Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Построение множества достижимости

Студента 315 группы
И. А. Кулешова

Руководитель практикума
доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x + x\sin(x^2) - 2x^2\cos(x) = u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geqslant t_0$.

1. Необходимо написать в среде MatLab функцию `reachset(alpha,t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0$, $t \geqslant t_0$ рассчитывает приближенно множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции — два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).

2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha,t1,t2,N,filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha,t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \dfrac{(t_2 - t_1)i}{N}, i = 0, 1, \ldots, N$. Здесь $t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$, N — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранён в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множества достижимости от величины параметра α. Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчёте, должны быть доказаны.

2 Теоретические выкладки

Перепишем уравнение (1) в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - x_2 - 2x_1 - x_1\sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1). \end{cases} \tag{2}$$

Начальные услови примут вид: $x_1(0) = x_2(0) = 0$

Множеством достижимости $X(T, t_0, x^0)$ называется множество всех таких точек $x \in \mathbb{R}^2$, что существует такое измеримое управление u, что $\dot{\forall} t \in [t_0, T]$ $|u(t)| < \alpha$ и под действием управления u система (2) переходит за время $T - t_0$ из точки x^0 в точку x.

Существование управления, под действием которого система переходит в точку x за время τ эквивалентно существованию оптимального по быстродействию управления, переводящего систему в точку x за время $\tau_* \leqslant \tau$.

Тогда будем строить множество достижимости, решая задачу быстродействия из точ- ки $x_0 = (0,0)^T$ в каждую точку пространства $\mathbb{R}^2$.

Выпишем для этой задачи функцию Гамильтона–Понтрягина:

$$H(x, u, t, \psi) = x_2\psi_1 + (u - x_2 - 2x_1 - x_1\sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1))\psi_2 \tag{3}$$

и сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2(2 + \sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1^2) - 4x_1\cos(x_1) + 2x_1^2\sin(x_1)), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2. \end{cases} \tag{4}$$

Утверждение 1. *Пусть $\psi(\cdot)$– ненулевое решение сопряженной сиситемы. Тогда $\psi_2(\cdot)$ имееет конечное число нулей на $[t_0, T]$.*

Доказательство

Предположим противное: пусть множество нулей $\psi(\cdot)$ бесконечно. Так как оно содержится в компакте $[t_0, T]$, то оно имеет предельную точку $\tilde{t} \in [t_0, T]$. Тогда существует последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая что $t_i \in [t_0, T]$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, $t_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \tilde{t}$, $\psi_2(t_i) = 0$. Далее, по теореме Лагранжа для каждого i $\exists \tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$: $\dot{\psi}_2(\tau_i) = \frac{\psi_2(t_{i+1}) - \psi_2(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = 0$. При этом $\tau_i \to \tilde{t}$. Тогда, в силу непрерывности функций $\psi_2(\cdot)$ и $\dot{\psi}_2(\cdot)$, $\psi_2(\tilde{t}) = \dot{\psi}_2(\tilde{t}) = 0 \Rightarrow \psi_1(\tilde{t}) = 0$. Это значит, что $\psi \equiv 0$ на $[t_0, T]$. Следовательно, предположение было неверным и $\psi_2(\cdot)$ имеет конечное число нулей.

Принцип максимума Понтрягина [1] обеспечивает для оптимальной по быстродействию пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ существование функции $\psi(\cdot)$, такой что:

1. $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы (4);

2. Вектор-функция $\psi(\cdot)$ не является тривиальной.
   Так как система (4) является линейной однородной, то это эквивалентно условию $\forall t \in [t_0, T]$ $\psi(t) \neq 0$;

3. Выполнено условие максимума, т.е.

$$\dot{\forall} t \in [t_0, T] \ H(x(t), u(t), t, \psi(t)) = \max_{|v|<\alpha} H(x(t), v, t, \psi(t)); \tag{5}$$

4. Вдоль оптимальной траектории функция Гамильтона–Понтрягина постоянна и неотрицательна, т.е

$$\dot{\forall} t \in [t_0, T] \ \max_{|v|<\alpha} H(x(t), v, t, \psi(t)) = M(x(t), v, t, \psi(t)) \geqslant 0;$$

Следовательно, мы получаем, что всякое измеримое оптимальное по быстродействию управление эквивалентно (то есть равно почти всюду) кусочно непрерывному управлению

$$u(t) = \begin{cases} \alpha & \psi_2(t) > 0, \\ [-\alpha, \alpha] & \psi_2(t) = 0, \\ -\alpha & \psi_2(t) < 0. \end{cases}$$

Из утверждения 1 следует, что особый режим в данной задаче не реализуется.
Сформулируем теорему о том, как соотносятся нули x_2 и ψ_2.

Теорема 1. *Пусть измеримое управление $u(\cdot)$ удовлентворяет принципу маусимума Понтрягина, $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot))$– соответствующая ему траектория, а $\psi(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot))$ — решение сопряженной системы на $[t_0, T]$. Пусть τ_1, τ_2 — такие моменты, что $t_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant T$. Тогда справедливы следующие четыре утверждения:*

1. *если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) = 0$, то $x_2(\tau_2) = 0$;*
2. *если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) \neq 0$, то $x_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0$.*
3. *если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) = 0$, то $\psi_2(\tau_2) = 0$.*
4. *если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, то $\psi_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0$.*

Таким образом, при условии, что нули функции $x_2(\cdot)$ являются изолированными, они или совпадают с нулями функции $\psi_2(\cdot)$ или никакой из нулей функции $x_2(\cdot)$ не является нулем функции $\psi_2(\cdot)$. В таком случае, нули $x_2(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ чередуются.

Доказательство

1. Пусть $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$. Так как $\forall t \in [t_0, T]$

   $$M(x(0), \psi(0)) = M(x(t), \psi(t)) = x_2\psi_1 - (x_2 + 2x_1 + x_1 \sin(x_1^2) - 2x_1^2 \cos(x_1))\psi_2 + \alpha|\psi_2(t)| \geqslant 0,$$

   то

   $$\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi(\tau_2)x_2(\tau_2) \geqslant 0$$

   При этом $\psi_1(\tau_1) \neq 0, \psi_1(\tau_2) \neq 0$. Это означает, что $x_2(\tau_1) = 0 \Leftrightarrow x_2(\tau_2) = 0$.

2. Так как τ_1 и τ_2 — последовательные нули функции $\psi_2(\cdot)$, то $\psi_1(\tau_1)\psi_1(\tau_2) < 0$. Если $x_2(\psi_1) \neq 0$, то $x_2(\tau_1)x_2(\tau_2) < 0$. Тогда $x_2(\cdot)$ имеет нуль на интервале (τ_1, τ_2).

3. Пусть теперь $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(t) \neq 0$ на интервале (τ_1, τ_2) и $\psi_2(\tau_1) = 0$. Из пункта 1 следует, что $\psi_2(t) \neq 0$ на интервале (τ_1, τ_2). Значит, $x_2(\cdot) \in C^2$ на $[\tau_1, \tau_2]$ выполнено (в концевых точках берутся односторонние производные) и на $[\tau_1, \tau_2]$

   $$\frac{d}{dt}[\psi_1 x_2 + \psi_2 \dot{x_2}] = 0$$

   Отсюда

   $$\dot{x}_2(\tau_1)\psi_2(\tau_1) = \dot{x}_2(\tau_2)\psi_2(\tau_2) \tag{6}$$

   При этом $(x_2(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 \neq 0$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, так как иначе, в силу единственности решения задачи Коши (2), получаем $x_2(t) = 0 \; \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$. Так как $\psi_2(\tau_1) = 0$, то $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. Пусть, наконец, $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(t) \neq 0$ на интервале (τ_1, τ_2) и $\psi_2(\tau_1) \neq 0$. Тогда из 6 следует что $\psi_2(\tau_2) \neq 0$. Если теперь предположить, что $\psi_2(t)$ не обращается в нуль нигде на $[\tau_1, \tau_2]$, то из 6 получим $\dot{x}_2(\tau_1)x_2(\tau_2) > 0$, что невозможно, так как τ_1 и τ_2 — последовательные нули функции $x_2(\cdot)$.

Утверждение 2. *Для рассматриваемой задачи множество достижимости $X(T, t_0, x^0)$ монотонно по включению, то есть, если $T_1 \leqslant T_2$, то $X(T_1, t_0, x^0) \subseteq X(T_2, t_0, x^0)$.*

Доказательство

Пусть $x \in X(T_1, t_0, x^0)$. Тогда $\exists u(\cdot)$, такое что под действием управления $u(\cdot)$ автономная система (2) за время $T_1 - t_0$ переходит из точки $(0,0)^T$ в точку x. Введем на отрезке $[t_0, T_2]$ управление

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [t_0, t_0 + T_2 - T_1], \\ u(t) & t \in (t_0 + T_2 - T_1, T_2]. \end{cases}$$

Так как $x^0 = 0$, то под действием управления $\tilde{u}(\cdot)$ система (2), перейдет в точку x. Следовательно, $x \in X(T_2, t_0, x^0)$.

3 Ход решения

3.1 Алгоритм построения допустимых траекторий

Строить допустимые траектории будем из принципа максимума и теореме 1. Рассмотрим 2 случая поведения управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_1 - x_1 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1) + \alpha. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_1 - x_1 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1) - \alpha. \end{cases} \tag{8}$$

Систему (7) будем далее называть $(S+)$, а систему (8) — $(S-)$ Переключение между этими системами происходит в момент смены знака ψ_2. Поведение всей системы 2 описывается однозначно начальными значениями $\psi_1(0)$, $\psi_2(0)$, поэтому для построения множества достижимости мы могли бы перебирать начальные значения сопряженных переменных из $\mathbb{R}^2$, но это неэффективно.

Поэтому построим пробную траекторию по системе $(S+)$ до момента t^*, когда обнулится переменная x_2. Согласно теореме 1, если $\psi_2(0) \neq 0$, то для некоторого $\tau \in [0, t^*]$, будет верно $\psi(\tau) = 0$. Так как мы не уточняли $\psi(0)$, то можно положить $\psi_1(\tau) = 1$ при $\psi_2(\tau) = 0$ Таким образом мы можем перебрать значения $\tau \in [0, t^*]$ и выпускатьтраектории уже из точек $(x_1(\tau), x_2(\tau), 1, 0)$ со значением $u = -\alpha$, и интегрировать систему 2 до конечного момента времени T, переключаясь между системами $(S+)$ и $(S-)$. Аналогичныо выпустим траекторию по системе $(S-)$ до момента обнуления x_2, затем из точек, принадлежащих ей, выпустим траектории с начальными значениями фазовых и сопряженных переменных равными $(x_1(\tau), x_2(\tau), 1, 0)$ и управлением равным α.

Так как фазовые переменные могут менятся только по системам $(S+)$ и $(S-)$, критерий переключения между которыми мы знаем. Такой подход позволяет нам перебрать все возможные траектории.

3.2 Кривая переключений

Кривая переключений — это множество точек, в которых происходит переключения управления одной из расссматриваемых допустимых траекторий. Отметим, что две рассматриваемые траектории, выпущенные из начала координат и развивающиеся согласно одной из систем

$(S+)$,$(S-)$ до момента обнуления x_2, будут принадлежать кривой переключения. Остальные точки кривой переключений мы будем находить во время построения допустимых траекторий.

Из-за нелинейности системы (2) кривая переключений не будет симметрична. К тому же, кривую переключения очень сложно объединить в одну линию, поскольку количество переключений вдоль каждой траектории, строго говоря, не ограничено.

Полезность кривой переключения состоит в том, что она делит $\mathbb{R}^2$ на два подпространства, в одном из которых действует $(S+)$, а в другом — $(S-)$. Багодаря этому можно будет решить задачу в обратном времени.

3.3 Особые точки

Особая точка системы (2) — точка (x_1^*, x_2^*) такая, что $\dot{x}_1 = x_2^0 = 0$; $\dot{x}_2 = u - f(x_1^*, x_2^*) = 0$, т.е. попав в эту точку, система уже не сможет ее покинуть. В моем случае это значит, что нужно решить уравнение $\pm\alpha = x_2 + 2x_1 + x_1 \sin(x_1^2) - 2x_1^2 \cos(x_1)$. Так как уравнение нелинейное, то решать его мы будем численно, а устойчивость исследовать при помощи матрицы Якоби, которая имеет вид:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 + \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1^2) - 4x_1 \cos(x_1) + 2x_1^2 \sin(x_1) & 1 \end{bmatrix}$$

В каждой особой точке будем находить численно значения собственных векторов и по ним судить об устойчивости особой точки.

4 Результаты работы программы

4.1 Пример 1.

Параметры системы $\alpha = 1$, $T = 1$.

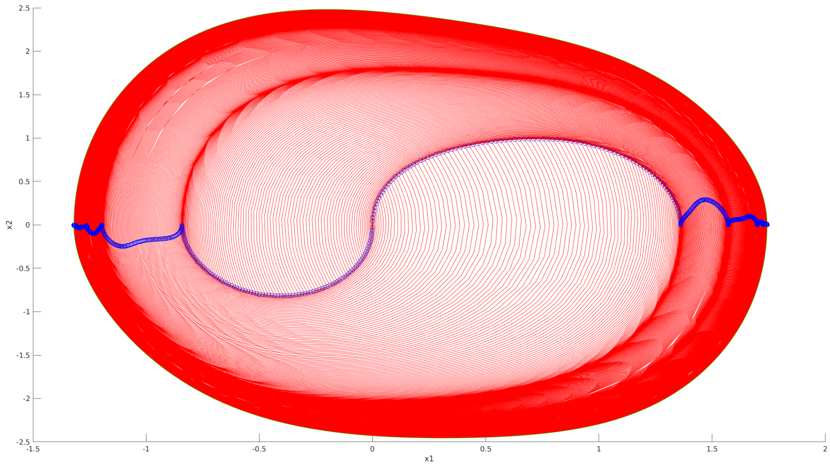
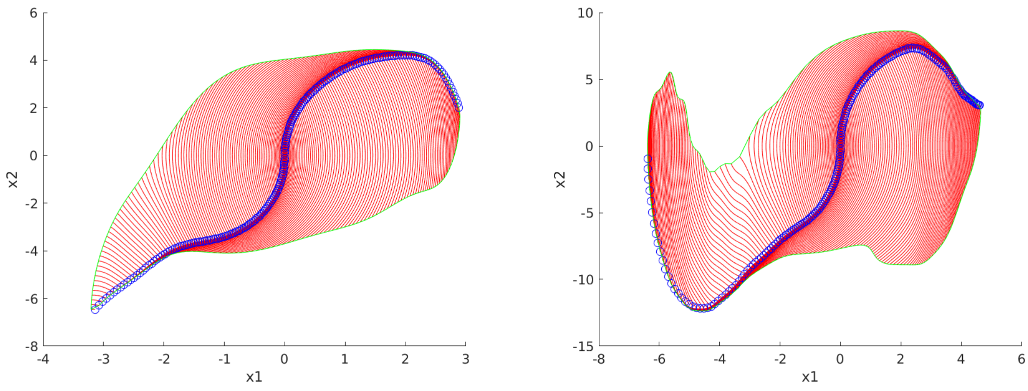


Рис. 1: Множество достижимости

4.2 Пример 2. Зависимости множества достижимости от значения α

Параметры системы $T = 1$.



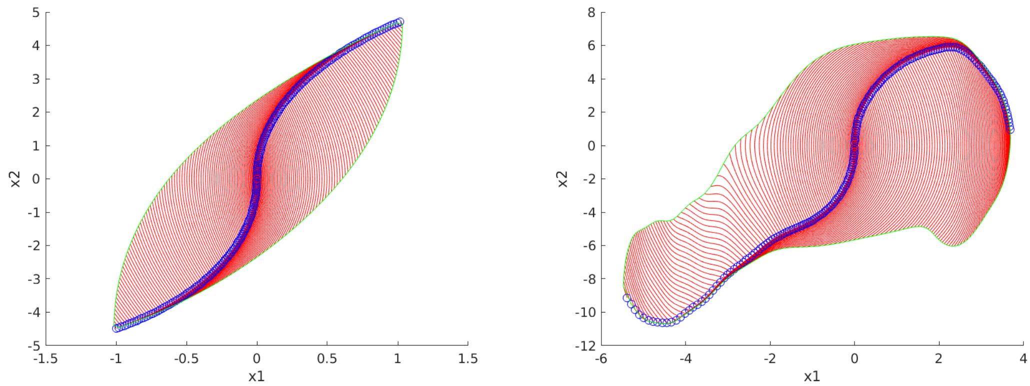
(a) $\alpha = 10$ (b) $\alpha = 10$

Рис. 2: Зависимости множества достижимости от значения α

Как можно заметить, форма границы множества достижимости значительно меняется в зависимости от параметров системы.

4.3 Пример 3. Зависимости множества достижимости от значения T

Параметры системы $\alpha = 15$.



(a) $T = 0.3$ (b) $T = 1$

Рис. 3: Зависимости множества достижимости от значения T

Ситуация, аналогичная примеру 2.

4.4 Пример 4. Особые точки

Параметры системы $\alpha = 3$, $T = 50$.

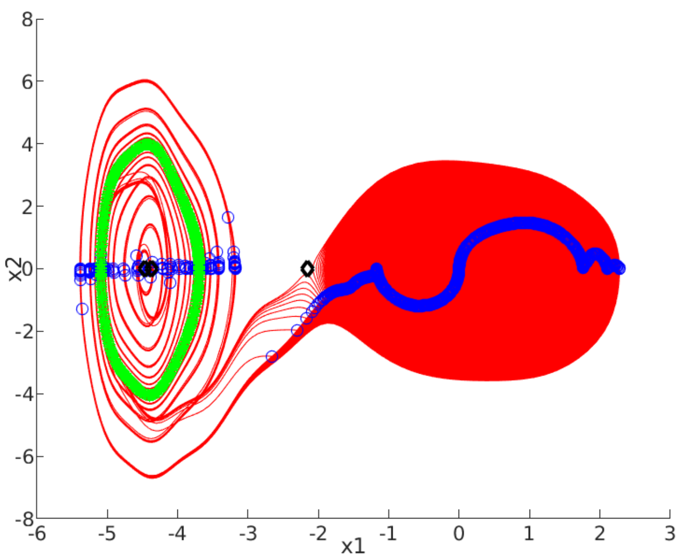


Рис. 4: Случай при наличии особых точек

Как было сказано ранее, данная система может иметь особые точки: $x_1^* = -4.46, x_1^* = -4.37, x_1^* = -2.16$.

Траектории системы расходятся рядом с точкой $x_1^* = -2.16$. Данный рисунок также показывает, что в некоторых случаях образуется предельный цикл, поскольку все особые точки в данном случае неустойчивы.

5 Заключение

В данной работе был исследован вопрос построения множеств достижимости для нелинейной системы (1). Допустимые траектории строились в соотвествии с принципом максимума и рядом вспомогательных утверждений, верных для систем вида (2). В результате работы мы получили иллюстрации поведения множества достижимости нелинейной системы и смогли продемонстрировать некоторые его осбенности.

6 Библиография

Список литературы

[1] И. В. Рублев *Лекции по оптимальному управлению*, 2019.