Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Аппроксимация множества по опорной функции. Нахождение поляры множества по опорной функции»

Студент 315 группы
А. В. Горбачёв

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Требовалось написать вывод формул для опорных функций квадрата, ромба и эллипса в зависимости от параметров. Помимо этого необходимо было найти уравнения, описывающие поляру ромба.

2 Вывод опорной функции

Допустим у нас задано выпуклое замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}$
По определению опорная функция этого множества:

$$\rho(l|E) = \sup_{x \in E} \langle x, l \rangle.$$

2.1 Квадрат

1. Рассмотрим квадрат с центром в точке $c = (0, 0)$ и длиной стороны 2

$$K_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \max_{i=1,2} |x_i| \leq 1 \right\}.$$

$$\rho(l|K_0) = \sup_{x \in K_0} \langle x, l \rangle = \sup_{x \in K_0} \sum_{i=1}^{2} x_i l_i \leq \sum_{i=1}^{2} |l_i| = \|l\|_1.$$

Эта оценка достигается при

$$x_0 = (\mathrm{sgn}(l_1),\ \mathrm{sgn}(l_2)) \in K_0.$$

Значит

$$\rho(l|K_0) = \|l\|_1. \tag{1}$$

2. Рассмотрим квадрат с центром в точке $c = (c_1, c_2)$, с длинами сторон, равными a

$$K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \max_{i=1,2} |x_i - c_i| \leq \frac{a}{2} \right\}.$$

Заметим, что

$$K_1 = c + \frac{a}{2} K_0, \quad a > 0.$$

Значит

$$\rho(l|K_1) = \frac{a}{2} \rho(l|K_0) + \langle l, c \rangle = \frac{a}{2} \|l\|_1 + \langle l, c \rangle. \tag{2}$$

2.2 Ромб

1. Рассмотрим ромб с центром в точке $c = (0, 0)$ и диагоналями длины 2

$$K_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2} |x_i| \leq 1 \right\}.$$

$$\rho(l|K_0) = \sup_{x \in K_0} \langle x, l \rangle \leq \sup_{x \in K_0} \sum_{i=1}^{2} |l_i||x_i| \leq \sup_{x \in K_0} \max_{i=1,2} |l_i| \sum_{i=1}^{2} |x_i| = \max_{i=1,2} |l_i|.$$

Пусть

$$\max_{i=1,2} |l_i| = |l_{k_0}|,\ k_0 \in \{1, 2\}.$$

Тогда верхняя оценка опорной функции достигается на векторе

$$x_0 = (\mathrm{sgn}(l_1)\ \delta_{1,k},\ \mathrm{sgn}(l_2)\ \delta_{2,k}),\ \ \delta_{i,k} = \begin{cases} 1,\ i = k \\ 0,\ i \neq k \end{cases}.$$

Значит
$$\rho(l|K_0) = \max_{i=1,2} |l_i|. \tag{3}$$

2. Рассмотрим ромб с центром в точке $c = (c_1, c_2)$, с длинами диагоналей a_1, a_2 соответственно
$$K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; \sum_{i=1}^{2} \frac{2|x_i - c_i|}{a_i} \le 1 \right\}.$$
Заметим, что
$$K_1 = c + TK_0, \quad T = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} \end{bmatrix}.$$
Значит
$$\rho(l|K_1) = \langle l, c\rangle + \rho(l|TK_0) = \langle l, c\rangle + \rho(T'l|K_0) = \langle l, c\rangle + \max_{i=1,2} \frac{|a_i l_i|}{2}. \tag{4}$$

2.3 Эллипс

Рассмотрим единичный шар с центром в начале координат
$$B_1(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \le 1 \right\}.$$
Очевидно, что его опорная функция имеет вид:
$$\rho(l|B_1) = \|l\|_2. \tag{5}$$
Представим эллипс с полуосями, равными a, b, центром в точке $c = (c_1, c_2)$ и главной осью, образующей угол α с осью Ox в следующем виде:
$$K_0 = PB_1(0),$$
$$P = C\Lambda^2 C',\ C = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$
Исходя из этого представления множества, найдём опорную функцию:
$$\rho(l|K_0) = \rho(l|PB_1(0)) = \rho(\Lambda' C' l|B_1(0)) = \|\Lambda' C' l\|_2 = \sqrt{\langle l, Pl\rangle}.$$
В случае, если центр эллипса находится в точке $c = (c_1, c_2)$ (т.е. $K_1 = c + K_0$), опорная функция имеет вид:
$$\rho(l|K_1) = \rho(l|K_0) + \langle l, c\rangle = \sqrt{\langle l, Pl\rangle} + \langle l, c\rangle. \tag{6}$$

3 Нахождение поляры ромба

Полярой множества $E \subset \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$ называется множество

$$E^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x|E) \leq 1\}.$$

Рассмотрим ромб с диагоналями $a_1,\ a_2$, с центром в точке $c = (c_1, c_2)$:

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{2} \frac{2|x_i - c_i|}{a_i} \leq 1 \right\}.$$

Зная опорную функцию ромба, выведенную в одном из предыдущих пунктов данного отчёта (4), можем выписать уравнение, определяющее поляру данного множества:

$$K^* = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{2} l_i c_i + \max_{i=1,2} \frac{|a_i l_i|}{2} \leq 1 \right\}.$$

Список литературы

[1] А. В. Арутюнов. Лекции по выпуклому и многозначному анализу. Москва, изд. ФИЗМАТЛИТ, 2014.