Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Горбачёв Алексей Валериевич

Что-то про домохозяйства и ОУ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
А. А. Шананин

Москва, 2023

Содержание

1 Введение

2 Построение фазового портрета.

$$\begin{cases} \int\limits_0^T -\ln M(t)e^{-\delta t}dt \to \min\limits_{M()>0}, \\ \frac{dx}{dt} = S(t) - \frac{M(t)}{\theta} - r_L(M(t) - x(t))_+ + r_D(x(t) - M(t))_+, \\ x(0) = x_0,\ x(T) \geqslant 0, \\ \delta > 0,\ r_L > r_D > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

При этом доходы домашнего хозяйства растут экспоненциально $S(t) = S_0 e^{\gamma t}$.

Введём переобозначения:

$$\begin{cases} x(t) = \hat{x}(t)e^{\gamma t}, \\ M(t) = \hat{M}(t)e^{\gamma t}. \end{cases}$$

В новых обозначениях система (2.1) примет вид:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T -\ln \hat{M}(t)e^{-\delta t}dt \to \min\limits_{\hat{M}()>0}, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} = S_0 - \gamma\hat{x}(t) - \frac{\hat{M}(t)}{\theta} - r_L(\hat{M}(t) - \hat{x}(t))_+ + r_D(\hat{x}(t) - \hat{M}(t))_+, \\ \hat{x}(0) = x_0,\ \hat{x}(T) \geqslant 0, \\ \delta > 0,\ r_L > r_D > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1 Вычисление Лагранжиана.

2.1.1 $\hat{M} \geqslant \hat{x}$.

В таком случае дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = S_0 - \gamma\hat{x}(t) - \frac{\hat{M}(t)}{\theta} - r_L(\hat{M}(t) - \hat{x}(t)).$$

Тогда,

$$\hat{M} = \frac{S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - \dot{\hat{x}}}{r_L + \frac{1}{\theta}} = \frac{S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - v}{r_L + \frac{1}{\theta}}.$$

Значит, при $v \leqslant S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta})$ лагранжиан примет вид

$$L(\hat{x}, v, t) = -e^{-\delta t} \ln \frac{S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - v}{r_L + \frac{1}{\theta}}.$$

2.1.2 $\hat{M} < \hat{x}$.

Аналогично предыдущему случаю, получаем, что при $v > S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta})$ лагранжиан будет равен:

$$L(\hat{x}, v, t) = -e^{-\delta t} \ln \frac{S_0 + \hat{x}(r_D - \gamma) - v}{r_D + \frac{1}{\theta}}.$$

Итого,

$$L(\hat{x}, v, t) = \begin{cases} -e^{-\delta t} \ln \frac{S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - v}{r_L + \frac{1}{\theta}}, \ v \leqslant S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta}), \\ -e^{-\delta t} \ln \frac{S_0 + \hat{x}(r_D - \gamma) - v}{r_D + \frac{1}{\theta}}, \ v \geqslant S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta}). \end{cases}$$

Заметим, что лагранжиан представим в виде: $L(\hat{x}, v, t) = e^{-\delta t} \hat{L}(\hat{x}, v)$.

2.2 Вычисление гамильтониана системы.

Пусть p - сопряжённая переменная $K(\hat{x})-$ множество допустимых значений v (допустимых управлений) при заданном $\hat{x}$. Гамильтониан:

$$H(\hat{x}, p, t) = \max_{v \in K(\hat{x})} (pv - L(\hat{x}, v, t)).$$

Произведём замену $p(t) = e^{-\delta t} \phi(t)$. Тогда

$$H(\hat{x}, p, t) = \max_{v \in K(\hat{x})} (pv - L(\hat{x}, v, t)) = e^{-\delta t} \max_{v \in K(\hat{x})} (\phi v - \hat{L}(\hat{x}, v)) = e^{-\delta t} \hat{H}(\hat{x}, \phi).$$

Заметим, что из данного вида лагранжиана следует, что если $\phi \leqslant 0$, то $\hat{H}(\hat{x}, \phi) = +\infty$ и оптимальное управление $\hat{M} = +\infty$, отсюда получаем условие $\phi > 0$.

2.2.1 $\hat{x} < 0$

При $\hat{x} < 0$ множество допустимых управлений имеет вид

$$K(\hat{x}) = \big(-\infty, S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) \big).$$

Из того, что условие максимума в данном случае имеет вид

$$\phi \in \frac{\partial \hat{L}}{\partial v}(\hat{x}, v) = \frac{1}{S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - v}$$

и монотонности $\frac{\partial \hat{L}}{\partial v}$ по v получаем:

$$v = S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - \frac{1}{\phi},$$

$$\hat{M}(\hat{x}, \phi) = \frac{1}{\phi(r_L + \frac{1}{\theta})},$$

$$\hat{H}(\hat{x}, \phi) = \phi(S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma)) - \ln \phi(r_L + \frac{1}{\theta}) - 1.$$

2.2.2 $\hat{x} \geqslant 0$

В данном случае множество допустимых управлений имеет вид:

$$K(\hat{x}) = \big(-\infty, S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta})\big] \cup \big[S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta}), S_0 + \hat{x}(r_D - \gamma)\big),$$

а субдифференциал лагранжиана равен:

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial v} = \begin{cases} \frac{1}{S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - v}, \text{ при } v < S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta}), \\ \frac{1}{S_0 + \hat{x}(r_D - \gamma) - v}, \text{ при } v > S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta}), \\ \left[\frac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})}, \frac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})} \right], \text{ при } v = S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta}). \end{cases}$$

Из условия $\phi \in \frac{\partial \hat{L}}{\partial v}$ получаем:

1. если $\phi \geqslant \frac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})}$, то

$$\begin{gathered} v = S_0 + \hat{x}(r_D - \gamma) - \tfrac{1}{\phi}, \\ \hat{M}(\hat{x}, \phi) = \tfrac{1}{\phi(r_D + \frac{1}{\theta})}, \\ \hat{H}(\hat{x}, \phi) = \phi(S_0 + \hat{x}(r_D - \gamma)) - \ln \phi(r_D + \tfrac{1}{\theta}) - 1; \end{gathered}$$

2. если $\phi \leqslant \frac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})}$, то

$$\begin{gathered} v = S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma) - \tfrac{1}{\phi}, \\ \hat{M}(\hat{x}, \phi) = \tfrac{1}{\phi(r_L + \frac{1}{\theta})}, \\ \hat{H}(\hat{x}, \phi) = \phi(S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma)) - \ln \phi(r_L + \tfrac{1}{\theta}) - 1; \end{gathered}$$

3. если $\frac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \leqslant \phi \leqslant \frac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})}$, то

$$\begin{gathered} v = S_0 - \hat{x}(\gamma + \tfrac{1}{\theta}), \\ \hat{M}(\hat{x}, \phi) = \hat{x}, \\ \hat{H}(\hat{x}, \phi) = \phi(S_0 - \hat{x}(\gamma + \tfrac{1}{\theta})) + \ln \hat{x}. \end{gathered}$$

Итого, получаем, что гамильтониан системы представим в виде:

$$H(\hat{x}, p, t) = e^{-\delta t}\hat{H}(\hat{x}, e^{\delta t}p), \text{ где}$$

$$\hat{H}(\hat{x}, \phi) = \begin{cases} \phi(S_0 + \hat{x}(r_D - \gamma)) - \ln\phi(r_D + \frac{1}{\theta}) - 1, \text{ при } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \hat{x} < 0 \\ 0 < \phi \end{cases} \hat{x} < 0 \\ \begin{cases} \hat{x} \geqslant 0 \\ 0 < \phi \leqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \end{cases} \end{array}\right. \\ \phi(S_0 + \hat{x}(r_L - \gamma)) - \ln\phi(r_L + \frac{1}{\theta}) - 1, \text{ при } \begin{cases} \hat{x} > 0 \\ \phi \geqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})} \end{cases} \\ \phi(S_0 - \hat{x}(\gamma + \frac{1}{\theta})) + \ln\hat{x}, \text{ при } \begin{cases} \hat{x} > 0 \\ \dfrac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \leqslant \phi \leqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})} \end{cases} \\ +\infty, \text{ иначе,} \end{cases}$$

а выражение для оптимального уравнения (как функции фазовой и сопряжённой переменных) в виде:

$$\hat{M}(\hat{x}, \phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\phi(r_L + \frac{1}{\theta})}, \text{ при } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \hat{x} < 0 \\ 0 < \phi \end{cases} \hat{x} < 0 \\ \begin{cases} \hat{x} \geqslant 0 \\ 0 < \phi \leqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \end{cases} \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{\phi(r_D + \frac{1}{\theta})}, \text{ при } \begin{cases} \hat{x} > 0 \\ \phi \geqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})} \end{cases} \\ \hat{x}, \text{ при } \begin{cases} \hat{x} > 0 \\ \dfrac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \leqslant \phi \leqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})} \end{cases} \\ +\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Список литературы

[1] *Shananin A.* Problem of Aggregating of an Input–Output Model and Duality, 2021 г.

[2] *Шананин А.* Проблема интегрируемости и обобщённый непараметрический метод анализа потребительского спроса, 2009 г.

[3] *Obrosova N., Shananin A., Spiridonov A.* On the comparison of two approaches to intersectoral balance analysis, 2021 г.

[4] *Bonacich P.* Power and Centrality: A Family of Measures, pp. 1170-1182, 1987 г.