Лабораторная работа №4

Численные методы, продолжение
Интеграция с языками `C/C++`

Вариант 1

При выполнении заданий 1-2 допускается использование символьных вычислений для получения решений дифференциальных уравнений, соответствующих аналитическому решению, для остальных заданий допускается использование стандартных библиотек языков C/C++, в том числе — комплексной арифметики.

1 [7]. Дана следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} &u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) - \mu \cdot u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in [0,1]\times[0,1], \\ &u(x,0) \equiv u(x,1) \equiv \xi(x), \qquad u(0,y) \equiv u(1,y) \equiv \eta(y), \end{aligned} \tag{1}$$

$\mu > 0$, $f \in C^1([0,1]\times[0,1])$, $\xi, \eta \in C^1([0,1])$, $\xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1)$.

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\begin{aligned} &\frac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \frac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = \varphi_{k,\ell}, \\ &y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, \quad y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, \quad k = \overline{1, M-1}, \ell = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $h_x = 1/M$, $h_y = 1/N$, значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для $x_k = k/M$, $y_\ell = \ell/N$, $\varphi_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell)$, $\xi_k = \xi(x_k)$, $\eta_\ell = \eta(y_\ell)$.

- Реализовать численный метод и подобрать примеры

  Написать функцию `solveDirichlet(fHandle,xiHandle,etaHandle,mu,M,N)`, возвращающую матрицу размера $M \times N$ с численным решением задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи БПФ. При этом `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` соответствуют `function handle` функций $f(x,y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$, а `mu`, `M` и `N` определяют значения параметров μ, M, N. Реализовать в `Matlab` несколько функций общего вида для подстановки в `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` (при соблюдении ограничений на них, упомянутых выше).

- Проверить корректность работы численного алгоритма

  Для функции $f(x,y)$, указанной на стр. 7 данного файла, реализовать в `Matlab` функцию `fGiven`, так чтобы можно было взять `fHandle=@fGiven`.

  Для этой конкретной функции $f(x,y)$ решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая, что $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$, взять $u(x,y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0) = u_1(1) = u_1^0$ и $u_2(0) = u_2(1) = u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции `uAnalytical(xMat,yMat,u1Zero,u2Zero,mu)`, где `xMat` и `yMat` соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y, а `u1Zero`, `u2Zero` и `mu` дают значения скалярных параметров u_1^0, u_2^0 и μ, соответственно.

  Написать функцию `uNumerical(u1Zero,u2Zero,mu,M,N)`, которая передает на вход функции `solveDirichlet` параметры

  - `fHandle=@fGiven`,
  - `xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu)`,
  - `etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)`

  и возвращает результат работы `solveDirichlet` (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналитического решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N, нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

2 [4] ($\star$). Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе.
3. Вычисление точного аналитического решения для соответствующей конкретной функции $f(x,y)$, указанной на стр. 4. При этом с полными промежуточными выкладками должен быть изложен процесс получения аналитического решения, однако окончательный ответ, представляющий сумму решений соответствующих дифференциальных уравнений, может быть выписан в виде, включающем константы, зависящие от u_1^0 и u_2^0, не указывая в отчете эту зависимость явно (т.к. может оказаться, что полная формула для решения очень длинная, соответственно, допускаются сокращения этой формулы).
4. Для данной конкретной функции $f(x,y)$ привести несколько иллюстраций, соответствующих аналитическому и численным решениям, а также разности между этими решениями при разных значениях μ, M, N, u_1^0 и u_2^0.
5. Привести иллюстрации, соответствующие численным решениям задачи для некоторых произвольных функций $f(x,y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ (при ограничениях, указанных выше), так что $u(x,y)$ не обязательно представима в виде суммы $u_1(x) + u_2(y)$. Иллюстрации должны быть приведены при разных значениях μ, M и N.
6. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

3 [2]. Реализовать mex-функцию `[x1 x2 D] = quadsolve(A, B, C)` на языке `C`, которая решает квадратное уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$, возвращает два его корня и дискриминант D. Все числа комплексные. Выходной аргумент D может быть не указан. Если выходных аргументов меньше двух или больше трёх, функция должна выдавать ошибку. Входные параметры A, B, C могут быть векторами или матрицами одинакового размера, тогда решение ищется поэлементно, а выходные аргументы будут матрицами того же размера. Вставить проверку правильности полученного ответа средствами `Matlab`.

4 [2]. Реализовать функции `B = inv_matlab(A)`, `B = inv_c(A)`, реализующие обращение матрицы методом Гаусса, с использованием простейших средств Матлаба (циклы; оператором двоеточия пользоваться нельзя) и с использованием `C` (mex-функция).

5 [1]. Сравнить точность функций `inv`, `linsolve` (стандартные матлабовские функции), `inv_matlab`, `inv_c` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

6 [1]. Сравнить быстродействие функций `inv`, `linsolve`, `inv_matlab`, `inv_c` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

7 [1] ($\star$). Обозначим $T_s(n)$ время работы методов из предыдущего пункта на матрицах порядка n ($s =$`inv`, `inv_c`, ...). Написать функцию, которая, используя линейную регрессию, аппроксимирует эти функции с помощью многочленов степени не выше заданной.

Лабораторная работа №4

Численные методы, продолжение
Интеграция с языками C/C++

Вариант 2

При выполнении заданий 1-2 допускается использование символьных вычислений для получения решений дифференциальных уравнений, соответствующих аналитическому решению, для остальных заданий допускается использование стандартных библиотек языков C/C++, в том числе — комплексной арифметики.

1 [7]. Дана следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} &u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) - \mu \cdot u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ &u(x,0) \equiv u(x,1) \equiv \xi(x), \qquad u(0,y) \equiv u(1,y) \equiv \eta(y), \end{aligned} \tag{1}$$

$\mu > 0$, $f \in C^1([0,1] \times [0,1])$, $\xi, \eta \in C^1([0,1])$, $\xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1)$.

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\begin{aligned} &\frac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \frac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = \varphi_{k,\ell}, \\ &y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, \quad y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, \quad k = \overline{1, M-1}, \ell = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $h_x = 1/M$, $h_y = 1/N$, значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для $x_k = k/M$, $y_\ell = \ell/N$, $\varphi_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell)$, $\xi_k = \xi(x_k)$, $\eta_\ell = \eta(y_\ell)$.

- Реализовать численный метод и подобрать примеры

  Написать функцию `solveDirichlet(fHandle,xiHandle,etaHandle,mu,M,N)`, возвращающую матрицу размера $M \times N$ с численным решением задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи БПФ. При этом `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` соответствуют `function handle` функций $f(x,y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$, а `mu`, `M` и `N` определяют значения параметров μ, M, N. Реализовать в `Matlab` несколько функций общего вида для подстановки в `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` (при соблюдении ограничений на них, упомянутых выше).

- Проверить корректность работы численного алгоритма

  Для функции $f(x,y)$, указанной на стр. 7 данного файла, реализовать в `Matlab` функцию `fGiven`, так чтобы можно было взять `fHandle=@fGiven`.

  Для этой конкретной функции $f(x,y)$ решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая, что $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$, взять $u(x,y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0) = u_1(1) = u_1^0$ и $u_2(0) = u_2(1) = u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции `uAnalytical(xMat,yMat,u1Zero,u2Zero,mu)`, где `xMat` и `yMat` соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y, а `u1Zero`, `u2Zero` и `mu` дают значения скалярных параметров u_1^0, u_2^0 и μ, соответственно.

  Написать функцию `uNumerical(u1Zero,u2Zero,mu,M,N)`, которая передает на вход функции `solveDirichlet` параметры

  - `fHandle=@fGiven`,
  - `xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu)`,
  - `etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)`

  и возвращает результат работы `solveDirichlet` (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналитического решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N, нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

2 [4] ($\star$). Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе.
3. Вычисление точного аналитического решения для соответствующей конкретной функции $f(x,y)$, указанной на стр. 4. При этом с полными промежуточными выкладками должен быть изложен процесс получения аналитического решения, однако окончательный ответ, представляющий сумму решений соответствующих дифференциальных уравнений, может быть выписан в виде, включающем константы, зависящие от u_1^0 и u_2^0, не указывая в отчете эту зависимость явно (т.к. может оказаться, что полная формула для решения очень длинная, соответственно, допускаются сокращения этой формулы).
4. Для данной конкретной функции $f(x,y)$ привести несколько иллюстраций, соответствующих аналитическому и численным решениям, а также разности между этими решениями при разных значениях μ, M, N, u_1^0 и u_2^0.
5. Привести иллюстрации, соответствующие численным решениям задачи для некоторых произвольных функций $f(x,y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ (при ограничениях, указанных выше), так что $u(x,y)$ не обязательно представима в виде суммы $u_1(x) + u_2(y)$. Иллюстрации должны быть приведены при разных значениях μ, M и N.
6. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

3 [2]. Реализовать mex-функцию `[x1 x2 x3] = cubesolve(A, B, C)` на языке `C`, которая решает кубическое уравнение $Ax^3 + Bx + C = 0$, возвращает три его корня. Все числа комплексные. Выходной аргумент `x3` может быть не указан. Если выходных аргументов меньше двух или больше трёх, функция должна выдавать ошибку. Входные параметры A, B, C могут быть векторами или матрицами одинакового размера, тогда решение ищется поэлементно, а выходные аргументы будут матрицами того же размера. Вставить проверку правильности полученного ответа средствами `Matlab`.

Указание. Формула для решения ищется через замену $x = w - \frac{B}{3Aw}$.

4 [2]. Реализовать mex-фунцию `[A, B, C, D] = createspline_c(x, f)`, рассчитывающую коэффициенты кубического сплайна по вектору значений функции f, заданных на узлах сетки x. Реализовать аналогичную функцию `[A, B, C, D] = createspline_m(x, f)` простейшими средствами `Matlab` (циклы; оператором двоеточия пользоваться нельзя).

5 [1]. Сравнить точность функций `interp1` (с ключом `spline`), `spline` (стандартные матлабовские функции), `createspline_c`, `createspline_m` для сеток различной длины, построив соответствующие графики.

6 [1]. Сравнить быстродействие функций `interp1`, `spline`, `createspline_c`, `createspline_m` для сеток различной размерности, построив соответствующие графики.

7 [1] ($\star$). Обозначим $T_s(n)$ время работы методов из предыдущего пункта на матрицах порядка n ($s =$`spline`, `createspline_c`, $\ldots$). Написать функцию, которая, используя линейную регрессию, аппроксимирует эти функции с помощью многочленов степени не выше заданной.

Лабораторная работа №4

Численные методы, продолжение
Интеграция с языками C/C++

Вариант 3

При выполнении заданий 1-2 допускается использование символьных вычислений для получения решений дифференциальных уравнений, соответствующих аналитическому решению, для остальных заданий допускается использование стандартных библиотек языков C/C++, в том числе — комплексной арифметики.

1 [7]. Дана следующая краевая задача:

$$\begin{array}{l} u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) - \mu \cdot u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ u(x,0) \equiv u(x,1) \equiv \xi(x), \qquad u(0,y) \equiv u(1,y) \equiv \eta(y), \end{array} \tag{1}$$

$\mu > 0$, $f \in C^1([0,1] \times [0,1])$, $\xi, \eta \in C^1([0,1])$, $\xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1)$.

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\begin{array}{l} \dfrac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \dfrac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = \varphi_{k,\ell}, \\ y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, \quad y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, \quad k = \overline{1, M-1}, \ell = \overline{1, N-1}. \end{array} \tag{2}$$

Здесь $h_x = 1/M$, $h_y = 1/N$, значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для $x_k = k/M$, $y_\ell = \ell/N$, $\varphi_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell)$, $\xi_k = \xi(x_k)$, $\eta_\ell = \eta(y_\ell)$.

- Реализовать численный метод и подобрать примеры

  Написать функцию `solveDirichlet(fHandle,xiHandle,etaHandle,mu,M,N)`, возвращающую матрицу размера $M \times N$ с численным решением задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи БПФ. При этом `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` соответствуют `function handle` функций $f(x,y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$, а `mu`, `M` и `N` определяют значения параметров μ, M, N. Реализовать в `Matlab` несколько функций общего вида для подстановки в `fHandle`, `xiHandle` и `etaHandle` (при соблюдении ограничений на них, упомянутых выше).

- Проверить корректность работы численного алгоритма

  Для функции $f(x,y)$, указанной на стр. 7 данного файла, реализовать в `Matlab` функцию `fGiven`, так чтобы можно было взять `fHandle=@fGiven`.

  Для этой конкретной функции $f(x,y)$ решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая, что $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$, взять $u(x,y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0) = u_1(1) = u_1^0$ и $u_2(0) = u_2(1) = u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции `uAnalytical(xMat,yMat,u1Zero,u2Zero,mu)`, где `xMat` и `yMat` соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y, а `u1Zero`, `u2Zero` и `mu` дают значения скалярных параметров u_1^0, u_2^0 и μ, соответственно.

  Написать функцию `uNumerical(u1Zero,u2Zero,mu,M,N)`, которая передает на вход функции `solveDirichlet` параметры

  – `fHandle=@fGiven`,
  – `xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu)`,
  – `etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)`

  и возвращает результат работы `solveDirichlet` (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналитического решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N, нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

2 [4] ($\star$). Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе.
3. Вычисление точного аналитического решения для соответствующей конкретной функции $f(x,y)$, указанной на стр. 4. При этом с полными промежуточными выкладками должен быть изложен процесс получения аналитического решения, однако окончательный ответ, представляющий сумму решений соответствующих дифференциальных уравнений, может быть выписан в виде, включающем константы, зависящие от u_1^0 и u_2^0, не указывая в отчете эту зависимость явно (т.к. может оказаться, что полная формула для решения очень длинная, соответственно, допускаются сокращения этой формулы).
4. Для данной конкретной функции $f(x,y)$ привести несколько иллюстраций, соответствующих аналитическому и численным решениям, а также разности между этими решениями при разных значениях μ, M, N, u_1^0 и u_2^0.
5. Привести иллюстрации, соответствующие численным решениям задачи для некоторых произвольных функций $f(x,y)$, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ (при ограничениях, указанных выше), так что $u(x,y)$ не обязательно представима в виде суммы $u_1(x) + u_2(y)$. Иллюстрации должны быть приведены при разных значениях μ, M и N.
6. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

3 [2]. Реализовать mex—функцию `[x1 x2 x3 x4] = biquadsolve(A, B, C)` на языке `C`, которая решает биквадратное уравнение $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$, возвращает четыре его корня. Все числа комплексные. Выходные аргументы `x3,x4` могут быть не указаны. Если выходных аргументов меньше двух или больше четырёх, функция должна выдавать ошибку. Входные параметры A, B, C могут быть векторами или матрицами одинакового размера, тогда решение ищется поэлементно, а выходные аргументы будут матрицами того же размера. Вставить проверку правильности полученного ответа средствами `Matlab`.

4 [2]. Реализовать mex-фунцию `[Q, R] = qr_c(A)`, рассчитывающую QR-разложение квадратной матрицы A методом Грама–Шмидта. Реализовать аналогичную функцию `[Q, R] = qr_m(A)` простейшими средствами `Matlab` (циклы; оператором двоеточия пользоваться нельзя).

5 [1]. Сравнить точность функций `qr` (стандартная матлабовская функция), `qr_c`, `qr_m` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

6 [1]. Сравнить быстродействие функций `qr`, `qr_c`, `qr_m` для матриц различной размерности, построив соответствующие графики.

7 [1] ($\star$). Обозначим $T_s(n)$ время работы методов из предыдущего пункта на матрицах порядка n ($s =$`qr`, `qr_c`, `qr_m`). Написать функцию, которая, используя линейную регрессию, аппроксимирует эти функции с помощью многочленов степени не выше заданной.

Наборы функций к заданию 1 о применении БПФ

1. Абрамова Варвара Владимировна: $f(x,y) = (2 - x^3)\cos(x) - 3ye^{-y} + 2\cos(2y)$
2. Авалиани Александр Малхазович: $f(x,y) = (4 - x^3)\sin(x) - 3ye^{4y} - \sin(2y)$
3. Ашабоков Аслан Нажмудинович: $f(x,y) = (1 - x)\sin(x) - 3y^2\sin(3y)$
4. Егоров Кирилл Юлианович: $f(x,y) = -x\sin(x) + (4 + y)e^{-2y}$
5. Зинченко Михаил Геннадьевич: $f(x,y) = \sin(5x) + 2x\cos(x) + (2 + y^3)\cos(2y)$
6. Касымов Алишер Бахытович: $f(x,y) = xe^{-x}\cos(x) + (2 + y)\cos(2y)$
7. Кожевец Полина Юрьевна: $f(x,y) = 3x^3e^x\cos(x) + y\sin(4y) - \cos(y)$
8. Козлов Ярослав Олегович: $f(x,y) = e^{-3x}\sin(x) + 2y^2e^{5y}$
9. Копосов Андрей Александрович: $f(x,y) = (5 + x^2)e^{3x} - 2y\sin(5y)$
10. Кулешов Игорь Александрович: $f(x,y) = 2x^2\cos(2x) - y^3e^{-y}\sin(y)$
11. Наумова Арина Алексеевна: $f(x,y) = -3e^{3x}\sin(2x) + (1 - y^2)e^y$
12. Новиков Сергей Константинович: $f(x,y) = 2x^2e^{2x} + ye^{3y}\cos(2y)$
13. Пак Инна Владимировна: $f(x,y) = e^{2x}\cos(3x) - y^2e^y$
14. Паршиков Мирон Вячеславович: $f(x,y) = 3x\cos(6x) + 2e^{-2y}\sin(3y)$
15. Садков Григорий Алексеевич: $f(x,y) = xe^{3x} + 2\cos(3x) + 2ye^y\sin(y)$