Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Лабораторная работа №3»

Студент 315 группы
А. В. Горбачёв

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

При помощи быстрого преобразования Фурье получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для следующих функций:

1. $f(t) = \frac{2t}{5+2t+t^2}$,
2. $f(t) = \begin{cases} t + t^4, & 2|t| \le 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$
3. $f(t) = t^5 e^{-2t^4}$,
4. $f(t) = \frac{\sin t}{3+4|t|^3}$.

Построить графики $F(\lambda)$. Для первых двух функций найти $F(\lambda)$ аналитически и сравнить с приближенными вычислениями через БПФ. Проиллюстрировать эффекты ряби и наложения спектра, устранение этих эффектов при улучшении значений параметров, а также невозможность устранения этих эффектов в точках разрыва $F(\lambda)$.

2 Вычисление преобразований Фурье

2.1 Фунция 1

$$f(t) = \frac{2t}{5 + 2t + t^2}.$$

Рассмотрим комплекснозначную функцию $f(z) = \frac{2z}{5+2z+z^2}$. Она имеет две особых точки

$$z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = -1 - 2i$$

Так как особые точки функции являются простыми полюсами, то формула для вычета в них имеет следующий вид:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

Ищем $F(\lambda)$ с помощью леммы Жордана.

1. $\lambda < 0$
   В качестве контура будем рассматривать полуокружность радиуса R, находящуюся в верхней полуплоскости, обозначим этот контур C_R (так как $\lim\limits_{z\to\infty, \operatorname{Im} z > 0} f(z) = 0$, $-\lambda > 0$, лемма Жордана применима).

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)e^{-i\lambda z} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1} \frac{2ze^{-i\lambda z}}{5 + 2z + z^2} =$$

$$= \pi(-1 + 2i)e^{2\lambda}(\cos\lambda + i\sin\lambda).$$

2. $\lambda > 0$
   В качестве контура будем рассматривать полуокружность радиуса R, находящуюся в нижней полуплоскости, обозначим этот контур $C_R^{'}$ (так как $\lim\limits_{z\to\infty, \operatorname{Im} z < 0} f(z) = 0$, $-\lambda < 0$, лемма Жордана применима).

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = -\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R'} f(z)e^{-i\lambda z} = -2\pi i \operatorname*{res}_{z_2} \frac{2ze^{-i\lambda z}}{5 + 2z + z^2} =$$

$$= \pi(-1 - 2i)e^{-2\lambda}(\cos\lambda + i\sin\lambda).$$

3. При $\lambda = 0$ преобразование не определено, так как соответствующий интеграл расходится.

2.2 Функция 2

$$f(t) = \begin{cases} t + t^4, & 2|t| \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ищем $F(\lambda)$, применяя формулу интегрирования по частям несколько раз. Заметим при этом, что так как функции $t\cos\lambda t,\ t^4\sin\lambda t$ являются нечетными, соответствующие интегралы обратятся в ноль:

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} (t+t^4)e^{-i\lambda t}dt =$$

$$= \int\limits_{-1/2}^{1/2} t\cos\lambda t dt - i\int\limits_{-1/2}^{1/2} t\sin\lambda t dt + \int\limits_{-1/2}^{1/2} t^4\cos\lambda t dt - i\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^4\sin\lambda t dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} (t^4\cos\lambda t - it\sin\lambda t)dt =$$

$$= \frac{\left(\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 8\mathrm{i}\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)\lambda^4 + \left(8\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) - 16\mathrm{i}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)\lambda^3 - 48\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\lambda^2 - 192\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\lambda + 384\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{8\lambda^5}.$$

3 Свойства преобразования Фурье, используемые в вычислениях

1. Если функция задана на произвольном отрезке $[a, b]$, то используется свойство временного сдвига:
$$f(x-\gamma) \Longleftrightarrow e^{-i\gamma\lambda}F(\lambda),$$
где $\gamma = (b-a)/2$.

2. Преобразованная функция частот в силу свойств дискретного преобразования Фурье является периодической с периодом $f_d = \dfrac{1}{\triangle_t}$. Поэтому если окно частот выходит за указанный период, функция периодически продолжается до необходимого окна.

3. В силу указанной выше периодизации функции частот в наших интересах, чтобы максимальная частота спектра не превышала значения $\dfrac{f_d}{2}$, иначе будет происходить наложение спектра. Поэтому частоту дискретизации выбираем исходя из условий теоремы Котельникова-Шеннона: $\lambda_N = \dfrac{1}{2\triangle_t} \geq \lambda_{max}$.

4 Эффект ряби и его возможное устранение

Определение 1 *Эффект ряби (ripple) заключается в появлении ряби в частотном пространстве из-за ограниченности окна, накладываемого на исходный сигнал.*

Есть два способа борьбы с этим эффектом: расширение окна исходного сигнала или уменьшение шага дискретизации, однако если образ сигнала $F(\lambda)$ терпит разрыв в точке, устранить рябь не удается даже при маленьком шаге дискретизации и большом окне.

Рассмотрим описанное выше на второй функции из набора: $f(t) = \frac{2t}{5+2t+t^2}$. Для начала зададим функцию на отрезке $[-5, 5]$, а шаг дискретизации возьмем $\triangle_t = 0.3$:

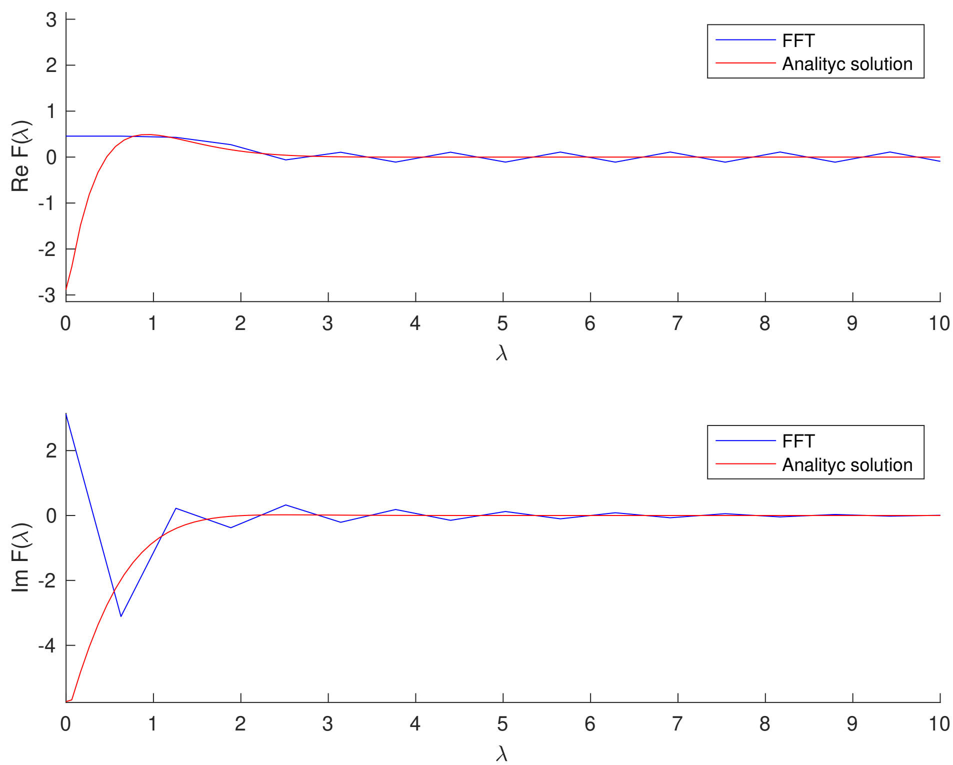

Рис. 1: Преобразование с рябью ($\triangle_t = 0.3,\ [a, b] = [-5, 5]$).

Теперь попробуем увеличить окно $[a, b] = [-50, 50]$:

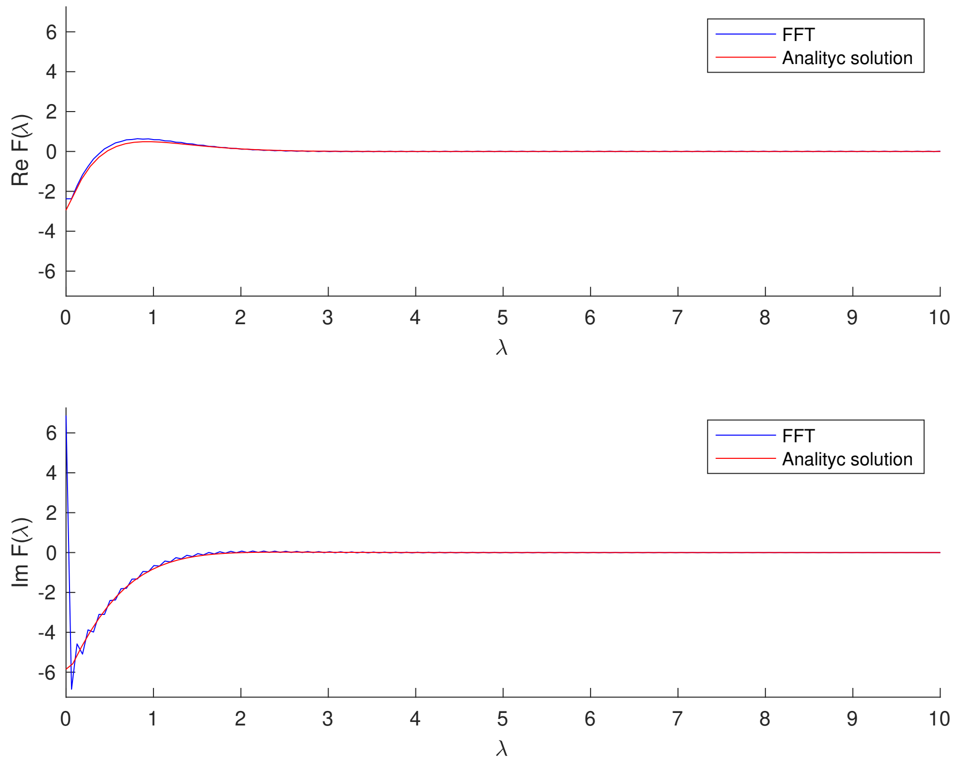

Рис. 2: Преобразование с увеличенным окном ($\triangle_t = 0.3$, $[a, b] = [-50, 50]$).

Увеличивая окно, мы можем избавиться от ряби в точках непрерывности спектра. Так как в нуле преобразование не определено (непрерывность нарушается), вблизи нуля от эффекта ряби избавиться не получится.

Теперь попробуем уменьшить шаг дискретизации $\triangle_t = 0.00001$:

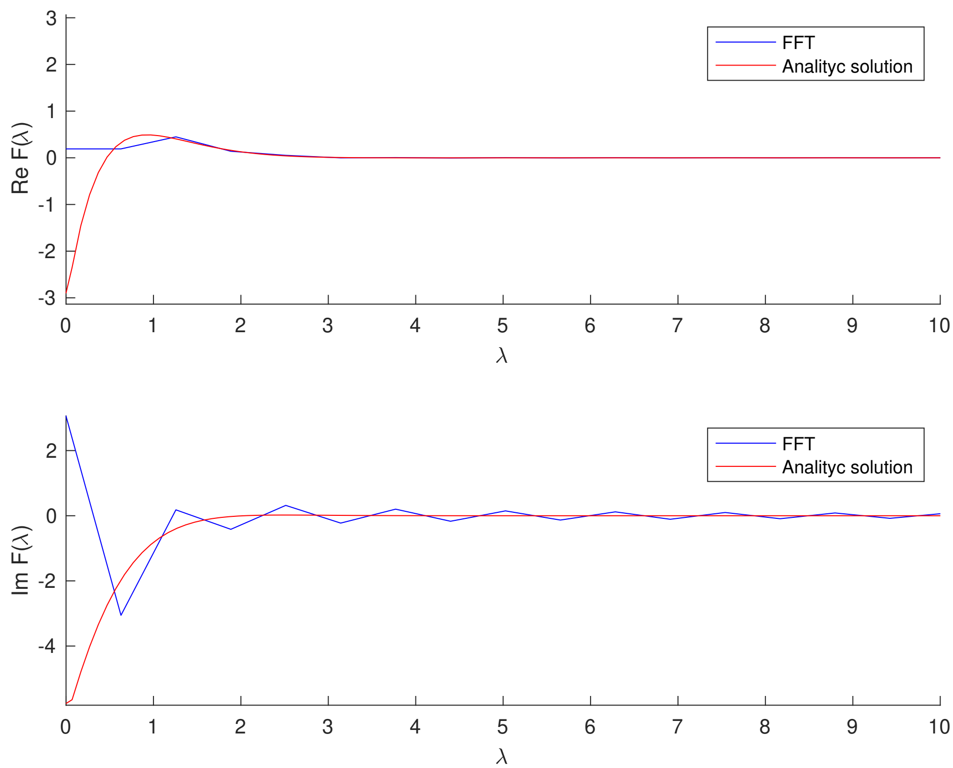

Рис. 3: Преобразование с уменьшенным шагом дискретизации ($\triangle_t = 0.00001,\ [a, b] = [-5, 5]$).

Видим, что, уменьшая шаг дискретизации, можно уменьшить эффект ряби, но при недостаточно большом окне это улучшение будет несущественным.

5 Эффект наложения спектра и его устранение

Определение 2 *Эффект наложения спектра — эффект, возникающий из-за потери полезной информации при дискретизации изначально непрерывного сигнала.*

Поскольку функция образа является периодической, слагаемые $F(\lambda - kT)$ могут перекрываться, и по получившемуся разложению нельзя однозначно восстановить исходный сигнал.

Рассмотрим функцию $f(t) = \begin{cases} t + t^4, & 2|t| \leq 1, \\ 0, & 2|t| > 1. \end{cases}$

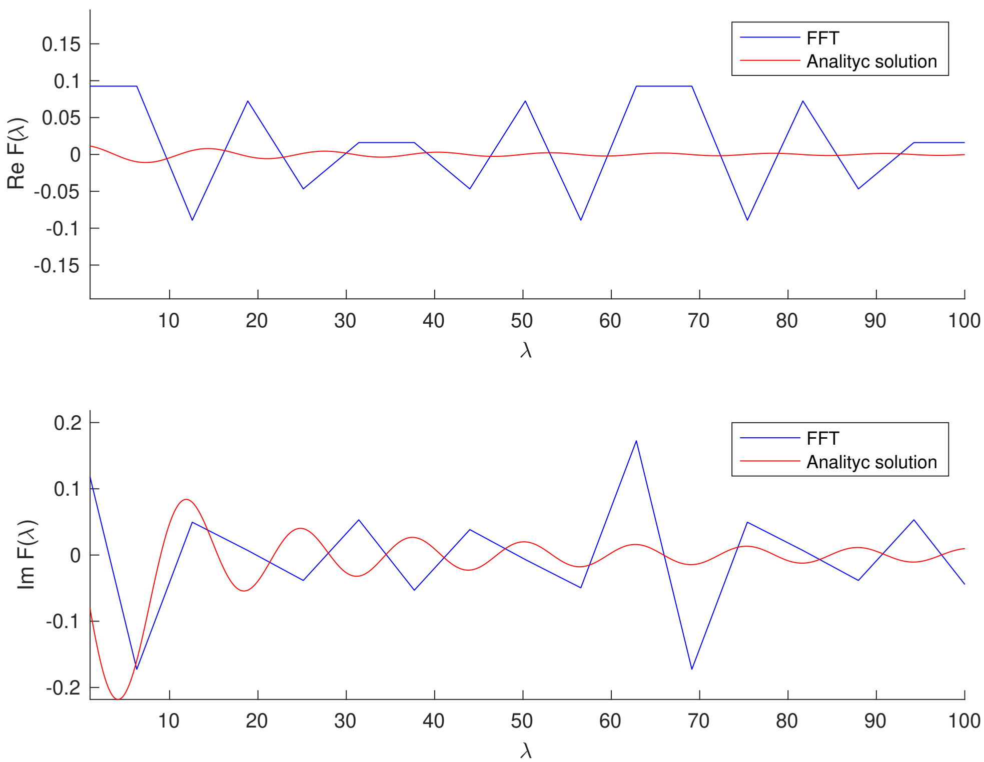

Рис. 4: Преобразование с наложением спектра ($\triangle_t = 0.1,\ [a, b] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$).

Уменьшим частоту дискретизации, сделав равной 0.01, чтобы частота Найквиста $\lambda_N = \dfrac{1}{2\triangle_t}$ стала больше, чем максимальное значение спектра λ_{max}. Тогда наложения спектра не происходит:

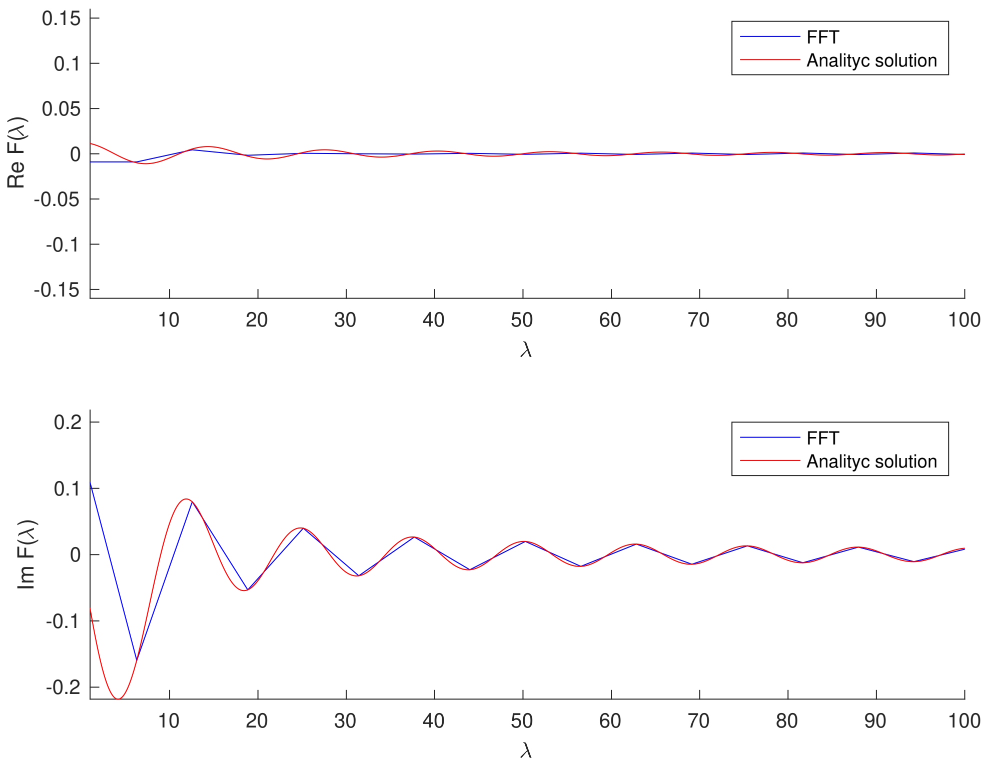

Рис. 5: Преобразование с рябью ($\triangle_t = 0.01,\ [a,b] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$).

6 Преобразование Фурье для функции $f(t) = t^5 e^{-2t^4}$

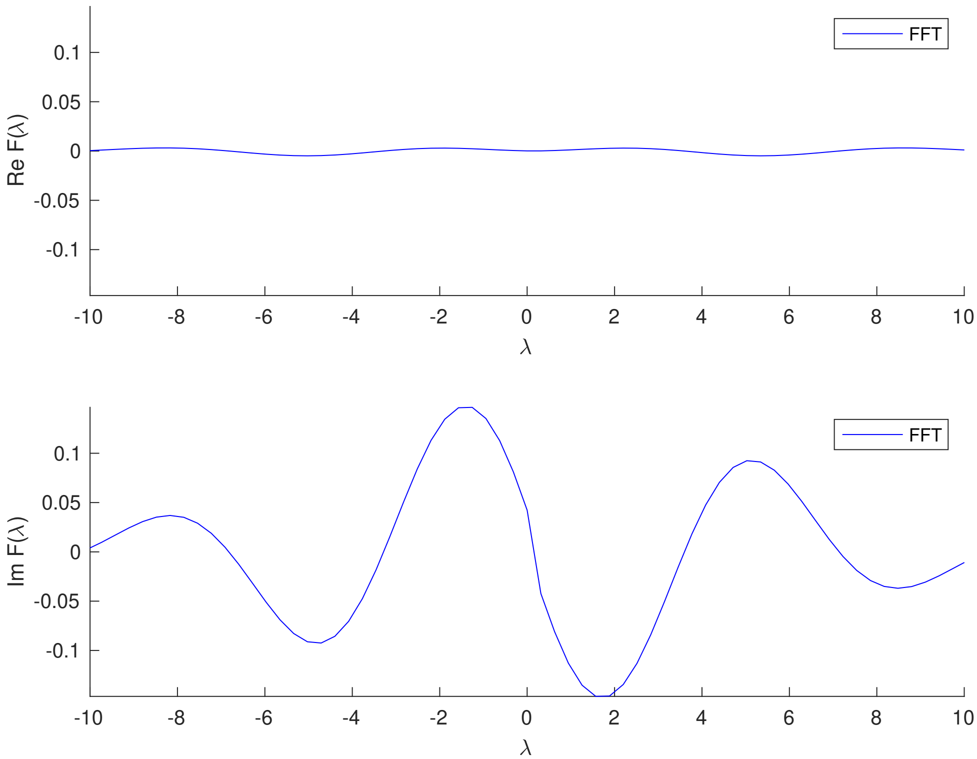

Рис. 6: $f(t) = t^5 e^{-2t^4}$.

7 Преобразование Фурье для функции $f(t) = \frac{\sin t}{3+4|t|}$

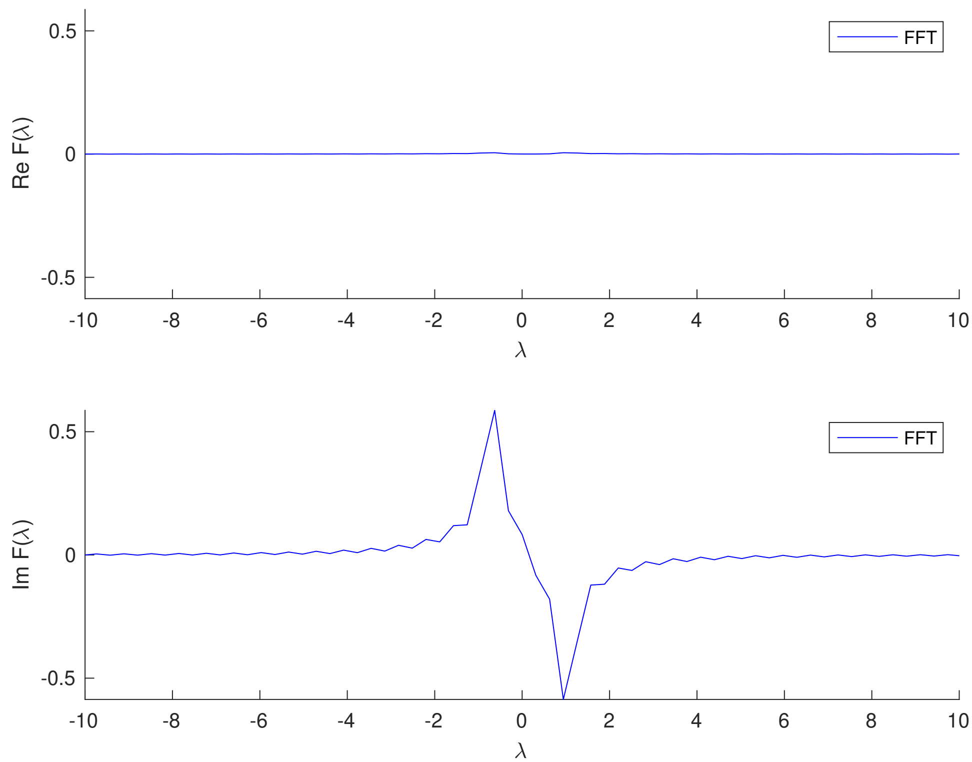

Рис. 7: $f(t) = \frac{\sin t}{3+4|t|}$.

Список литературы

[1] Кандидов В. П., Чесноков С. С., Шленов С. А. Дискретное преобразование Фурье. Физический факультет МГУ, 2019.