



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы

И. А. Кулешов

Руководитель практикума

к.ф.-м.н, доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2019

Содержание

1	Задание 7	3
1.1	Постановка задачи	3
1.2	Решение задачи	3
1.2.1	Пункт 1	3
1.2.2	Пункт 2	5
2	Задание 8	6
2.1	Постановка задачи	6
2.2	Решение задачи	6
3	Задание 9	10
3.1	Постановка задачи	10
3.2	Решение задачи	10
3.2.1	Пункт 1	10
3.2.2	Пункт 2	12
4	Задание 10	16
4.1	Постановка задачи	16
4.2	Решение задачи	16
5	Задание 11	20
5.1	Постановка задачи	20
5.2	Решение задачи	20
5.2.1	Пункт 1	20
5.2.2	Пункт 2	22
5.2.3	Пункт 3	23
6	Библиография	26

1 Задание 7

1.1 Постановка задачи

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции f на множестве $A = \{x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, т.е. $y = \min_{x \in A} f(x)$, где

$$f(x) = x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_1x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

при $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, функция доопределяется по непрерывности при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка g в пространстве \mathbb{R}^2 , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

3. Оценить точность. Сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

1.2 Решение задачи

1.2.1 Пункт 1

Для поиска минимального значения функции $f(x)$ будем n раз разыгрывать случайные величины x_1 и x_2 на множестве $A = \{x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, считать для каждой пары значение функции $f(x_1, x_2)$ и затем из полученных n значений выберем наименьшее.

Рассмотрим следующую величину:

$$\mathbb{P}((x_1, x_2) \in A) = \frac{1}{\pi} \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^1 dr^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\varphi.$$

В этом выражении был совершен переход к полярным координатам:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Сделаем замену вида: $u = r^2 > 0, u \in [0; 1]$. Тогда окончательно получим:

$$\mathbb{P}((x_1, x_2) \in A) = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\varphi.$$

Отсюда видно, что совместное распределение x_1 и x_2 совпадает с совместным распределением случайных величин $u \sim U[0; 1]$ и $\varphi \sim [0; \pi]$ (обоснование этого метода моделирования можно найти в задании 4). Выпишем выражения для x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{u} \cos \varphi, \\ x_2 = \sqrt{u} \sin \varphi, \end{cases} \quad u \sim U[0; 1], \quad \varphi \sim U[0; 2\pi].$$

Теперь оценим погрешность данного метода. Пусть точка (x^*, y^*) — точка теоретического минимума, а точка (x, y) — это точка, полученная методом случайного поиска. Тогда:

$$|f(x^*, y^*) - f(x, y)| \leq \max_{(x, y) \in A} |\nabla f| |(x^*, y^*) - (x, y)|.$$

Оценим каждый из сомножителей:

$$\begin{aligned}
1. \text{ Сначала } \max_{(x,y) \in A} |\nabla f| &= \max_{(x,y) \in A} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} : \\
\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| &= \left|3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| \leq \\
&\leq \left|3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\right| + \left|x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right)\right| + \left|10x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| \leq \sqrt{10} + 10, \\
\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| &= \left|10x_1 \left(4x_2^3 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) + x_2^2 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right)\right)\right| \leq 10 \left|4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) + \sin\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| \leq 10\sqrt{17}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку:

$$|\nabla f| \leq 45.$$

2. Теперь оценим $|(x^*, y^*) - (x, y)|$.

Найдем, чему равна вероятность того, что точка (x, y) попадет в ε -окрестность теоретической точки минимума (x^*, y^*) :

$$\mathbb{P}\left((x, y) \in B_\varepsilon(x^*, y^*)\right) = \frac{\pi\varepsilon^2}{\pi} = \varepsilon^2.$$

Заметим, что исходная функция является четной по y , поэтому точек минимума будет две: если (x^*, y^*) — точка минимума, то $(x^*, -y^*)$ — также точка минимума. Поэтому значение вероятности, равное ε^2 , верно для случая, когда обе точки минимума лежат на границе множества A . Если же обе точки минимума лежат внутри множества, то существует две ε — окрестности, в которые может попасть очередная точка (x, y) , значит, вероятность будет равна $2\varepsilon^2$. Рассматривая худший случай, получаем, что вероятность попасть методом случайного поиска в ε — окрестность точки минимума равна $p = n\varepsilon^2$. Тогда:

$$|(x^*, y^*) - (x, y)| \leq \varepsilon = \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Таким образом, мы получили оценку для метода случайного поиска:

$$|f(x^*, y^*) - f(x, y)| \leq 45\sqrt{\frac{p}{n}}.$$

N	значение минимума	погрешность($p = 0.99$)	время работы
10^5	-1,28	0,16	0,014
10^6	-1,287	0,049	0,135
10^7	-1,288	0,016	1,372
10^8	-1,2885	0,0049	13,268

Таблица 1: Результаты поиска минимума функции методом случайного поиска.

1.2.2 Пункт 2

Теперь для минимизации функции $f(x)$, которую будем интерпретировать как энергию системы, мы будем использовать метод имитации отжига. Опишем алгоритм его работы:

1. Случайным образом выбираем начальную точку x_0 , задаем начальную температуру T_0 . Текущее значение энергии E устанавливаем равным $f(x_0)$.
2. k -ая итерация основного цикла состоит из следующих шагов:
 - (a) Сравнить энергию системы E в состоянии x с найденным на текущий момент глобальным минимумом. Если $E = f(x)$ меньше, то изменить значение глобального минимума.
 - (b) Сгенерировать новую точку x' . В нашем случае мы будем генерировать ее по нормальному закону с математическим ожиданием (x_k, y_k) и дисперсией $\sigma^2 T_k$, где $T(k) = T(k-1)k_{temp}$ — температура системы в момент k .
 - (c) Вычисляем значение $E' = f(x')$.
 - (d) Генерируем случайное число α из интервала $[0; 1]$.
 - (e) Если $\alpha < h(E' - E, T(k)) = \exp^{-(E' - E)/T(k)}$, то $x = x_i$, $E = E'$ и переходим к следующей итерации. Иначе, повторить шаг (b), пока не будет найдена подходящая точка x' .

2 Задание 8

2.1 Постановка задачи

Применить метод Монте-Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y) \in D \\ u|_{\delta D} = f(x, y) \\ u \in C^2(D), f \in C(\delta D) \\ D = \{x, y : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ найти аналитическое решение и сравнить с полученным по методу Монте-Карло.

2.2 Решение задачи

Выберем на плоскости достаточно мелкую квадратную сетку с шагом h . Координаты узлов $x_i = ih, y_j = jh$, а значения функций в узлах $u(x_i, y_j) = u_{i,j}, f(x_i, y_j) = f_{i,j}$.

Определение 1. Узел сетки (i, j) называют внутренним, если и он, и все четыре соседних с ним узла $(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$, принадлежат $D + \delta D$. В противном случае узел (i, j) , принадлежащий $D + \delta D$, называют граничным. Остальные узлы сетки будем называть внешними.

Составим разностную схему. Первое уравнение $u_{xx} + u_{yy} = 0$ перейдет в:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0, \quad (i, j) \in D_h, \quad (1)$$

где D_h — множество внутренних точек для данной сетки.

Перепишем (1) относительно $u_{i,j}$ и получим:

$$\begin{cases} u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), & (i, j) \in D_h, \\ u_{i,j} = f_{i,j}, & (i, j) \in \delta D_h, \end{cases} \quad (2)$$

где δD_h — множество граничных точек для данной сетки.

Заметим, что решение данной системы существует и единственно, и при $h \rightarrow 0$ стремится к решению задачи Дирихле. Опишем метод Монте-Карло для системы (2).

Представим себе частицу M , которая совершает равномерное блуждание по узлам сетки. Находясь в узле (i, j) частица равновероятно может перейти в один из четырех соседних узлов $(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$, причем каждый переход не зависит от предыстории и положения точки. Блуждание заканчивается, как только попадает в граничную точку.

Пусть $P(i, j, p, q)$ — вероятность того, что траектория частицы, вышедшей из узла (i, j) , закончится в граничной точке (p, q) . Так как рано или поздно частица неизбежно попадет на одну из точек границы, то:

$$\sum_{(p,q) \in \delta D_h} P(i, j, p, q) = 1$$
$$P(p', q', p, q) = \begin{cases} 1, & (p' - p)^2 + (q' - q)^2 = 0, \\ 0, & (p' - p)^2 + (q' - q)^2 \neq 0, \end{cases} \quad \forall (p', q') \in \delta D_h$$

Составим сумму

$$\nu_{i,j} = \sum_{(p,q) \in \delta D_h} P(i, j, p, q) f_{p,q}$$

Если рассматривать $f(x, y)$ как случайную величину, принимающую значения $f_{p,q}$ на границе δD_h , то $\nu_{i,j}$ — это математическое ожидание $f(x, y)$ в точке (x_i, y_j) . Так как из внутреннего узла частица равновероятно попадет в один из 4 соседних узлов, то по формуле полной вероятности:

$$\nu_{i,j} = \sum_{(p,q) \in \delta D_h} (P(i-1, j, p, q) + P(i+1, j, p, q) + P(i, j-1, p, q) + P(i, j+1, p, q)) f_{p,q}. \quad (3)$$

Окончательно получим:

$$\begin{cases} \nu_{i,j} = \frac{1}{4}(\nu_{i,-1,j} + \nu_{i+1,j} + \nu_{i,j-1} + \nu_{i,j+1}), & \forall (i, j) \in D_h \\ \nu_{i,j} = f_{i,j}, & (i, j) \in \delta D_h \end{cases} \quad (4)$$

Мы получили систему, аналогичную (2). В силу закона больших чисел можно приближать $\nu_{i,j}$ по формуле:

$$\nu_{i,j} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(p^k, q^k), \quad (p^k, q^k) \in \delta D_h. \quad (5)$$

Для ускорения работы данного метода несколько модифицируем ход его выполнения: будем рассматривать его в «обратном времени». Частица, находясь во внутреннем узле, в предыдущий момент времени могла равновероятно быть в одном из 4 соседних внутренних узлов (предыдущей точкой не может быть граничная точка). Это значит, что если мы выберем какую-то граничную точку (k_0, l_0) и будем блуждать по аналогичному алгоритму по узлам сетки до момента попадания в седующую граничную точку (k_1, l_1) , то мы получим множество Ω тех точек, траектория «прямого» блуждания которых могла бы закончиться в (k_0, l_0) . В свою очередь, попав в (k_1, l_1) , мы повторим вышеизложенную процедуру «обратного» блуждания. По-сути, в каждой точке множества Ω мы получаем слагаемое в выражение (3), где $f(p, q) = f(k_0, l_0)$. Следовательно, если для каждой внутренней точки мы будем запоминать количество попаданий «обратных блужданий» и сумму их значений на начальных граничных точках, то поделив данную сумму на количество попаданий получим в точности (5). Для того, чтобы получить необходимую точность, будем блуждать в «обратном времени» до тех пор, пока не побываем в каждой внутренней точке хотя бы N раз.

Теперь рассмотрим аналитическое решение исходной задачи.

По теореме о существовании решения внутренней задачи Дирихле, решение существует. Будем искать его с помощью метода неопределенных коэффициентов:

$$u(x, y) = c_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2.$$

Подставим это в исходную задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2a_2 + 2b_2 = 0, \\ u|_{x^2+y^2=1} = c_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 = x^2 - y^2, \end{cases}$$

Решая эту систему получим: $c_0 = a_1 = b_1 = 0, a_2 = 1, b_2 = -1 \Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2$.

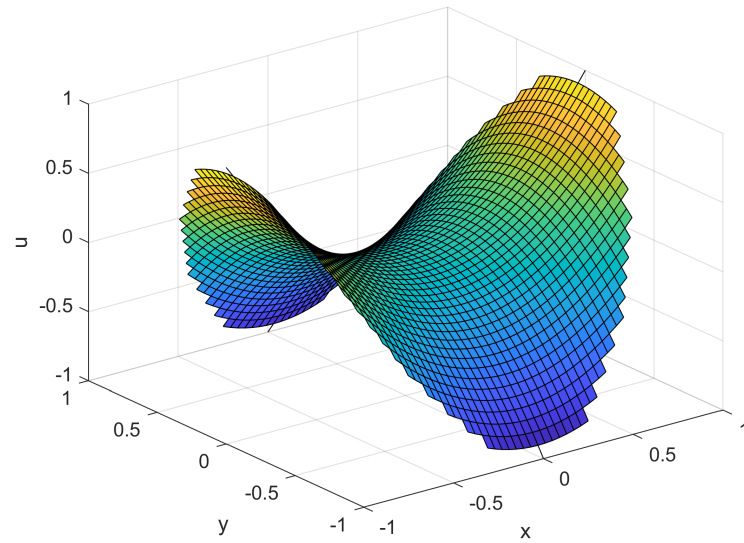


Рис. 1: Аналитическое решение при $n = 51$ точках по каждой оси.

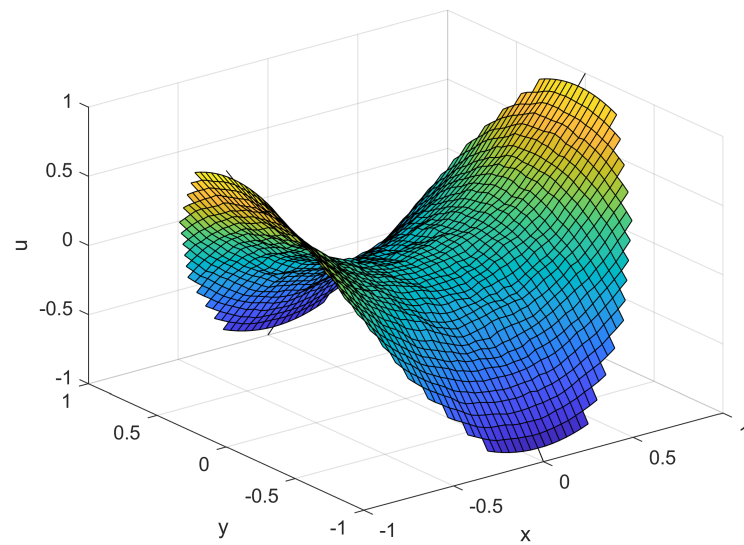


Рис. 2: Решение методом Монте-Карло с параметрами $n = 51, N = 10000$.

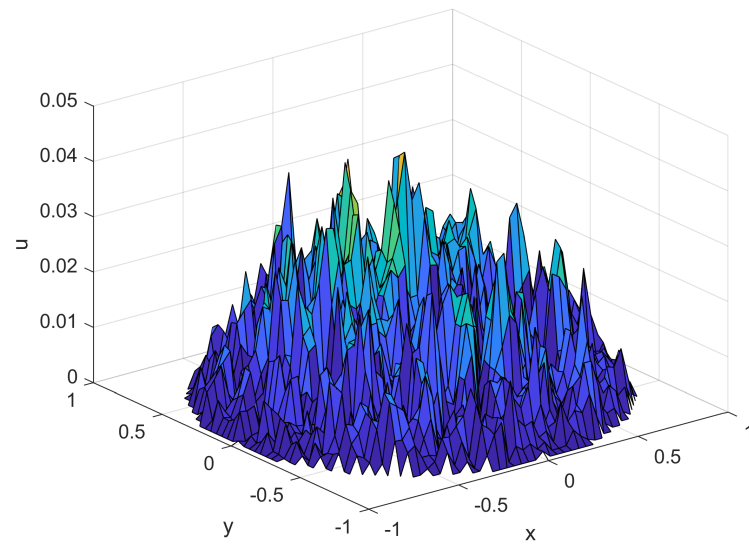


Рис. 3: Ошибка метода Монте-Карло с параметрами $n = 51, N = 10000$.

3 Задание 9

3.1 Постановка задачи

Рассмотреть два вида процессов:

- Винеровский процесс $W(t)$, $t \in [0; 1]$, $W(0) = 0$.
- Процесс Орнштейна-Уленбека $X(t)$, $t \in [0; 1]$, $X(0) = X_0$, то есть стационарный марковский гауссовский процесс. Начальные значения X_0 генерируются случайным образом так, чтобы полученный процесс был стационарным.

Для данных гауссовских процессов:

1. Найти ковариационную функцию и переходные вероятности.
2. Моделировать независимые траектории процесса с данными переходными вероятностями методом добавления разбиения отрезка.
3. Построить график траектории, не соединяя точки ломаной, с целью получения визуально непрерывной линии.

3.2 Решение задачи

3.2.1 Пункт 1

Дадим несколько важных определений:

Определение 2. Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Параметризованное семейство $\{W_t | t \in T\}$ случайных величин вида: $W_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in T$, где $T \in [0, +\infty)$ и T интерпретируется как временной интервал, называется случайным процессом.

Определение 3. Случайный процесс $\{W_t | t \in T\}$ называется гауссовским, если $\forall n \geq 2, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ случайные величины $W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n}$ имеют многомерное нормальное распределение.

Определение 4. Случайный процесс $\{W_t | t \in T\}$ называется процессом с независимыми приращениями, если $\forall n \geq 2, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ случайные величины $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ независимы.

Определим винеровский процесс на $[0; 1]$ как гауссовский с независимыми приращениями и $W(0) = 0$ п.н.

Т.к. процесс гауссовский, то из этого следует, что $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ случайный вектор $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ будет иметь многомерное нормальное распределение. Это значит, что $W_1 - W_0 = W_1 - 0 = W_1 \sim N(0, 1)$.

Для данного процесса вычислим ковариационную функцию $R(t, s) = \text{Cov}(W_t, W_s)$. Для этого рассмотрим случай, когда $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{cases} W_s - W_0 = W_s \\ W_s \text{ и } W_t - W_s \text{ независимы} \end{cases} \Rightarrow \text{Cov}(W_s, W_t - W_s) = 0, \text{ но}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t - W_s) &= \text{Cov}(W_s, W_t) - \text{Cov}(W_s, W_s) = \text{Cov}(W_s, W_t) - \text{Var}(W_s) = \\ &= \text{Cov}(W_s, W_t) - s = 0 \Rightarrow \text{Cov}(W_s, W_t) = s. \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается и второй случай. Получаем, что для винеровского процесса:

$$R(t, s) = \min(s, t).$$

Будем строить траекторию винеровского процесса методом деления отрезка $[0; 1]$ в отношении α исходя из следующих соображений:

- $W_0 = 0, W_1 \sim N(0, 1)$,
- Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$ и его внутреннюю точку $t = t_1 + \alpha(t_2 - t_1)$ и условную плотность:

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2) = \frac{p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}}(x_1, x, x_2)}{p_{W_{t_1}, W_{t_2}}(x_1, x_2)}.$$

Обозначим $\bar{x} = (x_1, x, x_2)'$ и $\hat{x} = (x_1, x_2)'$, тогда плотности распределения этих векторов будут равны:

$$\begin{aligned} p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}}(\bar{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|R_1|}} e^{-\frac{1}{2} \bar{x}' R_1^{-1} \bar{x}}, \\ p_{W_{t_1}, W_{t_2}}(\hat{x}) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{|R_2|}} e^{-\frac{1}{2} \hat{x}' R_2^{-1} \hat{x}}, \end{aligned}$$

где R_1, R_2 — соответствующие матрицы ковариаций. Вспомним, что $R(t, s) = \min(s, t)$, поэтому:

$$R_1 = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t & t \\ t_1 & t & t_2 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Используя символьные вычисления *Matlab* получим окончательно:

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)(t_2 - t_1)}} \exp \left\{ -\frac{(x - ((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2))^2}{2\alpha(1-\alpha)(t_2 - t_1)} \right\}.$$

Это значит, что

$$W_t \sim N((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, \alpha(1-\alpha)(t_2 - t_1)).$$

Пусть n — это количество шагов метода деления отрезка. Каждый шаг — это деление всех отрезков, содержащихся в $[0; 1]$ на шаге $n - 1$, в соотношении α . Количество точек при моделировании равно $2^n + 1$ на отрезке $[0; 1]$.

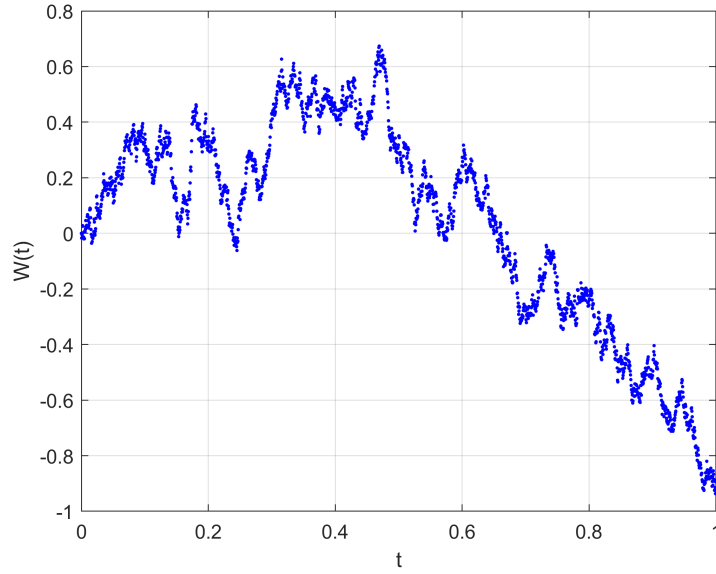


Рис. 4: Винеровский процесс с параметрами $n = 11, \alpha = 0.5$.

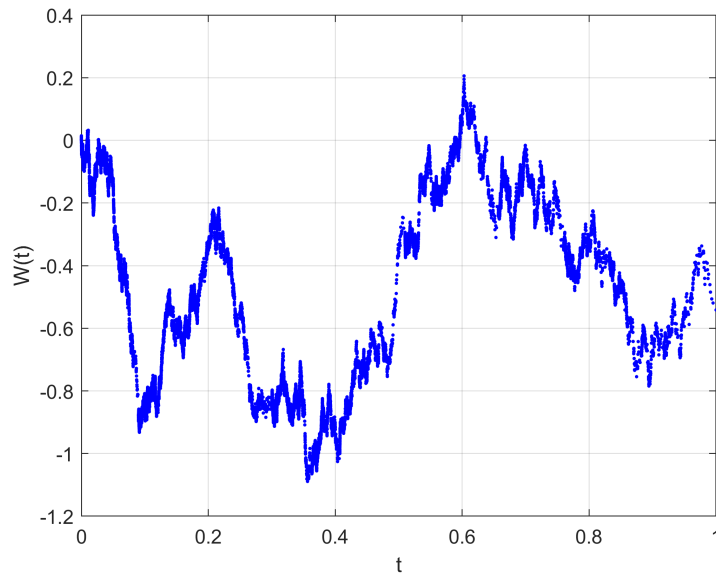


Рис. 5: Винеровский процесс с параметрами $n = 15, \alpha = 0.3$.

3.2.2 Пункт 2

Определение 5. *Случайный процесс $\{X_t | t \in T\}$ называется стационарным, если конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига времени.*

Тогда из стационарности процесса Орнштейна-Уленбека следует, что $\mathbb{E} X_t = a, R(t, s) = R(|t - s|, 0) = R(|t - s|)$. Без ограничения общности положим $a = 0, \text{Var } X_t = \sigma^2$, тогда:

$$R(t, s) = \sigma^2 \rho(|t - s|),$$

где $\rho(|t - s|) = \rho(|t - s|, 0) = \rho(t, s)$ — коэффициент корреляции X_t, X_s .

Определение 6. Случайный процесс $\{X_t | t \in T\}$ называется марковским, если $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T, B \in \mathcal{B}$ выполнено

$$\mathbb{P}(X_{t_n} \in B | X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}) = \mathbb{P}(X_{t_n} \in B | X_{t_{n-1}}).$$

Отсюда следует, что $\rho(t+s) = \rho(t)\rho(s)$.

Теорема 1. Пусть функция $u(t)$ определена $\forall t > 0$ и ограничена на каждом конечном интервале. Если $u(t)$ удовлетворяет соотношению $u(t, s) = u(t)u(s)$, то или $u(t) = 0, \forall t > 0$, или $\exists \lambda > 0 : u(t) = e^{-\lambda t}$.

Доказательство можно найти в [3].

Если $\rho(t) \equiv 0 \Rightarrow \text{Cov}(X_t, X_s) = 0$.

В силу того, что процесс $\{X_t | t \in T\}$ — гауссовский, то в данном случае X_t независимы в совокупности. Это значит, что моделирование процесса Орнштейна-Уленбека будет заключаться в генерации независимых случайных с распределением $N(a, \sigma^2)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\rho(s, t) = e^{-\lambda|t-s|}, \lambda > 0 \Rightarrow R(s, t) = \sigma^2 e^{-\lambda|t-s|}$. Найдем переходную плотность:

$$p_{X_t}(x_1 | X_s = x_2) = \frac{p_{X_t, X_s}(x_1, x_2)}{p_{X_s}(x_2)}.$$

Поскольку $\{X_t | t \in T\}$ — гауссовский, то для $\hat{x} = (x_1, x_2)'$:

$$p_{X_t, X_s}(\hat{x}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|R|}} e^{-\frac{1}{2} \hat{x}' R^{-1} \hat{x}},$$

$$p_{X_s}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}.$$

Ковариационная матрица R имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} \sigma^2 & R(t, s) \\ R(t, s) & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{|R|} \begin{pmatrix} \sigma^2 & -R(t, s) \\ -R(t, s) & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad |R| = \sigma^4 - R^2(t, s).$$

Сведя все воедино получим:

$$p_{X_t}(x_1 | X_s = x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1 - e^{-2\lambda|t-s|})}} \exp \left\{ \frac{(x_1 - x_2 e^{-\lambda|t-s|})^2}{2\sigma^2(1 - e^{-2\lambda|t-s|})} \right\}.$$

Таким образом:

$$X_t \sim N(x_2 e^{-\lambda|t-s|}, \sigma^2(1 - e^{-2\lambda|t-s|}))$$

Для непосредственного моделирования процесса рассмотрим случайные величины X_{t_1}, X_{t_2} и найдем условную плотность:

$$p_{X_t}(x|X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2) = \frac{p_{X_{t_1}, X_t, X_{t_2}}(x_1, x, x_2)}{p_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2)},$$

но в данном случае $\alpha = 0.5$, т.е. $t = (t_1 + t_2)/2$.

Обозначим $\bar{x} = (x_1, x, x_2)'$ и $\hat{x} = (x_1, x_2)'$, тогда плотности распределения этих векторов будут равны:

$$p_{X_{t_1}, X_t, X_{t_2}}(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|R_1|}} e^{-\frac{1}{2} \bar{x}' R_1^{-1} \bar{x}},$$

$$p_{X_{t_1}, X_{t_2}}(\hat{x}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|R_2|}} e^{-\frac{1}{2} \hat{x}' R_2^{-1} \hat{x}},$$

где R_1, R_2 — соответствующие матрицы ковариаций. Вспомним, что $R(t, s) = \sigma^2 e^{-\lambda|t-s|}$, поэтому:

$$R_1 = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda(t-t_1)} & e^{-\lambda(t_2-t_1)} \\ e^{-\lambda(t-t_1)} & 1 & e^{-\lambda(t_2-t)} \\ e^{-\lambda(t_2-t_1)} & e^{-\lambda(t_2-t)} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda(t_2-t_1)} \\ e^{-\lambda(t_2-t_1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя символьные вычисления *Matlab* получим окончательно:

$$X_t \sim N \left((x_1 + x_2) \frac{e^{-\frac{\lambda(t_2-t_1)}{2}}}{1 + e^{-\lambda(t_2-t_1)}}, \sigma^2 \frac{1 - e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{1 + e^{-\lambda(t_2-t_1)}} \right).$$

В качестве начальных значений возьмем: $X_0 \sim N(0, \sigma^2), X_1 \sim N(x_0 e^{-\lambda T}, \sigma^2(1 - e^{-2\lambda T}))$.

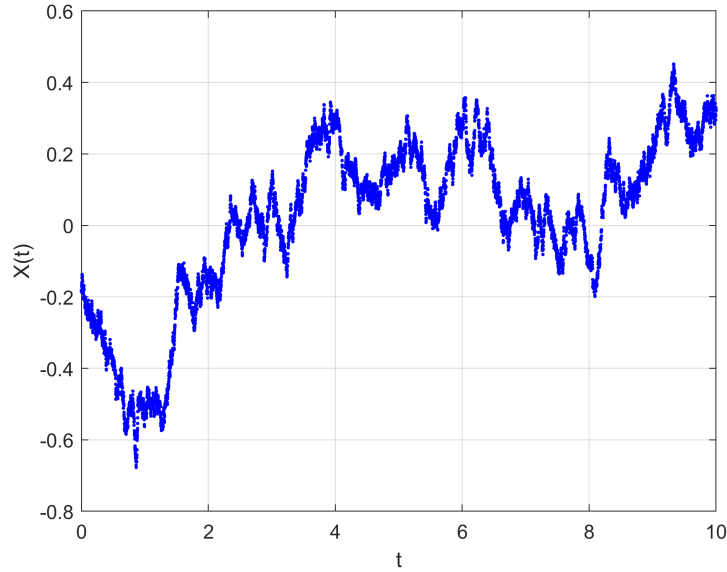


Рис. 6: Процесс Орнштейна-Уленбека с параметрами $n = 13, \lambda = 1, \sigma = 0.2$.

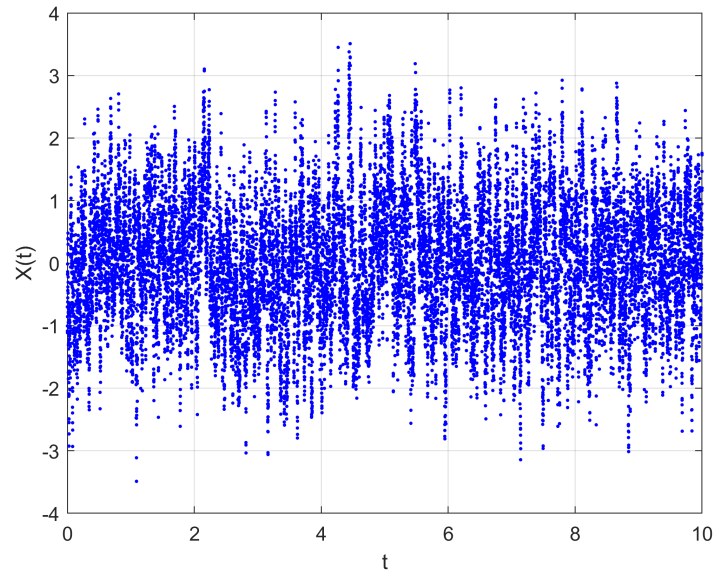


Рис. 7: Процесс Орнштейна-Уленбека с параметрами $n = 14\lambda = 100, \sigma = 1$.

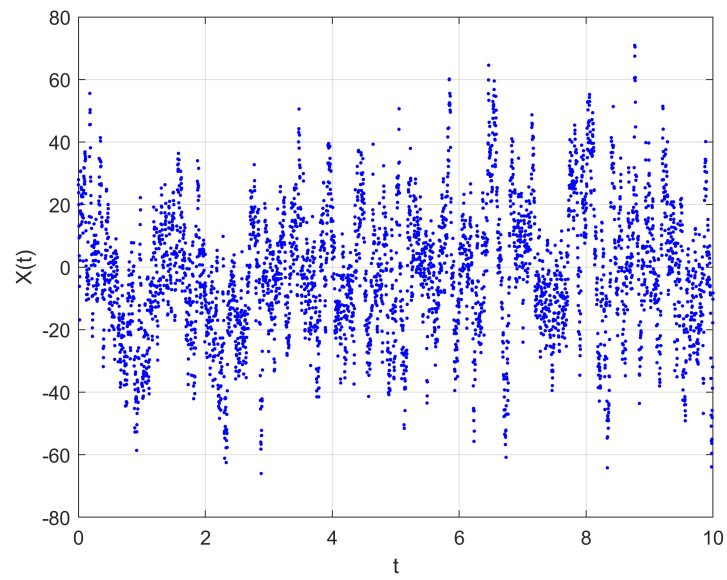


Рис. 8: Процесс Орнштейна-Уленбека с параметрами $n = 14\lambda = 30, \sigma = 20$.

4 Задание 10

4.1 Постановка задачи

Провести фильтрацию одномерного процесса Орнштейна-Уленбека:

1. Используя генератор белого шума, добавить случайную ошибку с известной дисперсией к реализации процесса Орнштейна-Уленбека.
2. При помощи одномерного фильтра Калмана оценить траекторию процесса по зашумленному сигналу. Параметры процесса и белого шума считать известными.
3. Рассмотреть случай, когда шум
 - Является гауссовским.
 - Имеет распределение Коши.

4.2 Решение задачи

Определение 7. *Дискретным белым шумом называется последовательность $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин.*

Рассматриваемый нами процесс Орнштейна-Уленбека — это марковский процесс, поэтому можно определить совместную плотность по всем моментам времени:

$$p(x_k, \dots, x_0) = p(x_k | x_{k-1}, \dots, x_0) \cdot p(x_{k-1} | x_{k-2}, \dots, x_0) \cdot \dots \cdot p(x_1 | x_0) \cdot p(x_0) = \\ = \{ \text{в силу марковского свойства} \} = p(x_k | x_{k-1}) \cdot p(x_{k-1} | x_{k-2}) \cdot \dots \cdot p(x_1 | x_0) \cdot p(x_0)$$

Рассмотрим соотношение:

$$x_{k+1} = f(x_k) + w(k), \quad (6)$$

где $w(k)$ - случайная помеха, $x_k, w(k)$ независимы и имеют гауссовское распределение, $f(x_k) = \mathbb{E}(x_{k+1} | x_k)$.

При сделанных предположениях условное математическое ожидание $\mathbb{E}(x_{k+1} | x_k)$ линейно по x_k . Тогда (6) переходит в уравнение:

$$x_{k+1} = A_k x_k + w_k.$$

Поскольку случайные величины гауссовские, то для их полного описания достаточно знать первые и вторые моменты. Обратимся к [2] и выпишем каноническую систему для нахождения исходного процесса с помощью фильтра Калмана со схемой «шагаем-меряем»:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + w_k, & k = \overline{0, N-1}, \\ y_k = C_k x_k + v_k, & k = \overline{0, N}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\{x_0, w_0, \dots, w_{N-1}, v_0, \dots, v_N\}$ независимы в совокупности, $Y_N = (y_0, \dots, y_N)$ — наблюдения, $X_N = (x_0, \dots, x_N)$ — исходный процесс, который нужно найти.

Введем обозначения $\mathbb{E} x_0 = \bar{x}_0, \mathbb{V}ar x_0 = S, \mathbb{E} w_k = \mathbb{E} v_k = 0, \mathbb{V}ar w_k = M_k, \mathbb{V}ar v_k = N_k$ и выпишем систему, реализующую фильтр Калмана:

$$\begin{cases} x_{k+1|k} = A_k x_{k|k}, \\ x_{k|k} = x_{k|k-1} + R_{k|k-1} C_k^T (C_k R_{k|k-1} C_k^T + N_k)^{-1} (y_k - C_k x_{k|k-1}), \\ R_{k+1|k} = A_k R_{k|k} A_k^T + M_k, \\ R_{k|k} = R_{k|k-1} - R_{k|k-1} C_k^T (C_k R_{k|k-1} C_k^T + N_k)^{-1} C_k R_{k|k-1}, \\ x_{0|-1} = x_0, \\ R_{0|-1} = S. \end{cases} \quad (8)$$

Так как рассматриваемая задача одномерная, то все коэффициенты системы (9) будут скалярами. Определим их. Рассмотрим уравнение для наблюдения:

$$y_k = x_k + v_k,$$

где v_k - это белый шум с дисперсией $\sigma_2 \Rightarrow N_k = \sigma_2^2, C_k = 1$. Исходя из системы (7) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar x_{k+1} &= A_k^2 \mathbb{V}ar x_k + \mathbb{V}ar w_k = A_k^2 V_k + M_k, \\ \text{Cov}(x_{k+1}, x_k) &= \mathbb{E}(x_{k+1}, x_k) - \mathbb{E} x_{k+1} \mathbb{E} x_k = A_k (\mathbb{E} x_k^2 - (\mathbb{E} x_k)^2) = A_k \mathbb{V}ar x_k = A_k V_k. \end{aligned}$$

Из задачи 9 мы знаем, что ковариационная функция для процесса Орнштейна-Уленбека с параметрами λ, σ_1 имеет вид:

$$R(t, s) = \sigma_1^2 e^{-\lambda|t-s|} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 = V_k, \\ \sigma_1^2 e^{-\lambda \Delta t} = A_k V_k, & \Delta t = t_{i+1} - t_i, \\ \sigma_1^2 = A_k^2 V_k + M_k, \end{cases}$$

Решив эту систему получим: $A_k = e^{-\lambda \Delta t}, V_k = \sigma_1^2, M_k = \sigma_1^2(1 - e^{-2\lambda \Delta t})$.

Выделим повторяющуюся компоненту:

$$h = R_{k|k-1} (R_{k|k-1} + \sigma_2^2)^{-1}.$$

Перепишем систему (9) для исследуемого процесса:

$$\begin{cases} x_{k|k} = (1 - h)x_{k|k-1} + h y_k, \\ R_{k|k} = (1 - h)R_{k|k-1}, \\ h = R_{k|k-1} (R_{k|k-1} + \sigma_2^2)^{-1}, \\ x_{k+1|k} = e^{-\lambda \Delta t} x_{k|k}, \\ R_{k+1|k} = e^{-2\lambda \Delta t} R_{k|k} + \sigma_1^2 (1 - e^{-2\lambda \Delta t}), \\ x_{0|-1} = 0, \\ R_{0|-1} = \sigma_1^2. \end{cases} \quad (9)$$

Доверительный интервал задается уравнением:

$$x_k + k_{(1-\alpha)/2} [-R_{k|k}, R_{k|k}],$$

где α — уровень значимости, а $k_{(1-\alpha)/2}$ — квантиль нормального распределения.

Рассмотрим примеры работы программы.

- Случай, когда шум имеет гауссовское распределение:

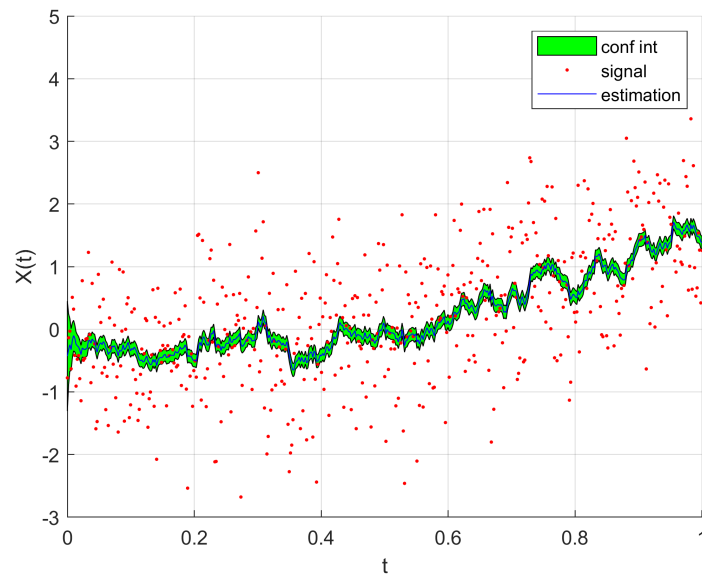


Рис. 9: Процесс с параметрами $\lambda = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.9, T = 1$.

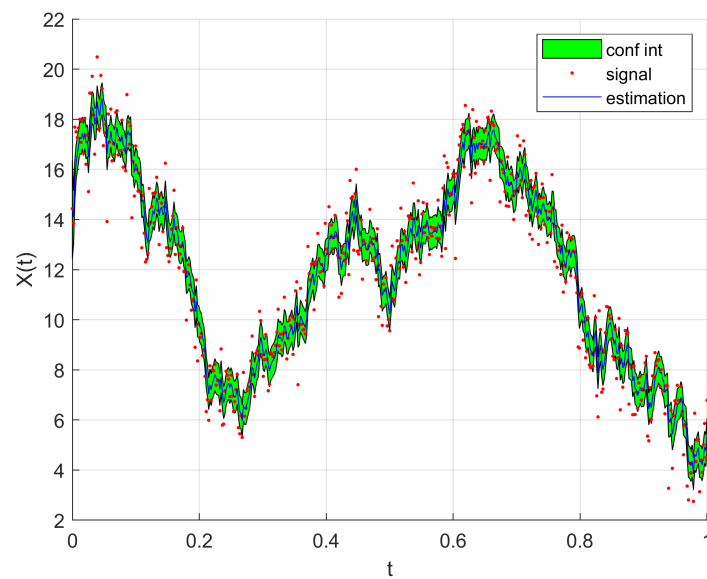


Рис. 10: Процесс с параметрами $\lambda = 0.1, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 1, T = 1$.

Как мы видим, на рисунках четко выделяется траектория исходного процесса, т.е. действительно произошла фильтрация.

- Случай, когда шум имеет распределение Коши:

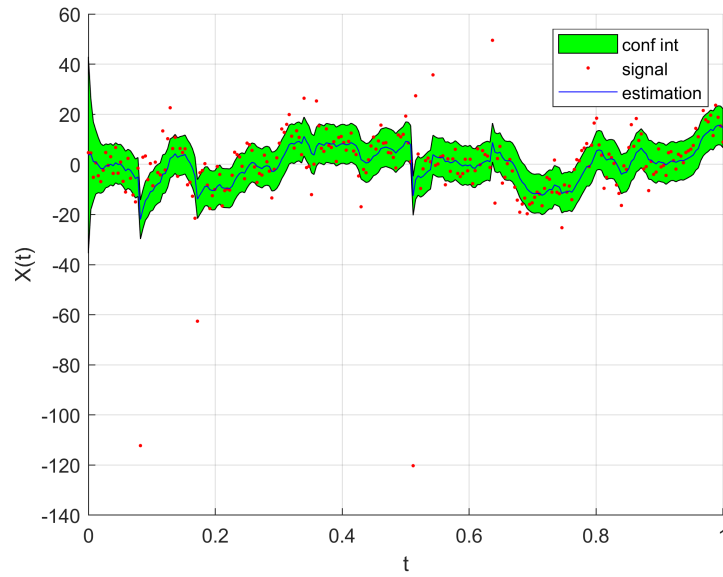


Рис. 11: Процесс с параметрами $\lambda = 0.1, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = 10, T = 1$. Шум с $\gamma = 5$.

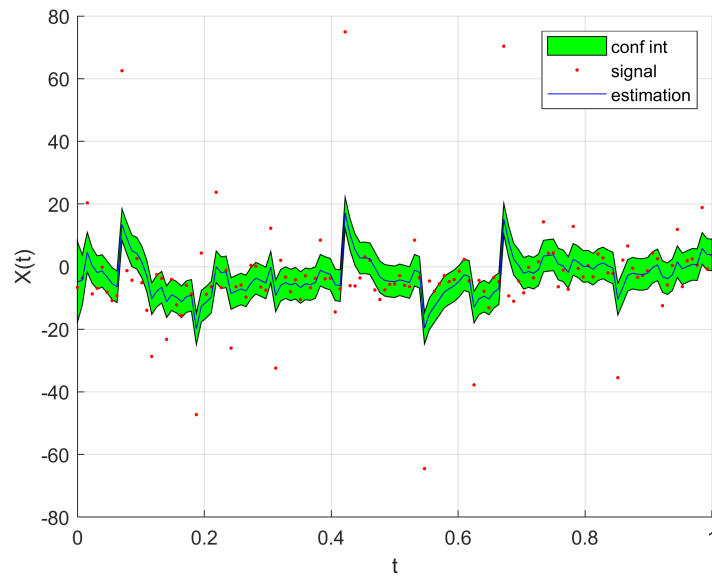


Рис. 12: Процесс с параметрами $\lambda = 0.1, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = 3, T = 1$. Шум с $\gamma = 3$.

Как мы видим, траектория процесса — это либо почти весь зашумленный сигнал, либо траектория просто повторяет форму входного сигнала, фильтрация не работает. Это происходит из-за того, что распределение Коши не имеет ни первых, ни вторых моментов, поэтому фильтр Калмана для таких шумов не применим.

5 Задание 11

5.1 Постановка задачи

Построить двумерное пуассоновское поле, отвечающее сложному пуассоновскому процессу:

1. Первая интерпретация: система массового обслуживания. При этом, первая координата поля — время поступления заявки в СМО (равномерное распределение), вторая — время ее обслуживания (распределение χ^2 с 10 степенями свободы).
2. Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью $\lambda(1+\cos(t))$ и единичными скачками. Свести данную задачу моделирования неоднородного пуассоновского процесса при помощи метода Льюиса и Шедлеара к моделированию двумерного пуассоновского поля, где первая координата имеет равномерное распределение, а вторая — распределение Бернулли.
3. Третья интерпретация: работа страховой компании. Первая координата — момент наступления страхового случая (равномерное распределение), вторая координата — величина ущерба (распределение Парето). Поступления капитала по времени линейно со скоростью $c > 0$, начальный капитал $W > 0$.
4. Для каждой системы рассмотреть всевозможные случаи поведения системы в зависимости от значения параметров.

5.2 Решение задачи

5.2.1 Пункт 1

Будем моделировать систему по следующему алгоритму:

1. Генерируем время поступления заявок на интервале $[0; T]$:

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T,$$

где $t_i - t_{i-1} \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ — интенсивность процесса Пуассона.

2. Генерируем время обработки заявок s_i с помощью распределения χ^2 с 10 степенями свободы.
3. Для каждой заявки рассмотрим время окончания ее выполнения q_i и количество заявок в очереди n_i :
 - К моменту поступления заявки t_i очереди нет, т.е. $q_{i-1} < t_i$. Тогда $q_i = t_i + s_i$, и $n_i = 0$.
 - К моменту поступления заявки t_i какая-то заявка выполняется, т.е. $q_{i-1} \geq t_i$. Пусть выполнено только n_{fin} заявок к предыдущему моменту t_{i-1} . Тогда мы пересчитываем n_{fin} для данного момента (т.е. находим самую позднюю заявку fin для которой $q_{fin} \leq t_i$) и кладем $n_i = i - n_{fin}$, $q_i = q_{i-1} + s_i$.

В среднем, время обслуживания составляет,

$$\mathbb{E} s_i = 10,$$

а среднее время поступления новой заявки равно:

$$\mathbb{E}(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда при $\lambda < 0.1$ система будет справляться, при $\lambda > 0.1$ очередь будет неограниченно расти. При $\lambda = 0.1$ будет некоторое промежуточное состояние.

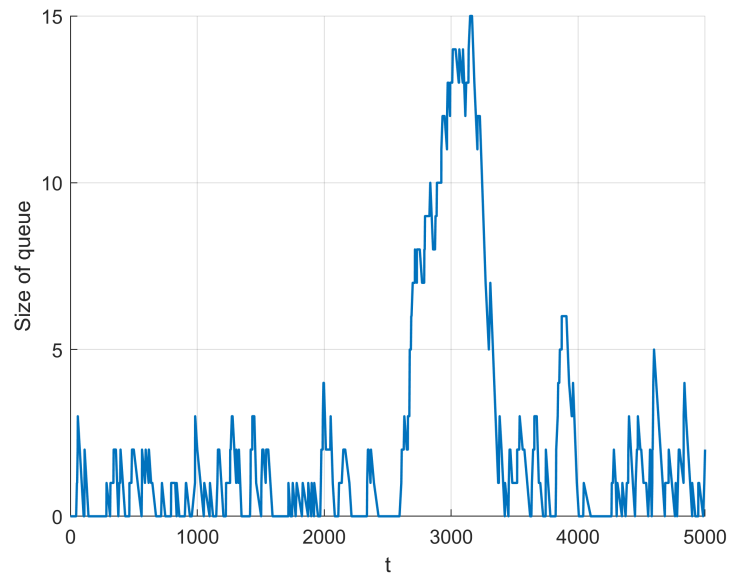


Рис. 13: СМО справляется с очередью, $\lambda = 0.07$.

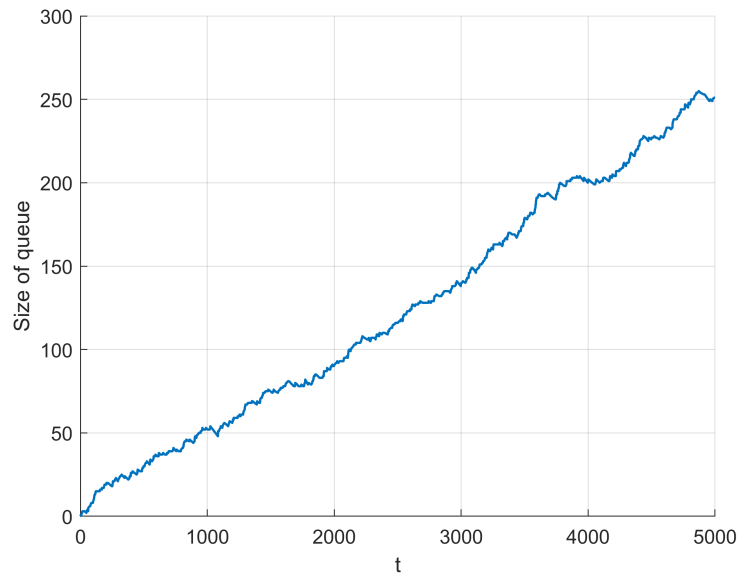


Рис. 14: СМО не справляется с очередью, $\lambda = 0.15$.

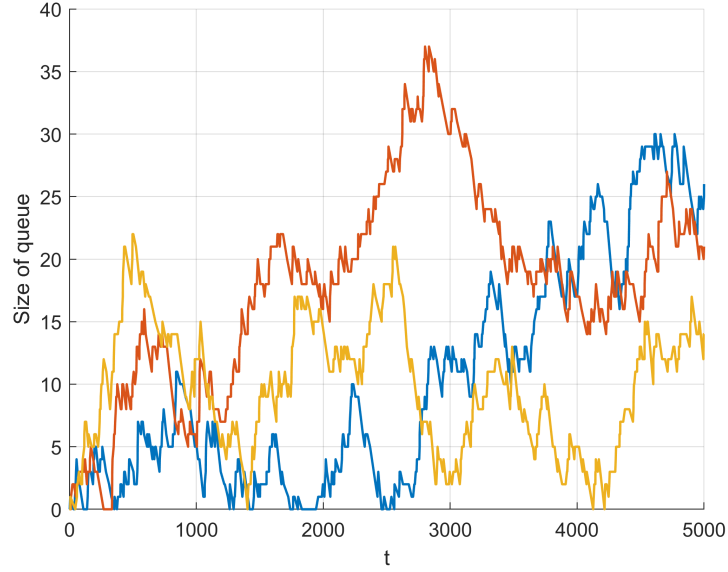


Рис. 15: СМО в промежуточном состоянии, $\lambda = 0.1$.

5.2.2 Пункт 2

Теперь рассмотрим СМО с циклической интенсивностью $\lambda(t) = \lambda_0(1 + \cos(t))$. Интегральная интенсивность $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x)dx = \lambda_0(1 + \sin(t))$.

Теорема 2. Рассмотрим одномерный неоднородный процесс Пуассона $[N^*(x) : x \geq 0]$ с интенсивностью $\lambda^*(x)$ такой, что число точек $N^*(x_0)$ на фиксированном интервале $(0; x_0]$ имеет распределение Пуассона с параметром $\mu_0^* = \Lambda^*(x_0) - \Lambda^*(0)$. Положим $X_1^*, X_2^*, \dots, X_{N^*(x_0)}^*$ точками данного процесса на $(0; x_0]$. Предположим, что при $0 \leq x \leq x_0$, $\lambda(x) \leq \lambda^*(x)$. Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, удаляем точку X_i^* с вероятностью $1 - \lambda(x_i^*)/\lambda^*(x_i^*)$. После этого оставшиеся точки будут образовывать неоднородный процесс Пуассона $[N(x) : x \geq 0]$ с интенсивностью $\lambda(x)$ на интервале $(0; x_0]$.

Доказательство этой теоремы приведено в [4].

В соответствии с теоремой будем моделировать наш процесс по следующему алгоритму:

- Генерируем времена поступления заявок процесса $N^*(t) : X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ с частотой $\lambda^*(x) = 2$ (см. 5.2.1).
- Генерируем вектор U из n независимых с.в. с равномерным распределением на $[0; 1]$. Формируем вектор времен поступления заявок процесса $N(t)$, из тех X_i^* , для которых $U_i \leq \lambda(x_i^*)/\lambda^*(x_i^*)$, не меняя их порядка.

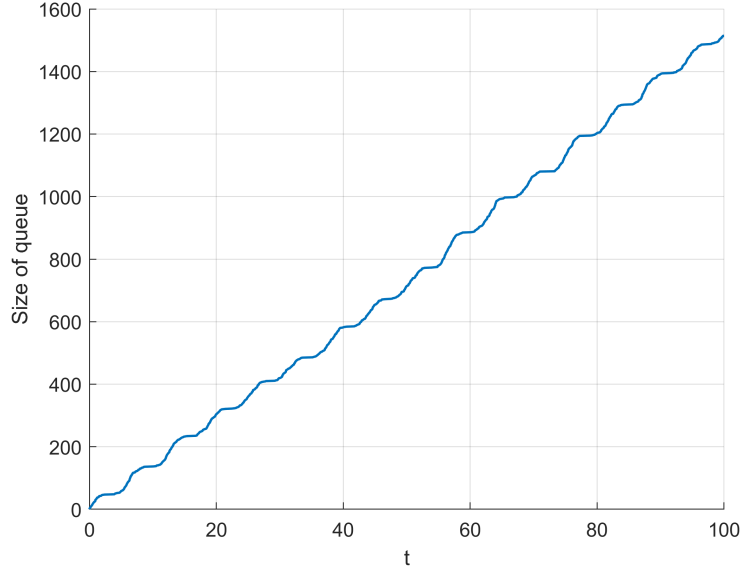


Рис. 16: СМО с циклической частотой при $\lambda_0 = 15$.

5.2.3 Пункт 3

Определение 8. *Случайная величина ξ называется случайной величиной, имеющей распределение Парето с параметрами x_m, k , если ее функция распределения имеет вид:*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^k \quad \forall x \geq x_m, \quad x_m, k > 0.$$

Аналогично пункту 1 задачи, генерируем вектор поступления страховых случаев на $[0; T]$. Величину ущерба s_i будем генерировать с помощью распределения Парето с параметрами x_m, k .

Случайную величину, распределенную по Парето, будем генерировать методом обратных функций:

$$F^{-1}(y) = \frac{x_m}{(1 - y)^{\frac{1}{k}}}. \quad (10)$$

Как отмечалось ранее, если $Y \sim U[0; 1]$, то с.в., полученная по правилу (10), будет иметь ту же функцию распределения, что мы обратили:

$$Y \sim U[0, 1] \Rightarrow s_i = x_m Y^{-\frac{1}{k}} \sim P(x_m, k).$$

Величина капитала компании в момент времени t :

$$W(t) = W_0 + ct - s(t),$$

где $s(t) = \sum_i s_i \mathbb{I}(t_i \leq t)$ — суммарный ущерб от наступивших страховых случаев.

Заметим, что s_i и t_i являются независимыми случайными величинами и $\mathbb{E} \sum_i \mathbb{I}(t_i \leq t) = t/\lambda$.

Проанализируем динамику $\mathbb{E} W(t)$ с течением времени:

$$(\mathbb{E} W(t))' = c - (\mathbb{E} s(t))' = c - \mathbb{E} s_i \left(\mathbb{E} \sum_i \mathbb{I}(t_i \leq t) \right)' = c - \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} s_i,$$

$$\mathbb{E} s_i = \begin{cases} \frac{kx_m}{k-1}, & k > 1 \\ +\infty, & k \leq 1. \end{cases}$$

Итого:

$$(\mathbb{E} W(t))' = \begin{cases} c - \frac{1}{\lambda} \frac{kx_m}{k-1}, & k > 1 \\ -\infty, & k \leq 1. \end{cases}$$

Время разорения— это случайная величина, задаваемая условием:

$$T = \min\{t > 0 | W(t) < 0\}$$

Это значит, что:

- при $c > \frac{1}{\lambda} \frac{kx_m}{k-1}$ капитал будет возрастать:

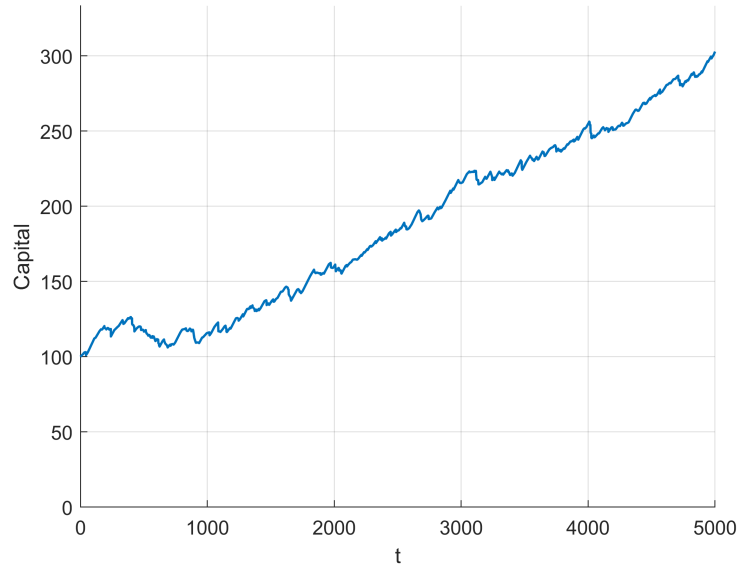


Рис. 17: Капитал при $W_0 = 100, \lambda = 0.1, k = 3, x_m = 1, c = 0.2, T = 5000$.

- при $c < \frac{1}{\lambda} \frac{kx_m}{k-1}$ капитал будет убывать, и компания в какой-то момент разорится:

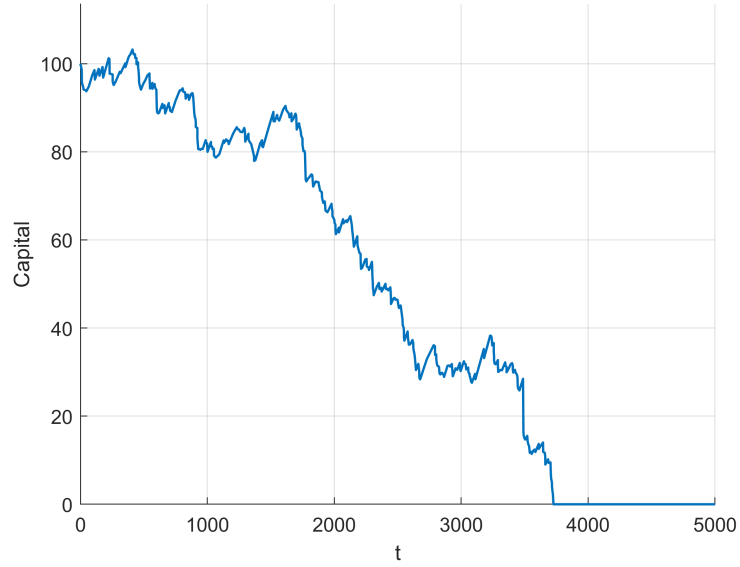


Рис. 18: Капитал при $W_0 = 100, \lambda = 0.1, k = 3, x_m = 1, c = 0.13, T = 5000$.

- при $c = \frac{1}{\lambda} \frac{kx_m}{k-1}$ капитал будет находится в положении равновесия:

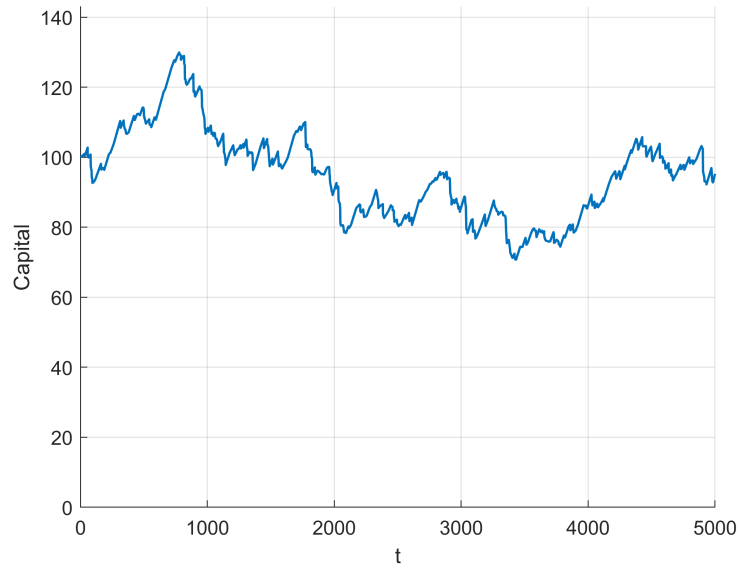


Рис. 19: Капитал при $W_0 = 100, \lambda = 0.1, k = 3, x_m = 1, c = 0.15, T = 5000$.

6 Библиография

Список литературы

- [1] С. Н. Смирнов *Лекции по стохастическому анализу*, 2019.
- [2] И. В. Востриков *Лекции по теории идентификации*, 2019.
- [3] В. Феллер *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, том 1. М: Мир, 1984.
- [4] P. A. W. Lewis *Simulation of nonhomogeneous poisson proesses by thinning*, 1979.