Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Горбачёв Алексей Валериевич

Построение синтеза оптимального управления в моделях экономического поведения домашних хозяйств рамсеевского типа

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
А. А. Шананин

Москва, 2023

Содержание

1 Введение

В начале 21го века в условиях быстрого экономического роста, развития банковского сектора, увеличивающихся доходов населения в России потребительский кредит стал важной составляющей, подстёгивающей увеличение деловой активности и способствующей дальнейшему развитию. В течение 2010х годов, несмотря на замедление экономического роста, отношение общей задолженности к ВВП продолжало увеличиваться. К 2019му году в активах консолидированного баланса коммерческих банков доля потребительского кредита, одного из самых доходных активов, достигла 18%. В результате падения экономики и доходов населения из-за пандемии и последующих санкций, увеличилось также количество просроченных кредитов и долговая нагрузка в некоторых слоях населения.

Для качественного анализа возникающих проблем и последующего планирования монетарной политики необходимо кроме прочего уметь моделировать поведение домашних хозяйств при различных внешних факторах. В данной работе мы будем рассматривать модели рамсеевского типа. В таких моделях каждое домашнее хозяйство действует в условиях ограниченной рациональности, исходя из максимизации своего дисконтированного потребления при существующих финансовых ограничениях и действующей конъюнктуре. Также потребители не могут прогнозировать экономическую конъюнктуру (т.е. домохозяйство планирует своё поведение в предположении сохранения текущих значений всех показателей). Домохозяйство получает доход, изменяющийся по известному закону. При этом потребители могут брать кредит, класть деньги на депозит, либо не пользоваться услугами банков. Наша цель состоит в моделировании поведения домохозяйств в зависимости от различных значений параметров.

2 Постановка задачи

Будем моделировать поведение домохозяйства рамсеевского типа. Потребление домохозяйства в момент времени t обозначим как $C(t)$. Домохозяйство стремится максимизировать своё потребление, при существующих финансовых ограничениях, но встаёт логичный вопрос, как грамотно математически формализовать, что именно нужно максимизировать и как учесть эти финансовые ограничения. В нашей модели домохозяйство может брать кредит, класть деньги на депозит, кроме того у домохозяйства есть доходы (помимо начислений по депозиту). Доходы $S(t)$ в момент времени t изменяются экспоненциально:

$$S(t) = S_0 e^{\gamma t},$$

где $\gamma-$ темп роста доходов домохозяйства, S_0- доход в начальный (t=0) момент времени.

Пусть $D(t) \geqslant 0$ - количество денег на депозите под процентную ставку $r_D > 0$, $H_D(t)$ - вложения в момент времени t, тогда изменение количества денег на депозите моделируется дифференциальным уравнением:

$$\frac{dD(t)}{dt} = H_D(t) + r_D D(t).$$

$L(t) \geqslant 0$ - сумма кредитов под процентную ставку $r_L > 0$, $H_L(t)-$ сумма заимствований в момент времени t. Для описания динамики задолженности используем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dL(t)}{dt} = H_L(t) + r_L L(t).$$

Условие отсутствия арбитража предполагает $r_L \geqslant r_D$, мы будем рассматривать ситуацию $r_L > r_D > \gamma$. Индекс потребительских цен $p(t)$ также растёт экспоненциально с темпом роста j, т.е. $p(t) = p_0 e^{jt}$. Количество денег $M(t)$, необходимых домохозяйству для потребительских расходов $p(t)C(t)$, моделируется законом Фишера

$$\frac{M(t)}{\theta} = p(t)C(t), \text{ где } \frac{1}{\theta} - \text{ скорость обращения денег.}$$

Изменение запаса денег домохозяйства будем моделировать дифференциальным уравнением

$$\frac{dM}{dt} = S(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t).$$

Финансовое состояние домохозяйства описывается величиной

$$x(t) = M(t) + D(t) - L(t).$$

Так как $r_L > r_D > 0$, разумное поведение предполагает, что у домохозяйства не может быть одновременно и кредитов, и депозитов, а также у домохозяйства отсутствуют лишние (не использующиеся для текущих расходов) наличные деньги. Формульно это означает:

$$D(t) = \max\{x(t) - M(t), 0\} = (x(t) - M(t))_+,$$

$$L(t) = \max\{M(t) - x(t), 0\} = (M(t) - x(t))_+.$$

Изменение финансового состояния моделируется следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = S(t) - \frac{M(t)}{\theta} + r_D(x(t) - M(t))_+ - r_L(M(t) - x(t))_+, \\ x(0) = x_0, \ x_0 - \text{ начальное финансовое состояние домохозяйства }. \end{cases}$$

Добавим также условие $x_0 > -\frac{S_0}{r_L - \gamma}$ (оно означает возможность домохозяйства расплатиться с долгами за конечное время).

Функцию $M(t) > 0$ в данном случае будем интерпретировать, как управление, путём выбора которого домохозяйство стремится максимизировать своё дисконтированное потребление (потребление в данный момент предпочтительней потребления в будущем). Описывать текущую функцию полезности потребления $C(t)$ для домохозяйства будем как $\ln C(t)e^{-\delta t}$, где $\delta > 0$ - коэффициент дисконтирования отличный для разных домохозяйств. Допустим, домохозяйство хочет максимизировать функционал $\int\limits_0^{+\infty} \ln C(t)e^{-\delta t}dt$, то есть его поведение будет определяться решением задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \ln M(t)e^{-\delta t}dt \to \max\limits_{M(\cdot)>0}, \\ \frac{dx}{dt} = S(t) - \frac{M(t)}{\theta} - r_L(M(t) - x(t))_+ + r_D(x(t) - M(t))_+, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Но математическое решение этой системы показывает, что для домохозяйства, описываемого вышеприведённой задачей, оптимальным будет поведение, при котором оно берёт бесконечное количество долгов сейчас, тратит все полученные деньги на потребление, и, как следствие, оказывается банкротом (при своих доходах домохозяйство никогда в будущем не расплатится с подобными кредитами). То есть решением этой задачи является финансовая пирамида. Надо заметить, что банки при выдаче кредита всё же стараются проверять, будет ли у кредитуемого возможность расплатиться с долгами, да и потребители при минимальном планировании не слишком часто становятся банкротами, на 2023 год количество потребительских банкротов составило 278137 (см. [5]), менее 0.5% населения РФ, поэтому очевидно данная модель не достаточно адекватно отражает действительность, поэтому в неё логично было бы добавить фазовые ограничения для недопущения банкротств $\left(x(t) > -\frac{S(t)}{r_L-\gamma}\ \forall t>0\right)$, получаем задачу:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \ln M(t) e^{-\delta t} dt \to \max\limits_{M(\cdot)>0}, \\ \frac{dx}{dt} = S(t) - \frac{M(t)}{\theta} - r_L(M(t)-x(t))_+ + r_D(x(t)-M(t))_+, \\ x(0)=x_0,\ x(t) > -\frac{S(t)}{r_L-\gamma}\ \ \forall t>0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Для решения этой задачи применим подход, описанный в [8]. Пусть домохозяйство максимизирует своё дисконтированное потребление не на бесконечном интервале времени, а на конечном отрезке $[0,T]$, при этом для борьбы с финансовыми пирамидами добавим требование, чтобы к конечному моменту времени домохозяйство избавилось от долгов ($x(T)\geqslant 0$). Таким образом получаем задачу с конечным горизонтом:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{T} \ln M(t) e^{-\delta t} dt \to \max\limits_{M(\cdot)>0}, \\ \frac{dx}{dt} = S(t) - \frac{M(t)}{\theta} - r_L(M(t)-x(t))_+ + r_D(x(t)-M(t))_+, \\ x(0)=x_0,\ x(T) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Согласно исходным предположениям, доходы домашнего хозяйства растут экспоненциально $S(t)=S_0e^{\gamma t}$.

Введём переобозначения:

$$\begin{cases} x(t) = \hat{x}(t)e^{\gamma t}, \\ M(t) = \hat{M}(t)e^{\gamma t}. \end{cases}$$

В новых обозначениях исходная система (2.3) примет вид:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{T} \ln \hat{M}(t) e^{-\delta t} dt \to \max\limits_{\hat{M}(\cdot)>0}, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} = S_0 - \gamma\hat{x}(t) - \frac{\hat{M}(t)}{\theta} - r_L(\hat{M}(t)-\hat{x}(t))_+ + r_D(\hat{x}(t)-\hat{M}(t))_+, \\ \hat{x}(0)=x_0,\ \hat{x}(T) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Найдём решение (2.4), получим оптимальное управление $\hat{M}(t)$ и оптимальную траекторию $\hat{x}(t)$. Вообще говоря, для каждой подобной задачи управление будет зависеть лишь от текущего положения системы (финансового состояния $\hat{x}$) и времени, оставшегося до конечного момента отрезка планирования, т.е. управление представимо в виде функции $\hat{M}(\hat{x},T-t)$. Для этой функции найдём поточечный предел $\lim\limits_{T\to+\infty}\hat{M}(\hat{x},T-t)$, обозначим его $\hat{M}(\hat{x}) = \lim\limits_{T\to+\infty}\hat{M}(\hat{x},T-t)$. Полученное таким образом управление, зависящее лишь от текущего финансового состояния, согласно [8] окажется решением задачи с конечным горизонтом с фазовыми ограничениями (2.2).

3 Математическое обоснование

Мы пришли к задаче оптимального управления

$$\begin{cases} \int\limits_0^T \ln \hat{M}(t) e^{-\delta t} dt \to \max\limits_{\hat{M}(\cdot)>0}, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} = S_0 - \gamma \hat{x}(t) - \frac{\hat{M}(t)}{\theta} - r_L(\hat{M}(t) - \hat{x}(t))_+ + r_D(\hat{x}(t) - \hat{M}(t))_+, \\ \hat{x}(0) = x_0, \ \hat{x}(T) \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Причём имеют место следующие ограничения

$$\begin{cases} \delta > 0, \\ r_L > r_D > 0, \\ r_L > r_D > \gamma, \\ \frac{1}{\theta} > 0. \end{cases}$$

Но этих ограничений недостаточно, чтобы гарантировать существование решения задачи (3.1): например, если $x_0 \leqslant -\frac{S_0}{r_L-\gamma}$, то ни при каком управлении $\hat{M}(\cdot)$ условие $\hat{x}(T) \geqslant 0$ не будет выполнено, поэтому необходимо потребовать $x_0 > -\frac{S_0}{r_L-\gamma}$. Также необходимо добавить условие $T > \frac{\ln \frac{S_0}{S_0+(r_L-\gamma)x_0}}{r_L}$, оно будет гарантией того, что домохозяйству хватит времени, чтобы расплатиться с долгами.

3.1 Существование решения

Теорема 1. *Допустим, выполняются вышеуказанные ограничения на параметры $\delta, r_L, r_D, \gamma, \theta$, а также*

$$x_0 > -\frac{S_0}{r_L - \gamma},$$

$$T > \frac{\ln \frac{S_0}{S_0+(r_L-\gamma)x_0}}{r_L}.$$

Тогда у задачи оптимального управления

$$\begin{cases} \int\limits_0^T \ln \hat{M}(t) e^{-\delta t} dt \to \max\limits_{\hat{M}(\cdot)>0}, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} = S_0 - \gamma \hat{x}(t) - \frac{\hat{M}(t)}{\theta} - r_L(\hat{M}(t) - \hat{x}(t))_+ + r_D(\hat{x}(t) - \hat{M}(t))_+, \\ \hat{x}(0) = x_0, \ \hat{x}(T) \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

существует решение.

Доказательство. С учётом дополнительных ограничений на T, x_0 получим, что

$$\hat{M} \equiv 0$$

является допустимым управлением в задаче, так как тогда

$$\dot{\hat{x}}(t) = S_0 - \gamma \hat{x}(t) + r_D(\hat{x}(t))_+$$

В случае $x_0 \geqslant 0$ получаем $\dot{\hat{x}} \leqslant S_0 + (r_D - \gamma)\hat{x}$, следовательно по неравенству Грануолла-Беллмана

$$\hat{x}(t) \leqslant -\frac{S_0}{r_L - \gamma} + \left(x_0 + \frac{S_0}{r_D - \gamma}\right) e^{(r_D - \gamma)t} \leqslant \left((x_0)_+ + \frac{S_0}{r_D - \gamma}\right) e^{(r_D - \gamma)t} \quad \forall t \in [0, T].$$

Аналогичное неравенство можно получить и если $x_0 < 0$

$$\hat{x}(t) \leqslant \left((x_0)_+ + \frac{S_0}{r_D - \gamma}\right) e^{(r_D - \gamma)T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Из тех же неравенств можно получить

$$\hat{x}(T) \leqslant x_0 + S_0 T + \left((r_D - \gamma)\, T\, (x_0)_+ + ST\right) e^{(r_D - \gamma)T} - \frac{1}{\theta} \int_0^T \hat{M}(t) dt.$$

Из граничного условия $\hat{x}(T) \geqslant 0$ получаем

$$\int_0^T \hat{M}(t) dt \leqslant \theta \left((x_0)_+ + ST + \left((r_D - \gamma)\, T\, (x_0)_+ + ST\right) e^{(r_D - \gamma)T}\right).$$

Следовательно множество допустимых управлений $\hat{M}(\cdot)$ ограничено по норме пространства $Ł_1[0, T]$. Ещё заметим, что так как $\ln \hat{M} \leqslant \max\{\hat{M}, 1\}$, а значит на множестве допустимых управлений исходный функционал ограничен сверху, пусть A - точнвя верхняя грань этого функционала. Тогда будет существовать последовательность допустимых управлений $\hat{M}_i(\cdot)$, такая, что

$$\lim_{i \to +\infty} \int\limits_0^T \ln \hat{M}(t) e^{-\delta t} dt = A.$$

Из теоремы Комлоша (см. [6]) следует, что из ограниченной в $Ł_1$ последовательности $\hat{M}_i$ можно выделить подпоследовательность $\hat{M}_{i_n}$ такую, что её средние по Чезаро будут сходиться почти всюду на отрезке $[0, T]$. Обозначим предельную функцию $\hat{M}_{opt}(t)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{M}_{i_k}(t)=\hat{M}_{\text{opt}}(t)\quad\text{ для почти всех } t\in[0,T].$$

Из вогнутости функции $\ln\hat{M}$ по $\hat{M}$ получаем

$$\int\limits_0^T \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{M}_{i_k}(t)\right)e^{-\delta t}dt \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T \ln\left(M_{i_k}(t)\right)e^{-\delta t}dt.$$

Следовательно

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^T \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{M}_{i_k}(t)\right)e^{-\delta t}dt = A.$$

И теперь можем, занеся предел под интеграл согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим

$$\int\limits_0^T \ln\left(\hat{M}_{opt}(t)\right)e^{-\delta t}dt = A.$$

Так как $\hat{M}_{i_k}\geqslant 0$ получаем, что $\hat{M}_{opt}\geqslant 0$. Исследуем фазовую траекторию $\hat{x}_{opt}(\cdot)$, соответствующую $\hat{M}_{opt}(\cdot)$. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=S_0-\gamma\hat{x}-\frac{1}{\theta}\hat{M}_{opt}(t)+r_D\left(\hat{x}-\hat{M}_{opt}(t)\right)_+-r_L\left(\hat{M}_{opt}(t)-\hat{x}\right)_+,\quad \hat{x}(0)=\hat{x}_0.$$

Пусть $\hat{x}_k(\cdot)$ - траектория, порождаемая управлением $\hat{M}_{i_k}(\cdot)$. Тогда $\hat{x}_k(T)\geqslant 0$. Введём обозначение $\tilde{x}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{x}_k(t)$, тогда $\tilde{x}_n(T)\geqslant 0$, а также выполнено

$$\begin{cases}\frac{d\tilde{x}_n(t)}{dt}=S_0-\gamma\tilde{x}_n(t)-\frac{1}{\theta n}\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{M}_{i_k}(t)+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(r_D\left(\hat{x}_k(t)-\hat{M}_{i_k}(t)\right)_+-r_L\left(\hat{M}_{i_k}(t)-\hat{x}_k(t)\right)_+\right),\\ \tilde{x}_n(0)=x_0.\end{cases}$$

Из неравенства $r_L>r_D$, а значит вогнутости функции $r_D(x)_+-r_L(-x)_+$ по x, следует

$$\frac{d\tilde{x}_n(t)}{dt}\leqslant S_0-\gamma\tilde{x}_n(t)-\frac{1}{\theta n}\sum_{k=1}^{n}\hat{M}_{i_k}(t)+\left(r_D\left(\tilde{x}_n(t)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{M}_{i_k}(t)\right)_+-r_L\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{M}_{i_k}(t)-\tilde{x}_n(t)\right)\right).$$

Пусть $\overline{x}_n(t)$ - это решение уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}_n(t)}{dt} = S_0 - \gamma \overline{x}_n(t) - \frac{1}{\theta n} \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) + \left(r_D \left(\overline{x}_n(t) - \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) \right)_+ - r_L \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) - \overline{x}_n(t) \right) \right), \\ \overline{x}_n(0) = x_0. \end{cases}$$

Из условий $r_L > r_D > \gamma$ получаем, что

$$S_0 - \gamma z - \frac{1}{\theta n} \sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) + \left(r_D \left(z - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) \right)_+ - r_L \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) - z \right)_+ \right)$$

возрастает по z. Значит, $\tilde{x}_n(t) \leqslant \overline{x}_n(t)$ и, следовательно, $\overline{x}_n(T) \geqslant \tilde{x}_n(T) \geqslant 0$. Получаем

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) \mid t \in [0, T] \right\}$$

и соответствующая ему траектория $\tilde{x}_n(t)$ удовлетворяют всем ограничениям задачи.

Перейдём к пределу под знаком интеграла, воспользовавшись теоремой о предельном переходе,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T \left| M_{\text{opt}}(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M_{i_k}(t) \right| dt = 0.$$

Получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon > 0 \mid \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \int_0^T \left| \hat{M}_{\text{opt}}(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(t) \right| dt < \varepsilon.$$

Функция $f(z, u) = S_0 - \gamma z - \frac{1}{\theta} u + r_D(z - u)_+ - r_L(u - z)_+$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C > 0$

Так как $\forall t \in [0, T]$

$$\overline{x}_n(t) = x_0 + \int_0^t f \left(\overline{x}_n(\tau), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(\tau) \right) d\tau,$$

$$\hat{x}_{opt} = x_0 + \int_0^t f \left(\hat{x}_{opt}(\tau), \hat{M}_{\text{opt}}(\tau) \right) d\tau,$$

применима оценка

$$|\overline{x}_n(t) - \hat{x}_{opt}(t)| \leq \int_0^t \left| f\left(\overline{x}_n(\tau), \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(\tau)\right) - f\left(\hat{x}_{opt}(\tau), \hat{M}_{\rm opt}(\tau)\right)\right| d\tau \leq$$
$$\leq C\left(\int_0^t |\overline{x}_n(t) - \hat{x}_{opt}(t)| + \int_0^t \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{M}_{i_k}(\tau) - \hat{M}_{\rm opt}(\tau)\right| d\tau\right).$$

Получаем, что $\forall t \in [0, T], n \geq n_\varepsilon$ справедливо неравенство (см. [7, с.17])

$$|\overline{x}_n(t) - \hat{x}_{opt}(t)| \leq \varepsilon e^{Ct}$$

Следовательно $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{x}_n(T) = \hat{x}_{opt}(T)$ и, значит, $\hat{x}_{opt}(T) \geq 0$. Таким образом, управление $\left\{\hat{M}_{\rm opt}(t) \mid t \in [0, T]\right\} \geqslant 0$ и траектория $\{\hat{x}_{opt}(t) \mid t \in [0, T]\} \geqslant 0$ являются решением исходной задачи

■

3.2 Принцип максимума

Мы доказали существование оптимальной траектории в задаче с конечным горизонтом, для её поиска будем определять траекторию, удовлетворяющую необходимым условиям (принципу максимума Понтрягина в форме Кларка (см. [2]), сформулируем его.

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T f_0(u(t), t)dt \to \max\limits_{u(\cdot)\in U}, \\ \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0,\ x(T) \in B. \end{cases} \tag{3.3}$$

$U-$ множество допустимых управлений, B - целевое множество

Определение 1. *Гамильтонианом системы* (3.3) *называется функция*

$$H(x, p, u, t) = f_0(u, t) + f(x, u)p$$

Теорема 2. *Если в задаче* (3.3) *существует оптимальное управление* $u_{opt}(\cdot)$ *и порождаемая ей оптимальная траектория* $x_{opt}(\cdot)$, *то существует нетривиальная абсолютно непрерывная функция* $p(t)$, *определённая на* $[0, T]$, *причём для неё выполнены:*

- $$\dot{\forall} t \in [0, T] \quad \dot{p(t)} \in -\partial_x H(x_{opt}, p, u_{opt}, t) - \text{ сопряжённая система;}$$

- $$\forall t \in [0,T] \quad H(x_{opt}(t), p(t), u_{opt}(t), t) = \sup_{v \in U(t)} H(x_{opt}(t), p(t), v, t) - \text{ \textit{условие максимума;}}$$

- $$p(T) \perp T_{x_{opt}(T)}B - \text{ \textit{(условие трансверсальности).}}$$

Отличительной особенностью принципа максимума Понтрягина в форме Кларка является то, что условие $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ в классическом принципе максимума заменяется на $\dot{p} \in -\partial_x H$, то есть пропадает предположение о дифференцируемости гамильтониана по фазовой переменной. В нашем случае гамильтониан будет имеет вид

$$H(\hat{x}, p, \hat{M}, t) = e^{-\delta t} \ln \hat{M} + p\Big(S_0 - \gamma \hat{x} - \frac{\hat{M}}{\theta} - r_L(\hat{M} - \hat{x})_+ + r_D(\hat{x} - \hat{M})_+\Big),$$

и обновлённое условие является существенным, когда $\hat{M} = \hat{x}$, тогда гамильтониан перестаёт быть дифференцируем. Условия трансверсальности примут вид -

$$p(T)X(T) = 0.$$

4 Задача с конечным горизонтом

Рассмотрим задачу с конечным горизонтом:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T \ln \hat{M}(t) e^{-\delta t} dt \to \max\limits_{\hat{M}(\cdot)>0}, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} = S_0 - \gamma \hat{x}(t) - \frac{\hat{M}(t)}{\theta} - r_L(\hat{M}(t) - \hat{x}(t))_+ + r_D(\hat{x}(t) - \hat{M}(t))_+, \\ \hat{x}(0) = x_0, \ \hat{x}(T) \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

На параметры наложены ограничения:

$$\begin{cases} \delta > 0, \\ r_L > r_D > 0, \\ r_L > r_D > \gamma, \\ \frac{1}{\theta} > 0, \\ x_0 > -\frac{S_0}{r_L - \gamma}, \\ T > \frac{\ln \frac{S_0}{S_0 + (r_L - \gamma)x_0}}{r_L}. \end{cases}$$

Найдём решение получившейся задачи, применяя принцип максимума Понтрягина в форме Кларка.

4.1 Условие максимума

Выпишем выражение для гамильтониана системы:

$$H(\hat{x}, p, \hat{M}, t) = e^{-\delta t} \ln \hat{M} + p\Big(S_0 - \gamma \hat{x} - \frac{\hat{M}}{\theta} - r_L(\hat{M} - \hat{x})_+ + r_D(\hat{x} - \hat{M})_+\Big)$$

Сделаем замену сопряжённой переменной: $p(t) = e^{-\delta t}\phi(t)$

Тогда:

$$H(\hat{x}, p, \hat{M}, t) = H(\hat{x}, e^{-\delta t}\phi(t), \hat{M}, t) =$$

$$= e^{-\delta t}\Big(\ln \hat{M} + \phi\Big(S_0 - \gamma \hat{x} - \frac{\hat{M}}{\theta} - r_L(\hat{M} - \hat{x})_+ + r_D(\hat{x} - \hat{M})_+\Big)\Big) =$$

$$= e^{-\delta t}\hat{H}(\hat{x}, \phi, \hat{M})$$

Согласно условию максимума:

$$H(\hat{x}, p, \hat{M}, t) = \sup_{K>0} H(\hat{x}, p, K, t).$$

В новых обозначениях:

$$\hat{H}(\hat{x}, \phi, \hat{M}) = \sup_{K>0} \hat{H}(\hat{x}, p, K).$$

При $\phi \leqslant 0$ оптимальное значение управления $\hat{M}(\hat{x}, \phi) = +\infty$, что недостижимо, но мы доказали, что для данной задачи существует оптимальное управление, поэтому для оптимальной траектории выполняется $\phi > 0$.

В силу вогнутости $\hat{H}(\hat{x}, \phi, \hat{M})$ по $\hat{M}$ максимум достигается тогда и только тогда, когда $0 \in \partial_{\hat{M}}\hat{H}$.

4.1.1 $\hat{M} > \hat{x}$

$$\hat{H}(\hat{x}, \phi, \hat{M}) = \ln \hat{M} + \phi\Big(S_0 + (r_L - \gamma)\hat{x} - (r_L + \frac{1}{\theta})\hat{M}\Big)$$

$$\partial_{\hat{M}}\hat{H} = \frac{\partial}{\partial \hat{M}}\hat{H} = \frac{1}{\hat{M}} - \phi(r_L + \frac{1}{\theta}) = 0$$

$$\hat{M}(\hat{x}, \phi) = \frac{1}{\phi(r_L + \frac{1}{\theta})}$$

Из условия $\hat{M} > \hat{x}$ получаем:

$$\hat{M}(\hat{x}, \phi) = \frac{1}{\phi(r_L + \frac{1}{\theta})}, \text{ при } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \hat{x} \leqslant 0 \\ 0 < \phi \end{cases} \\ \begin{cases} \hat{x} > 0 \\ \phi > 0, \\ \phi \leqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})}. \end{cases} \end{array} \right.$$

4.1.2 $\hat{M} < \hat{x}$

Аналогично получаем:

$$\hat{M}(\hat{x}, \phi) = \frac{1}{\phi(r_D + \frac{1}{\theta})}, \text{ при } \begin{cases} \hat{x} > 0 \\ \phi \geqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})}. \end{cases}$$

4.1.3 $\hat{M} = \hat{x}$

В данном случае получаем:

$$\hat{M}(\hat{x}, \phi) = \hat{x}, \text{ при } \begin{cases} \hat{x} > 0 \\ \dfrac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \leqslant \phi, \\ \phi \leqslant \dfrac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})}. \end{cases}$$

В процессе вычислений мы выделили на плоскости три области:

$$A_1 = \left\{ (\hat{x}, \phi) | \hat{x} \geqslant 0, 0 < \phi \leqslant \frac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \right\} \cup \left\{ (\hat{x}, \phi) | \hat{x} < 0, 0 < \phi \right\}$$

- область, где домохозяйство берёт кредит,

$$A_2 = \left\{ (\hat{x}, \phi) | \hat{x} > 0, \phi \geqslant \frac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})} \right\}$$

- область, где домохозяйство кладёт деньги на депозит,

$$A_3 = \left\{ (\hat{x}, \phi) | \hat{x} > 0, \frac{1}{\hat{x}(r_L + \frac{1}{\theta})} \leqslant \phi \leqslant \frac{1}{\hat{x}(r_D + \frac{1}{\theta})} \right\}$$

- область, в которой домохозяйство не пользуется услугами банков.

Получаем вид оптимального управления, как функции от фазовой и сопряжённой переменных:

$$\hat{M}(\hat{x},\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\phi(r_L + \frac{1}{\theta})}, \text{ при } (\hat{x},\phi) \in A_1 \\ \dfrac{1}{\phi(r_D + \frac{1}{\theta})}, \text{ при } (\hat{x},\phi) \in A_2 \\ \hat{x}, \text{ при } (\hat{x},\phi) \in A_3 \end{cases}$$

4.2 Сопряжённая система

Изначально сопряжённая система имела вид:

$$\begin{cases} \dot{p} \in -\partial_{\hat{x}} H(\hat{x}, p, \hat{M}, t) \\ \dot{\hat{x}} = S_0 - \gamma\hat{x} - \frac{\hat{M}}{\theta} - r_L(\hat{M} - \hat{x})_+ + r_D(\hat{x} - \hat{M})_+. \end{cases}$$

Так как $p = \phi e^{-\delta t}$, а $H(\hat{x}, p, \hat{M}, t) = e^{-\delta t}\hat{H}(\hat{x}, \phi, \hat{M})$, в новых обозначениях сопряжённая система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\phi} \in \delta\phi - \partial_{\hat{x}} \hat{H}(\hat{x}, \phi, \hat{M}) \\ \dot{\hat{x}} = S_0 - \gamma\hat{x} - \frac{\hat{M}}{\theta} - r_L(\hat{M} - \hat{x})_+ + r_D(\hat{x} - \hat{M})_+. \end{cases}$$

Супердифференциал гамильтониана выглядит следующим образом:

$$\partial_{\hat{x}} \hat{H}(\hat{x}, \phi, \hat{M}) = \begin{cases} \phi(r_L - \gamma), \text{ при } (\hat{x},\phi) \in A_1, \\ \phi(r_D - \gamma), \text{ при } (\hat{x},\phi) \in A_2, \\ \big[\phi(r_D - \gamma), \phi(r_L - \gamma)\big], \text{ при } (\hat{x},\phi) \in A_3. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что фазовый портрет системы выглядит так:

- При $(\hat{x},\phi) \in A_1$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = S_0 + (r_L - \gamma)\hat{x} - \frac{1}{\phi}, \\ \dot{\phi} = (\delta + \gamma - r_L)\phi. \end{cases}$$

- При $(\hat{x},\phi) \in A_2$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = S_0 + (r_D - \gamma)\hat{x} - \frac{1}{\phi}, \\ \dot{\phi} = (\delta + \gamma - r_D)\phi. \end{cases}$$

- При $(\hat{x},\phi) \in A_3$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = S_0 - \Big(\gamma + \frac{1}{\theta}\Big)\hat{x}, \\ \dot{\phi} \in \delta\phi + \big[(\gamma - r_L)\phi, (\gamma - r_D)\phi\big]. \end{cases}$$

4.3 Условия трансверсальности

Согласно условиям трансверсальности $\hat{x}(T)p(T) = 0$, т.е. в новых обозначениях:

$$\hat{x}(T)\phi(T) = 0,$$

но так как на оптимальной траектории $\phi > 0$, то

$$\hat{x}(T) = 0.$$

5 Синтез оптимального управления

Мы вывели условия трансверсальности $\hat{x}(T) = 0$ и значение оптимального управления, как функцию функцию фазовой и сопряжённой переменной:

$$\hat{M} = \hat{M}(\hat{x}, \phi).$$

Зная финансовое состояние домохозяйства в начальный момент времени $\hat{x}(0)$ можем определить оптимальное значение $\phi(0)$ и, следовательно, рассчитать оптимальное управление и оптимальную траекторию. Таким образом, полученное управление будет зависеть от фазовой переменной (финансового состояния $\hat{x}$) и времени, оставшегося до "конца" $(T - t)$:

$$\hat{M} = \hat{M}(\hat{x}, T - t).$$

Для решения исходной задачи (с бесконечным горизонтом) найдём предел оптимальных траекторий и значений оптимального управления при $T \to +\infty$.

$$\lim_{T \to +\infty} \hat{M}(\hat{x}, T - t) = \hat{M}(\hat{x}).$$

Таким образом, полученное оптимальное управление домохозяйства зависит только от его текущего финансового состояния (и неявно от экономической конъюнктуры $\hat{M} = \hat{M}(\hat{x}; r_L, r_D, \gamma, \delta)$). Его в дальнейшем можно будет использовать для моделирования репрезентативных домохозяйств в целях прогнозирования их поведения при различных обстоятельствах.

Теперь проделаем эти шаги на практике.

5.1 Кредитование

Допустим
$$\delta \geqslant r_L + \frac{1}{\theta}.$$

В области A_1 из фазового портрета:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = S_0 + (r_L - \gamma)\hat{x} - \frac{1}{\phi}, \\ \dot{\phi} = (\delta + \gamma - r_L)\phi \end{cases}$$

получаем, что если $\hat{x}(0) = \hat{x}_0, \phi(0) = \phi_0$, что траектория имеет вид:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{(\delta+\gamma-r_L)t},$$

$$\hat{x}(t) = -\frac{S_0}{r_L - \gamma} + \frac{e^{(r_L-\gamma-\delta)t}}{\phi_0\delta} + e^{(r_L-\gamma)t}\left(\hat{x}_0 + \frac{S_0}{r_L-\gamma} - \frac{1}{\phi_0\delta}\right)$$

Из условия трансверсальности ($\hat{x}(T) = 0$) получаем:

$$\phi_0 = \phi(0) = \frac{e^{(r_L-\gamma)T}(e^{-\delta T} - 1)}{\delta\left(\frac{S_0}{r_L-\gamma} - e^{(r_L-\gamma)T}\left(\hat{x}_0 + \frac{S_0}{r_L-\gamma}\right)\right)}$$

Перейдём к пределу:

$$\lim_{T\to+\infty} \phi_0 = \lim_{T\to+\infty} \frac{e^{(r_L-\gamma)T}(e^{-\delta T} - 1)}{\delta\left(\frac{S_0}{r_L-\gamma} - e^{(r_L-\gamma)T}\left(\hat{x}_0 + \frac{S_0}{r_L-\gamma}\right)\right)} = \frac{1}{\delta\left(\hat{x}_0 + \frac{S_0}{r_L-\gamma}\right)}.$$

Получаем гиперболу $\phi_0(\hat{x}) = \frac{1}{\delta\left(\hat{x}+\frac{S_0}{r_L-\gamma}\right)}$. В случае $\delta \geqslant r_L + \frac{1}{\theta}$ оказывается:

$$\phi_0(\hat{x}) < \frac{1}{\hat{x}\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)} \quad \forall \hat{x} > -\frac{S_0}{r_L - \gamma}.$$

То есть кривая $\phi_0(\hat{x})$ полностью лежит в области кредитования A_1. Значит, при таком соотношении параметров получившаяся гипербола $\phi_0(\hat{x})$ являеется предельной траекторией, и оптимальное управление определяется формулой:

$$\hat{M}(\hat{x}) = \frac{1}{\phi_0(\hat{x})\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)} = \frac{\delta\left(\hat{x} + \frac{S_0}{r_L-\gamma}\right)}{r_L + \frac{1}{\theta}}.$$

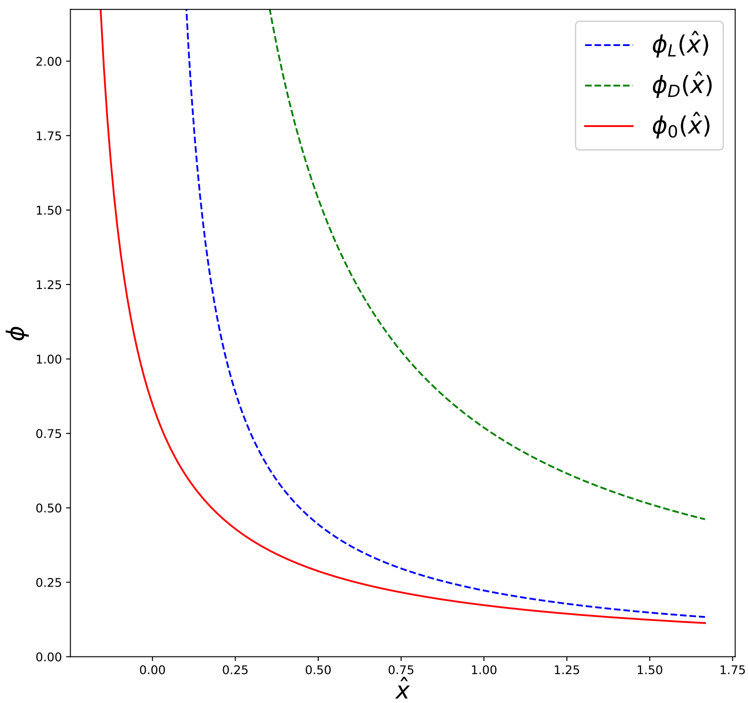

Рис. 1: Вид кривой $\phi_0(\hat{x})$ в режиме кредитования

5.2 Кредитование + автономный режим

Рассмотрим теперь случай:

$$\begin{cases} r_D + \frac{1}{\theta} < \delta < r_L + \frac{1}{\theta}, \\ \delta > r_L - \gamma. \end{cases}$$

Тогда кривая $\phi_0(\hat{x}) = \frac{1}{\delta\left(\hat{x} + \frac{S_0}{r_L - \gamma}\right)}$ и кривая, разделяющая области кредитования и автономного режима $\phi_L(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{x}\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}$ пересекаются в точке:

$$\hat{x}_1 = \frac{\delta S_0}{\left(r_L + \frac{1}{\theta} - \delta\right)\left(r_L - \gamma\right)}.$$

Причём $\hat{x}_1 > \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$, так как $\delta > r_L - \gamma$.

Таким образом, вычисляя траекторию в обратном времени, получаем, что она пересечёт границу A_1 и войдёт в область A_3 в точке:

$$(\hat{x}_1, \phi_1) = \left(\frac{\delta S_0}{\left(r_L + \frac{1}{\theta} - \delta\right)\left(r_L - \gamma\right)}, \frac{(r_L - \gamma)\left(r_L + \frac{1}{\theta} - \delta\right)}{\delta S_0 \left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)} \right).$$

В области автономного функционирования фазовый портрет выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = S_0 - \left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)\hat{x}, \\ \dot{\phi} \in \delta\phi + \big[(\gamma - r_L)\phi, (\gamma - r_D)\phi\big]. \end{cases}$$

Возникает вопрос, каким именно образом выбирать $\dot{\phi}$. В данной области $\hat{x}$ и ϕ изменяются независимо, причём $\hat{x}$ монотонно стремится к $\frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$. Если траектория не пересекает границу области A_2, то потребление домохозяйства при любом выборе $\dot{\phi}$ будет равен $\hat{x}$, и на динамику системы и значение функционала выбор $\dot{\phi}$ никакого влияния не окажет. Если же траектория пересекает границу A_2, то легко заметить, что максимальное значение функционал примет на траектории, которая лежит ниже всех остальных (так как в областях A_1 и A_2 меньшие значения ϕ соответствуют большему потреблению). Поэтому в области A_3 дифференциальное уравнение для ϕ выглядит следующим образом:

$$\dot{\phi} = \begin{cases} (\gamma - r_D + \delta)\phi, \text{ при } \hat{x} \geqslant \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} \\ (\gamma - r_L + \delta)\phi, \text{ при } \hat{x} < \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} \end{cases}$$

Заметим, что из фазового портрета следует, что оптимальная траектория, перейдя в точке $(\hat{x}_1, \phi_1)$ из области A_1 в область A_3, не может вернуться обратно в A_1.

Из $\delta > r_L - \gamma$ следует, что $\hat{x}_1 > \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$, а значит фазовый портрет принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = S_0 - \left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)\hat{x}, \\ \dot{\phi} = (\delta + \gamma - r_D)\phi. \end{cases}$$

Получается:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\hat{x}} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\hat{x}}} = \frac{(\delta + \gamma - r_D)\phi}{S_0 - \left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)\hat{x}}, \\ \phi(\hat{x}_1) = \phi_1 = \frac{1}{\hat{x}_1 \left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем кривую:

$$\phi_A(\hat{x}) = \left(\frac{\hat{x} - \frac{S_0}{\gamma+\frac{1}{\theta}}}{\hat{x}_1 - \frac{S_0}{\gamma+\frac{1}{\theta}}}\right)^{\frac{r_D-\gamma-\delta}{\gamma+\frac{1}{\theta}}} \frac{1}{\hat{x}_1\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Так как $\delta > r_D + \frac{1}{\theta}$, получаем:

$$\phi_A(\hat{x}) < \phi_D(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{x}\left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)} \quad \forall \hat{x} \in [\hat{x}_1, +\infty),$$

Где ϕ_D - гипербола, определяющая границу области A_2. То есть при данном соотношении параметров, домохозяйство кредитуется при малых значениях финансового состояния ($\hat{x} < \hat{x}_1$) и функционирует автономно при больших значениях финансового состояния ($\hat{x} \geqslant \hat{x}_1$).

Итого, при таком соотношении параметров:

$$\hat{M}(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{\delta\left(\hat{x}+\frac{S_0}{r_L-\gamma}\right)}{r_L+\frac{1}{\theta}}, \text{ при } \hat{x} \leqslant \frac{\delta S_0}{\left(r_L+\frac{1}{\theta}-\delta\right)\left(r_L-\gamma\right)} \\ \hat{x}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

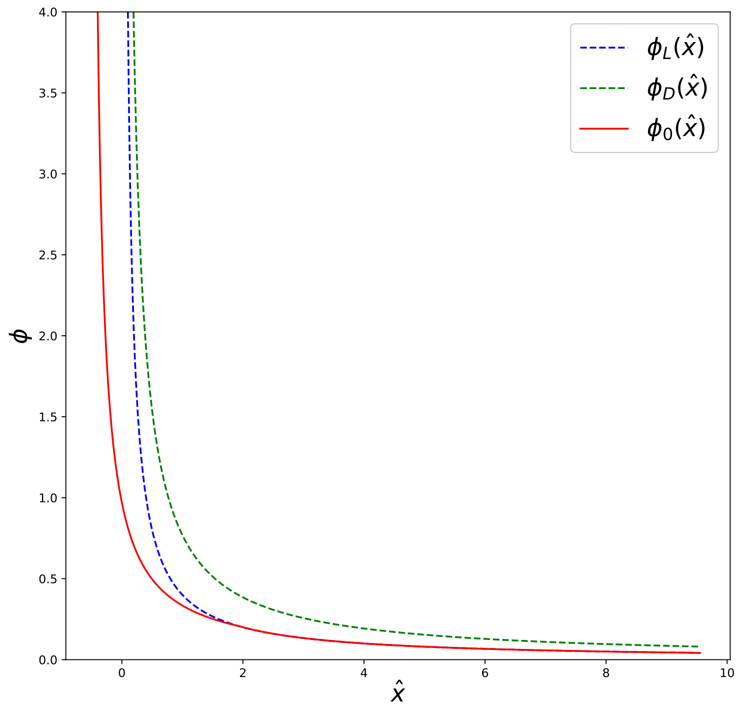

Рис. 2: $\phi_0(\hat{x})$ при чередовании автономного режима и режима кредитования

5.3 Сбережение + автономный режим + кредитование

Рассмотрим теперь следующее соотношение параметров:

$$r_L - \gamma < \delta < r_D + \frac{1}{\theta}.$$

Как и в предыдущем пункте, при малых значениях фазовой переменной $\hat{x}(\hat{x} \leqslant \hat{x}_1)$ оптимальное значение сопряжённой переменной определяется, как гипербола $\phi_0(\hat{x})$ $\left(\text{и оптимальное управление - } \hat{M}(\hat{x}) = \frac{1}{\phi_0(\hat{x})\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)}\right)$.

В точке $(\hat{x}_1, \phi_1) = \left(\frac{\delta S_0}{\left(r_L+\frac{1}{\theta}-\delta\right)\left(r_L-\gamma\right)}, \frac{(r_L-\gamma)\left(r_L+\frac{1}{\theta}-\delta\right)}{\delta S_0\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)}\right)$ траектория $(\hat{x}, \phi)$ попадает на границу областей A_1 и A_3. В области A_3 вследствие того, что $\hat{x}_1 > \frac{S_0}{\gamma+\frac{1}{\theta}}$, получаем $\dot{\hat{x}} < 0, \dot{\phi} > 0$. Из-за этого какое-то время траектория может оставаться на границе областей, переход в область A_3 перейдёт лишь при

$$\frac{d\phi}{d\hat{x}} = \frac{\phi(\delta+\gamma-r_D)}{S_0 - \left(\gamma+\frac{1}{\theta}\right)\hat{x}} > \frac{d\phi_L(\hat{x})}{d\hat{x}} \Leftrightarrow \hat{x} > \frac{S_0}{r_D + \frac{1}{\theta} - \delta}.$$

Значит, траектория перейдёт с границы в область A_3 в точке

$$\hat{x}_L = \max\left\{\hat{x}_1, \frac{S_0}{r_D+\frac{1}{\theta}-\delta}\right\} = \max\left\{\frac{\delta S_0}{\left(r_L+\frac{1}{\theta}-\delta\right)\left(r_L-\gamma\right)}, \frac{S_0}{r_D+\frac{1}{\theta}-\delta}\right\}$$

При дальнейшем подсчёте траектории в обратном времени, получаем, что оптимальное управление $\hat{M}(\hat{x}) = \hat{x}$, а оптимальное значение сопряжённой переменной определяется из уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\phi(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\phi(\delta+\gamma-r_D)}{S_0-\left(\gamma+\frac{1}{\theta}\right)\hat{x}}, \\ \phi(\hat{x}_L) = \frac{1}{\hat{x}_L\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)}. \end{cases}$$

Получаем:

$$\phi_A(\hat{x}) = \left(\frac{\hat{x} - \frac{S_0}{\gamma+\frac{1}{\theta}}}{\hat{x}_L - \frac{S_0}{\gamma+\frac{1}{\theta}}}\right)^{\frac{r_D-\gamma-\delta}{\gamma+\frac{1}{\theta}}} \frac{1}{\hat{x}_L\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)}.$$

$\phi_A(\hat{x})$ (как решение данного ОДУ) будет лежать выше кривой $\phi_L(\hat{x})$, при этом из ограничений на параметры следует:

$$\frac{r_D - \gamma\delta}{\gamma+\frac{1}{\theta}} > -1,$$

а значит уравнение:

$$\phi_A(\hat{x}) = \left(\frac{\hat{x} - \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}}{\hat{x}_L - \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}} \right)^{\frac{r_D - \gamma - \delta}{\gamma + \frac{1}{\theta}}} \frac{1}{\hat{x}_L \left(r_L + \frac{1}{\theta} \right)} = \phi_D(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{x} \left(r_D + \frac{1}{\theta} \right)} \tag{5.1}$$

имеет решение на интервале $[\hat{x}_L, +\infty)$. Обозначим минимальное из подобных решений $\hat{x}_R$, оно определяет точку, в которой траектория попадёт на границу областей A_2, A_3:

$$(\hat{x}_R, \phi_R) = \left(\hat{x}_R, \frac{1}{\hat{x}_R \left(r_D + \frac{1}{\theta} \right)} \right).$$

В области сбережения A_2 фазовый портрет имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = S_0 + (r_D - \gamma)\hat{x} - \frac{1}{\phi}, \\ \dot{\phi} = (\delta + \gamma - r_D)\phi. \end{cases}$$

Из того, что $\hat{x}_R > \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$ и условий на параметры следует, что при дальнейшем расчёте нашей траектории будут выполняться условия $\dot{\phi} > 0, \dot{\hat{x}} < 0$, а это значит, что при $\hat{x} > \hat{x}_R$ будет существовать единственная $\phi(\hat{x})$, являющаяся решением ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\hat{x}} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\hat{x}}} = \frac{(\delta + \gamma - r_D)\phi}{S_0 + (r_D - \gamma) - \frac{1}{\phi}}, \\ \phi(\hat{x}_R) = \phi_R. \end{cases}$$

Но выписать в явном виде решение проблематично, поэтому найдём решение $\hat{x}(\phi)$. Она будет иметь вид:

$$\hat{x}(\phi) = -\frac{S_0}{r_D - \gamma} + \frac{1}{\delta\phi} + \left(\hat{x}_R + \frac{S_0}{r_D - \gamma} - \frac{1}{\delta\phi_R} \right) \left(\frac{\phi}{\phi_R} \right)^{\frac{r_D - \gamma}{\delta + \gamma - r_D}}.$$

Тогда с учётом сущетвования и единственности $\phi(\hat{x})\ \forall \hat{x} \geqslant \hat{x}_R$, а также формулы управления в области сбережения $\left(\hat{M}(\hat{x}, \phi) = \frac{1}{\phi \left(r_D + \frac{1}{\theta} \right)} \right)$, получаем управление, как решение уравнения:

$$\hat{x} = -\frac{S_0}{r_D - \gamma} + \frac{\left(r_D + \frac{1}{\theta} \right) \hat{M}}{\delta} + \left(\hat{x}_2 + \frac{S_0}{r_D - \gamma} - \frac{\hat{x}_2 \left(r_D + \frac{1}{\theta} \right)}{\delta} \right) \left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{M}} \right)^{\frac{r_D - \gamma}{\delta + \gamma - r_D}}. \tag{5.2}$$

Обозначим полученное управление $\hat{M}_1(\hat{x})$.

Полученное управление выглядит так:

$$\hat{M}(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{\delta\left(\hat{x}+\frac{S_0}{r_L-\gamma}\right)}{r_L+\frac{1}{\theta}}, \text{ при } \hat{x} < \frac{\delta S_0}{\left(r_L+\frac{1}{\theta}-\delta\right)\left(r_L-\gamma\right)} \\ \hat{x}, \text{ при } \hat{x} \in \left[\frac{\delta S_0}{\left(r_L+\frac{1}{\theta}-\delta\right)\left(r_L-\gamma\right)}, \hat{x}_R\right] \\ \hat{M}_1(\hat{x}), \text{ при } \hat{x} > \hat{x}_R \text{ (где } \hat{x}_R - \text{ решение (5.1)).} \end{cases}$$

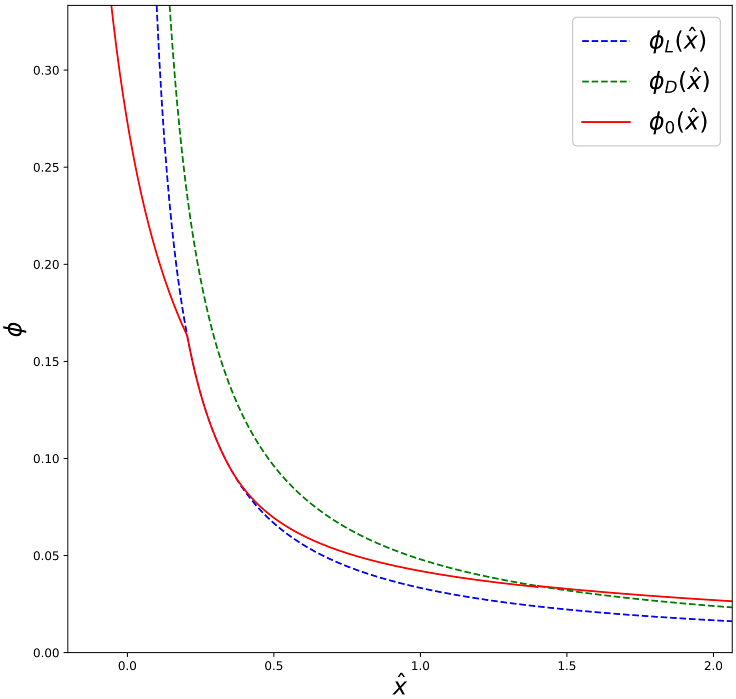

Рис. 3: $\phi_0(\hat{x})$ при чередовании режимов сбережения, автономного режима и режима кредитования

5.4 Сбережение + кредитование

Пусть $r_D - \gamma < \delta < r_L - \gamma$.

Из анализа фазового портрета выходит, что если в какой-то момент $(\hat{x}, \phi) \in A_1$ и $\phi < \frac{1}{S_0 + (r_L - \gamma)\hat{x}}$, то за конечное время потребитель обанкротится. Поэтому в точке $\hat{x} = \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$ минимальное возможное значение сопряжённой переменной $\phi = \frac{\gamma + \frac{1}{\theta}}{S_0\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}$, и при любых $\hat{x} < \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$ должно быть выполнено условие $\phi > \frac{1}{S_0 + (r_L - \gamma)\hat{x}}$. Тогда наименьшее значение ϕ при $\hat{x} < \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$ (соответствующее наибольшему значению управления, а значит, и функционала) определяется, как решение ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\phi} = \frac{S_0 + (r_L - \gamma) - \frac{1}{\phi}}{(\delta + \gamma - r_L)\phi}, \\ \hat{x}\left(\frac{\gamma + \frac{1}{\theta}}{S_0\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}\right) = \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}. \end{cases}$$

Получается кривая:

$$\hat{x}(\phi) = -\frac{S_0}{r_L - \gamma} + \frac{1}{\delta\phi} + \left(\frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} + \frac{S_0}{r_L - \gamma} - \frac{S_0\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}{\delta\left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)}\right)\left(\frac{\delta\phi\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}{\gamma + \frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{r_L - \gamma}{\delta + \gamma - r_L}}.$$

Заметим, что в данном случае $\phi(\hat{x})$ определяется неоднозначно (каждому $\hat{x}$ соответствуют два значения ϕ). При этом для минимального значения ϕ оказывается $\phi < \frac{1}{S_0 + (r_L - \gamma)\hat{x}}$, что означало бы скорое банкротство, поэтому будем брать максимальное значение ϕ, т.е. управление в этом случае будем искать, как минимальное решение уравнения:

$$\hat{x} = -\frac{S_0}{r_L - \gamma} + \frac{\hat{M}}{\delta\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)} + \left(\frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} + \frac{S_0}{r_L - \gamma} - \frac{S_0\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}{\delta\left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)}\right)\left(\frac{\delta}{\left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)\hat{M}}\right)^{\frac{r_L - \gamma}{\delta + \gamma - r_L}}. \quad (5.3)$$

Минимальное решение этого уравнения обозначим $\hat{M}_2(\hat{x})$, оно и будет определять управление при $\hat{x} \leqslant \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$. Продолжая траекторию вверх из точки $\left(\frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}, \frac{\gamma + \frac{1}{\theta}}{S_0\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)}\right)$ до точки $\left(\frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}, \frac{\gamma + \frac{1}{\theta}}{S_0\left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)}\right)$ попадаем в область A_2. Там, вновь решая ОДУ, получаем:

$$\hat{x}(\phi) = -\frac{S_0}{r_D - \gamma} + \frac{1}{\delta\phi} + \left(\frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} + \frac{S_0}{r_D - \gamma} - \frac{S_0\left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)}{\delta\left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)}\right)\left(\frac{\delta\phi\left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)}{\gamma + \frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{r_D - \gamma}{\delta + \gamma - r_D}}.$$

Вновь получаем два варианта выбора $\phi(\hat{x})$, но здесь в отличие от случая $\hat{x} \leqslant \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$ выгоднее брать минимальное значение ϕ, т.е. максимальное значение $\hat{M}$, так как в данном случае мы не столкнемся с проблемой возможного банкротства, но при этом увеличим потребление. Итак, пусть $\hat{M}_3(\hat{x})$ максимальное решение уравнения:

$$\hat{x} = -\frac{S_0}{r_D - \gamma} + \frac{\hat{M}}{\delta\left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)} + \left(\frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} + \frac{S_0}{r_D - \gamma} - \frac{S_0\left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)}{\delta\left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)}\right)\left(\frac{\delta}{\left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)\hat{M}}\right)^{\frac{r_D - \gamma}{\delta + \gamma - r_D}}. \quad (5.4)$$

Получили управление:

$$\hat{M}(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{M}_2(\hat{x}), \text{ при } \hat{x} \leqslant \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} \\ \hat{M}_3(\hat{x}), \text{ при } \hat{x} > \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}. \end{cases}$$

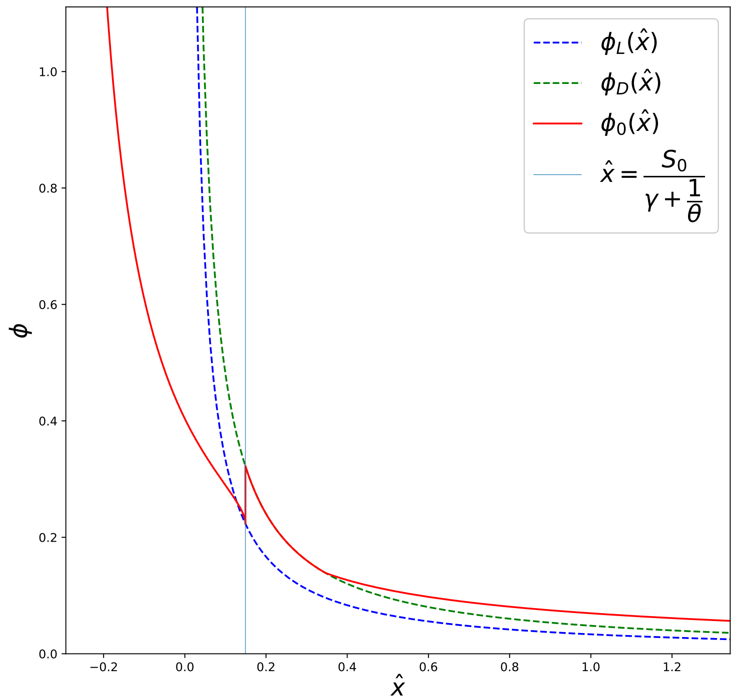

Рис. 4: $\phi_0(\hat{x})$ при чередовании режимов сбережения и кредитования

6 Анализ результатов

Получили, что при различных параметрах оптимальное управление выглядит следующим образом:

- если $\delta \geqslant r_L + \frac{1}{\theta}$, то

$$\hat{M}(\hat{x}) = \frac{\delta\left(\hat{x} + \frac{S_0}{r_L - \gamma}\right)}{r_L + \frac{1}{\theta}} \quad \forall \hat{x} > -\frac{S_0}{r_L - \gamma};$$

- если $\begin{cases} r_D + \frac{1}{\theta} < \delta < r_L + \frac{1}{\theta}, \\ \delta > r_L - \gamma. \end{cases}$, то

$$\hat{M}(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{\delta\left(\hat{x} + \frac{S_0}{r_L - \gamma}\right)}{r_L + \frac{1}{\theta}}, \text{ при } \hat{x} \leqslant \frac{\delta S_0}{\left(r_L + \frac{1}{\theta} - \delta\right)\left(r_L - \gamma\right)} \\ \hat{x}, \text{ иначе;} \end{cases}$$

- если $r_L - \gamma < \delta < r_D + \frac{1}{\theta}$, то

$$\hat{M}(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{\delta\left(\hat{x} + \frac{S_0}{r_L - \gamma}\right)}{r_L + \frac{1}{\theta}}, \text{ при } \hat{x} < \frac{\delta S_0}{\left(r_L + \frac{1}{\theta} - \delta\right)\left(r_L - \gamma\right)} \\ \hat{x}, \text{ при } \hat{x} \in \left[\frac{\delta S_0}{\left(r_L + \frac{1}{\theta} - \delta\right)\left(r_L - \gamma\right)}, \hat{x}_R\right] \\ \hat{M}_1(\hat{x}), \text{ при } \hat{x} > \hat{x}_R, \end{cases}$$

  где $\hat{x}_R$ - решение (5.1), а $\hat{M}_1(\hat{x})$ - решение (5.2)

- если $r_D - \gamma < \delta < r_L - \gamma$, то

$$\hat{M}(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{M}_2(\hat{x}), \text{ при } \hat{x} \leqslant \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}} \\ \hat{M}_3(\hat{x}), \text{ при } \hat{x} > \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}, \end{cases}$$

  где $\hat{M}_2(\hat{x})$ - минимальное решение (5.3), а $\hat{M}_3(\hat{x})$ - максимальное решение (5.4).

Как можно заметить из вида получившегося управления если $\delta \geqslant r_L + \frac{1}{\theta}$, то для домохозяйства характерно кредитование, причём с течением времени финансовое состояние домохозяйства стремится к предельному посильному количеству долгов.

Если начать уменьшать параметр δ так, что соотношения на параметры будут иметь вид $\begin{cases} r_D + \frac{1}{\theta} < \delta < r_L + \frac{1}{\theta}, \\ \delta > r_L - \gamma, \end{cases}$ то домохозяйство при достаточно хорошем финансовом состоянии будет функционировать автономно, но с течением времени его финансовое состояние будет ухудшаться, и в конечном итоге домохозяйство начнёт кредитоваться и так же приблизится к предельному количеству посильных долгов.

Третий тип - домохозяйства, для которых выполнены условия $r_L - \gamma < \delta < r_D + \frac{1}{\theta}$. Они отличаются от первых двух тем, что при достаточно хорошем финансовом состоянии они сберегают деньги в форме депозитов, но постепенно их финансовое состояние тоже ухудшается, они переходят сперва в режим автономного функционирования, после чего и в режим кредитования, так же, как и предыдущие, приближаясь к предельному количеству долгов.

И, наконец четвертый тип - домохозяйства, для которых $r_D - \gamma < \delta < r_L - \gamma$. Он специфичен тем, что для него существует значение финансового состояния $\left(\hat{x} = \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}\right)$ такое, что при большем финансовом состоянии домохозяйство сберегает деньги, но постепенно расходует средства, приближаясь к показателю $\hat{x} = \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$, при меньших значениях финансового состояния домохозяйство наоборот кредитуется, при этом постепенно расплачиваясь с долгами и приближаясь к тому же показателю. Отметим, что при любом начальном значении $\hat{x}$ домохозяйство за конечное время достигнет этой "золотой середины" $\hat{x} = \frac{S_0}{\gamma + \frac{1}{\theta}}$ за конечное время, и достигнув, перейдёт в автономный режим.

Список литературы

[1] *М.В.Тарасенко, Н.В.Трусов, А.А.Шананин* Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России.//Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021 г., том 61, № 6, с. 1034–1056

[2] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ // М.: Наука, 1988. 280 с.

[3] *Bardi M.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations, 1997 г.

[4] *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными, 2003 г.

[5] https://fedresurs.ru/news/d569ceb1-1f1a-44dd-bec2-e11c8eb5ddac

[6] *Komlos J.* A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1967. V. 18. P. 217–229.

[7] *Коддингтон Э. А.*, Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.

[8] [Seierstad, A.] A Maximum Principle for Smooth Infinite Horizon Optimal Control Problems with State Constraints and with Terminal Constraints at Infinity. // Open Journal of Optimization, 2015, V. 4, P. 100-130.