Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Задача управления ракетой»

Студент 315 группы
И. А. Кулешов

Руководитель практикума
доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1 Постановка задачи

Движение ракеты в ветрикальной плоскости над поверхностью планеты описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm + lu, \\ \dot{m} = -u. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, m — ее переменная масса , $g > 0$ — гравитационная постоянная, $l > 0$ — коэффициент, определяющий силу, действующую на ракету со стороны топлива, $u \in [0, u_{max}]$ – скорость подачи топлива ($u_{max} > 0$). Кроме того, известна масса корпуса ракеты без топлива $M > 0$.

Задача 1. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$ и начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. За счет выбора программного управления $u(t)$ необходимо перевести ракету на максимально возможную высоту в заданный момент времени $T > 0$.

Задача 2. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$ и начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. За счет выбора программного управления $u(t)$ необходимо перевести ракету на заданную высоту $H > 0$ в заданный момент времени $\mathrm{T} > 0$ так, чтобы минимизировать функционал:

$$J = \int_0^T u^4(t)\, dt. \tag{2}$$

Замечание. В начальный момент времени ракета находится на поверхности планеты и двигаться «вниз» не может (данный вариант движения можно не рассматривать).

Замечание. В каждый момент времени масса ракеты с топливом m не должна быть меньше массы ракеты без топлива M. В случае, если топоиво заканчивается, двигатель ракеты отключается.

2 Принцип максимума Понтрягина

Пусть задана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x,u), \qquad u(t) \in P, \\ f = (f_1(x,u), f_2(x,u), ..., f_n(x,u)), \qquad t \in [t_0, t_1], \\ J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x,u)\, d\tau \to \min_{u(\cdot)}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\mathcal{L}$ — гладкая функция, P — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, t_0, t_1 $x(t_0) \in \mathcal{X}_0$, $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$. $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — выпуклые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$.

В связи с наличием интегрального функционала, функция Гамильтона- Понтрягина будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{H}(x, \bar{\psi}, u) = \psi_0 \mathcal{L}(x,u) + \bar{\psi}^T f(x,u), \quad \bar{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

где $\bar{\psi}$ — вектор сопряженных переменных, удовлетворяющих сопряженой системе:

$$\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \tag{4}$$

Теорема 1.
Рассмотрим систему вида (3). *Пусть* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *- оптимальная пара, а* $u^*(t)$ *принадлежит классу кусочно - непрерывных функций,* $x^*(t_0) \in \mathcal{X}_0$, $x^*(t_1) \in \mathcal{X}_1$.
Тогда верно:

1. *Условие невырожденности:*

$$\begin{gathered} \psi_0 = const \leqslant 0, \\ \bar{\psi} - \textit{решение системы } (4), \quad \bar{\psi} \neq \bar{0}, \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \end{gathered}$$

2. *Принуцип максимума:*

$$\mathcal{H}(x^*(t), \bar{\psi}(t), u^*(t)) = \max_{v \in P} \mathcal{H}(x^*(t), \bar{\psi}(t), v) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1];$$

3. *Условия трансверсальности:*
   - Вектор $\psi^*(t_0^*)$ является внешней нормалью к множеству $\mathcal{X}_0$ в точке $x^*(t_0^*)$.
   - Вектор $\psi^*(t_1^*)$ является внешней нормалью к множеству $\mathcal{X}_1$ в точке $x^*(t_1^*)$.

В нашем случае $n = 2$, $m = 1$, $P = [0, u_{max}]$, $\mathcal{X}_0 = (0, m_0)$, $\mathcal{X}_1 = \mathbb{R} \times [M, m_0)$, $t_0 = 0$, $t_1 = T$. Приведем систему (1) к нормальному виду:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\dfrac{l+v}{m}, \\ \dot{m} = -u. \end{cases}$$

В таком случае, общая система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot v = -g + u\frac{l+v}{m}, & v(0) = 0, \\ \dot m = -u, & m(0) = m_0, \\ \dot\psi_1 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial v}, & \psi_1(0) = \psi_1^0, \\ \dot\psi_2 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial m}, & \psi_2(0) = \psi_2^0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь ψ_1^0, ψ_1^0 — параметры системы, по которым следует делать перебор, но это не эффективно, так как перебор будет вестись по всему $\mathbb{R}^2$. В связи с этой проблемой, мы сделаем перепараметризацию с помощью времен переключения между режимами управления.

В каждой из поставленных задач функция Гамильтона - Понтрягина будет иметь свой вид, так как в задачах различаются функционалы.

3 Задача 1. Аналитическое решение.

Для данной задачи нам необходимо минимизировать функционал:

$$J(u) = -\int\limits_0^T v(t)\,dt.$$

Функция Гамильтона - Понтрягина примет вид:

$$\mathcal{H} = -\psi_0 v + \psi_1(-g) + u(\tfrac{l+v}{m}\psi_1 - \psi_2).$$

Согласно принципу максимума выпишем вид оптимального управления:

$$u^* = \begin{cases} 0 & \psi_1\frac{l+v}{m} < \psi_2, \\ [0, u_{max}] & \psi_1\frac{l+v}{m} = \psi_2, \\ u_{max} & \psi_1\frac{l+v}{m} > \psi_2. \end{cases} \tag{6}$$

С учетом выписанной выше функции Гамильтона - Понтрягина, система дифференциальных уравнений для этой задачи:

$$\begin{cases} \dot v = -g + u\dfrac{l+v}{m}, & v(0) = 0, \\ \dot m = -u, & m(0) = m_0, \\ \dot\psi_1 = \psi_0 - \dfrac{\psi_1}{m}u, & \psi_1(0) = \psi_1^0, \\ \dot\psi_2 = \dfrac{\psi_1(l+v)u}{m^2}, & \psi_2(0) = \psi_2^0. \end{cases} \tag{7}$$

Из принципа максимума мы знаем, что константа ψ_0 имеет неположительное значение. Случай, когда $\psi_0 = 0$, называют *анормальным.* Когда $\psi_0 < 0$ называют *нормальным.* В этой ситуации, мы может отнормировать вектор сопряженных переменных, разделив на модуль ψ_0. Тем самым, нормальному случаю будет соответствовать $\psi_0 = -1$.

3.1 Общие выкладки для нормального и анормального случая.

В условии сказано, что в начальный момент времени ракета не может двигаться «вниз». Это означает, что $\dot{v} \geqslant 0$ при $t = 0$. Из системы (7) видно, что на u_{max} появляется ограничение снизу:

$$u_{max} \geqslant \frac{m_0 g}{l}. \tag{8}$$

Если $u_{max} < \frac{m_0 g}{l}$, то задача будет неразрешима.

Случай 1.
Исследуем какой вид принимает $v(t)$ при $u^* = u_{max}$.

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{u_{max}}{m} v - g + \dfrac{u_{max} l}{m}, & v(\bar{t}\,) = \tilde{v}, \\ \dot{m} = -u_{max}, & m(\bar{t}\,) = \tilde{m}. \end{cases} \tag{9}$$

Решаем:

$$\dot{v} = \frac{u_{max}}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)} v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{u_{max}}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)}\, dt, \quad \ln v = -\ln(\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)) + c_1,$$

$$v = c_1 \frac{1}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)}.$$

После подстановки полученного выражения в (9), варьирования $c_1(t)$ получим:

$$\begin{cases} v = \dfrac{t(l u_{max} - g\tilde{m})}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)} + \dfrac{g u_{max}(t - \bar{t}\,)^2}{2(\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,))} + \dfrac{c_2}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)}, \\ v(\bar{t}\,) = \tilde{v}. \end{cases}$$

Окончательно:

$$\begin{cases} v = \dfrac{\tilde{m}\tilde{v}}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)} + \dfrac{l u_{max} - g\tilde{m}}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)}(t - \bar{t}\,) + \dfrac{g u_{max}}{2(\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,))}(t - \bar{t}\,)^2, \\ m = \tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,). \end{cases} \tag{10}$$

Из первого уравнения можно заметить, что находится в этом режиме без переключения мы можем не дольше, чем $\Delta t = \frac{\tilde{m} - m_0}{u_{max}}$. Далее $u \equiv 0$, так как у нас закончится топливо.
Найдем зависимость $\psi_1(t)$. Рассмотри задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_0 - \dfrac{\psi_1}{m} u_{max}, & \psi_1(\bar{t}\,) = \psi_1^{\bar{t}}, \\ \dot{m} = -u_{max}, & m(\bar{t}\,) = \tilde{m}. \end{cases} \tag{11}$$

Рещением данного уравнения будет функция:

$$\psi_1 = \frac{\psi_0 \tilde{m} t - \frac{u_{max}(t - \bar{t})^2}{2} + (\psi_1^{\bar{t}} - \psi_0 \bar{t}\,)\tilde{m}}{\tilde{m} - u_{max}(t - \bar{t}\,)} \tag{12}$$

Рассмотрим случай, когда мы в начальный момент времени начнем движение с $u^* = u_{max}$ Из (10) и (8) видно, что v будет расти.

Случай 2.
Исследуем какой вид принимает $v(t)$ при $u^* = 0$.

$$\begin{cases} \dot{v} = -g, \quad v(\bar{t}\,) = \tilde{v}, \\ \dot{m} = 0, \quad\;\; m(\bar{t}\,) = \tilde{m}. \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} v = \tilde{v} - g(t - \bar{t}\,), \\ \\ m = \tilde{m}. \end{cases} \tag{14}$$

3.2 Нормальный случай

Перепишем систему (7), при $\psi_0 = -1$:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\dfrac{l+v}{m}, & v(0) = 0, \\ \dot{m} = -u, & m(0) = m_0, \\ \dot{\psi}_1 = -1 - \dfrac{\psi_1}{m}u, & \psi_1(0) = \psi_1^0, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1(l+v)u}{m^2}, & \psi_2(0) = \psi_2^0. \end{cases} \tag{15}$$

Найдем условия, при которых будет реализовываться особый режим. Из 6 видно, что особый режим может быть, если на положительном промежутке времени выполнено:

$$\frac{l+v}{m}\psi_1 = \psi_2.$$

Введем фунцию $\gamma = \dfrac{l+v}{m}\psi_1 - \psi_2$. Наличие особого режима означает, что $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$ и $\ddot{\gamma} = 0$. Посчитаем их:

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{l+v}{m}\psi_1 - \psi_2\Big) = \frac{((l+v)\dot{\psi}_1 + \dot{v}\psi_1)m - \dot{m}(l+v)\psi_1}{m^2} - \dot{\psi}_2,$$

Подставив произодные из (15) получим:

$$\begin{gathered} \dot{\gamma} = -\psi_1\frac{g}{m} - \frac{l+v}{m} = 0 \Rightarrow \psi_1 = -\frac{l+v}{g}, \\ \ddot{\gamma} = -\frac{2(l+v)}{m^2}\Big(\frac{mg}{l+v} - u^*\Big) = 0 \Rightarrow \tilde{u} = \frac{mg}{l+v}. \end{gathered} \tag{16}$$

Итак, мы нашли вид оптимального управления в особом режиме, но есть некоторые особенности, связанные со значением $\tilde{u}$.

Если $\tilde{u} > u_{max}$, то $\ddot{\gamma} < 0$ и γ будет убывать, что переведет нас в $u^* = 0$.
Если $\tilde{u} < 0$, то по аналогичным рассуждениям мы попадем в $u^* = u_{max}$.

Покажем, что мы не можем стартовать в нормальном случае в особом режиме. Запишем систему в начальный момент времени:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u^* \dfrac{l}{m}, & v(0) = 0, \\ \dot{m} = -u^*, & m(0) = m_0, \\ \dot{\psi}_1 = -1 - \dfrac{\psi_1}{m} u^*, & \psi_1(0) = \psi_1^0, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1 l u^*}{m^2}, & \psi_2(0) = \psi_2^0. \end{cases} \tag{17}$$

Из (16) получим: $\psi_1^0 = -\frac{l}{m}$, $\psi_2^0 = -\frac{l^2}{m_0}$. Подставим это в (17):

$$\dot{\psi}_1 = -1 + \frac{l}{m_0 g} u,$$
$$\dot{\psi}_2 = -\frac{l^2}{m_0^2 g} u.$$

Из 8 мы понимаем, что ψ_1 не убывает. Также видно, что ψ_2 убывает. Ранее было показано, что $v(t)$ возрастает в начальный момент. Впомним критерий особого режима для данного случая:

$$\frac{l+v}{m} \psi_1 = \psi_2$$

Это противорчит рассуждениям выше: левая часть возрастает, а правая- убывает. Следовательно, особый режим не реализуется в первый момент в нормальном режиме.

После этого мы можем сказать, что у нас есть только один вариант развития событий для нормального режима:

$$u = u_{max} \xrightarrow{t=\tau_1} \text{особый режим} \xrightarrow{t=\tau_2} u = 0.$$

3.3 Анормальный случай.

В анормальном случае $\psi_0 = 0$. Из условий трансверсальности на правом краю мы можем получить $\psi_1(T) = 0$, $\psi_2(T) < 0$. В связи с положительной однородностью вектора сопряженных переменных, можно положить $\psi_2 = -1$. Перепишем систему (7) в момент времени T:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u \dfrac{l+v}{m}, & v(T) \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{m} = -u, & m(T) \geqslant M, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\psi_1}{m} u = 0, & \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1 (l+v) u}{m^2} = 0, & \psi_2(T) = -1. \end{cases} \tag{18}$$

Будем решать задачу в обратном времени. Видно, что ψ_1=$const$, ψ_2=$const$. Отсюда и из (6) видно, что система всегда будет пребывать в состоянии $u^* = u_{max}$. Это один из вариантов нормального случая, когда переключения на особый режим не происходит. Для того, чтобы это не противоречило условию задачи необходимо, чтобы $m_0 - M \geqslant u_{max}T$.

3.4 Параметризация времени переключений

Рассмотри систему, которая была получена ранее:

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{-\tilde{m}t - \frac{u_{max}(t-\bar{t})^2}{2} + (\psi_1^{\bar{t}} + \bar{t})\tilde{m}}{\tilde{m} - u_{max}(t-\bar{t})}, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1(l+v)u}{m^2}, \\ \dfrac{l+v}{m}\psi_1 = \psi_2, \\ \psi_1 = -\dfrac{l+v}{g}. \end{cases} \tag{19}$$

По ходу решения видно, что в начальный момент всегда будет $u^* = u_{max}$, поэтому в первом уравнении можно положить $\bar{t} = 0$. Из последнего уравнения мы найдем параметризацию ψ_1^0 от времени переключения. После этого из третьего уравнения мы найдем параметризацию для ψ_2^0.

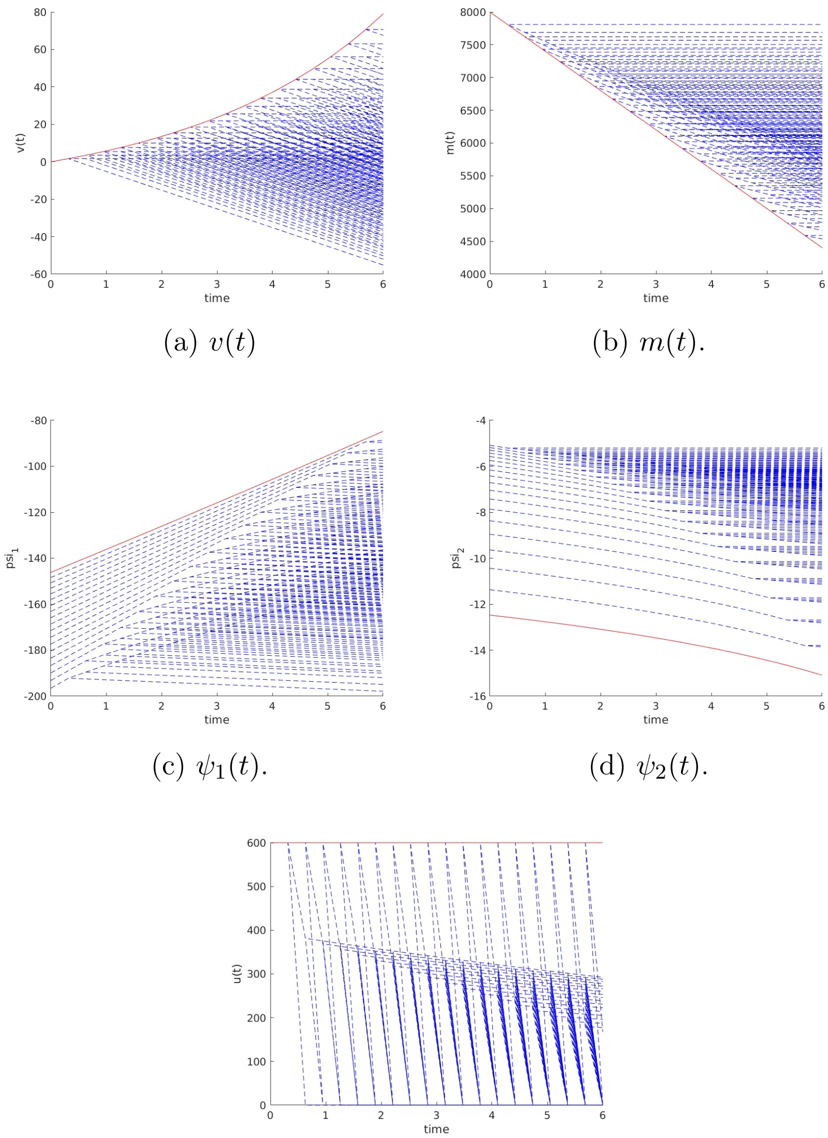
Теперь мы можем приступить к численному решению задачи, перебирая подходящие нам пары времен переключения на отрезке от 0 до T.

4 Примеры работы программы для задачи 1.

Здесь и далее составлющие оптимальной траектории будут выделены на графиках красным цветом.

4.1 Пример 1. Избыток топлива.

Параметры задачи: $m_0 = 8000$, $M = 200$, $g = 10$, $l = 200$, $u_{max} = 600$, $T = 6$. В данном случае на оптимально траектории не произойдет ни одного переключения: даже двигаясь все время с $u^* = u_{max}$ мы не сможем истратить запас топлива. Максимальная высота составит $H = 173$.



(a) $v(t)$ (b) $m(t)$.

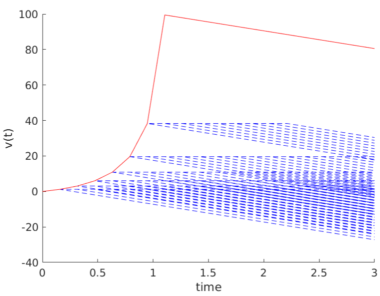
(c) $\psi_1(t)$. (d) $\psi_2(t)$.

(e) $u(t)$.

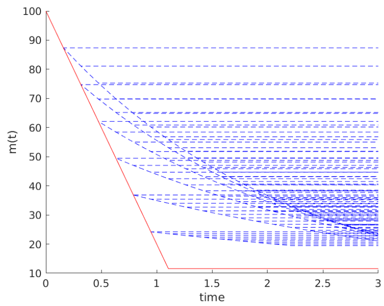
Рис. 1: Компоненты опт. траектории, сопряженных переменных, опт. управления.

4.2 Пример 2. Наличие особого режима и последующего торможения.

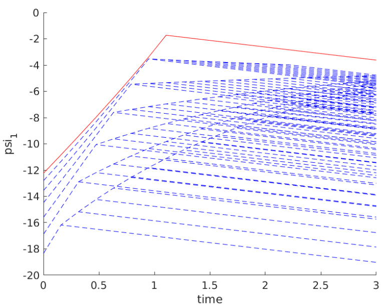
Параметры задачи: $m_0 = 100$, $M = 20$, $g = 10$, $l = 20$, $u_{max} = 80$, $T = 3$. Максимальная высота составит $H = 191$. На данном примере видно, что несмотря на то, что у нас кончилось топливо, инерции хватило, чтобы поднимать ракету даже когда $u* = 0$.



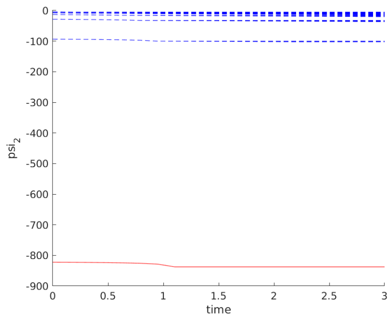
(a) $v(t)$



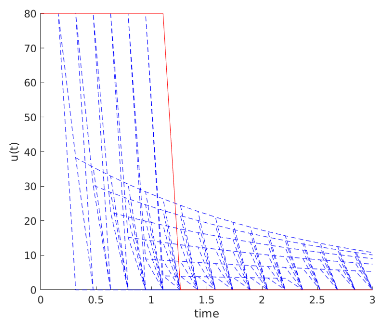
(b) $m(t)$.



(c) $\psi_1(t)$.



(d) $\psi_2(t)$.

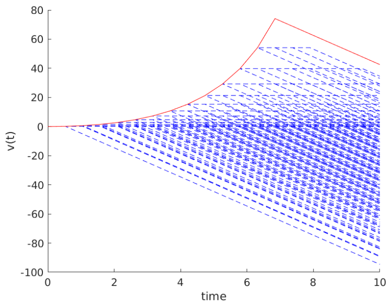


(e) $u(t)$.

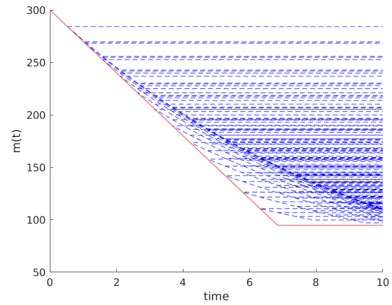
Рис. 2: Компоненты опт. траектории, сопряженных переменных, опт. управления.

4.3 Пример 3. Минимально допустимое значение u_{max}, при котором задача разрешима.

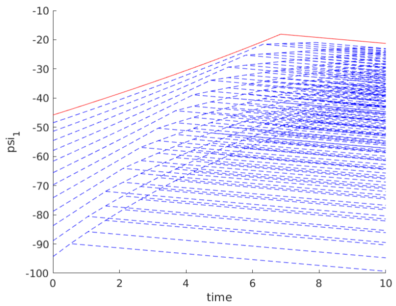
Параметры задачи для данного случая: $m_0 = 300$, $M = 100$, $g = 10$, $l = 100$, $u_{max} = \frac{m_0 g}{l} = 30$, $T = 10$. Максимальная высота составит $H = 302$. Можно заметить, что количество траекторий относительно примера 1 существенно уменьшилось.



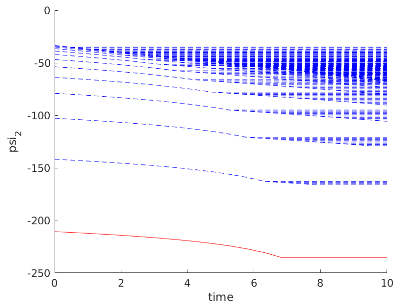
(a) $v(t)$



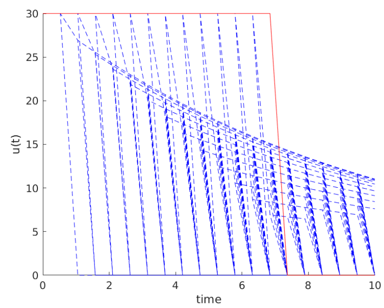
(b) $m(t)$.



(c) $\psi_1(t)$.



(d) $\psi_2(t)$.



(e) $u(t)$.

Рис. 3: Компоненты опт. траектории, сопряженных переменных, опт. управления.

5 Задача 2. Аналитическое решение.

В этой задаче меняется минимузируемый функционал и появляется новое интегральное ограничение: $H = \int\limits_0^T v(t)\,dt$. Для того, чтобы формализовать его введем дополнительную фазовую переменную h: $\dot{h} = v(t)$, $h(T) = H$. Выпишем минимизируемый функционал и соответствующую данной задаче функцию Гамильтона- Понтрягина:

$$J(u) = \int\limits_0^T u^4(t)\,dt,$$

$$\mathcal{H} = \psi_0 u^4 + \Big(\frac{l+v}{m}\psi_1 - \psi_2\Big)u - \psi_1 g + \psi_3 v.$$

Получим отсюда сопряженную систему и запишем уравнения, описывающие данную задачу:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\dfrac{l+v}{m}, & v(0) = 0, \\ \dot{m} = -u, & m(0) = m_0, \\ \dot{h} = v & h(0) = 0, h(T) = H, \\ \dot{\psi}_1 = -\Big(\dfrac{u}{m}\psi_1 + \psi_3\Big), \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1(l+v)u}{m^2}, \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Теперь выведем вид оптимальнго уравления. В нормальном случае $\mathcal{H}$- это парабола 4 степени с ветвями вниз, имеющая 2 корня. Найдем абсциссу вершины этой параболы:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 3\tilde{u}^3\psi_0 + \frac{l+v}{m}\psi_1 - \psi_2,$$

$$\tilde{u} = \sqrt[3]{\frac{1}{3\psi_0}\Big(\psi_2 - \frac{l+v}{m}\psi_1\Big)}.$$

Соответственно, у нас есть 3 положения абсциссы вершины параболы относительно отрезка допустимого управления. Если абсцисса вершины будет меньше 0, то максимизировать $\mathcal{H}$ будет $u^* = 0$. Запишем оптимальное управление:

$$u^* = \begin{cases} 0, & \tilde{u} < 0, \\ \tilde{u}, & 0 \leqslant \tilde{u} \leqslant u_{max}, \\ u_{max}, & \tilde{u} > u_{max}, \end{cases} \tag{21}$$

Особого режима в данной задаче не будет, так как управление опрделено в любой момент времени.

5.1 Анормальный случай.

Положим $\psi_0 = 0$ и заметим, что $\mathcal{H}$ станет линейной функцией по u. В связи с этим мы получим вид оптимального управления, аналогичный задаче 1:

$$u^* = \begin{cases} 0 & \psi_1 \frac{l+v}{m} < \psi_2, \\ [0, u_{max}] & \psi_1 \frac{l+v}{m} = \psi_2, \\ u_{max} & \psi_1 \frac{l+v}{m} > \psi_2. \end{cases}$$

Из (20) видно, что $\psi_3 = const$. В связи с этим мы можем отнормировать вектор сопряженных переменных относительно модуля ψ_3 и получить систему, что была рассмотрена в задаче 1. В связи этим, анормальный случай в данной задаче исследовать мы не будем.

5.2 Нормальный случай.

Так как оптимальное управление определено однозначно, то вычислительно будет предпочтительнее проводить перебор по начальным значениям сопряженных переменных. Для удобства отнормируем этот вектор $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ так, чтобы перебор велся по четырехмерной единичной сфере.

Нам необходимо, чтобы в начальный момент ракета не двигалась «вниз». Это значит, что:

$$\min\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3\psi_0^0}\left(\psi_2^0 - \frac{l}{m_0}\psi_1^0\right)}, u_{max}\right) \geqslant \frac{m_0 g}{l}. \qquad (22)$$

Для удобства перебора сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \psi_0^0 &= \cos\alpha, \\ \psi_1^0 &= \sin\alpha\cos\beta, \\ \psi_2^0 &= \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \\ \psi_3^0 &= \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma. \end{aligned}$$

Мы помним, что $\psi_0 < 0$, поэтому вектор $(\alpha, \beta, \gamma) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. Получим из (22) ограничения на перебор γ. Чтобы выполнялось (22) необходимо:

$$\frac{1}{3\psi_0^0}\left(\psi_2^0 - \frac{l}{m_0}\psi_1^0\right) \geqslant \left(\frac{m_0 g}{l}\right)^3.$$

Подставим параметризацию начальных данных:

$$\frac{1}{3\cos\alpha}\left(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \frac{l}{m_0}\sin\alpha\cos\beta\right) \geqslant \left(\frac{m_0 g}{l}\right)^3, \quad \cos\alpha < 0.$$

После упрощения получим:

$$m_0 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \geqslant l \sin\alpha \cos\beta + 3m_0 \cos\alpha \Big(\frac{m_0 g}{l}\Big)^3.$$

Если $\sin\alpha = 0$, то перебор по γ проводить не нужно, так как правая часть будет заведомо меньше нуля.
Если $\sin\beta = 0$, то, если

$$\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{-3m_0^4 g^3}{l^4},$$

нужно будет перебирать $\gamma \in [0, 2\pi)$. В противном случае, перебор вестись не должен.
В остальных случаях:

$$\cos\gamma \geqslant \frac{l}{m_0} \operatorname{ctg}\beta + \frac{3m_0^3 g^3 \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\beta l^3} = var.$$

Если $var < -1$, то $\gamma \in [0, 2\pi)$.
Если $var > 1$, то перебор вестись не должен.
В остальных случаях: $\gamma \in [0, \arccos(var)] \cup [2\pi - \arccos(var), 2\pi)$.

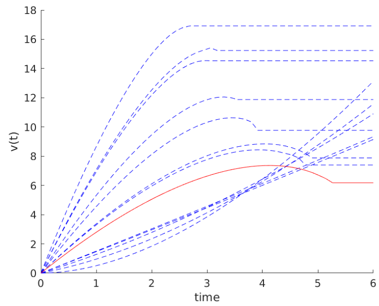
Ввиду сложности системы решать ее мы будем численно. В связи с этим, точно выполнить ограничение $h(T) = H$ не получится. Введем еще один параметр: ε— точность выполнения данного условия. Если мы попадем в ε- окрестность $h(T)$, то мы будем считать, что условие выполнено.

6 Примеры работы программы для задачи 2.

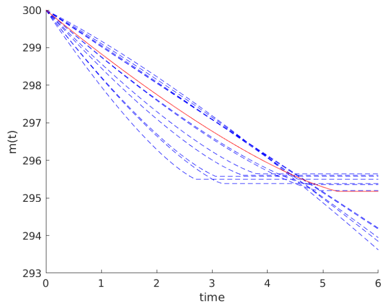
В каждом из примеров рассмотрено 160000 вариантов начальных данных.

6.1 Пример 1.

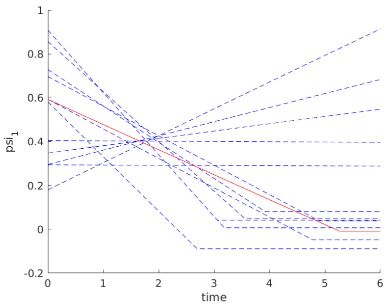
Стоит отметить, что параметр l, который отвечает за «отклик» на сжигание топлива должен быть достаточно большим. В противном случае, задача очень часто неразрешима. Параметры системы $m_0 = 300, M = 100, g = 5, l = 2000, u_{max} = 10, T = 6, H = 29, \varepsilon = 2$. В данном примере у нас 5 переключений, что видно из графика $u(t)$. Времена переключений: $5.27, 5.39, 5.51, 5.63, 5.78$. Значение функционала $L_{min} = 4.84$.



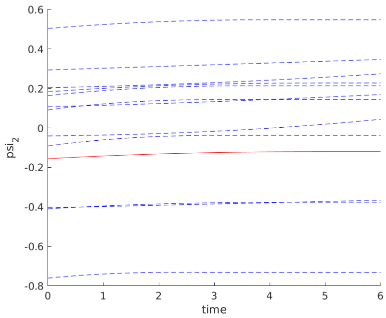
(a) $v(t)$



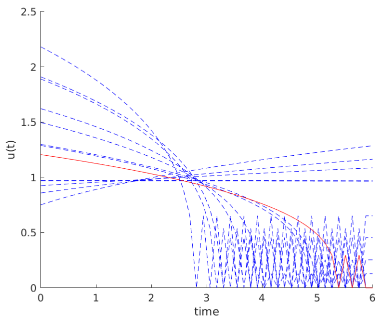
(b) $m(t)$.



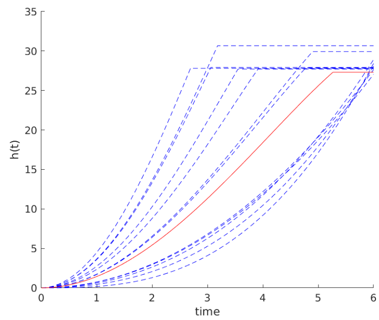
(c) $\psi_1(t)$.



(d) $\psi_2(t)$.



(e) $u(t)$.

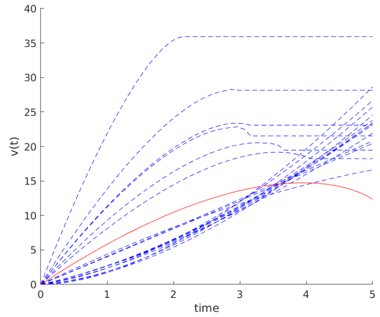


(f) $h(t)$.

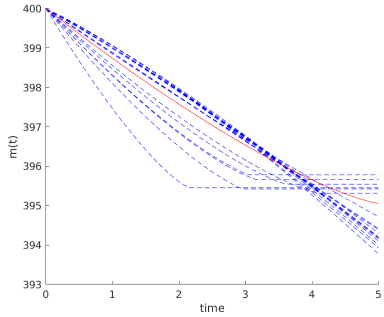
Рис. 4: Компоненты опт. траектории, сопряженных переменных, опт. управления.

6.2 Пример 2.

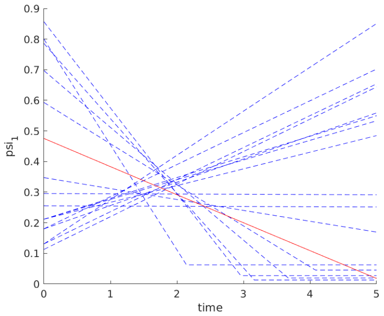
Параметры системы $m_0 = 400, M = 100, g = 10, l = 5000, u_{max} = 10, T = 5, H = 50, \varepsilon = 4$. В данном примере нам даже не потребовались переключения. При этом $L_{min} = 6.35$



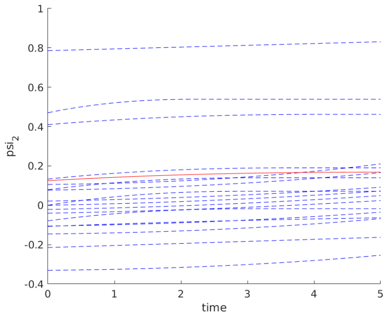
(a) $v(t)$



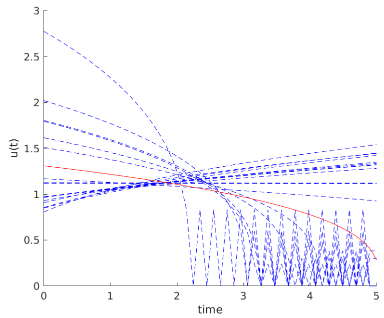
(b) $m(t)$.



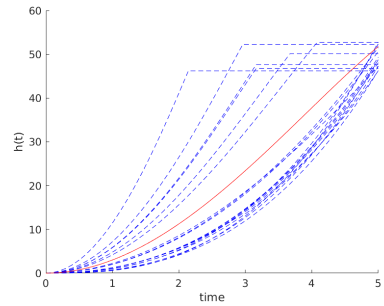
(c) $\psi_1(t)$.



(d) $\psi_2(t)$.



(e) $u(t)$.



(f) $h(t)$.

Рис. 5: Компоненты опт. траектории, сопряженных переменных, опт. управления.

7 Заключение.

Нами была исследована система, моделирующая управление ракетой в случае движения вверх без смены направления движения.

В первой задаче нам удалось аналитически решить большую часть уравнений для начала движения, что позволило получить хорошую точность параметризации времен переключения. Благодаря этому была повышена точность последующеего численного решения.

Во второй задаче нам пришлось отказаться от перепараметризации начальных параметров и перебирать их явно. Также в данной задаче появилось новое ограничение— необходимость вывода ракеты на заранее заданную высоту. Так как всю задачу мы решали численно, то пришлось смириться с некоторой погрешностью финальной высоты ракеты.

8 Библиография

Список литературы

[1] И. В. Рублев *Лекции по оптимальному управлению*, 2019.