



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

## «Стохастический анализ и моделирование»

*Студент 415 группы*  
И. А. Кулешов

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н, доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	3
1.2	Решение задачи . . . . .	3
1.2.1	Пункт 1 . . . . .	3
1.2.2	Пункт 2 . . . . .	4
1.2.3	Пункт 3 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Задание 2</b>	<b>6</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	6
2.2	Решение задачи . . . . .	7
2.2.1	Пункт 1 . . . . .	7
2.2.2	Пункт 2 . . . . .	8
2.2.3	Пункт 3 . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Задание 3</b>	<b>11</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	11
3.2	Решение задачи . . . . .	11
3.2.1	Пункт 1 . . . . .	11
3.2.2	Пункт 2 . . . . .	13
3.2.3	Пункт 3 . . . . .	14
3.2.4	Пункт 4 . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Задание 4</b>	<b>17</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	17
4.2	Решение задачи . . . . .	17
4.2.1	Пункт 1 . . . . .	17
4.2.2	Пункт 2 . . . . .	18
4.2.3	Пункт 3 . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Задание 5</b>	<b>22</b>
5.1	Постановка задачи . . . . .	22
5.2	Решение задачи . . . . .	22
5.2.1	Пункт 1 . . . . .	22
5.2.2	Пункт 2 . . . . .	23
5.2.3	Пункт 3 . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Задание 6</b>	<b>26</b>
6.1	Постановка задачи . . . . .	26
6.2	Решение задачи . . . . .	26
6.2.1	Пункт 1 . . . . .	26
6.2.2	Пункт 2 . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Библиография</b>	<b>30</b>

# 1 Задание 1

## 1.1 Постановка задачи

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха  $p$ . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотреть игру в орлянку – бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш  $S_n$  определяется как сумма по всем  $n$  испытаниям значений 1 или  $-1$  в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломаной) поведение нормированной суммы  $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$  как функцию от номера испытания  $i = 1, \dots, n$  для одной отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для  $Y(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## 1.2 Решение задачи

### 1.2.1 Пункт 1

**Определение 1.** *Схемой Бернулли с заданной вероятностью успеха  $p$  называется эксперимент, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1. *Отсутствие взаимного влияния между испытаниями в эксперименте.*
2. *Воспроизводимость испытаний (испытания производятся в сходных условиях).*
3. *В каждом испытании можно выделить признак, который может проявиться с определенной вероятностью  $p$ .*

**Определение 2.** *Случайная величина  $X$ , которая принимает значение 1, когда признак реализуется, и 0, когда он не реализуется, в схеме Бернулли из 1 испытания называется бернуллиевской. Обозначение:  $X \sim \text{Bern}(p)$ .*

В таком случае мы можем реализовать генератор схемы Бернулли на основе датчика случайной величины, распределенной равномерно  $\xi \sim U[0; 1]$  следующим образом:

$$X = \begin{cases} 1, & \xi \in [0, p), \\ 0, & \xi \in [p, 1]. \end{cases}$$

**Определение 3.** *Случайная величина*

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k, \quad X_k \sim \text{Bern}(p), \quad k = \overline{1, n}$$

*имеет по определению биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p$ . Обозначение:  $Y \sim B(n, p)$ .*

Теоретическое распределение:

$$\mathbb{P}(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

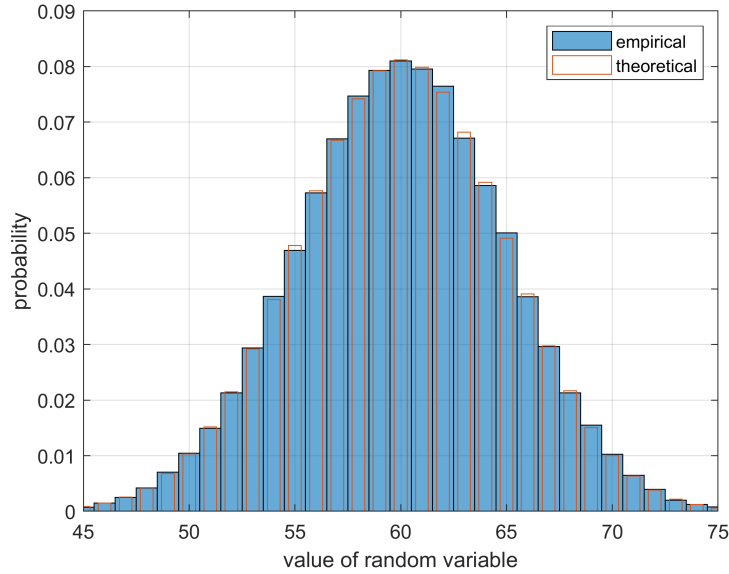


Рис. 1: Гистограмма биномиального распределения с параметрами  $p = 0.6$ ,  $n = 100$ .  
Размер выборки  $10^5$ .

### 1.2.2 Пункт 2

**Определение 4.** Распределение случайной величины, равной количеству неудач до появления первого успеха в схеме Бернулли с параметром  $p$ , называется геометрическим распределением. Обозначение:  $Z \sim \text{Geom}(p)$ .

Теоретическое распределение:

$$\mathbb{P}(Z = k) = (1 - p)^k p.$$

**Утверждение 1.** Если  $Z \sim \text{Geom}(p)$ , то выполняется

$$\mathbb{P}(Z > m + n \mid Z \geq m) = \mathbb{P}(Z > n)$$

для любых целых неотрицательных  $n$  и  $m$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > m + n \mid Z \geq m) &= \frac{\mathbb{P}(Z > m + n, Z \geq m)}{\mathbb{P}(Z \geq m)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z > m + n)}{\mathbb{P}(Z \geq m)} = \frac{(1 - p)^{m+n+1}}{(1 - p)^m} = (1 - p)^{n+1} = \mathbb{P}(Z > n) \end{aligned} \quad (1)$$

□

Это называют свойством отсутствия памяти у геометрического распределения.

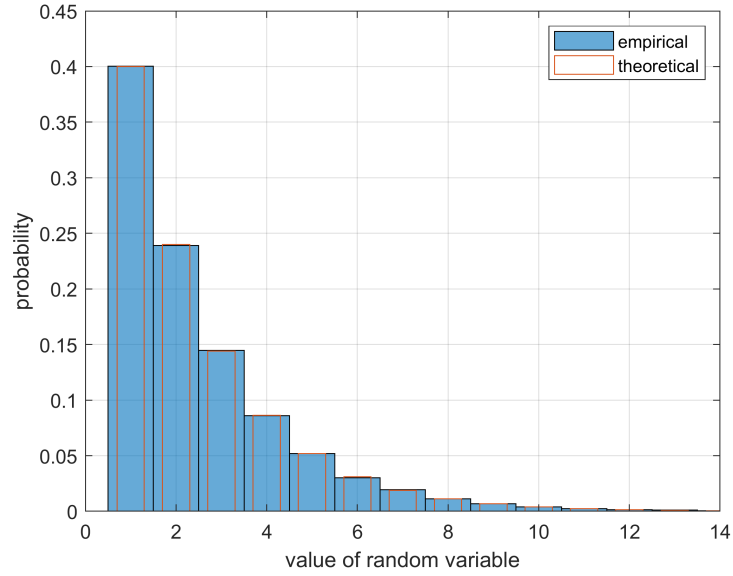


Рис. 2: Гистограмма геометрического распределения с параметром  $p = 0.4$ .  
Размер выборки  $10^5$ .

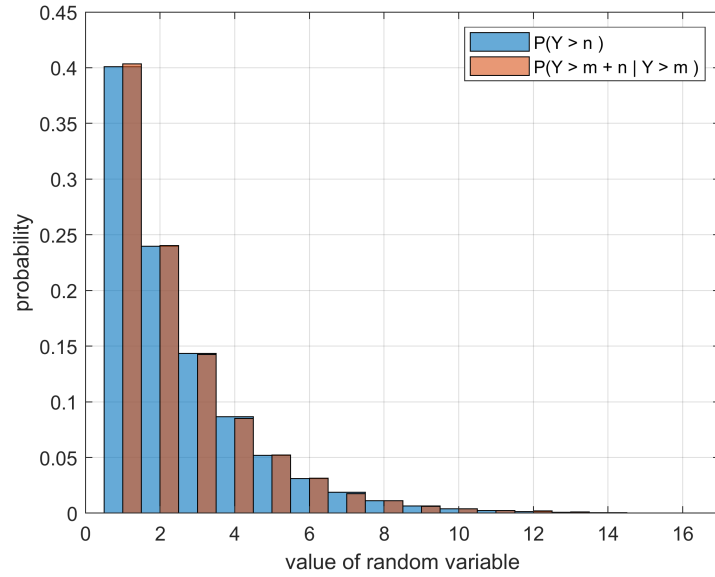


Рис. 3: Свойство отсутствия памяти геометрического распределения.  
Параметры:  $p = 0.4$ ,  $n = 1$  и  $m = 6$ , размер выборки  $10^5$ .

### 1.2.3 Пункт 3

Рассмотрим игру в орлянку.

#### Теорема 1. ЦПТ

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — последовательность невырожденных н.о.р.с.в. с  $\mathbb{E} X_1^2 < \infty$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Тогда для  $\forall x \in \mathbb{R}$  имеем

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \leq x \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

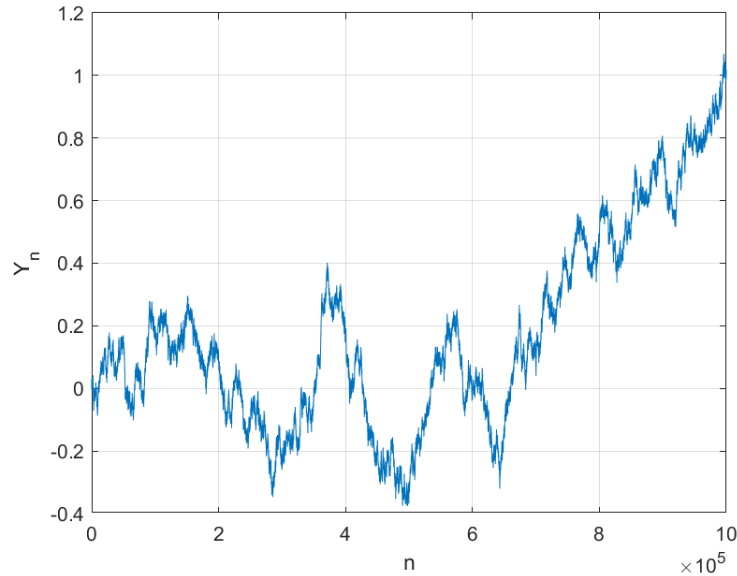


Рис. 4: Одна из траекторий игры в орлянку при  $10^5$  бросаний монеты.

В нашем случае  $\mathbb{E} X_1 = a = 0$ ,  $\text{Var } X_1 = \sigma^2 = 1$ .  
Оценим  $S_n/\sqrt{n}$ . По ЦПТ получаем:

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right| \leq t_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\} = \gamma$$

По таблице квантилей нормального распределения найдем значение  $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ .

Окончательно получим доверительный интервал с коэффициентом доверия  $\gamma = 0.95$  :

$$-1.96 \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq 1.96,$$

что совпадает с иллюстрацией.

## 2 Задание 2

### 2.1 Постановка задачи

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно  $\frac{1}{2}$  ( $X$  и  $1 - X$  распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение  $Y$  при условии  $Y \in [0, 1/3]$  совпадает с распределением  $\frac{Y}{3}$ ) с помощью критерия Смирнова.
3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

## 2.2 Решение задачи

### 2.2.1 Пункт 1

**Определение 5.** Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывна и ее множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

Заметим, что канторово множество можно представить как множество всех  $x \in [0, 1]$ , представление которых в троичной системе счисления содержит только цифры 0 и 2. Соответственно их можно сгенерировать следующим образом:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k},$$

где  $\alpha_k \sim \text{Bern}(0.5)$ . Значения функции Кантора  $C(x)$  будут определяться путем замены всех цифр 2 числа  $x$  в троичной системе на 1 и трактовкой полученного числа в двоичной системе счисления.

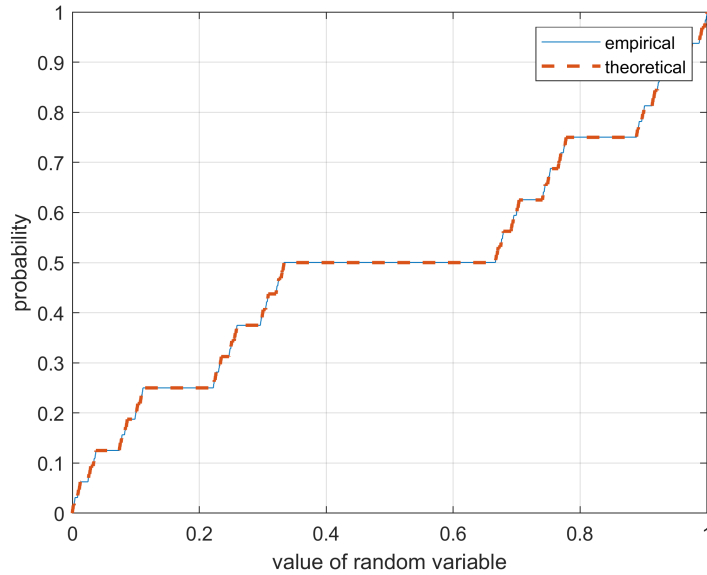


Рис. 5: Каторова функция при  $n = 10^6$ .

Пусть у нас есть эмпирическая функция распределения  $F_n(x)$ , построенная по выборке  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , и предполагаемая функция распределения  $F(x)$ . Статистику критерия Колмогорова определим следующим образом:

$$D_n = \sup_x |F(x) - F_n(x)|.$$

#### Принятие решения по критерию Колмогорова:

Если  $p_{value}$ , равное  $p = 1 - K(\sqrt{n}D_n)$ , где  $K(x)$  — это функция распределения Колмогорова, превышает уровень значимости  $\alpha$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  о соответствии закону  $F(x)$  принимается. Иначе гипотеза отвергается на уровне  $\alpha$ .

$N$	частота принятия гипотезы
$10^2$	0.96
$10^3$	0.948

Таблица 1: Результаты проверки сингулярности генрируемого распределения при  $\alpha = 0.05$ .

### 2.2.2 Пункт 2

Пусть случайная величина  $Y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k}$ , где  $\alpha \sim \text{Bern}(0.5)$ . Рассмотрим случайную величину  $1 - Y$ , чтобы показать симметрию распределения относительно  $\frac{1}{2}$ :

$$1 - Y = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - \alpha_k)}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta_k}{3^k},$$

где  $\beta_k \sim \text{Bern}(0.5)$ . Это значит, что случайные величины  $1 - Y$  и  $Y$  распределены одинаково.

Проверим справедливость данного свойства при помощи критерия Смирнова. Пусть у нас есть две эмпирические функции распределения  $F_{1,n}(x)$  и  $F_{2,m}(x)$ , построенные по выборкам  $X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $X_2 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  соответственно. Статистику критерия Смирнова определим следующим образом:

$$D_{n,m} = \sup_x |F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x)|.$$

#### Принятие решения по критерию Смирнова:

Если  $p_{value}$ , равное  $p = 1 - K\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}\right)$ , где  $K(x)$  — это функция распределения Колмогорова, превышает уровень значимости  $\alpha$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  об идентичности распределений выборок  $X_1$  и  $X_2$  принимается. Иначе гипотеза отвергается на уровне  $\alpha$ .

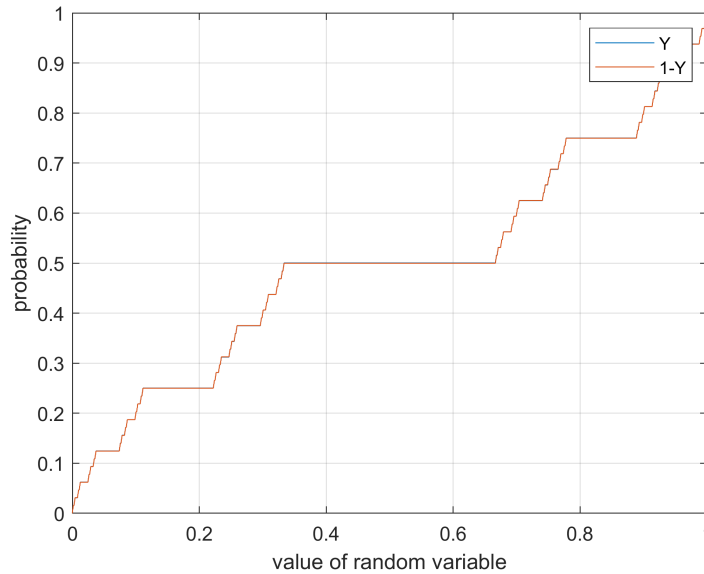


Рис. 6: Симметрия относительно  $1/2$  при  $n = 10^6$ .



$N$	частота принятия гипотезы
$10^2$	0.9
$10^3$	0.902

Таблица 2: Результаты проверки симметричности относительно  $1/2$  при  $n = 10^6, \alpha = 0.05$ .

Рассмотрим условное распределение  $Y$  при условии, что  $Y \in [0; \frac{1}{3}]$ . Из построения  $Y$  видно, что  $Y \in [0; \frac{1}{3}]$ , если  $\alpha_1 = 0$ . Получаем:

$$Y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_{k+1}}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \frac{1}{3}Y.$$

$N$	частота принятия гипотезы
$10^2$	0.97
$10^3$	0.968

Таблица 3: Результаты проверки самоподобия относительно деления на 3 при  $n = 10^6, \alpha = 0.05$ .

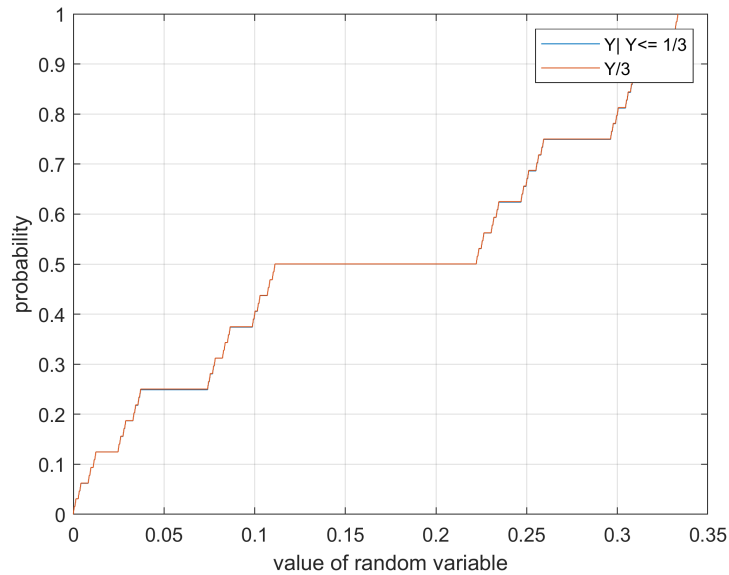


Рис. 7: Самоподобие относительно деления на 3 при  $n = 10^6$ .

### 2.2.3 Пункт 3

Вычислим математическое ожидание и дисперсию для данного распределения:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Y &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \mathbb{E} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{V}ar Y &= \mathbb{V}ar \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{3^k} \right)^2 \mathbb{V}ar \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{9^k} \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_k \sim Bern(0.5)$ .

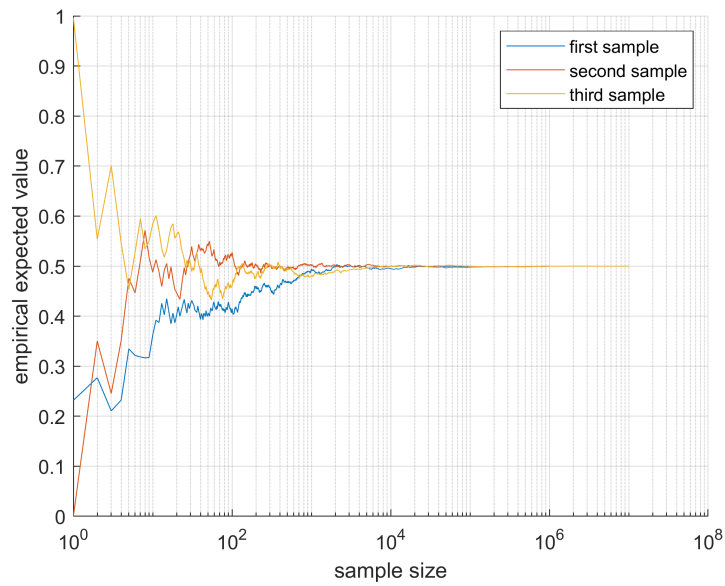


Рис. 8: Сходимость математического ожидания к  $1/2$  для нескольких выборок.

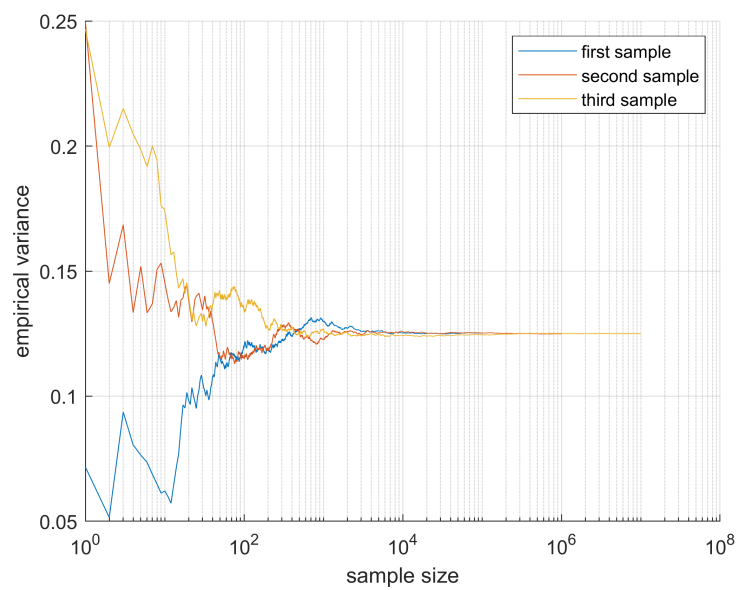


Рис. 9: Сходимость дисперсии к  $1/8$  для нескольких выборок.

По иллюстрациям видно, что и математическое ожидание, и дисперсия сходятся к соответствующим теоретически предсказанным величинам.

## 3 Задание 3

### 3.1 Постановка задачи

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – независимо экспоненциально распределенные с.в. с параметрами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  соответственно. Найти распределение случайной величины  $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.
4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи критерия t-Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

### 3.2 Решение задачи

#### 3.2.1 Пункт 1

**Определение 6.** Случайная величина  $\xi$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda > 0$ , если её функция распределения имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $F(x)$  непрерывна и монотонно возрастает на  $\mathbb{R}$ , причем  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ , случайная величина  $Y \sim U[0; 1]$  распределение, то случайная величина  $X = F^{-1}(Y)$  имеет функцию распределения  $F_X(x) = F(x)$ .

Доказательство можно найти в [3].

Применим эту теорему для моделирования датчика экспоненциального распределения на основе датчика равномерного.

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow F_\xi^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x).$$

Таким образом, если  $Y \sim U[0; 1]$ , то

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$$

имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ .

**Утверждение 2.** Если  $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ , то выполняется

$$P(Z > t + s \mid Z > t) = P(Z > s)$$

для любых неотрицательных  $t$  и  $s$ .

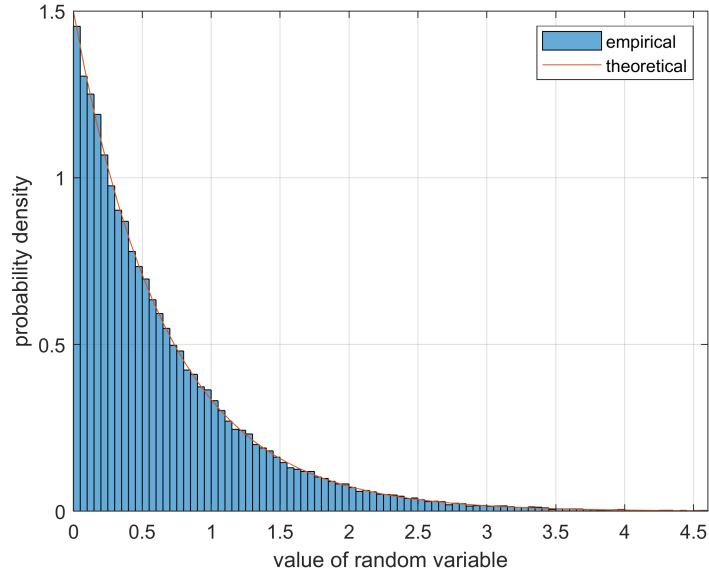


Рис. 10: Экспоненциальное распределение при  $\lambda = 1.5$ .

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}(Z > t + s \mid Z > t) = \frac{\mathbb{P}(Z > t + s, Z > t)}{\mathbb{P}(Z > t)} = \frac{\mathbb{P}(Z > t + s)}{\mathbb{P}(Z > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(Y > n) \quad (2)$$

□

Это называют свойством отсутствия памяти у экспоненциального распределения.

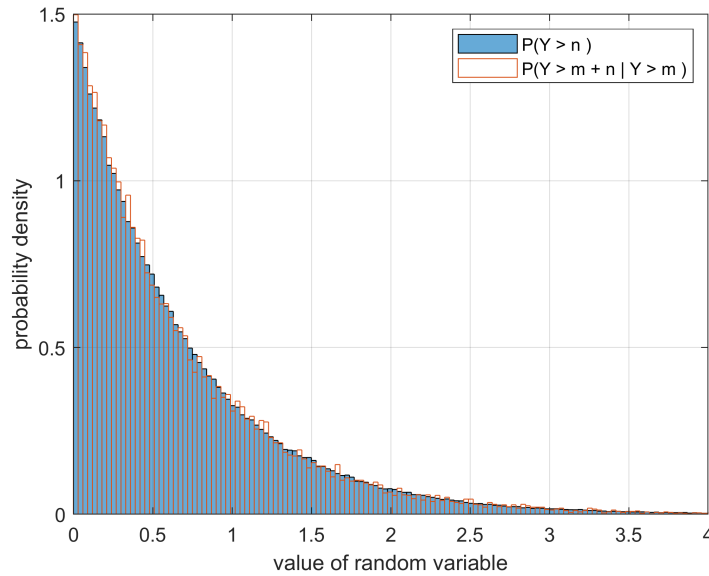


Рис. 11: Свойство отсутствия памяти экспоненциального распределения.

Параметры:  $\lambda = 1.5, n = 0.4, m = 1.5$ , размер выборки  $10^6$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — н.о.р.с.в.:  $X_k \sim \text{Exp}(\lambda_k)$ .

Тогда  $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\lambda_0)$ ,  $\lambda_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > x) = \\ &= \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda_k x) = \exp(-x \sum_{k=1}^n \lambda_k). \end{aligned} \quad (3)$$

□

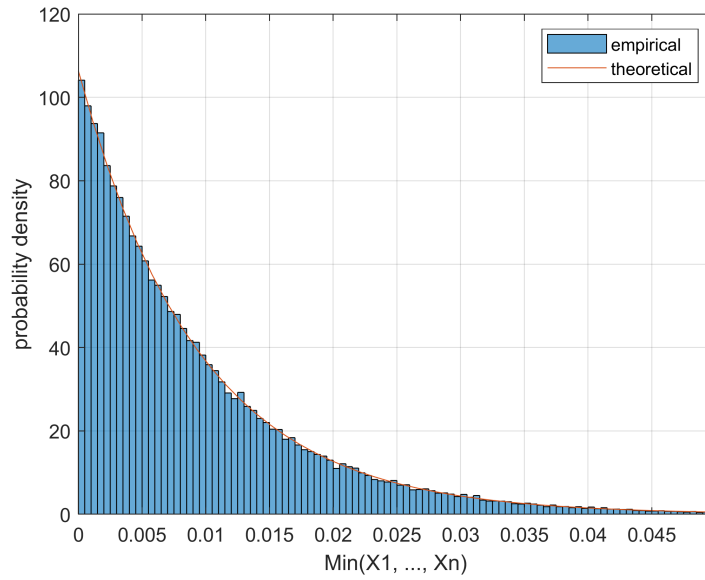


Рис. 12: Распределение минимума из вектора экспоненциально распределенных с.в. для  $N = 10^4$  выборок. Параметры:  $\lambda_0 \approx 106.4$ , размер выборки 100.

### 3.2.2 Пункт 2

**Определение 7.** Случайная величина  $X$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ , если

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N} \cup 0.$$

**Теорема 3.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \sim \text{Exp}(\lambda)$  — н.о.р.с.в. Тогда случайная величина

$$Y = \max_n (S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n) < 1$$

имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ . Если  $X_1 \geq 1$ , то  $Y = 0$ .

Доказательство этой теоремы можно найти в [2].

Таким образом, будем разыгрывать случайные величины  $X_k \sim \text{Exp}(\lambda)$  до тех пор, пока их сумма  $S_n$  не превысит 1, и положим  $Y = n - 1$ .

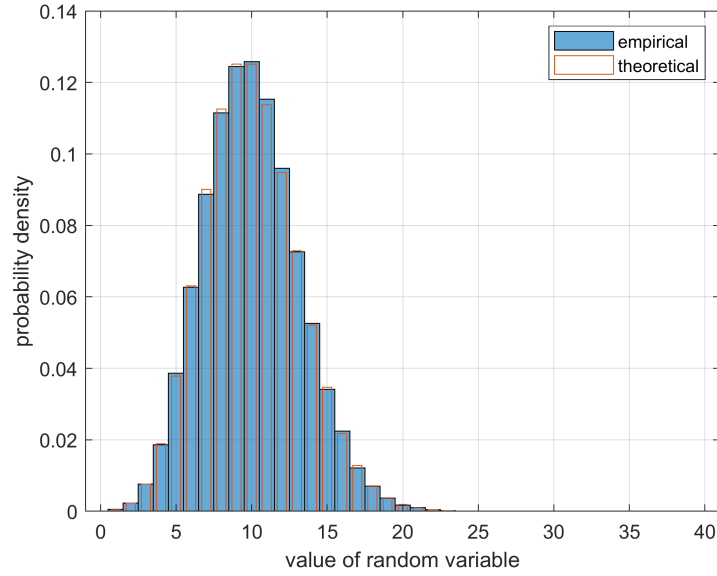


Рис. 13: Распределение Пуассона, полученное на основе экспоненциального распределения.  
 Параметры:  $\lambda = 10$ , размер выборки  $10^5$ .

### 3.2.3 Пункт 3

Другой способ моделирования пуассоновской случайной величины основывается на теореме Пуассона:

**Теорема 4.** Пусть случайная величина  $X \sim Bi(n, p)$ . Пусть  $np = \lambda = const$ .  
 Тогда при

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

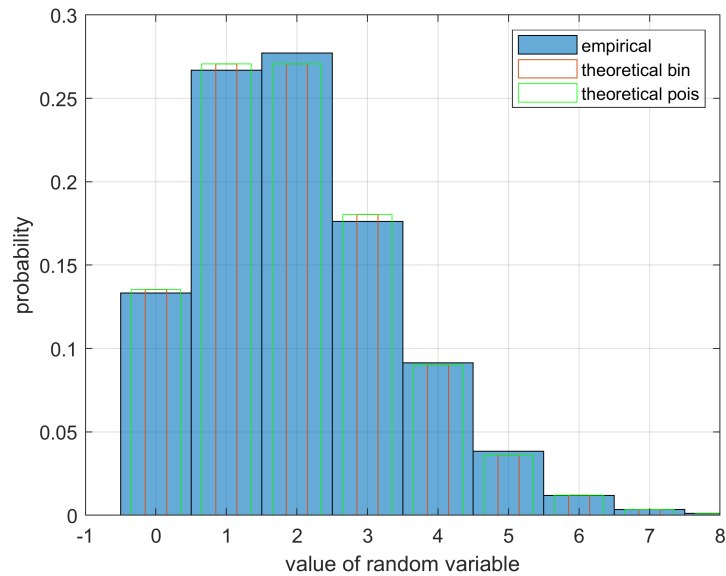


Рис. 14: Распределение Пуассона как предел биномиального.  
 Параметры:  $\lambda = 2$ , размер выборки  $10^4$ .

Проверим результаты при помощи критерия Пирсона. Исследуемое распределение принимает только целые неотрицательные значения. Обозначим за  $n_i$  количество элементов в выборке равных  $i$ . Обозначим за  $k$  максимальное значение в выборке. Построим статистику критерия  $X^2$  Пирсона:

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{\left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)^2}{p_i},$$

где  $p_i = \mathbb{P}(Z = i)$ ,  $Z \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

Гипотеза о пуассоновском распределении построенной выборки принимается на уровне значимости  $\alpha$ , если вычисленное значение статистики  $X_n^2$  не превосходит квантиль  $\chi_{1-\alpha, r}^2$  распределения  $\chi_r^2$ , где  $r = k - 1$ .

$N$	частота принятия гипотезы
$10^2$	0.92
$10^3$	0.894

Таблица 4: Проверка генерируемого распределения Пуассона как предела биномиального при  $n = 10^3$ , размер выборки  $10^4$  и уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

### 3.2.4 Пункт 4

Для моделирования стандартного нормального распределения рассмотрим случайную величину  $X = \{X_1, X_2\} \sim N(0, 1)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} d\xi d\eta = \left\{ \begin{array}{l} \xi = \rho \cos \phi, \\ \eta = \rho \sin \phi, \\ J = \rho \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\substack{\rho \cos \phi < x_1 \\ \rho \sin \phi < x_2}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho d\phi = \{\omega = \rho^2\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\substack{\sqrt{\omega} \cos \phi < x_1 \\ \sqrt{\omega} \sin \phi < x_2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{\omega}{2}} d\omega d\phi. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение является произведением плотностей случайных величин  $Y_1 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$  и  $Y_2 \sim U[0; 2\pi]$ . Таким образом, совместное распределение случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  совпадает с совместным распределением

$$\{\sqrt{Y_1} \cos Y_2, \sqrt{Y_1} \sin Y_2\}, \quad Y_1 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2}), \quad Y_2 \sim U[0; 2\pi].$$

Заметим, что случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  являются независимыми, так как их совместное распределение равно произведению их маргинальных распределений.

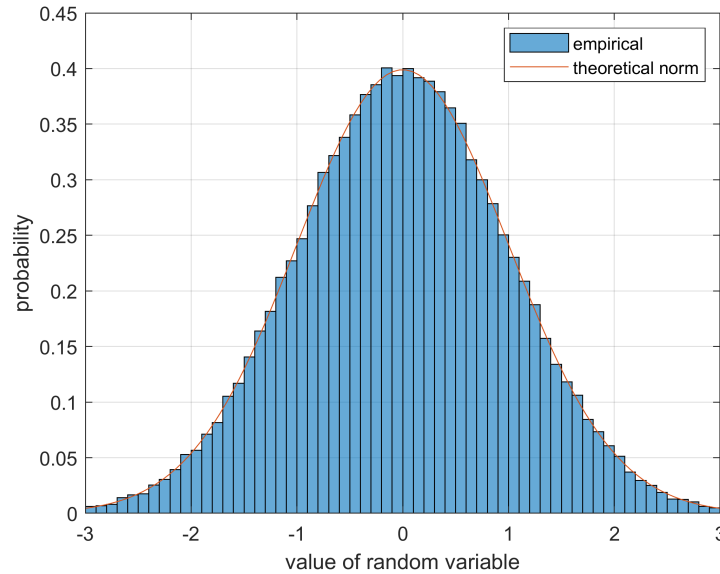


Рис. 15: Нормальное распределение, генерируемое с помощью перехода в полярные координаты.

Мы полагаем, что полученные выборки распределены нормально. Проверим, что математическое ожидание полученного нами распределения совпадает с нормальным, при помощи одновыборочного двустороннего критерия Стьюдента. Он применяется для проверки нулевой гипотезы о равенстве математического ожидания  $\mathbb{E}(X)$  некоторому известному значению  $m$ .

Для проверки построим статистику:

$$t = \frac{\bar{X} - m}{s_X / \sqrt{n}},$$

где  $s_X^2$  — несмещенная оценка дисперсии.

#### Принятие решения по критерию Стьюдента:

Если статистика  $t$  по абсолютному значению не превышает квантиль  $t(\alpha/2, n-1)$  распределения Стьюдента, то нулевая гипотеза  $H_0$  о равенстве математических ожиданий принимается на уровне  $\alpha$ . Иначе гипотеза отвергается.

$N$	частота принятия гипотезы
$10^2$	0.95
$10^3$	0.949
$10^4$	0.9506

Таблица 5: Проверка равенства математических ожиданий нормального и полученного распределений при размере выборки  $10^5$  и уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

Проверим, что дисперсии полученных нами распределений совпадают друг с другом, при помощи двустороннего критерия Фишера. Он применяется для проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий  $\text{Var}(X)$  и  $\text{Var}(Y)$  двух выборок из  $n$  и  $m$  элементов соответственно.



Для проверки построим статистику:

$$f = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2},$$

где  $\hat{\sigma}_Z^2$  — соответствующие выборочные дисперсии.

#### Принятие решения по критерию Фишера:

Если статистика  $f$  не превышает квантиль  $f(1 - \alpha/2, n - 1, m - 1)$  распределения Фишера и не меньше  $f(\alpha/2, n - 1, m - 1)$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  о равенстве дисперсий  $\text{Var}(X)$  и  $\text{Var}(Y)$  принимается на уровне  $\alpha$ . Иначе гипотеза отвергается.

$N$	частота принятия гипотезы
$10^2$	0.96
$10^3$	0.955
$10^4$	0.9499

Таблица 6: Проверка равенства математических ожиданий нормального и полученного распределений при размере выборки  $10^5$  и уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

## 4 Задание 4

### 4.1 Постановка задачи

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции `normal probability plot` убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

### 4.2 Решение задачи

#### 4.2.1 Пункт 1

**Определение 8.** *Случайная величина  $X$  имеет распределение Коши с параметрами  $a$  и  $b$ , если ее функция распределения имеет вид:*

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - a}{b}\right) + \frac{1}{2}.$$

Поскольку функция распределения  $F_X(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 2, воспользуемся этой теоремой для моделирования случайной величины с распределением Коши. Обратная функция равна:

$$F_X^{-1}(y) = a + b \tan\left(\pi \left(y - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Тогда по теореме 2 случайная величина  $X = F_X^{-1}(Y)$ , где  $Y \sim U[0; 1]$ , имеет распределение Коши.

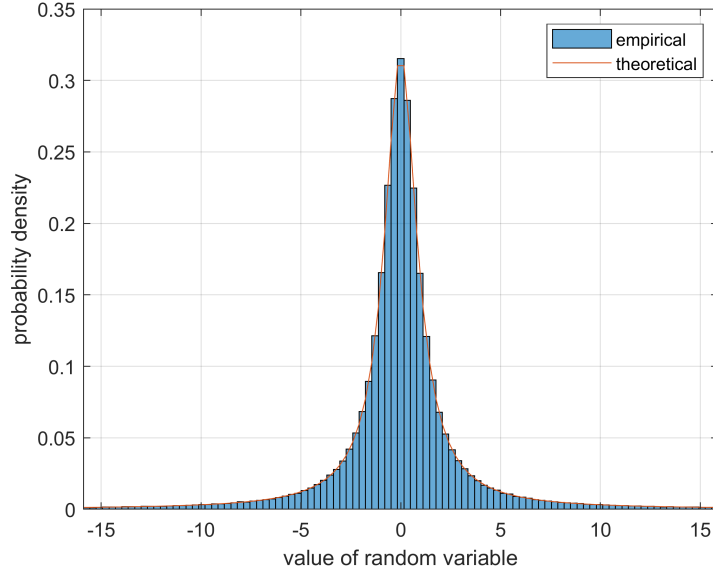


Рис. 16: Распределение Коши с параметрами  $a = 0, b = 1, n = 10^6$ .

#### 4.2.2 Пункт 2

Пусть имеется некоторое вещественное вероятностное пространство  $(E, \mathcal{E})$ , на котором заданы абсолютно непрерывные распределения  $\mathbb{P}$  и  $\mathbb{Q}$ . Пусть выполнено условие:

$$\exists k > 1 : \mathbb{Q}(A) \leq k\mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{E},$$

из которого следует, что  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ , т.е.  $\mathbb{Q}$  абсолютно непрерывно относительно  $\mathbb{P}$ . По теореме Радона-Никодима, отсюда также следует, что существует производная Радона-Никодима  $\gamma(x)$ :

$$\gamma(x) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq k,$$

где  $d\mathbb{Q}$  и  $d\mathbb{P}$  — плотности соответствующих распределений.

Предположим, что у нас есть датчик случайной величины  $X$  с распределением  $\mathbb{P}$  и выполнено условие выше. Будем моделировать  $\mathbb{Q}$ , следуя алгоритму метода исключения фон-Неймана:

1. Подбираем  $k > 1 : d\mathbb{Q}(x) \leq kd\mathbb{P}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,
2. Получим значение  $x$  случайной величины  $X$ ,
3. Получим значение  $y$  случайной величины  $Y(x) \sim \text{Bern}\left(\frac{d\mathbb{Q}(x)}{kd\mathbb{P}(x)}\right)$ ,
4. Если  $y = 1$ , то  $x$  из моделируемого распределения с плотностью  $d\mathbb{Q}(x)$ , иначе — возвращаемся к пункту 2.

Обоснуем изложенный алгоритм. Пусть  $\nu \sim \text{Bern}(\frac{1}{k})$ , тогда:

1.  $p(\nu = 1|X = x) := \frac{\gamma(x)}{k}$ , т.е. данная плотность соответствует  $\text{Bern}\left(\frac{dQ(x)}{kd\mathbb{P}_X(x)}\right)$ ,

2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in B|\nu = 1) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap \{\nu = 1\})}{\mathbb{P}(\nu = 1)} = \\ &= \left\{ \begin{aligned} \mathbb{P}(\{X \in B\} \cap \{\nu = 1\}) &= \int_B p(\nu = 1|X = x)\mathbb{P}_X(dx) = \\ &= \int_B \frac{\gamma(x)}{k}\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{k} \int_B \gamma(x)\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{k}Q(B) \end{aligned} \right\} = \frac{Q(B)}{k\mathbb{P}(\nu = 1)} = Q(B), \end{aligned}$$

что доказывает используемый метод.

Запишем плотность стандартного нормального распределения  $q(x)$  и плотность распределения Коши  $p(x)$ :

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ p(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Для данных распределений выполняются все условия метода исключения фон-Неймана, поэтому будем генерировать стандартное нормальное распределение с помощью распределения Коши  $K(0, 1)$ , а  $k$  положим равным  $k = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} > 1$ .

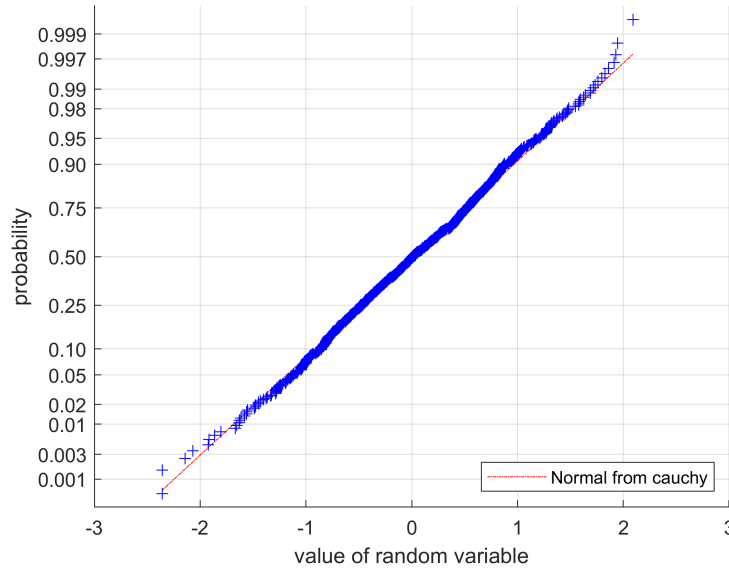


Рис. 17: Стандартное нормальное распределение, генерируемое методом фон-Неймана,  $n = 10^4$ .

Исследуем, как будут распределены с.в.  $Y = \mu + \sigma X$ , где  $X \sim N(0, 1)$ :

$$\varphi_{\mu+\sigma X}(t) = \mathbb{E} e^{it(\mu+\sigma x)} = \mathbb{E} e^{it\sigma x} e^{it\mu} = e^{it\mu} \varphi_X(\sigma t) = e^{it\mu} e^{\frac{t\sigma^2}{2}} = \varphi_Z(t),$$

где  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Соответственно, с.в.  $Y$  будет распределена нормально  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

На графике коэффициент  $\mu$  будет отвечать за сдвиг вдоль оси  $x$ , а коэффициент  $\sigma$  — за коэффициент наклона прямой (чем больше  $\sigma$ , тем более пологий график):

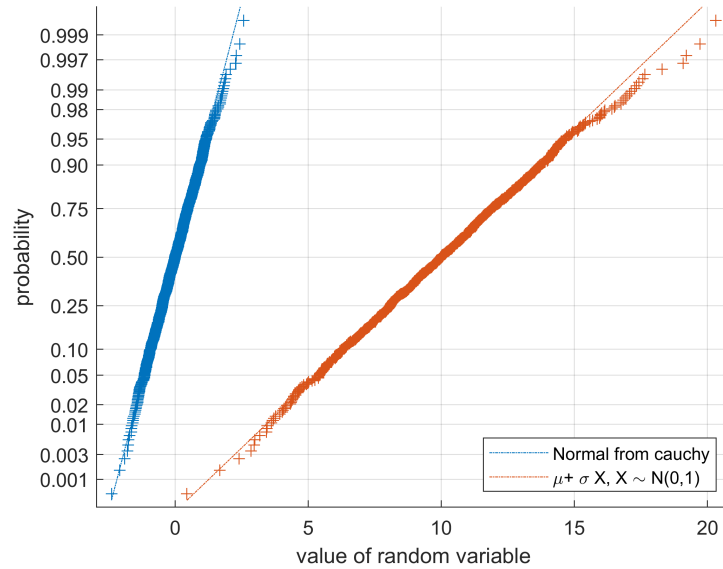


Рис. 18: Результат сдвига и сжатия с.в.  $X \sim N(0, 1)$ , полученной методом фон-Неймана. Параметры:  $\mu = 10, \sigma = 4, n = 10^4$ .

Функция, `normplot`, по-сути, строит линейную часть функции распределения нормального распределения, а форма функций распределения других распределений отличается от нормального. Например, для экспоненциального распределения, прямая на графике не получится:

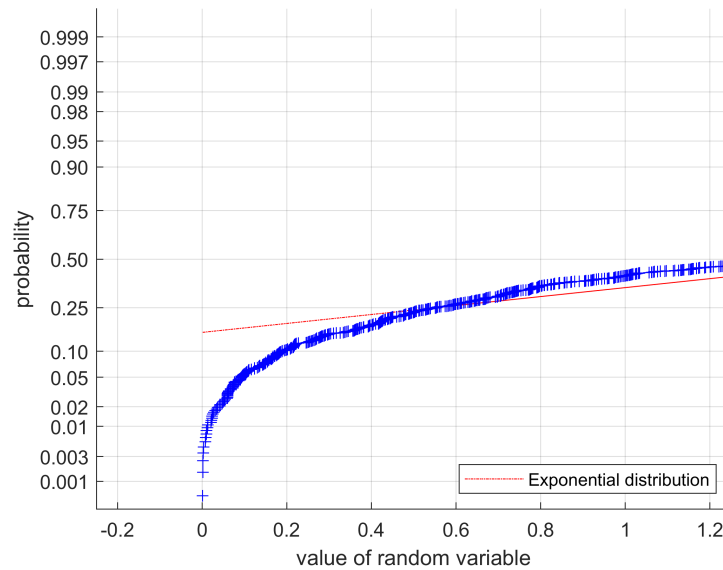


Рис. 19: Результат применения `normplot` к экспоненциальному распределению,  $n = 10^3$ .

### 4.2.3 Пункт 3

Сравним скорости моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4:

$N$	Newmann	Polar
10	0.0016919	0.00076547
$10^3$	0.00024191	0.00005675
$10^5$	0.013248	0.0036173
$10^7$	1.3195	0.42665

Таблица 7: Среднее время генерации  $N$  случайных величин при  $10^3$  тестах.

Как можем видеть, моделирование стандартно нормально рапределенных случайных величин методом фон-Неймана меделенее, чем моделирование парами.

## 5 Задание 5

### 5.1 Постановка задачи

1. Пусть  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Убедиться эмпирически в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, т.е. исследовать поведение суммы  $S_n$  и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - a \right).$$

2. Считая  $\mu$  и  $\sigma$  неизвестными для пункта 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.
3. Пусть  $X_i \sim K(a, b)$  имеет распределение Коши со сдвигом  $a$  и масштабом  $b$ . Проверить эмпирически, как ведут себя суммы  $S_n/n$ . Результат объяснить, а также найти закон распределения данных сумм.

### 5.2 Решение задачи

#### 5.2.1 Пункт 1

##### Теорема 5. ЗБЧ

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые случайные величины и дисперсия каждой из них существует и ограничена сверху некоторой константой:  $\forall i : 1 \leq i \leq n \exists \text{Var } X_i \leq C$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{\mathbb{E} X_1 + \dots + \mathbb{E} X_n}{n} \right| < \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

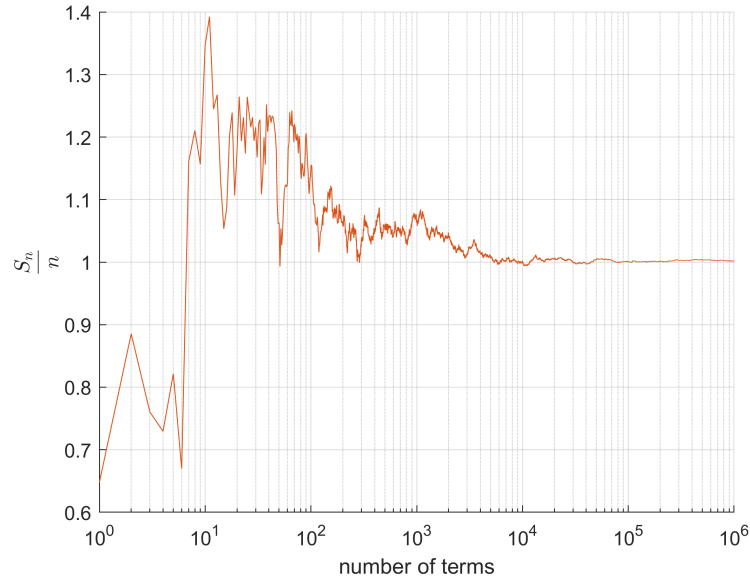


Рис. 20: Демонстрация ЗБЧ для выборки размером  $n = 10^6$  при  $\mu = 1$ .

### Теорема 6. ЦПТ

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — последовательность невырожденных н.о.р.с.в. с  $\mathbb{E} X_1^2 < \infty$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Тогда для  $\forall x \in \mathbb{R}$  имеем

$$\mathbb{P} \left( \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \leq x \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

В нашей формулировке при  $\mathbb{E} X_1 = a$ ,  $\text{Var} X_1 = \sigma^2$  это преобразуется в

$$\mathbb{P} \left( \sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - a \right) \leq x \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz.$$

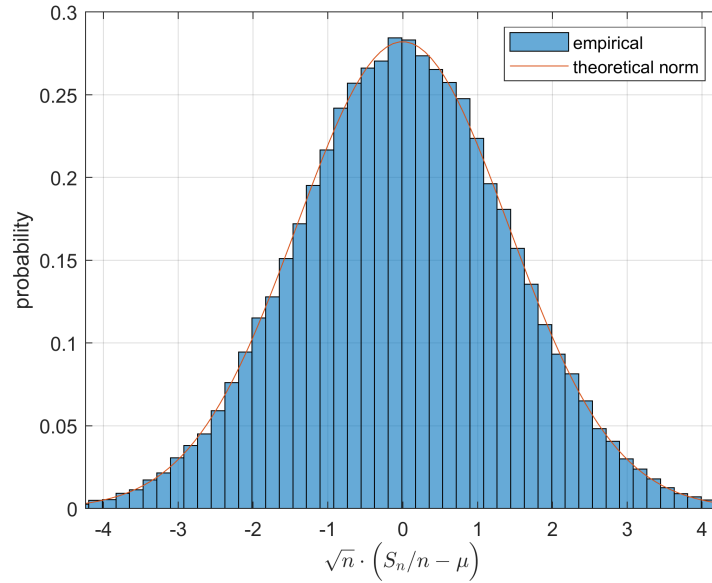


Рис. 21: Демонстрация ЦПТ для  $N = 10^5$  статистик на основе выборок размером  $n = 10^3$  при  $\mu = 1, \sigma^2 = 2$ .

#### 5.2.2 Пункт 2

Предположим, что наблюдается случайная величина  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , а  $(x_1, \dots, x_n)$  — ее реализация. Тогда получим доверительные интервалы вида:

$$\mu \in \left( \bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

$$\sigma^2 \in \left( \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} \right),$$

где  $\bar{x} = \sum_{k=1}^n (x_k/n)$  — выборочное среднее,  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  — выборочная дисперсия,

$t_{\beta, n-1}$  — квантиль распределения Стьюдента с  $n-1$  степенью свободы для уровня значимости  $\beta$ ,  $\chi_{\beta, n-1}^2$  —  $\beta$ -квантиль  $\chi^2$ -распределения с  $n-1$  степенью свободы.

Доказательства можно найти в [4].

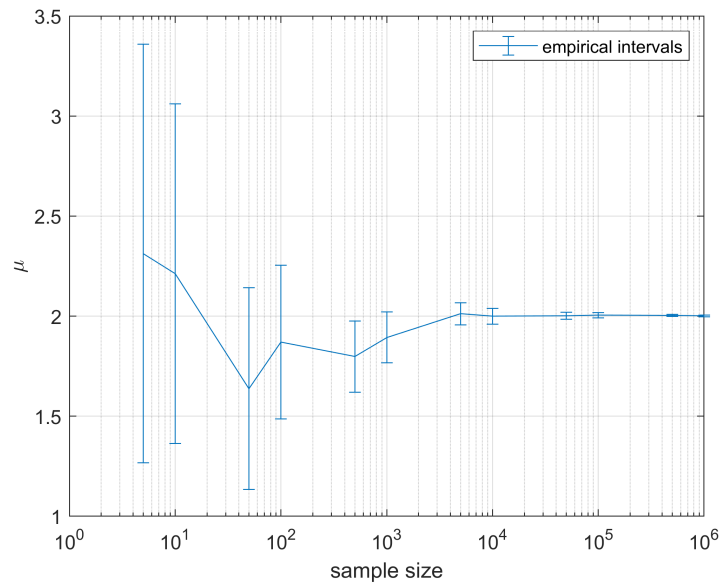


Рис. 22: Доверительные интервалы для  $\mu$  при  $n = 10^6$  при  $\mu = 2, \sigma^2 = 4$ .

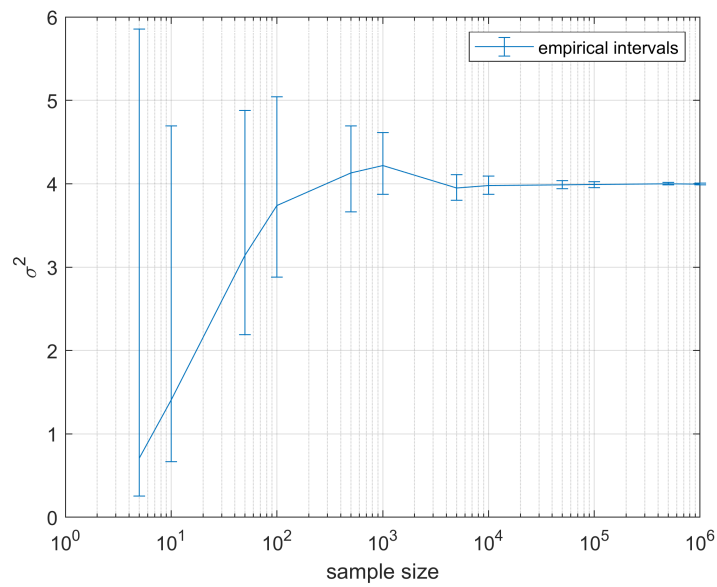


Рис. 23: Доверительные интервалы для  $\sigma$  при  $n = 10^6$  при  $\mu = 2, \sigma^2 = 4$ .



### 5.2.3 Пункт 3

Пусть  $X_i \sim K(a, b)$  имеет распределение Коши со сдвигом  $a$  и масштабом  $b$ . Найдём распределение  $S_n/n$  при помощи аппарата характеристических функций.

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} p(x) dx,$$

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{\pi b \left[1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]} dx \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp(iat - b|t|).$$

Вспомним некоторые свойства характеристических функций:

- Для независимых случайных величин  $X_1, \dots, X_n$  верно:  $\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)$ ,
- $\varphi_{aX+b} = e^{itb} \varphi_X(at)$ .

Исходя из этого получим:

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \exp(iat - b|t|) = \exp(iant - bn|t|),$$

$$\varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{S_n}(t/n) = \exp(iat - b|t|),$$

что совпадает с исходным распределением Коши.

Как мы можем наблюдать, распределения действительно совпали:

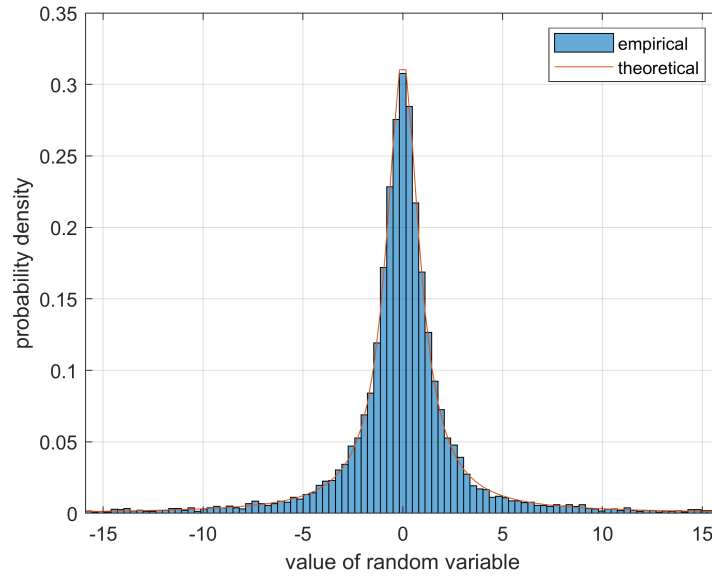


Рис. 24: Распределение  $n = 10^5$  искомых «сумм», составленных из  $10^3$  с.в., при  $a = 0, b = 1$ .

У распределения Коши не существует математического ожидания, поэтому не выполняются условия теоремы 5 и суммы  $S_n/n$  ведут себя хаотично. Это видно на рисунке ниже:

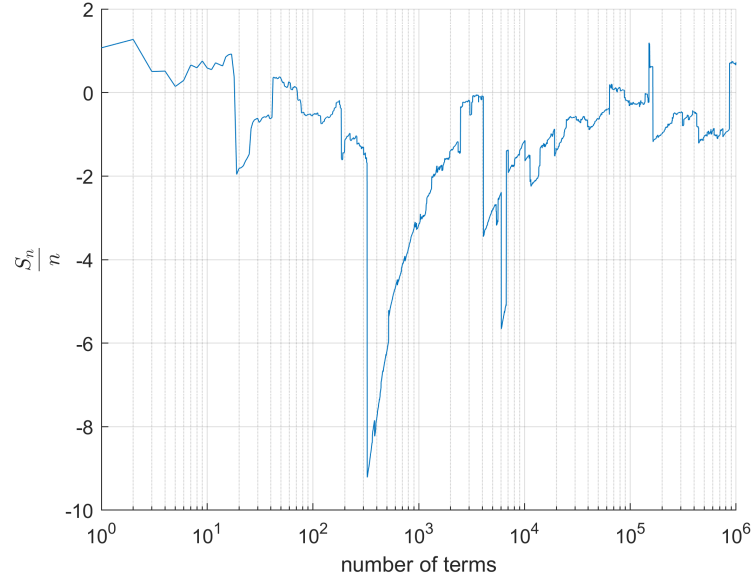


Рис. 25: Демонстрация ЗБЧ для распределения Коши размером  $n = 10^5$  при  $a = 0, b = 1$ .

## 6 Задание 6

### 6.1 Постановка задачи

1. Посчитать интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}$$

- (a) методом Монте-Карло
- (b) методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана

2. Для каждого оценить погрешность вычислений.

### 6.2 Решение задачи

#### 6.2.1 Пункт 1

Перепишем исходный интеграл в виде:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_{10}) g(x_1, x_2, \dots, x_{10}) dx_1 dx_2 \dots dx_{10},$$

где

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = \pi^5 \frac{e^{-\frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}, \quad g(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = \frac{1}{\pi^5} e^{-(x_1^2 + \dots + x_{10}^2)}.$$

Легко заметить, что функции  $g(x)$  является совместной плотностью набора независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами 0 и 1/2. Таким образом, можно переписать исходный интеграл в виде:

$$I = \mathbb{E}[f(x_1, x_2, \dots, x_{10})], \quad x_i \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

В силу ЗБЧ выборочное среднее будет стремиться к математическому ожиданию:

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{10}^k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{10}^1)], \quad x_i^k \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Оценим погрешность метода Монте-Карло при помощи ЦПТ:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| < \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - In}{n}\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - In}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon < \frac{S_n - In}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) - 1, \end{aligned}$$

где  $\Phi(x)$  — функция распределения стандартного нормального распределения. Воспользовавшись таблицей квантилей и полученного квантиля  $z_\alpha$  получим:

$$\varepsilon = \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}.$$

Так как точное значение  $\sigma$  неизвестно, будем пользоваться выборочной дисперсией:

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(\hat{x}_i)\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i)\right)^2$$

$N$	Значение интеграла	Погрешность, %	Время работы
$10^5$	123.14	0.074	0.017
$10^6$	125.1903	0.0234	0.1761
$10^7$	125.011	0.0074	1.7316
$10^8$	124.7931	0.0024	17.2832

Таблица 8: Таблица значений интеграла, посчитанного методом Монте-Карло.

### 6.2.2 Пункт 2

Для подсчета интергала  $I$  методом квадратур сделаем замену:

$$x_i = \text{tg}\left[\frac{\pi}{2}t_i\right].$$

Исходный интеграл примет следующий вид:

$$I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{\exp \left\{ - \left( \sum_{k=1}^{10} \operatorname{tg}^2 \left[ \frac{\pi}{2} t_k \right] + \frac{1}{2^7 \cdot \prod_{k=1}^{10} \operatorname{tg}^2 \left[ \frac{\pi}{2} t_k \right]} \right) \right\}}{\prod_{k=1}^{10} \operatorname{tg}^2 \left[ \frac{\pi}{2} t_k \right] \cdot \prod_{k=1}^{10} \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2} t_k \right]} dt_1 \dots dt_{10}.$$

Воспользуемся методом прямоугольников. Для этого равномерно разобьем отрезок  $[-1; 1]$  на  $N$  частей и будем считать величину :

$$I_N = \frac{1}{N^{10}} \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_{10}=1}^N f \left( \frac{2}{N} k_1 - 1, \dots, \frac{2}{N} k_{10} - 1 \right).$$

Погрешность метода прямоугольников на равномерной сетке составляет:

$$\varepsilon = \frac{\max |f''(\xi)|}{24} (1+1)h^2,$$

где  $h$  — диаметр разбиения. В нашем случае:

$$\varepsilon = \frac{h^2}{12} \sum_{i,j=1}^{10} \max |f''_{x_i x_j}|, \quad h = \frac{2}{N}.$$

Если внимательно посмотреть на интегрируемую функцию можно заметить, что она **«очень сильно симметричная»**.

1. Функция зависит от только от значений  $x_k^2$ .

Это значит, что нам достаточно будет просчитать только те точки, которые находятся в области, где  $x_k > 0 \forall k = 1, [N/2]$ . Пусть  $[N/2] = L$ . Обозначим значение интеграла по этой области за  $I_+$ . Тогда значение исходного интеграла  $I$  будет равно  $I = 2^{10} I_+$ .

Далее будем рассматривать только  $k : x_i^k > 0$ .

2. Функция симметрична по любой паре переменных.

Это значит, что если мы поменяем местами  $x_{k_1}$  и  $x_{k_2}$  в аргументах функции, то значение самой функции у нас никак не поменяется. По-сути, перед нами встает задача просчета функции только в тех точках, значение функции в которых уникально. После этого мы домножим это значение на количество «эквивалентных» точек.

Для начала поймем, как нам выделить «уникальные» точки.

Идея заключается в том, что там необходимо подходящий положительный ортант в  $\mathbb{R}^n$  рас-сечь с помощью элементарных плоскостей симметрии {например  $x_1 = x_2$ , т.к.  $f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_2, x_1, \dots x_n)$ }. Тогда, выбрав одну из элементарных полученных фигур, мы получим все «уни-кальную область», т.е. не будет существовать значений функции, отличных от тех, что были получены в этой области.

Проще всего это рассуждение представить в  $\mathbb{R}^3$ . В нем таким уникальным множеством будет пирамида с вершинами, например,  $(0,0,0)$ ,  $(L,0,0)$ ,  $(L,L,0)$ ,  $(L,L,L)$ .

Опишем алгоритм перебора точек в уникальной области.  
Представим себе матрицу  $A$  размером  $10 \times L$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,L} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10,1} & a_{10,2} & \dots & a_{10,L} \end{pmatrix}$$

Логично, что можно сделать просто 10 вложенных for от 1 до L, но мы сделаем чуть- чуть по -другому.

Допустим, мы находимся в  $i$ -ой строке, т.е. в  $i$ -том вложенном for. Пусть мы начнем перебор с  $j_0^i$ -ого столбца, т.е. далее в ходе «перебора вглубь» из  $i$ -ой строки будут использоваться только числа больше  $j_0^i$ . Алгоритм выделения уникальных наборов из 10 чисел заключается в том, что в каждой следующей строке перебора мы будем брать  $j_0^{i+1} \geq j_0^i$ . Это логично, поскольку в противном случае перебрав один раз пару  $(\dots, x_i^j, x_{i+1}^{j+1}, \dots)$  нам не имеет смысла перебирать пару  $(\dots, x_i^{j+1}, x_{i+1}^j, \dots)$ , потому что значения функции на них совпадают.

Идейно это можно объяснить так, что с увеличением каждого предыдущего индекса, размер «уникального подпространства» для конкретного среза уменьшается. Можно проиллюстрировать эту трактовку для размерностей 2,3,4 и небольшого  $L$ .

В связи с таким подходом, нам нужно понять какое количество точек эквивалентно каждой уникальной точке. Пусть вектор из 10 чисел состоит из  $m$  разных чисел, каждое из которых встречается  $k_i$  раз. Тогда количество эквивалентных точек равно:

$$n_{reps} = \frac{10!}{k_1! \dots k_m!}.$$

Псевдокод функции:

```
for  $i_1 = 1:10$ 
  for  $i_2 = i_1:10$ 
    ...
     $f_{unique} = f(i_1, \dots, i_{10}); \{ \text{нашли уникальное значение функции} \}$ 
     $f_{sim} = 2^{10} * n_{reps} * f_{unique}; \{ \text{сумма значений функции во всех симметричных точках} \}$ 
    ...
  end
end
end
```

$N$	Значение интеграла	Время работы
20	124.704	0.51648
32	124.8081	13.6501
<b>40</b>	124.8003	83.5463
<b>50</b>	124.8052	535.404
<b>60</b>	124.812	2675.4143

Таблица 9: Таблица значений интеграла, посчитанного методом квадратур.

В коде также реализован механизм уменьшения количества «холостых» проходов при малых номерах точек. «Холостой» проход — это такой проход, когда Matlab получает в качестве значения функции настолько маленькое число, что кладет его равным точному нулю. Критическое значение в моем случае  $eps \approx 10^{-800}$ .

## 7 Библиография

### Список литературы

- [1] С. Н. Смирнов *Лекции по стохастическому анализу*, 2019.
- [2] В. Феллер *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, том 1. М: Мир, 1984.
- [3] Н. Ю. Кропачева, А. С. Тихомиров *Моделирование случайных величин*. Издательство Новгородского Государственного Университета, 2004.
- [4] Л. Н. Фадеева, А. В. Лебедев *Теория вероятностей и математическая статистика*. М.: Эксмо, 2010.