



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Построение множества достижимости»

Студент 315 группы
А. В. Горбачёв

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2022

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Теоретические выкладки	4
3	Описание алгоритма	6
4	Примеры работы программы	7
5	Исследование неподвижных точек	9

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} - x^2 \cos(\dot{x}) + 3x \sin(x^3) = u, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$ в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geq t_0$).

1. Необходимо написать в среде Matlab функцию **reachset(alpha, t)**, которая по заданным параметрам $\alpha > 0$, $t \geq t_0$ рассчитывает приближённо множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции — два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например **plot**). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).
2. Необходимо реализовать функцию **reachsetdyn(alpha, t1, t2, N, filename)**, которая, используя функцию **reachset(alpha, t)**, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)i}{N}$, $i = 0, 1, \dots, N$. Здесь $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, N — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранён в виде видео-файла **filename.avi**. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра **filename**) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).
3. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множества достижимости от величины параметра α . Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчёте, должны быть доказаны.

2 Теоретические выкладки

Произведём замену $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, теперь перепишем уравнение 1 в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \cos x_2 - 3x_1 \sin x_1^3 + u, \\ x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Множеством достижимости $X(T, t_0, x^0)$ называется множество $x \in \mathbb{R}^2$, таких что существует такое измеримое управление $u(t)$, что $\forall t \in [t_0, T], u(t) \in [-\alpha, \alpha]$ и под действием управления система 2 переходит за время $T - t_0$ из точки x^0 в точку x .

Существование управления, под действием которого система переходит в точку x за время τ эквивалентно существованию оптимального по быстродействию управления, переводящего систему в точку x за время $\tau_* \leq \tau$.

Тогда будем строить множество достижимости, решая задачу быстродействия из точки $x^0 = (0, 0)$ в каждую точку пространства \mathbb{R}^2 .

Выпишем для этой задачи функцию Гамильтона–Понтрягина

$$\mathcal{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2 (x_1^2 \cos x_2 - 3x_1 \sin x_1^3 + u)$$

и сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 3\psi_2 \sin x_1^3 + 9x_1^3 \psi_2 \cos x_1^3 - 2x_1 \psi_2 \cos x_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \psi_2 x_1^2 \sin x_2 - \psi_1. \end{cases} \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть $\psi(t)$ — ненулевое решение сопряженной системы. Тогда $\psi_2(t)$ имеет конечное число нулей на $[t_0, T]$.

Доказательство. Предположим противное: пусть множество нулей $\psi_2(t)$ бесконечно. Так как оно содержится в компакте $[t_0, T]$, то оно имеет предельную точку $t' \in [t_0, T]$. Тогда существует последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая что $t_i \in [t_0, T], t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, $t_i \rightarrow t', \psi_2(t_i) = 0$.

Далее, по теореме Лагранжа $\forall i \exists \tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, т.ч. $\psi_2(\tau_i) = \frac{\psi_2(t_{i+1}) - \psi_2(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = 0$.

При этом $\tau_i \rightarrow t'$. Тогда, в силу непрерывности функций $\psi_2(t), \dot{\psi}_2(t), \psi_1(t), \dot{\psi}_1(t) \Rightarrow \psi_2(t') = \dot{\psi}_2(t') = \psi_1(t') = \dot{\psi}_1(t') = 0$. То есть $\psi(t') = 0$, а значит, $\psi \equiv 0$ на $[t_0, T]$. Значит, предположение было неверным и $\psi_2(t)$ имеет конечное число нулей на $[t_0, T]$. \square

Принцип максимума Понтрягина обеспечивает для оптимальной по быстродействию пары $(x^*(t), u^*(t))$ существование функции $\psi(t)$, такой что

1. $\psi(t)$ - решение сопряженной системы 3
2. $\psi \neq 0$
3. $\forall t \in [t_0, T] \mathcal{H}(x^*, u^*, \psi) = \max_{u \in [-\alpha, \alpha]} \mathcal{H}(x, u, \psi)$
4. $\forall t \in [t_0, T] \mathcal{H}(x^*, u^*, \psi) \equiv \text{const} \geq 0$

Отсюда следует, что $u^*(t) = \alpha \operatorname{sgn}(\psi_2)$.

Теорема 1. (о чередовании нулей)

Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ — оптимальная пара для системы с временем быстрого действия T , $\psi(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot))$ — решение сопряженной системы. Тогда $\forall \tau_1, \tau_2: t_0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ верны утверждения:

1. Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = x_2(\tau_1) = 0$, то $x_2(\tau_2) = 0$.
2. Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau_1) \neq 0$, то $x_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0$.
3. Если $\psi_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0 \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$, то $\psi_2(\tau_2) = 0$.
4. Если $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0 \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$, то $\psi_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0$.

Доказательство. Из принципа максимума Понтрягина:

$$\sup_{u(\cdot)} (H(t, x, \psi, u)) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_2 - 2x_1 - x_1 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1)) + \psi_2 \alpha \operatorname{sgn} \psi_2 = M.$$

1. По условию, $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = x_2(\tau_1) = 0$. Подставляем в выражение для M :

$$M|_{t=\tau_1} = \psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = 0,$$

$$M|_{t=\tau_2} = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2).$$

Так как $M \equiv \text{const}$, то $\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) = 0$. В силу невырожденности вектора $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, переменная $\psi_1(t) \neq 0 \implies$, то $x_2(\tau_2) = 0$.

2. Аналогично п.1 $x_2(\tau_2) \neq 0$. При $x_2(\tau_1) \neq 0$, по теореме Ролля функция $x_2(\tau)$ проходит через 0 на отрезке (τ_1, τ_2) .
3. По условию, $\psi_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0 \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда из п. 1 этого доказательства получаем, то $\psi_2(\tau) \neq 0$, $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда на сегменте $[\tau_1, \tau_2]$ верно равенство для концов отрезка:

$$\frac{\partial}{\partial t} M(\psi, x) = \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 x_2 + \dot{x}_2 \psi_2) = \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \psi_2) = 0.$$

$$\dot{x}_2(t_1)\psi_2(t_1) = \dot{x}_2(t_2)\psi_2(t_2).$$

Так как левая часть обращается в нуль по предположению, то $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. Аналогично п.1-3.

□

Лемма 2. Для рассматриваемой задачи множество достижимости монотонно по включению, т.е. $\forall T_1, T_2 \in [t_0, +\infty), T_1 \leq T_2 \Rightarrow X(T_1, t_0, x^0) \subseteq X(T_2, t_0, x^0)$

Доказательство. Допустим $x \in X(T_1, t_0, x^0)$. Следовательно $\exists u(t)$, такое что под действием управления $u(t)$ система 2 за время $T_1 - t_0$ переходит из точки $(0, 0)$ в точку x . Введем на отрезке $[t_0, T_2]$ управление

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_0 + T_2 - T_1], \\ u(t - (t_0 + T_2 - T_1)), & x \in (T_2 - T_1, T_2]. \end{cases}$$

Так как $x^0 = (0, 0)$, то под действием управления $u_2(t)$ система 2, очевидно, перейдет в точку x . Следовательно, $x \in X(T_2, t_0, x^0)$. □

Следствие 1. Множество достижимости связно.

3 Описание алгоритма

Будем рассматривать следующие системы:

$$S_{+,-} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \cos x_2 - 3x_1 \sin x_1^3 \pm \alpha, \\ x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0. \end{cases}$$

1. Решим систему S_+ до момента $\tau : x_2(\tau) = 0$. Если такого τ не нашлось, положим $\tau = T$.
2. Осуществить перебор времени переключения $\tau^* \in [0, \tau]$. Для каждого τ^* решить систему S_- и сопряженную систему с начальными условиями $[x_1(\tau^*), x_2(\tau^*), 1, 0]$ до времени $\tau^{**} : \psi_2(\tau^{**}) = 0$.
3. Решить систему S_+ и сопряженную систему с начальными условиями $[x_1(\tau^{**}), x_2(\tau^{**}), 1, 0]$ до времени переключения. Продолжать пока $t < T$.
4. Аналогично, начиная с системы S_+ .
5. Полученная кривая будет содержать границу множества достижимости, так как при её построении заведомо были рассмотрены все оптимальные по быстродействию траектории. Однако, вообще говоря, не все полученные точки лежат на границе множества достижимости из-за возможных самопересечений. Устранять самопересечения будем следующим образом:

Найти точку, которая заведомо лежит на границе области достижимости (например, точка с наименьшим значением x_1), Начать с неё обход ломаной. Для каждого звена необходимо проверить его на пересечение с уже рассмотренными звеньями и в случае наличия пересечения удалить участок ломаной, находящийся между пересекающимися звеньями в порядке обхода, Добавить новый узел ломаной в точке пересечения отрезков, а также укороченные звенья, являющиеся частями пересекавшихся отрезков. В результате получим массив координат многоугольника, аппроксимирующего границу множества достижимости, а также массивы координат узлов ломаных, приближающих S_+, S_- .

4 Примеры работы программы

Красным цветом выделена граница множества достижимости, синим - кривая переключений управления.

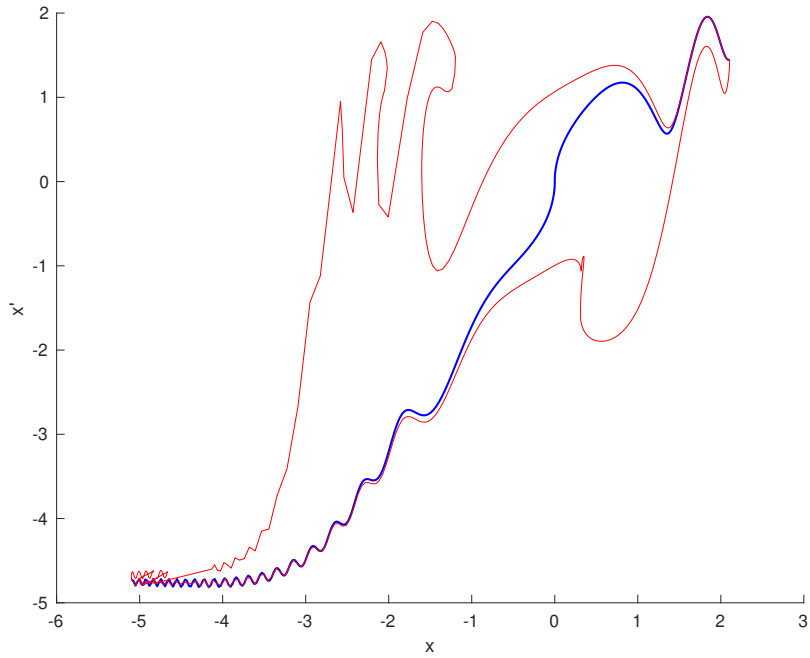


Рис. 1: $\alpha = 1, T = 2.5$

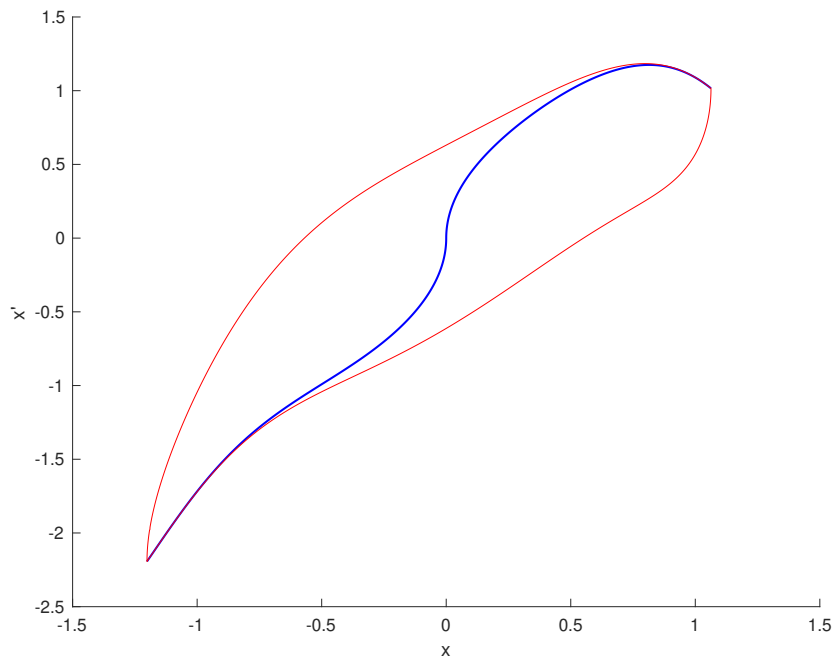


Рис. 2: $\alpha = 1, T = 1.5$

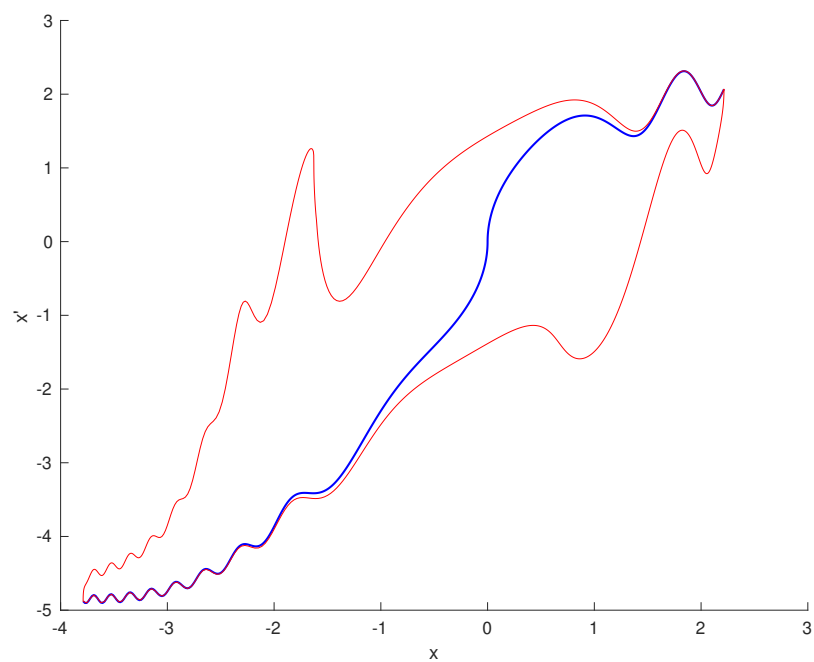


Рис. 3: $\alpha = 2, T = 1.7$

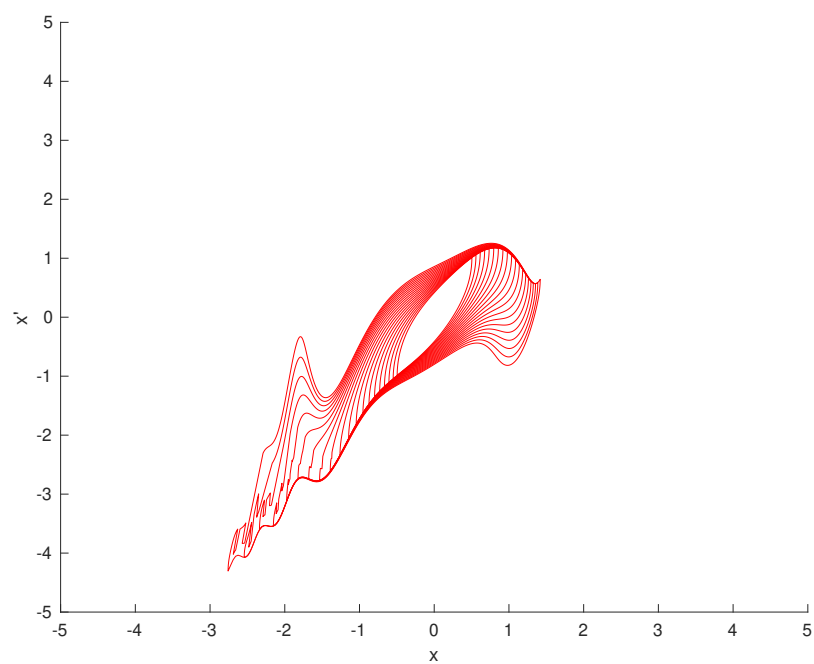


Рис. 4: Расширение множества достижимости при увеличении T . $\alpha = 1, T \in [1, 2]$

5 Исследование неподвижных точек

Исследуем систему 2 на неподвижные точки, это эквивалентно решению следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1^2 \cos x_2 - 3x_1 \sin x_1^3 + \alpha = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1^2 \cos x_2 - 3x_1 \sin x_1^3 - \alpha = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В общем виде данные системы не имеют решения, поэтому рассмотрим конкретное значение параметра $\alpha = 1$. Решим системы 4, 5 численно. Каждая из этих двух систем уравнений при данном значении параметра α имеют конечное множество решений, расположенных на оси абсцисс. Для каждой системы рассмотрим ближайшие к началу координат решения. Для первой это будут точки

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 0.902 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -0.902 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{для второй - } \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1.426 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1.426 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При увеличении параметра T вектор \vec{a}_1 попадает внутрь множества достижимости, а расстояние от каждого из векторов $\vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ до множества достижимости уменьшается с увеличением параметра T , но ни один из этих векторов не попадет в множество достижимости ни при каком значении T .

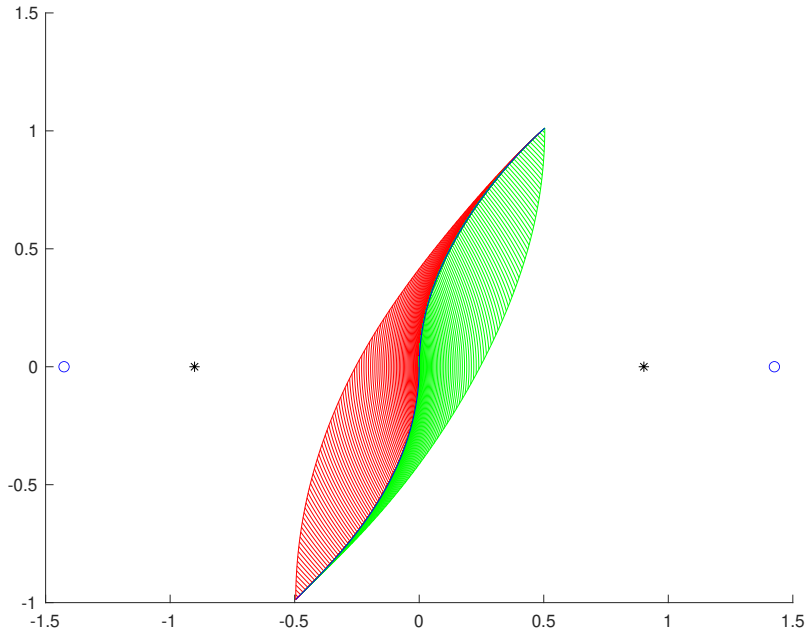


Рис. 5: При малом T ни один из векторов $\vec{a}_i, \vec{b}_i, i \in \{1, 2\}$ не попадает в множество достижимости (обозначены на графике "звездочками" и "кружочками" соответственно). $\alpha = 1, T = 1$

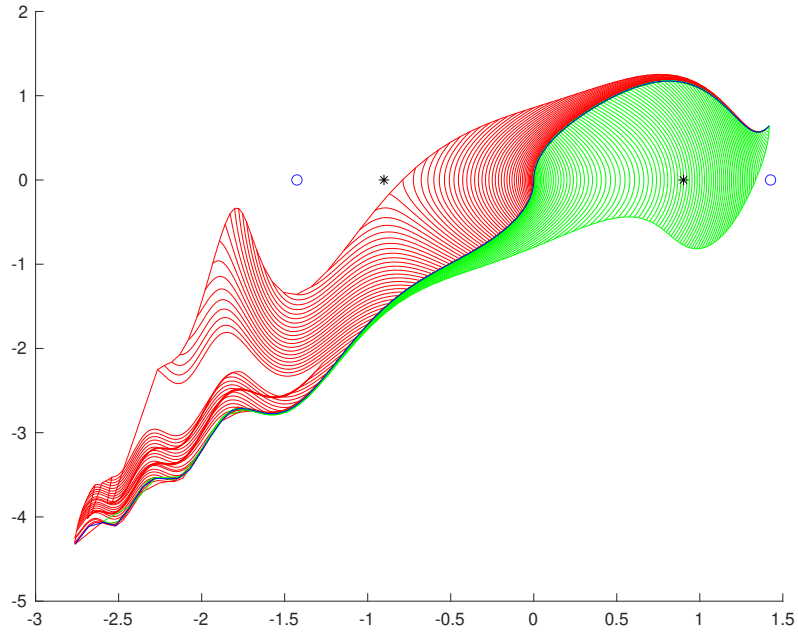


Рис. 6: При увеличении T вектор \vec{a}_1 попадает в множество достижимости, а вектора $\vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ приближаются к границе множества достижимости, но не попадают в него. $\alpha = 1, T = 2$

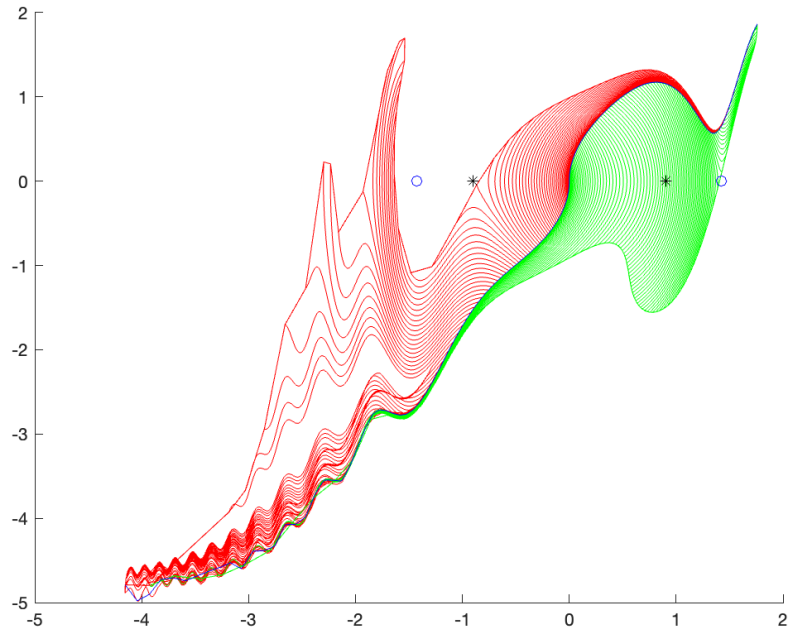


Рис. 7: При увеличении T вектор \vec{a}_1 попадает в множество достижимости, а вектора $\vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ приближаются к границе множества достижимости, но не попадают в него. $\alpha = 1, T = 2.3$

Список литературы

- [1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.