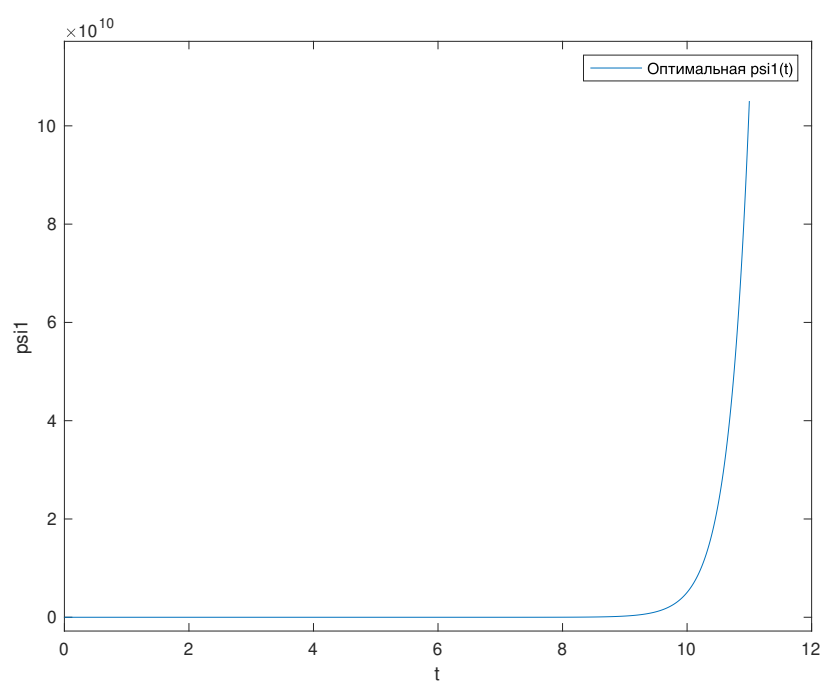


Рис. 11: Компонента  $\psi_1^*(t)$

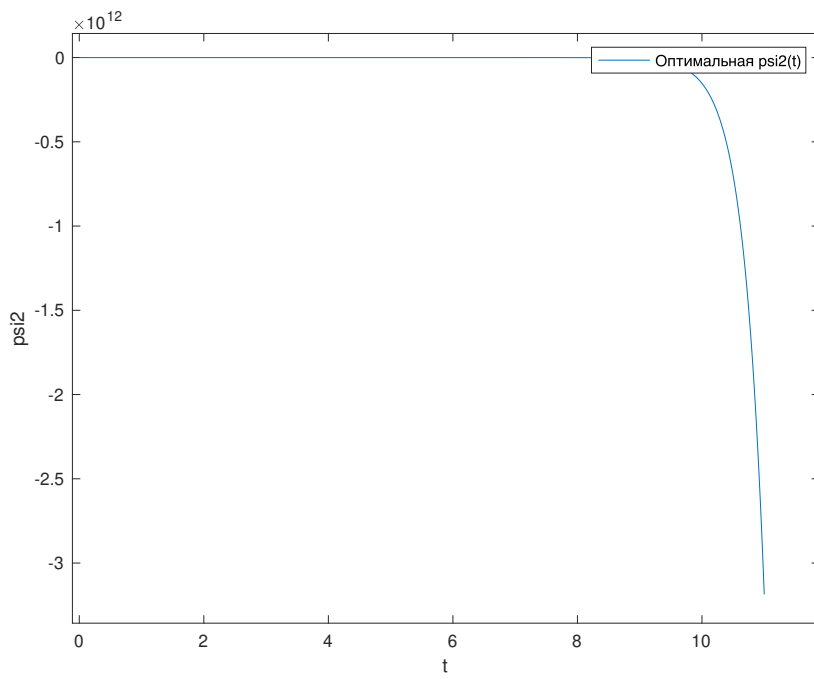


Рис. 12: Компонента  $\psi_2^*(t)$

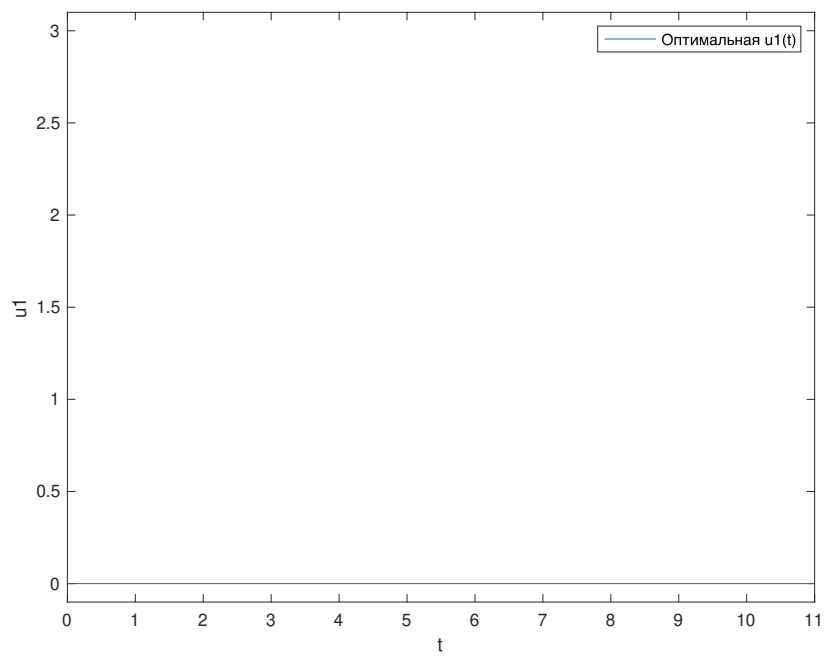


Рис. 13: Компонента  $u_1^*(t)$

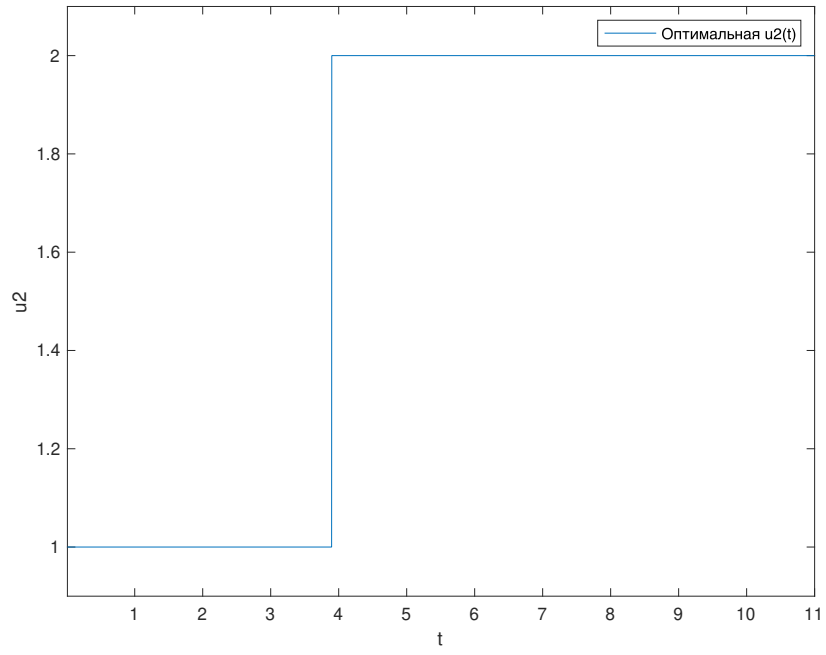


Рис. 14: Компонента  $u_2^*(t)$

## 5.2 $\mathcal{P}_2$ .

### 5.2.1 Пример 1.

Значение параметров  $g = 9, k_1 = 0, k_2 = 2, L = 5, T = 1, \varepsilon = 1$ .

В результате  $\min_{u(\cdot)}(J) = 25.3274$ .

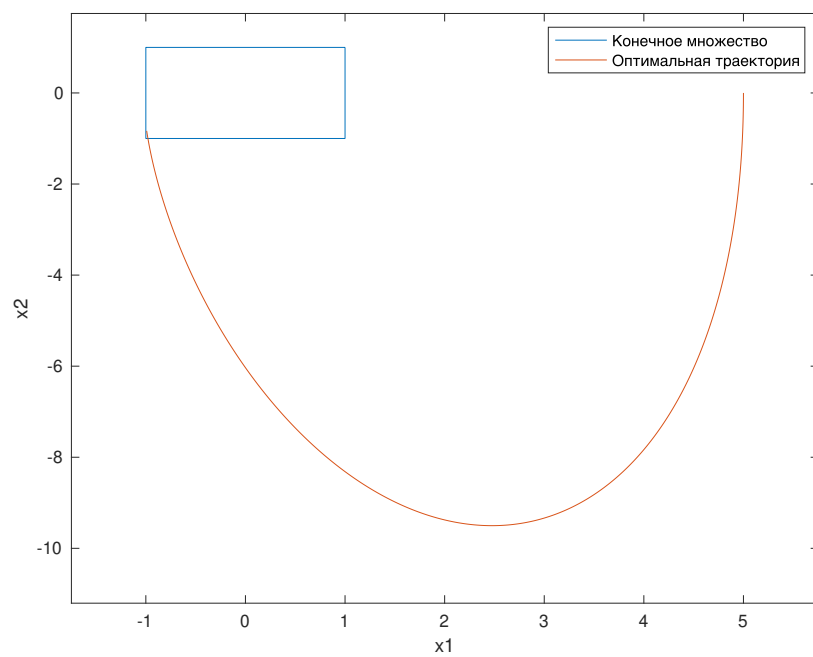


Рис. 15:

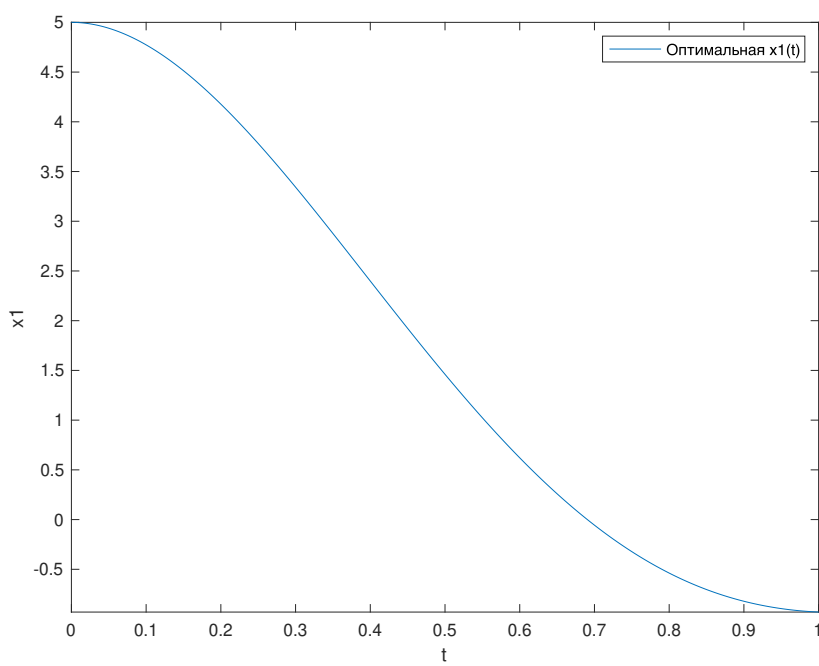


Рис. 16: Компонента  $x_1^*(t)$

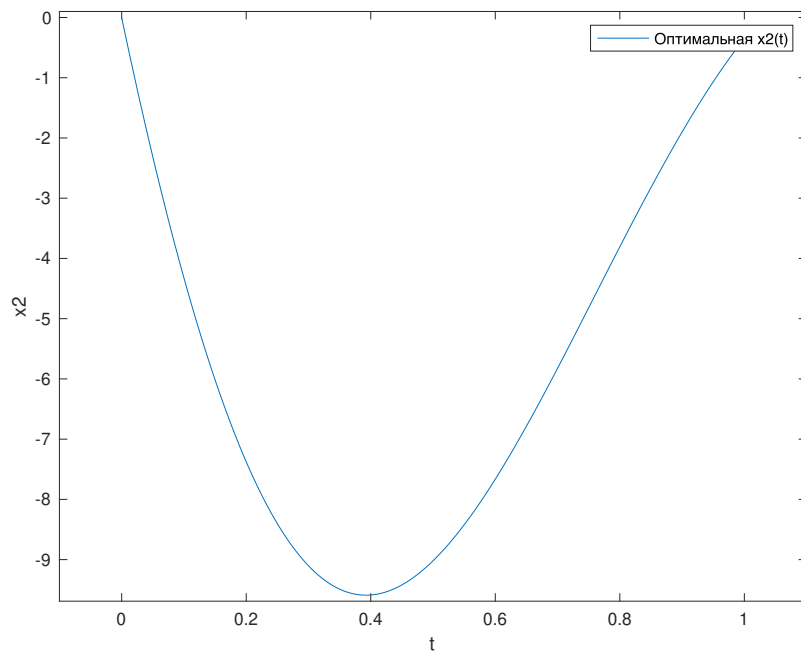


Рис. 17: Компонента  $x_2^*(t)$

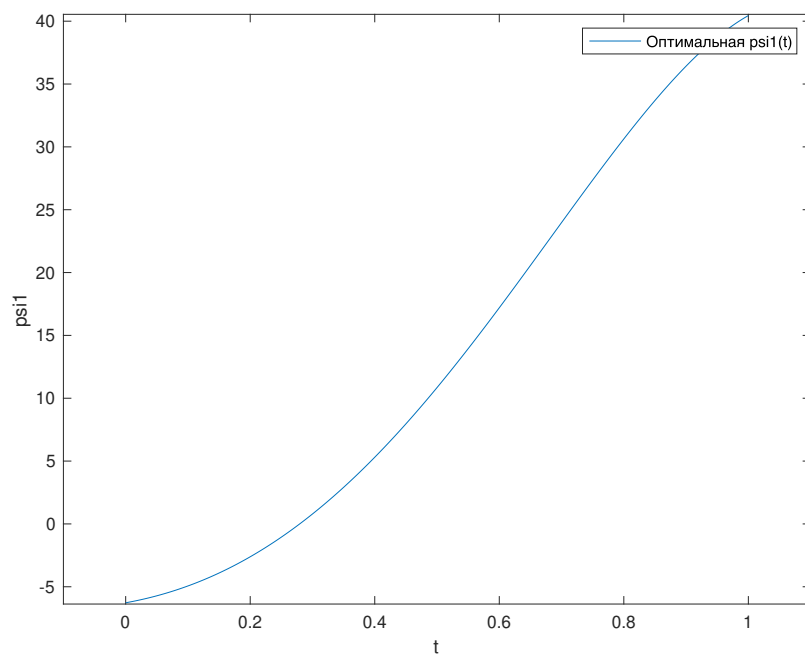


Рис. 18: Компонента  $\psi_1^*(t)$



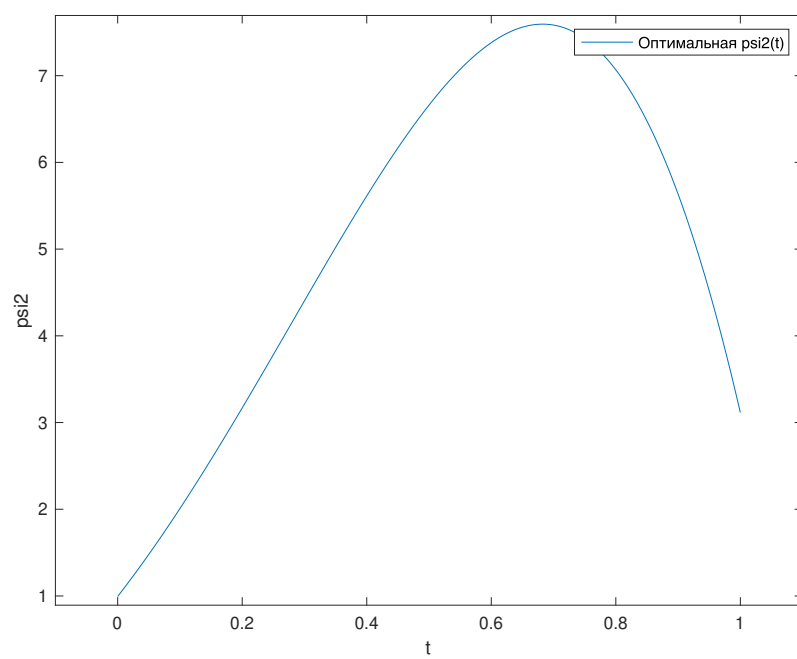


Рис. 19: Компонента  $\psi_2^*(t)$

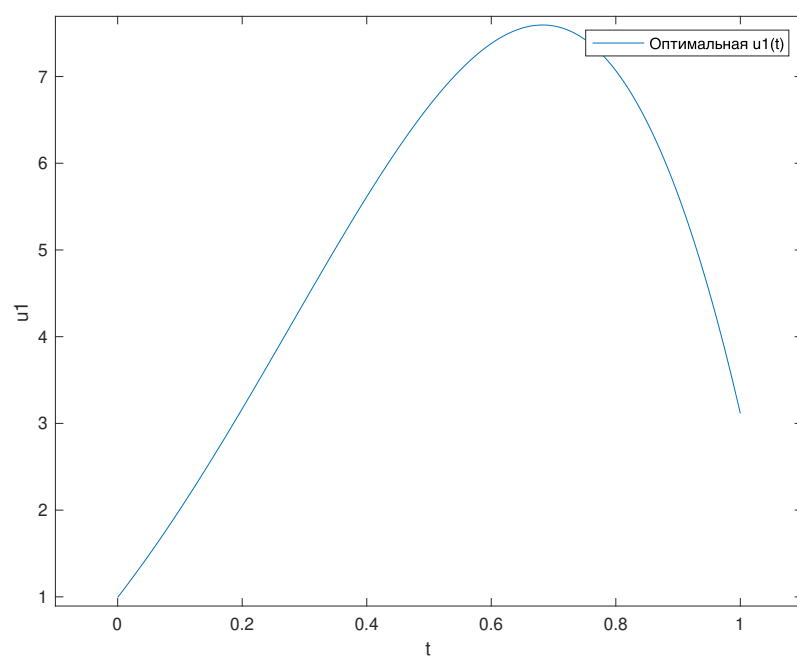


Рис. 20: Компонента  $u_1^*(t)$

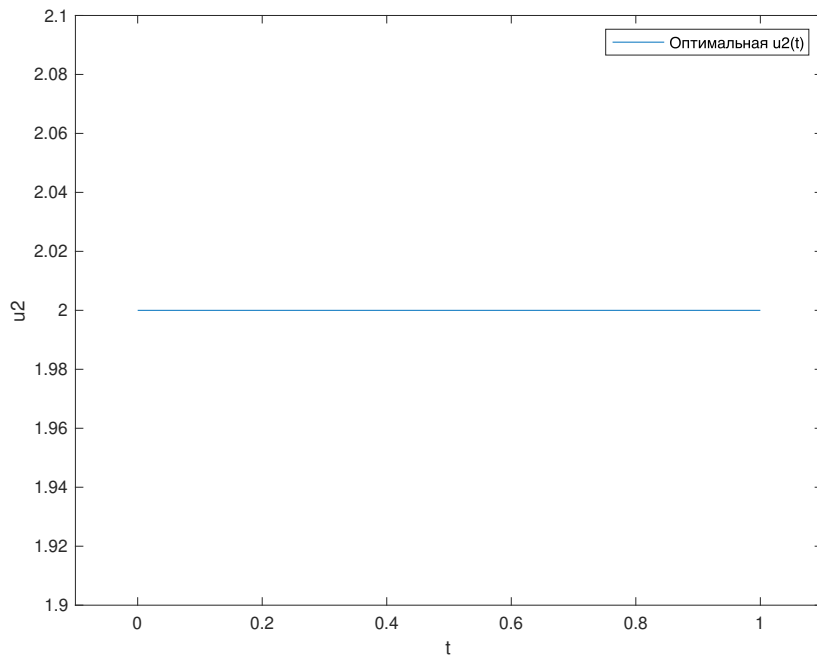


Рис. 21: Компонента  $u_2^*(t)$

### 5.2.2 Пример 2.

Значение параметров  $g = 0, k_1 = 1, k_2 = 2, L = 10, T = 3.5, \varepsilon = 1$ .

В результате  $\min_{u(\cdot)}(J) = 9.9265e - 29$ .

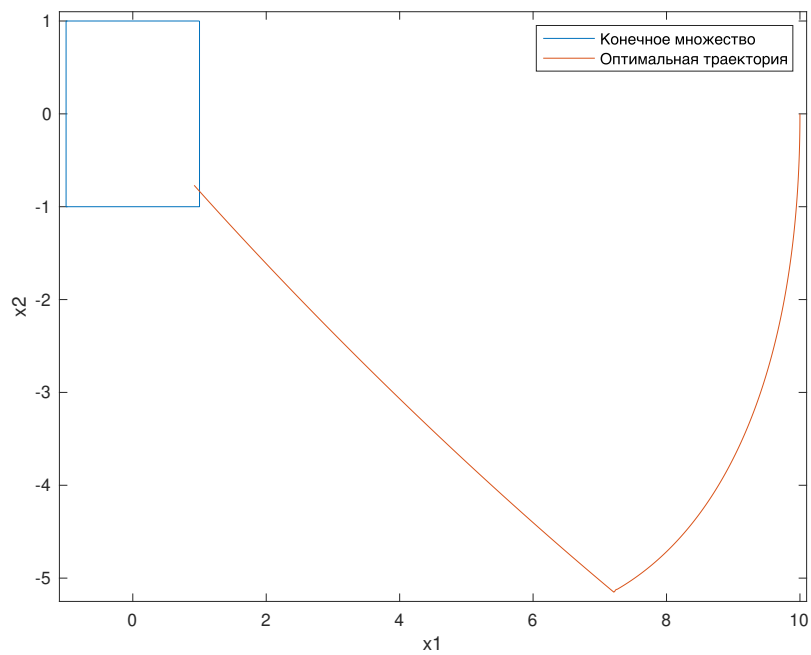


Рис. 22:

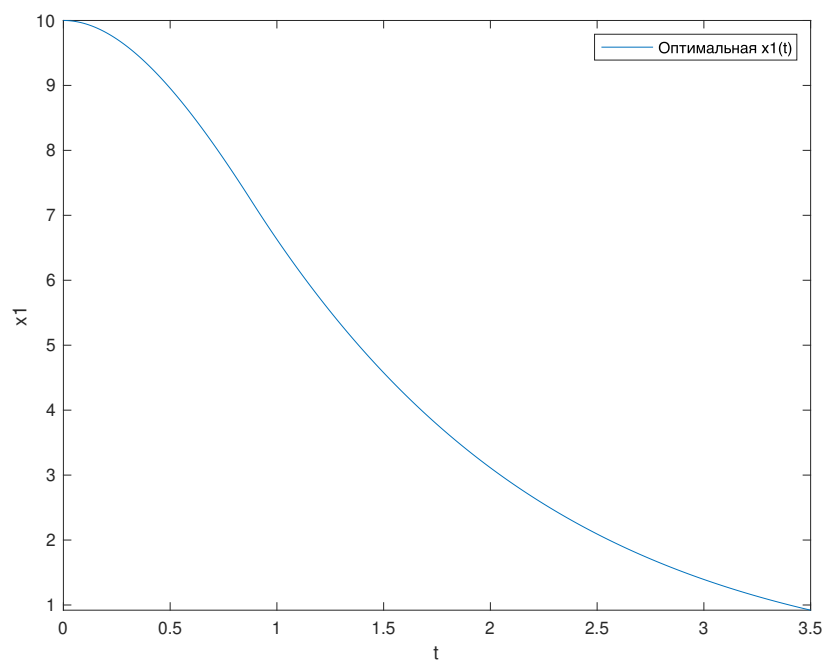


Рис. 23: Компонента  $x_1^*(t)$

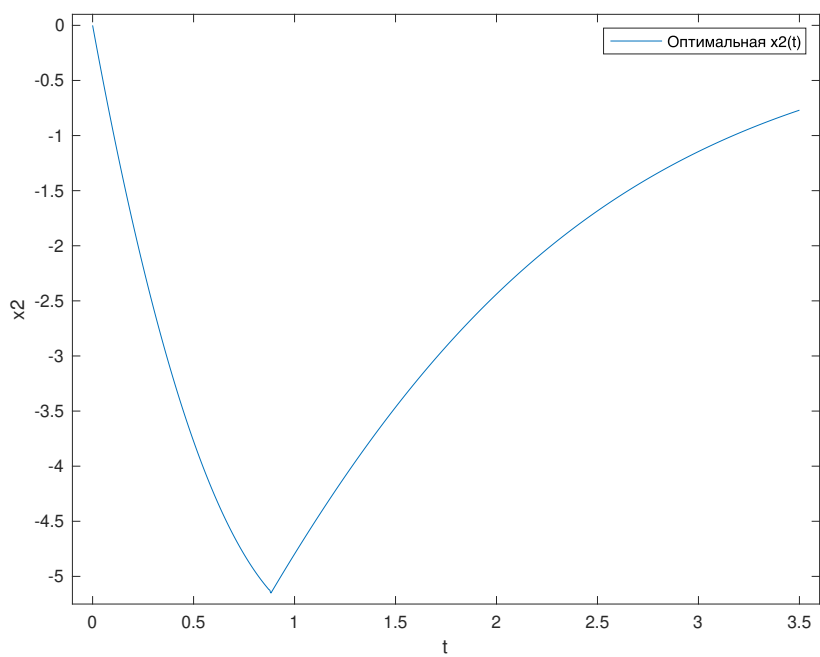


Рис. 24: Компонента  $x_2^*(t)$

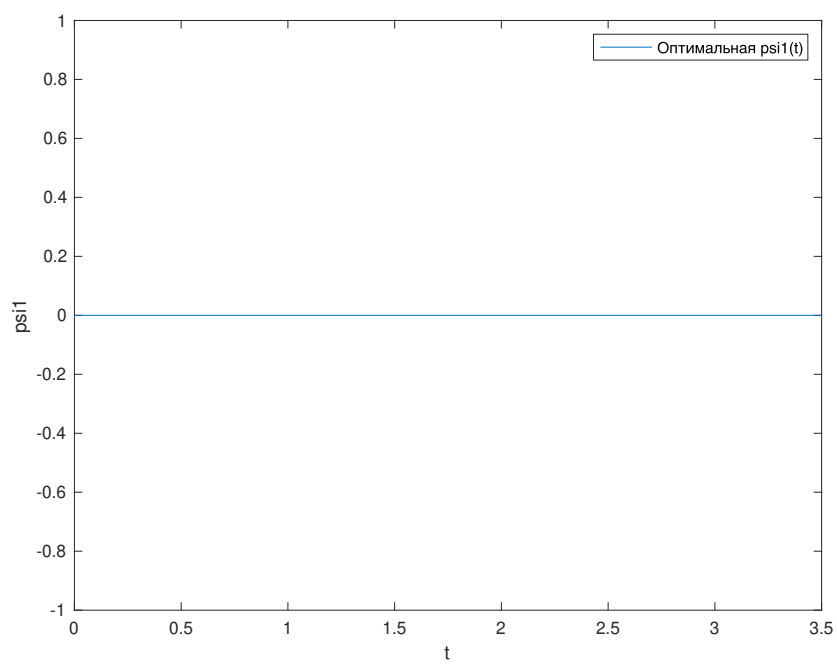


Рис. 25: Компонента  $\psi_1^*(t)$

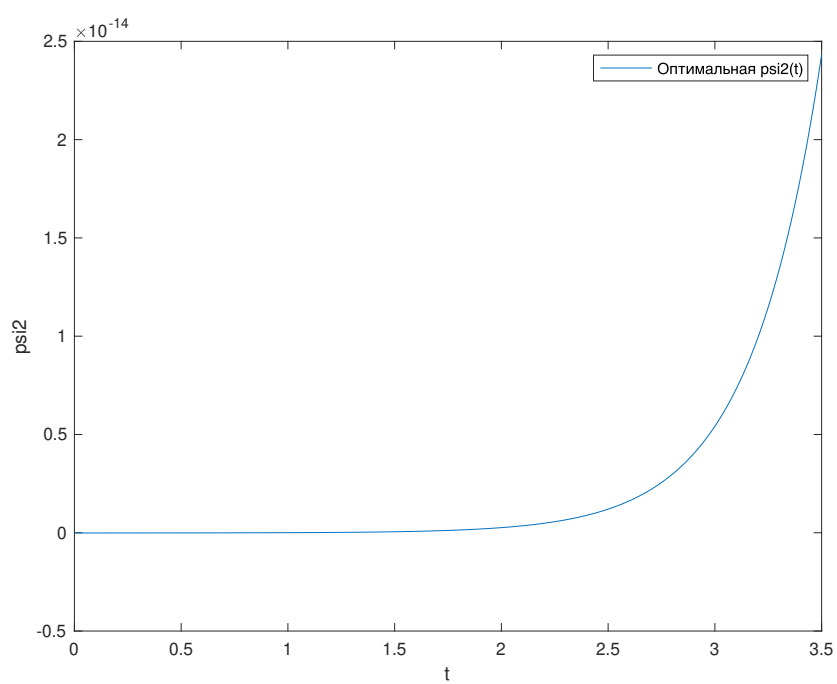


Рис. 26: Компонента  $\psi_2^*(t)$

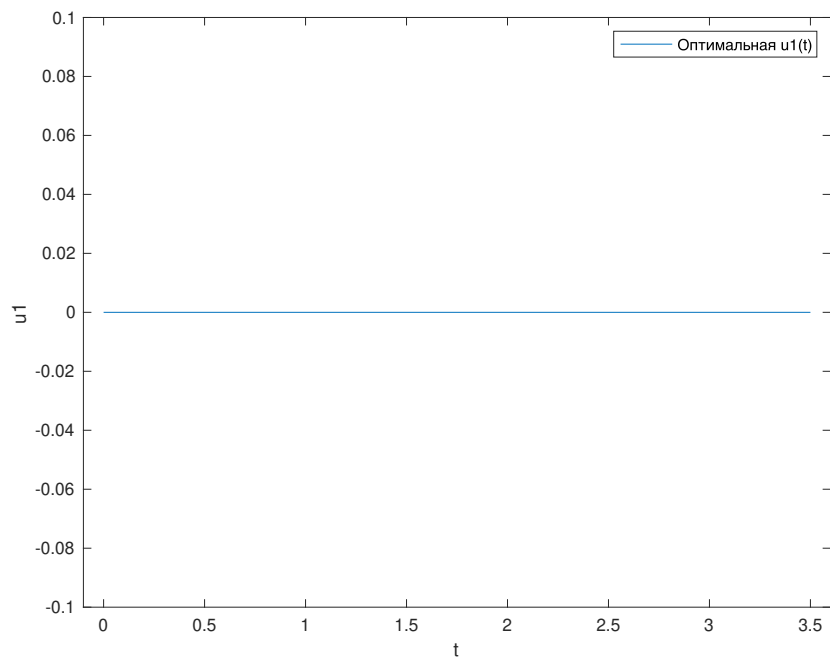


Рис. 27: Компонента  $u_1^*(t)$

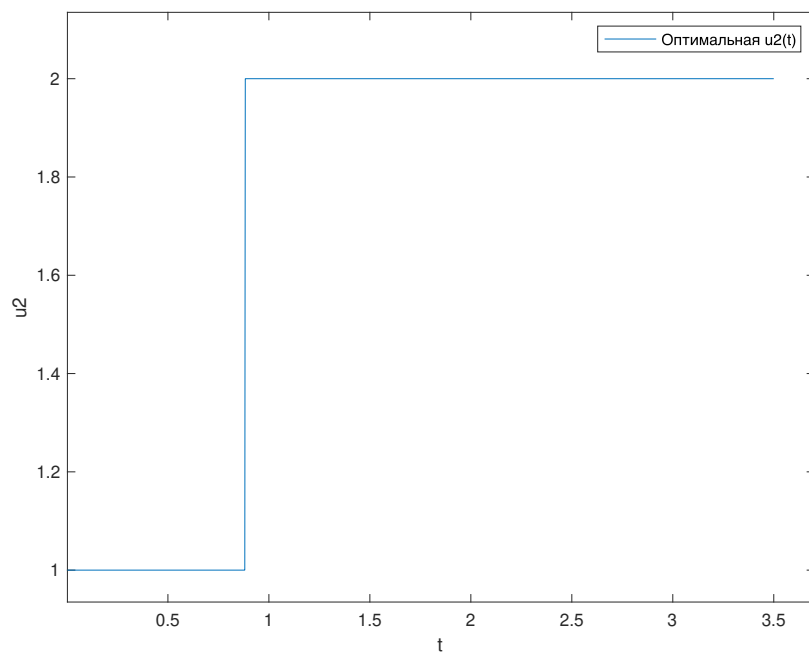


Рис. 28: Компонента  $u_2^*(t)$

### 5.3 Сравнение оптимальных траекторий при $u_1 \in \mathcal{P}_1$ и $u_1 \in \mathcal{P}_2$ .

Рассмотрим следующий набор параметров  $g = 1, \alpha = 0.4, k_1 = 1, k_2 = 2, L = 5, T = 1.6, \varepsilon = 1.7$ .

Тогда оптимальные траектории для  $u_1 \in \mathcal{P}_1$ ,  $u_1 \in \mathcal{P}_2$  будут выглядеть следующим образом:

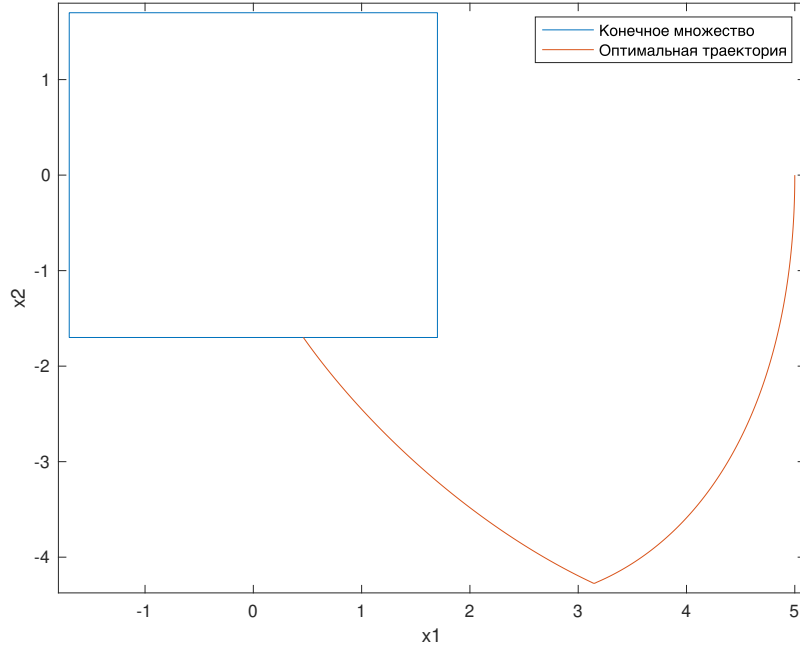


Рис. 29:  $\mathcal{P}_1, J = 0.0107$

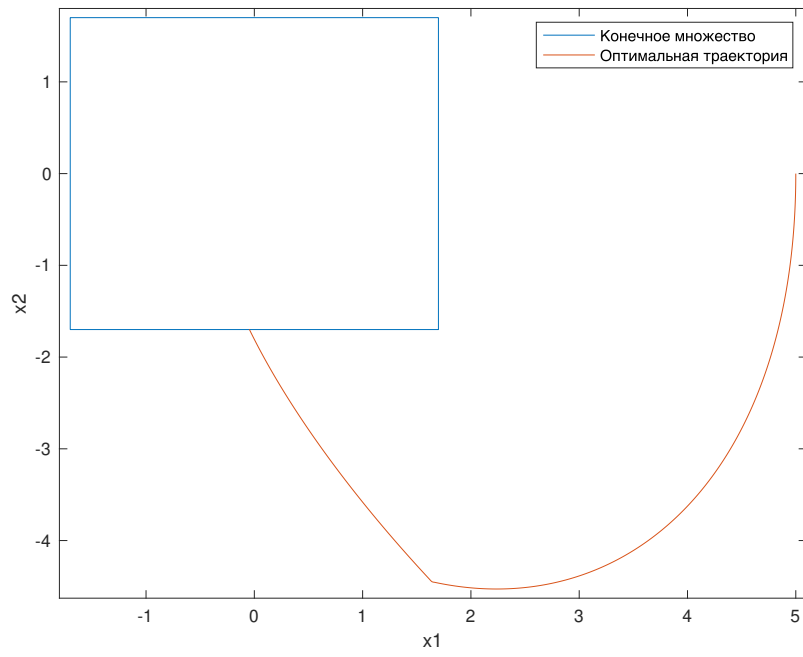


Рис. 30:  $\mathcal{P}_2, J = 0.0106$

## Список литературы

- [1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.