



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Решение линейной задачи быстродействия»

Студент 315 группы
И. А. Кулешов

Руководитель практикума
доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Общий ход решения	4
3	Вычисление опорных функций	5
4	Алгоритм решения	7
5	Улучшение точности	7
6	Результат работы программы. Пример 1	8
7	Пример 2	11
8	Пример 3. Непрерывность по времени	14
9	Пример 4	17
10	Заключение	19
11	Библиография	20

1 Постановка задачи

Задана линейная система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Здесь $x, f \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть \mathcal{X}_0 – начальное множество значений фазового вектора, \mathcal{X}_1 – целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества \mathcal{X}_0 , может попасть в некоторую точку множества \mathcal{X}_1 .

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 - b \leq x_2 \leq -ax_1^2 + b\}, \quad a, b > 0;$$

$$\mathcal{X}_0 = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \max\{s(x_1 - p)^2 + (x_2 - q)^2, |x_1| + s|x_2|\} \leq r\};$$

$$\mathcal{X}_1 = \{\tilde{x}_1\}.$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A, B, f, t_0, a, b, p, q, r, s, \tilde{x}_1$ определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приблизительно) найти значение T , построить графики компонент оптимального управления, оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной «оптимальной» траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов.

Замечание. В программе не должно быть перебора по $x(t_0)$.

2. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность величину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Общий ход решения

Сформулируем теорему, согласно которой будем решать задачу – *принцип максимума Понтрягина*:

Теорема 1. Пусть $\{x^*(t), u^*(t)\}$ – оптимальная пара, $u^*(t)$ принадлежит классу кусочно непрерывных функций, $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$. Тогда существует $\psi(t)$ из класса абсолютно непрерывных функций на $[t_0, T]$, где T – соответствующее оптимальной паре минимальное время, такое что:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t).$$

При этом $\psi(t) \neq 0, \forall t$, и верно:

1. Принцип максимума

$$\rho(\psi(t) \mid B\mathcal{P}(t)) = \langle \psi(t), Bu^*(t) \rangle \quad \forall t \in [t_0, T];$$

2. Условие трансверсальности на левом конце

$$\rho(\psi(t_0) \mid \mathcal{X}_0) = \langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle;$$

3. Условие трансверсальности на правом конце

$$\rho(-\psi(T) \mid \mathcal{X}_1) = \langle -\psi(T), x^*(T) \rangle.$$

Так как \mathcal{X}_1 – точка, то условие трансверсальности на правом конце вырождается. В связи со сложностью множества \mathcal{X}_0 , будем решать задачу в обратном времени, перебирая значения вектора $\psi(T)$. Зная вектор $\psi(t)$, мы сможем в любой момент времени находить оптимальное управление $u^*(t)$ из условия 2 принципа максимума.

Мы можем переписать условие 1 в виде: $\rho(\psi(t) \mid B\mathcal{P}(t)) = \langle B^T \psi(t), u^*(t) \rangle$. Это значит, что мы можем искать оптимальное управление как опорный вектор множества \mathcal{P} в направлении $B^T \psi(t)$. Если вектор $B^T \psi(t)$ окажется вырожденным, то можно изменить матрицу B на малую величину, что позволит однозначно найти оптимальное управление в данный момент.

3 Вычисление опорных функций

Вычислим опорную функцию для множества \mathcal{P} . Рассмотрим параболу $x_2 + ax_1^2 = b$ и воспользуемся методом Лагранжа:

$$L = l_1x_1 + l_2x_2 + \lambda(x_2 + ax_1^2 - b),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = l_1 + 2a\lambda x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = l_2 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = ax_1^2 + x_2 - b = 0. \end{cases}$$

Решив систему в верхней полуплоскости, получим опорный вектор $\chi^* = (x^*, y^*) = \left(\frac{l_1}{2al_2}, b - \frac{l_1^2}{4al_2^2}\right)$. Также нужно учесть, что $x_2 > 0$. Это даст нам связь между l_1 и l_2 . Так как множество симметрично относительно $x_2 = 0$, то компоненту l_2 нужно брать со знаком модуля. Подводя итог, получим:

$$\rho(l|\mathcal{P}) = \begin{cases} \frac{4abl_2^2 + l_1^2}{4a|l_2|} & |l_2| \geq \sqrt{\frac{1}{4ab}}|l_1|, \\ \sqrt{\frac{b}{a}}|l_1| & |l_2| < \sqrt{\frac{1}{4ab}}|l_1|. \end{cases}$$

Со вторым множеством все сложнее – это пересечение ромба с центром в $(0,0)$ и произвольно расположенного эллипса с центром в точке (p, q) . Ввиду сложности множества, аналитически вычислим только 2 опорные функции – эллипса и ромба, расположенных в начале координат. Так можно делать, поскольку одно и то же направление из точки $(0,0)$ и из точки (p, q) будет всегда давать опорные векторы, отличающиеся на вектор (p, q) . После этого будем комбинировать эти функции в зависимости от варианта пересечения. Опорные функция эллипса и ромба были получены в лекциях [1], поэтому выпишем их сразу:

$$\rho(l|R) = \begin{cases} |l_2|\frac{r}{s} & |l_2| \geq s|l_1|, \\ |l_1|r & |l_2| < s|l_1|, \end{cases}$$

$$\rho(l|E) = \sqrt{\frac{r}{s}l_1^2 + rl_2^2}.$$

Введем обозначения: $a^2 = \frac{r}{s}, b^2 = r$. Нам необходимо проверить условие трансверсальности на левом конце. Для этого требуется по опорному вектору определить направления, соответствующие ему. Для эллипса есть аналитическое выражение направления для любого опорного вектора.

$$\chi^* = (x^*, y^*) = \left(\frac{l_1 a^2}{\sqrt{l_1^2 a^2 + l_2^2 b^2}}, \frac{l_2 b^2}{\sqrt{l_1^2 a^2 + l_2^2 b^2}} \right).$$

Пусть $\gamma = \frac{x_1^*}{x_2^*}$ (случай $x_2^* = 0$ в программе обрабатывается отдельно).

$$l_1 = \text{sign}(x^*) \sqrt{\frac{b^4 \gamma^2}{b^4 \gamma^2 + a^4}},$$

$$l_2 = \text{sign}(y^*) \sqrt{\frac{a^4 \gamma^2}{b^4 \gamma^2 + a^4}}.$$

Особым случаем является точка пересечения границ эллипса и ромба. Это значит, что одному опорному вектору соответствует сразу несколько направлений.

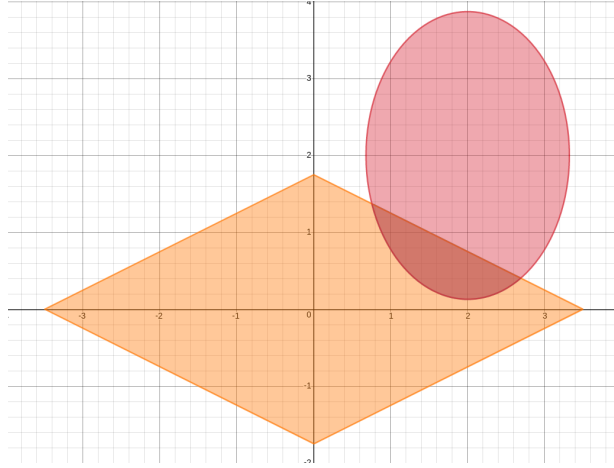


Рис. 1: Один из вариантов пересечения эллипса и ромба

Также мы определяем, где лежит опорный вектор – на эллипсе, на ромбе, или это точка пересечения. Если на эллипсе, то мы находим направление по формулам, приведенным выше. Если на ромбе, то выбирается одно из четырех направлений. Если это точка пересечения, то направления находятся в зависимости от типа пересечения. В этом случае будет несколько направлений. Они будут заключены между направлениями для точек, близких к особой, лежащих на ромбе или на эллипсе.

4 Алгоритм решения

Ввиду сложности \mathcal{X}_0 , будем решать задачу в обратном времени при помощи формулы Коши. Запишем все необходимые уравнения с учетом специфики задачи:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= Y(t, T)\psi(T), \\ x(t) &= X(t, T)x_1 - \int_t^T X(t, \tau)[u(\tau)B + f]d\tau.\end{aligned}$$

Здесь $Y(t, \tau)$ – фундаментальная матрица сопряженной системы, $X(t, \tau)$ – фундаментальная система для исходной линейной системы.

Введем сетку по времени $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_{\max}$. T_{\max} вводится пользователем. Мы будем перебирать направления $\psi(T)$ по единичной окружности и оттуда находить $\psi(t_i)$. Из условия 1 принципа максимума мы будем находить оптимальное в данный момент t_i управление. После этого мы получим значение $x(t_i)$. Эта процедура закончится, когда мы попадем во множество \mathcal{X}_0 или превысим T_{\max} . В случае, когда задача не имеет решения, будет выведено соответствующее сообщение. Далее, если задача все же разрешима, нам будет необходимо найти точку на границе множества \mathcal{X}_0 . Это предусмотрено в реализации, финальная точка пересчитывается. Особенно это важно, когда оптимальная траектория должна попадать в точку пересечения.

Из условия трансверсальности следует, что $\psi(t_0^*)$ (сопряженный вектор в момент попадания \mathcal{X}_0) должен быть направлением, вдоль которого вычислена опорная функция с опорным вектором x^* . Так как метод численный, и фигура нетривиальная, это будет выполняться не всегда. В качестве меры ошибки будем рассматривать синус угла между настоящим направлением для x^* и вектором $\psi(t_0^*)$, полученным в ходе численного решения.

5 Улучшение точности

В программе реализовано два способа улучшения точности работы: локальный и глобальный. При глобальном улучшении в 2 раза увеличивается количество векторов $\psi(T)$. Локальное улучшение возможно только при наличии хотя бы одной траектории, решающей задачу. В этом случае сетка ψ между ближайшими к оптимальному $\psi(T)$ учащается в 10 раз. Результаты предыдущих итераций сохраняются в специальных структурах. При улучшении точности обсчитываются траектории только для новых направлений $\psi(T)$.

6 Результат работы программы. Пример 1

Параметры системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$s = 3.0, \quad p = 2.0, \quad q = 0.6, \quad r = 3.5, \quad a = 7, \quad b = 2, \quad T_{max} = 4.0$$

Здесь и далее сетка по времени будет содержать nTime=30 точек, а исходная сетка по $\psi(T)$ – 20 направлений.

Время быстрого действия $T = 3.0$. Ошибка равна 0.46.

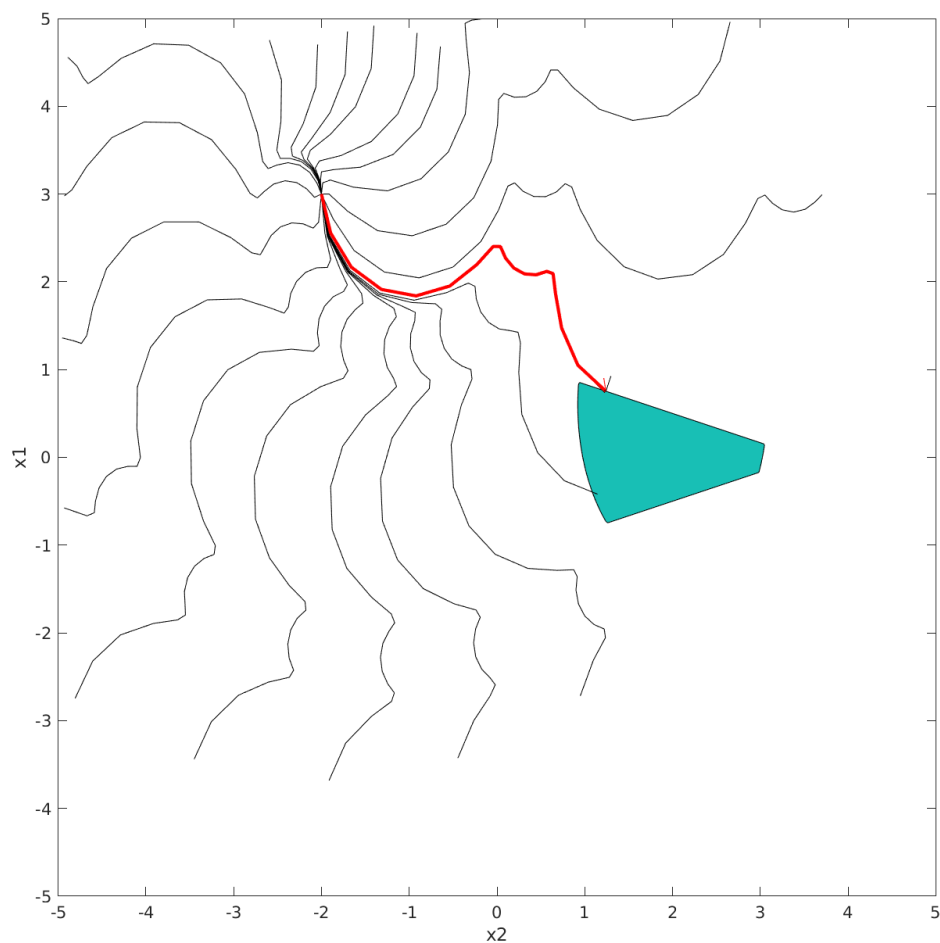
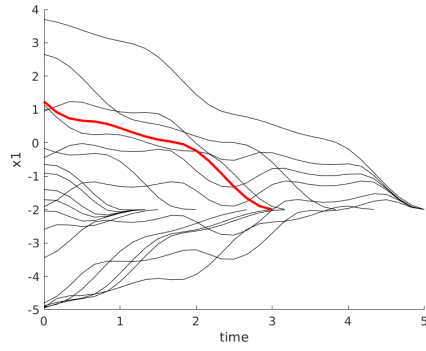
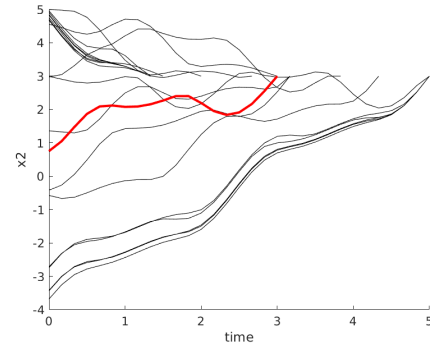


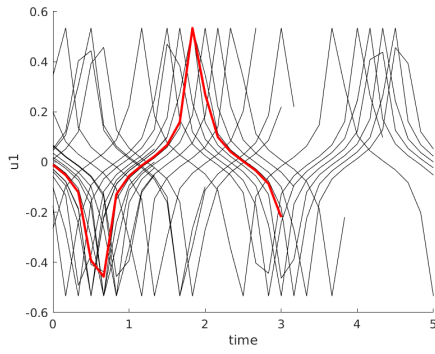
Рис. 2: Интегральные траектории для первого примера



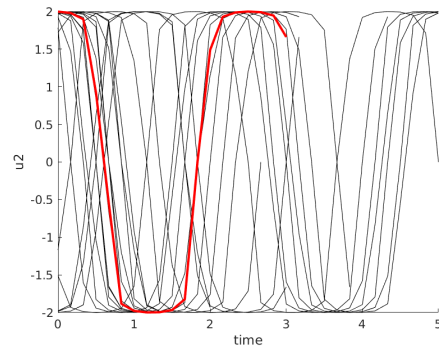
(a) $x_1(t)$



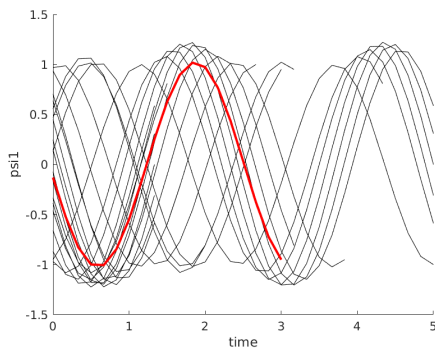
(b) $x_2(t)$



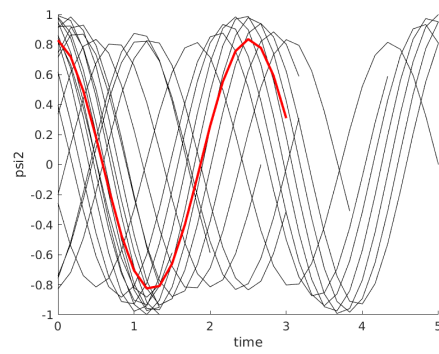
(c) $u_1(t)$



(d) $u_2(t)$



(e) $\psi_1(t)$



(f) $\psi_2(t)$

Рис. 3: Рисунки для координат, управлений и векторов сопряженной системы

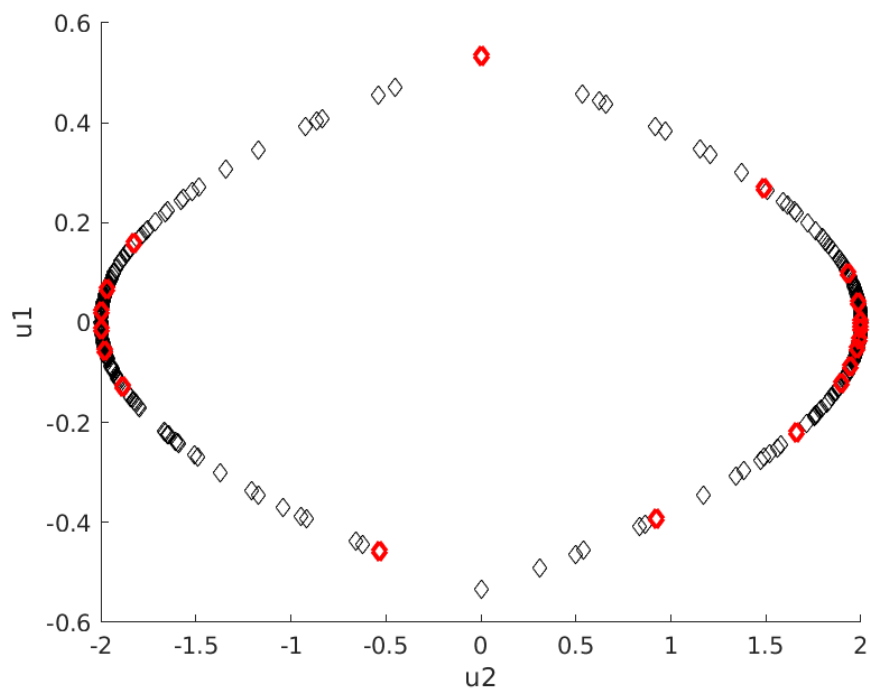


Рис. 4: Зависимость $u_1(u_2)$

7 Пример 2

Параметры системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$s = 3.0, \quad p = 0, \quad q = 0.6, \quad r = 3.5, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad T_{max} = 1.0$$

Время быстрого действия $T = 0.42$. Ошибка в этом случае равна 0.93.

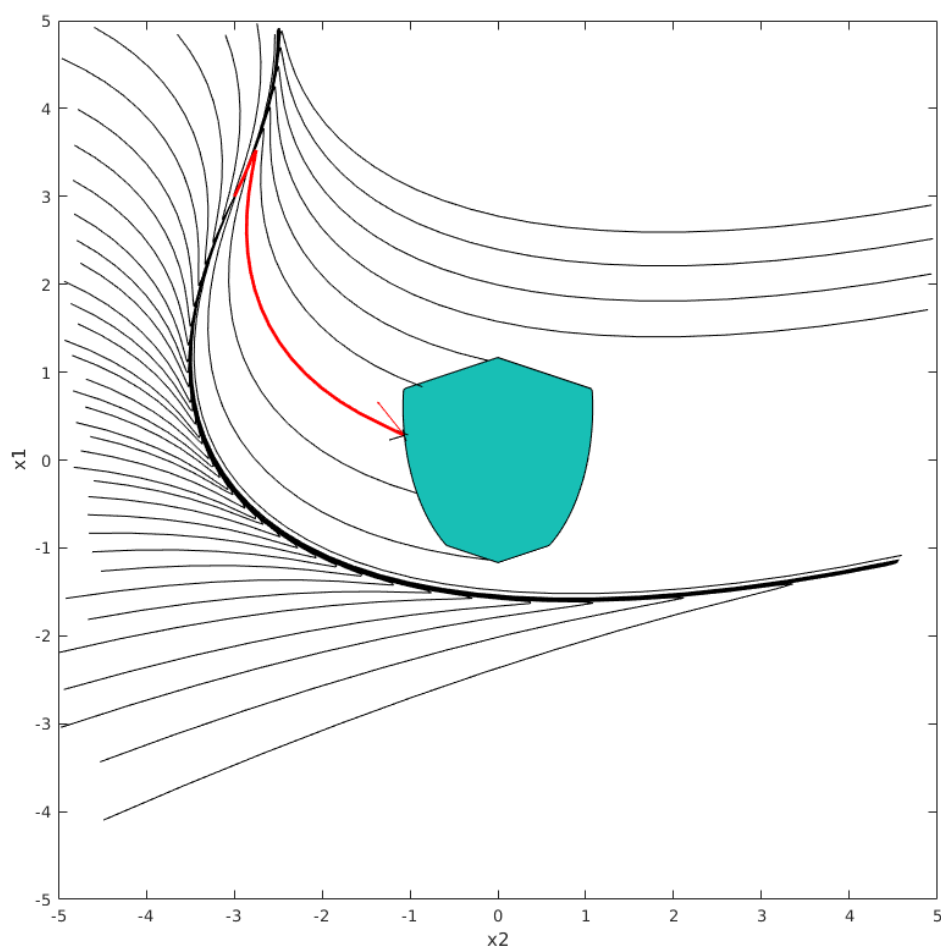
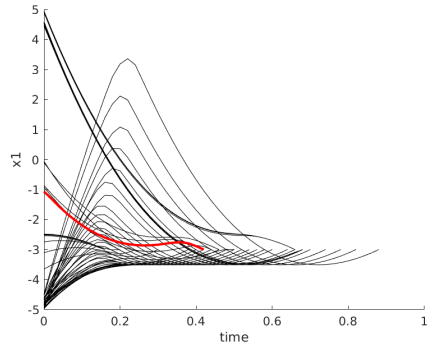
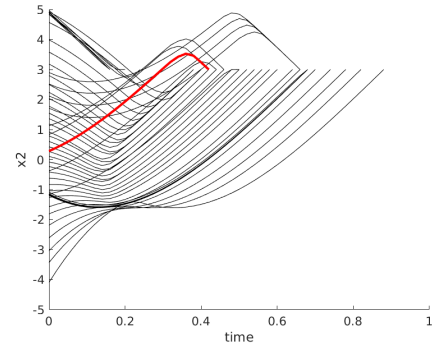


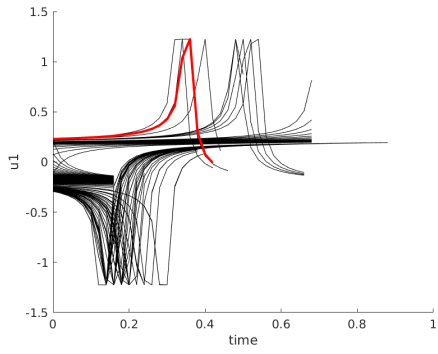
Рис. 5: Интегральные траектории для второго примера



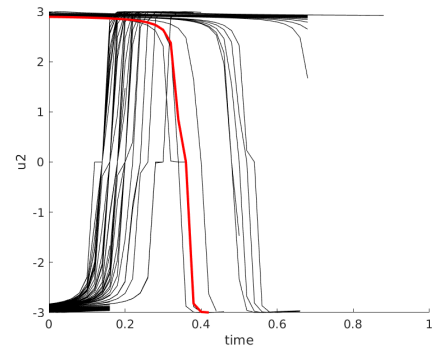
(a) $x_1(t)$



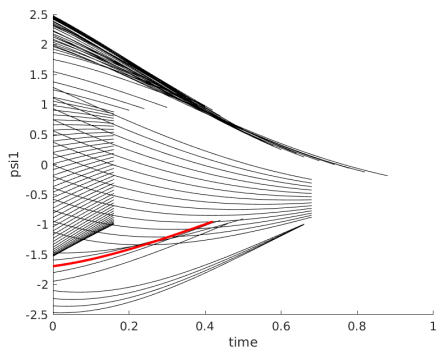
(b) $x_2(t)$



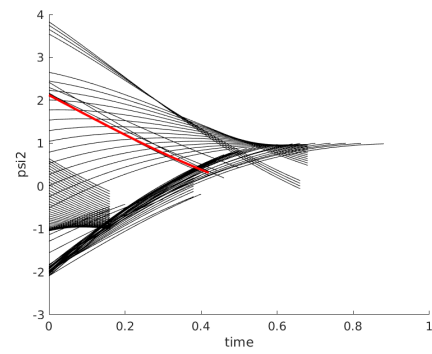
(c) $u_1(t)$



(d) $u_2(t)$



(e) $\psi_1(t)$



(f) $\psi_2(t)$

Рис. 6: Рисунки для координат, управлений и векторов сопряженной системы

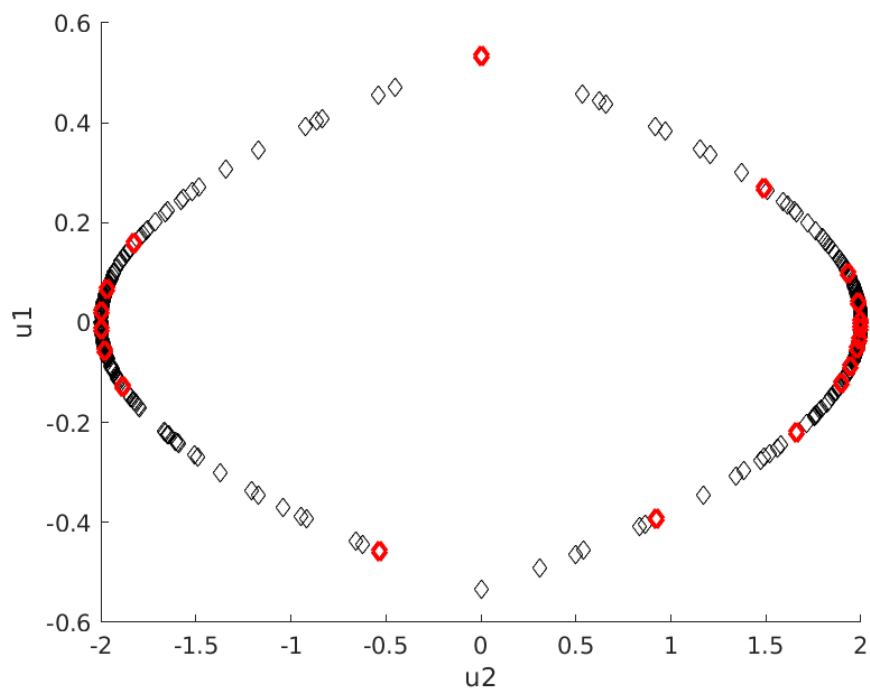


Рис. 7: Зависимость $u_1(u_2)$

8 Пример 3. Непрерывность по времени

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix},$$

$$s = 2.0, \quad p = 2.19, \quad q = -2, \quad r = 4.3, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad T_{max} = 1$$

Время быстрогодействия в данном случае $T = 0.26$. Ошибка равна 0.29.

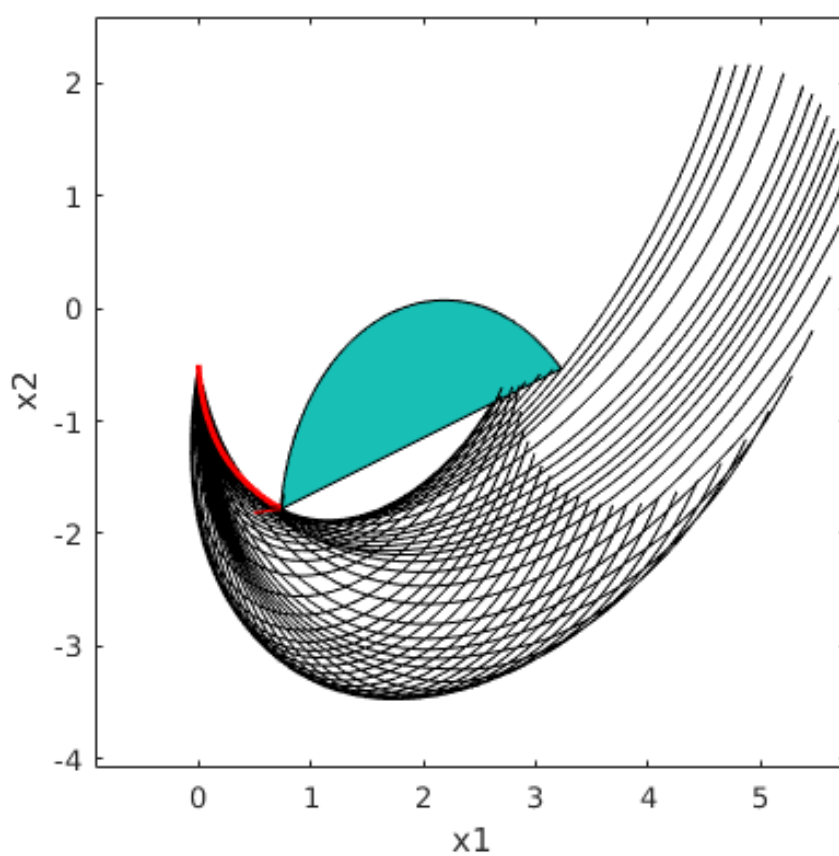
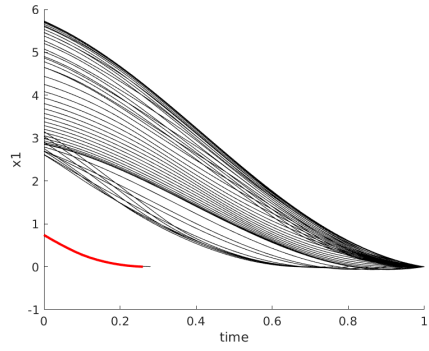
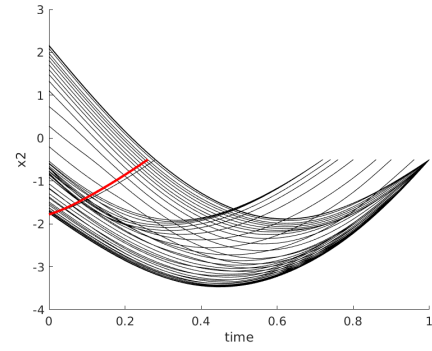


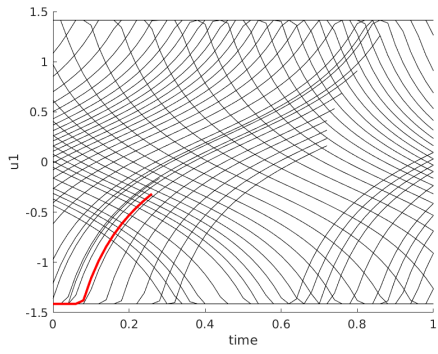
Рис. 8: Интегральные траектории для третьего примера



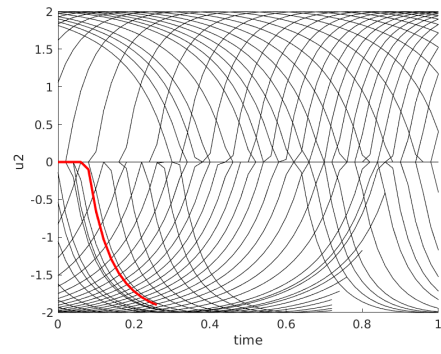
(a) $x_1(t)$



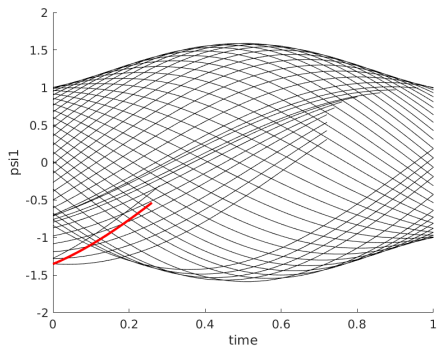
(b) $x_2(t)$



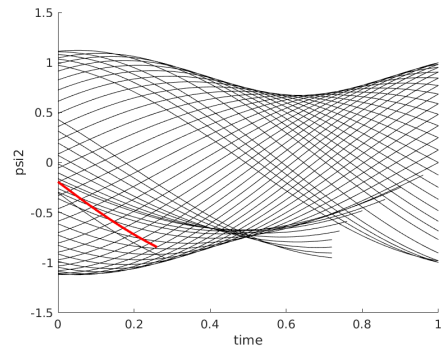
(c) $u_1(t)$



(d) $u_2(t)$



(e) $\psi_1(t)$



(f) $\psi_2(t)$

Рис. 9: Рисунки для координат, управлений и векторов сопряженной системы

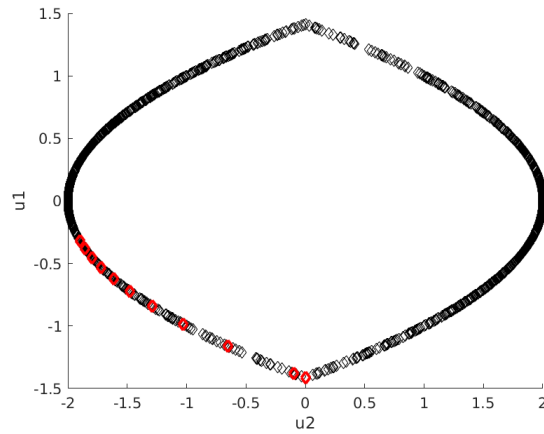
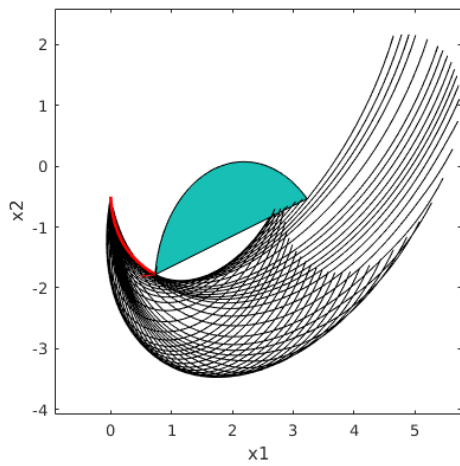
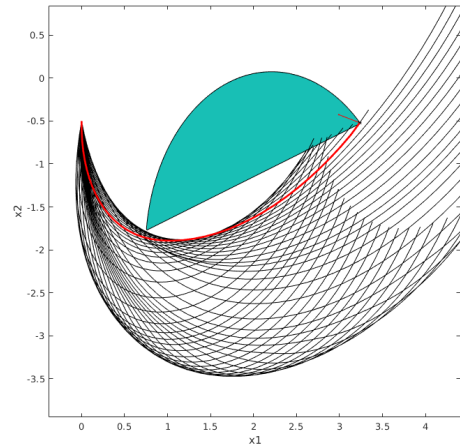


Рис. 10: Зависимость $u_1(u_2)$

Исследуем вопрос непрерывности времени быстрого действия по начальному множеству.



(a) $p = 2.19$



(b) $p = 2.21$

Рис. 11: Исследование непрерывности

При изменении параметра p меньше, чем на процент, значение T возрастает с 0.26 до 0.72. Это демонстрирует, что время быстрого действия претерпевает разрыв по начальному множеству.

9 Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$s = 3.0, \quad p = -1.5, \quad q = -1.5, \quad r = 3.5, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad T_{max} = 1$$

Время быстрогодействия $T = 0.34$. Ошибка равна 0.98.

Такая большая величина ошибки связана с тем, что нормаль считается к исправленной точке, хотя на самом деле точка лежит внутри множества, а не на границе.

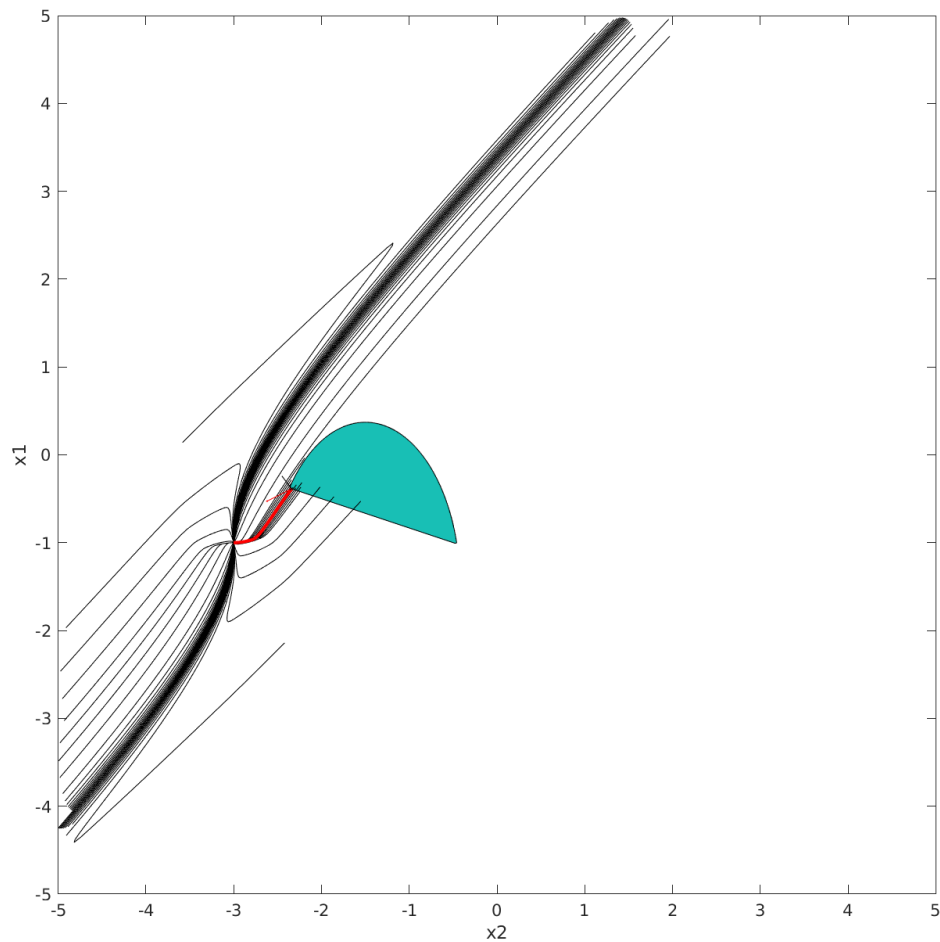
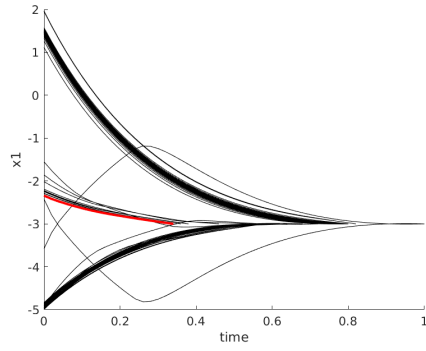
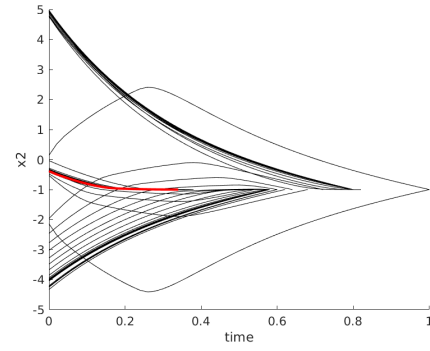


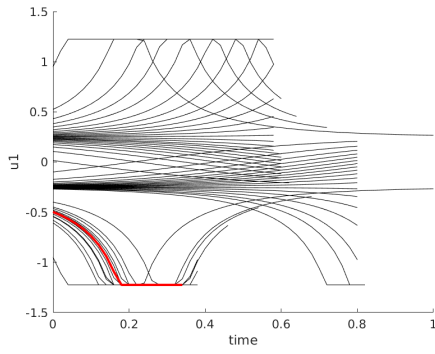
Рис. 12: Интегральные траектории для четвертого примера



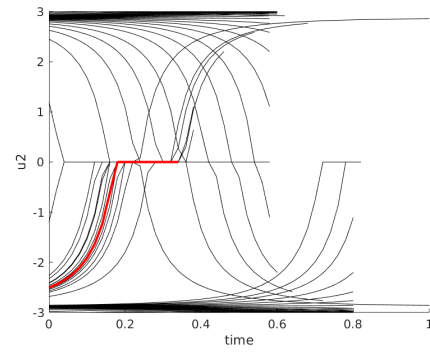
(a) $x_1(t)$



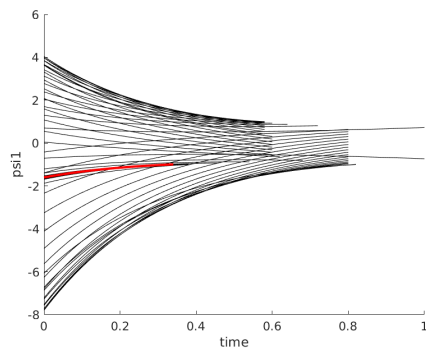
(b) $x_2(t)$



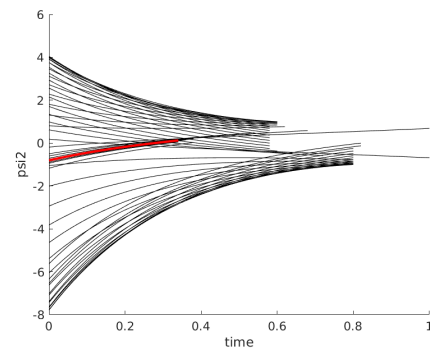
(c) $u_1(t)$



(d) $u_2(t)$



(e) $\psi_1(t)$



(f) $\psi_2(t)$

Рис. 13: Рисунки для координат, управлений и векторов сопряженной системы

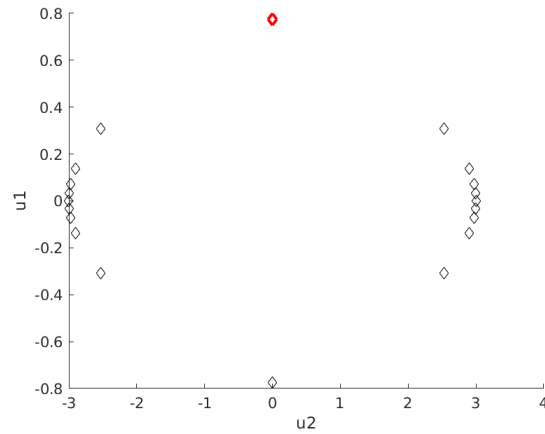


Рис. 14: Зависимость $u_1(u_2)$

10 Заключение

При решении данного задания применялся принцип максимума Понтрягина, что позволило нам пронаблюдать на примерах некоторые его особенности. Самая большая из них заключается в его локальности. Также стоит отметить крайнюю чувствительность к начальным значениям параметров. Малое изменение $\psi(T)$ могло повлечь существенное изменение траектории.

11 Библиография

Список литературы

- [1] И. В. Рублев *Лекции по оптимальному управлению*, 2018.